纯粹数学与应用数学专著　第[illegible]号

半鞅与随机分析

何声武　汪嘉冈　严加安　著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第30号

半鞅与随机分析

何声武　汪嘉冈　严加安　著

科　学　出　版　社

1995

（京）新登字092号

内 容 简 介

本书全面系统地介绍了半鞅与随机分析的基本理论及其应用．全书共分十六章．主要内容包括经典鞅论．随机过程一般理论．半鞅与随机分析的基础理论．随机积分和有关论题．本书讨论了 $\mathscr{H}^p$-鞅和 $\mathscr{BMO}$-鞅并建立了一系列重要的鞅不等式；引进了半鞅的可料特征及半鞅的积分表示；介绍了随机分析的一个重要技巧——测度变换；讨论了鞅的可料积分表示；研究了测度的绝对连续性、奇异性、近邻性和完全可分离性以及测度的依变差收敛．半鞅的弱收敛理论等．本书特别介绍了随机分析对 Levy 过程及跳跃过程的应用．

本书可供大学数学系研究生、教师、概率论研究工作者阅读．

纯粹数学与应用数学专著　第30号

半鞅与随机分析

何声武　汪嘉冈　严加安 著

责任编辑 [illegible]

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号 [illegible]

邮政编码：100717

新世纪印刷厂印刷

北京市蓝地公司激光照排

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1995年6月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1995年6月第一次印刷　印张：38¾ 插页：2

印数：1—1400　字数：187 000

ISBN 7-03-004514-9/O·779

定价：36.00元

前　言

半鞅是可以合理定义随机积分的最大被积过程类. 基于半鞅的随机分析是现代概率论的一个主要分支. 它不仅是研究概率论的许多分支（马氏过程与扩散过程、随机点过程、随机过程统计、随机滤波与控制等）的重要工具，而且在许多数学分支（偏微分方程、调和分析、微分几何等）及数学物理中有广泛应用. 它还逐步渗透到工程数学、生物数学、金融数学及其它领域之中. 近年来，国际及国内有多部有关随机分析的专著问世，但多数著作强调某个论题，无一著作对半鞅理论展开充分讨论. 本书旨在系统和全面地介绍半鞅和随机分析的基础理论及其若干应用. 我们希望本书不仅可作为概率论工作者、统计工作者及工程师的参考书，其主要部分还可用作研究生教材. 为此，我们对本书的取材作了精心挑选. 我们以问题的形式对正文进行补充和扩展. 事实上，许多问题可作为练习来做. 通过做练习读者可以加深对正文的理解并拓宽思路. 有些问题是相当难的，它们只是作为对正文的补充.

全书由十六章组成. 前十章是在作者之一（严加安）于 1981 年出版的《鞅与随机积分引论》一书的基础上进行精心加工改写而成的. 后六章反映了半鞅及随机分析理论在 80 年代的新进展. 当然，取材是部分地受到作者研究兴趣的影响的. 下面是全书内容的概要. 第一章提供了阅读本书所必须具备的预备知识，其中有些内容在有关测度论或概率论的一般著作中是难于找到的. 第二章包含了经典鞅论的主要结果. 第三至五章致力于介绍通常所说的"随机过程一般理论". 这一理论不仅是半鞅与随机分析的重要基础，而且对研究许多特殊类型的随机过程（如马氏过程及点

过程）也是不可缺少的．从第六章起介绍半鞅与随机分析的基础理论．第六章讨论两类重要的一致可积鞅：可积变差鞅和平方可积鞅．在第七章引进局部鞅并给出它的跳过程的刻画．半鞅和拟鞅以及它们的基本性质是放在第八章讨论的．第九章介绍随机积分和有关论题，它无疑是全书的中心点．该章包含了随机分析的基本要素，如Itô 公式、Doléans-Dade 指数公式，Lenglart 不等式及局部时．对随机微分方程也作了简短的介绍．尽管随机微分方程是随机分析的一个重要论题，但因篇幅所限本书未能对它展开充分的讨论，好在已有不少这方面的专著可供读者参考．第十章讨论 $\mathscr{H}^1$-鞅和 $\mathscr{BMO}$-鞅并建立一系列主要的鞅不等式．在第十一章中，引进了半鞅的可料特征及半鞅的积分表示．这是对有关独立增量过程的经典结果的推广．在第十二章中介绍的测度变换是随机分析的一个重要技巧．在该章还给出了半鞅作为唯一的合理被积过程类的刻画．第十三章介绍了鞅的可料积分表示，它在滤波等问题中有应用．第十四章研究测度的绝对连续性、奇异性、近邻性和完全可分离性以及测度的依变差收敛．这些问题是从60年代开始被研究的．用半鞅方法最终给出了它们的完满解决．第十六章研究半鞅的弱收敛理论，有关随机过程弱收敛理论的预备知识在第十五章中给出．随机分析不仅提供了研究随机过程弱收敛的全新的方法，而且给出了更精细的结果．全书对在应用概率及统计中经常遇到的两类过程——独立增量过程及跳跃过程给予了特别的重视．

本书的读者需要预先掌握测度论及高等概率论的基础知识，但不需要对随机过程有专门的了解．熟悉随机过程的主要概念和直观背景对阅读本书当然是有帮助的．至今已有许多著作是有关半鞅及随机分析的．我们将不在参考文献中列出所有有关的文献，也不在书末作历史性评注．有关这方面的内容，读者可参看C. Dellacherie 和 P. A. Meyer 的多卷著作《概率与位势》（Probabilités et Potentiel）以及 J. Jacod 和 A. N. Shiryaev 的《随机过程的极限定理》（Limit Theorems for Stochastic Processes）．

我们非常感激P. A. Meyer教授，他把作者引向了半鞅和随机分析领域，并给予经常不断的热情帮助和鼓励. 我们还感谢那些对我们研究工作给予有益的建议和帮助的同行，其中特别要提出的有J. Azéma、陈培德、周青松、C. Dellacherie、M. Emery、龚光鲁、黄志远、J. Jacod、马志明、潘一民、P. Protter、C. Stricker、王存仁、Ch. Yoeurp、M. Yor和郑伟安. 本书许多章节在最近10年中由作者多次讲授过. 我们要感谢听众对改进书的内容所作的贡献. 本书的写作和出版得到了中国国家自然科学基金及中国科学院科学出版基金的资助，特此表示感谢.

本书英文版已于1992年由美国CRC出版公司和科学出版社联合出版发行.

何声武　汪嘉冈　严加安

1992年7月

目　录

第一章　预备知识

我们要求本书读者预先掌握 Loève[1]或 Neveu[1]中有关测度论与概率论的基础知识. 如测度扩张定理、Radon-Nikodym 定理、控制收敛定理、Fatou 引理、L^p 空间、Hölder 不等式、条件数学期望、Jensen 不等式、条件独立性、乘积概率空间、Fubini 定理等. 本章旨在给出阅读本书所必需的若干补充知识.

在本书中将使用下列常用记号.

$\boldsymbol{N}$=非负整数全体.

$\bar{\boldsymbol{N}}=\boldsymbol{N}\cup\{+\infty\}$.

$\boldsymbol{R}=]-\infty,+\infty[$[1](实直线).

$\boldsymbol{R}_+=[0,\infty[$.

$\overline{\boldsymbol{R}}=[-\infty,+\infty]$.

$\bar{\boldsymbol{R}}_+=[0,+\infty]$.

$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{Q}_+)=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}_+)$中有理数全体.

$\mathscr{B}(\boldsymbol{R})(\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+))=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}_+)$上的 Borel σ-域.

设 Ω 为一集合, 一个从 Ω 到 $\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{R}})$中的映象叫做一个 Ω 上的实值(数值)函数. 当限于在 Ω 中讨论时, 一个集合总是指 Ω 的一个子集. 集合 A 与 B 的并与交分别记为 $A\cup B$ 与 $A\cap B$(或简记为 AB). A 的余集记为 A^c. $A\backslash B=AB^c$ 是 A 与 B 之差. $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$是 A 与 B 的对称差, 空集记为$\varnothing$. 集合 A 的示性函数记为 I_A:

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\in A^c.\end{cases}$$

Ω 中具有性质 P 的元素 ω 的集合记为 $\{\omega\in\Omega;P(\omega)\}$, 或

---

1) $]a,b[=(a,b)$, $]a,b]=(a,b]$, $[a,b[=[a,b)$, $-\infty\le a<b\le+\infty$.

$\{\omega;P(\omega)\}$，或简记为$[P]$. 如果不引起混淆，例如，设 f 与 g 为 Ω 上的两个数值函数，我们用$[f\geqslant g]$表示$\{\omega\in\Omega;f(\omega)\geqslant g(\omega)\}$. 设$(A_n)$为集合序列. $A_n\uparrow A$ 表示(A_n)为单调增且 $A=\bigcup_n A_n$. 相应地，$A_n\downarrow A$ 表示(A_n)为单调减且 $A=\bigcap_n A_n$. (A_n)的上极限记为 $\overline{\lim}_n A_n$ 或$[A_n \text{ i.o.}]$，(A_n)的下极限记为$\underline{\lim}_n A_n$. 若 $\overline{\lim}_n A_n=\underline{\lim}_n A_n$，则此集合为$(A_n)$的极限，记作 $\lim_n A_n$.

Ω 的一族子集称为 Ω 上的一个类. 设 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个类，$A\subset\Omega$，我们用 $\mathscr{F}\cap A$ 表示$\{B\cap A;B\in\mathscr{F}\}$. 定义

$$\mathscr{F}_\sigma=\{\bigcup_n A_n;A_n\in\mathscr{F}\},\ \mathscr{F}_\delta=\{\bigcap_n A_n;A_n\in\mathscr{F}\}.$$

它们分别是包含 $\mathscr{F}$ 且对可列并或可列交封闭的最小类.

设 $\mathscr{C}$ 为 Ω 上的一个类，我们用 $\sigma(\mathscr{C})$表示由 $\mathscr{C}$ 生成的 Ω 上的 σ-域，即包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ-域. 设$(\mathscr{G}_i)_{i\in I}$为一族 Ω 上的类，我们令 $\sigma(\mathscr{G}_i,i\in I)=\sigma(\bigcup_{i\in I}\mathscr{G}_i)$.

设$(E,\mathscr{E})$为一可测空间，f 为 Ω 到 E 中的映象，我们用$\sigma(f)$表示 f 在 Ω 上诱导出的 σ-域 $f^{-1}(\mathscr{E})=\{f^{-1}(A);A\in\mathscr{E}\}$. 设 g 为 E 上的一个数值函数，我们用 $g\in\mathscr{E}(\mathscr{E}^+,b\mathscr{E},b\mathscr{E}^+)$表示 g 是(非负，有界，非负有界的)$\mathscr{E}$-可测函数.

设$(E_i,\mathscr{E}_i)_{i\in I}$为一族可测空间，对每个 $i\in I$，f_i 是 Ω 到 E_i 中的映象，我们用$\sigma(f_i,i\in I)$表示 $\sigma(\sigma(f_i),i\in I)$.

设 $\mathscr{F}_i$ 为 Ω_i 上的类，$i=1,2$. 定义

$$\mathscr{F}_1\otimes\mathscr{F}_2=\{A\times B;\ A\in\mathscr{F}_1,B\in\mathscr{F}_2\}.$$

设 $A\subset\Omega_1\times\Omega_2$，$A$ 到 Ω_1 上的投影定义为

$$\pi_1(A)=\{\omega_1\in\Omega_1;\exists\ \omega_2\in\Omega_2 \text{ 使得}(\omega_1,\omega_2)\in A\}.$$

若$(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$，$i=1,2$，为两个可测空间，$\mathscr{F}_1$ 与 $\mathscr{F}_2$ 的乘积 σ-域记为 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2=\sigma(\mathscr{F}_1\otimes\mathscr{F}_2)$.

设 f 与 g 为两个数值函数，$f\vee g$ 表示 $\sup(f,g)$，$f\wedge g$ 表示 $\inf(f,g)$. 于是 $f^+=f\vee 0$，$f^-=(-f)\vee 0=-(f\wedge 0)$. 更一般地，$\vee$ 与 $\wedge$ 分别表示上确界与下确界. 例如，设$(f_n)_{n\in N}$为一列数值函数，令 $\vee_n f_n=\sup_n f_n$，$\wedge_n f_n=\inf_n f_n$. 又如，设$(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$为一族 Ω 上

的σ-域. 令$\bigvee_{i\in I}\mathscr{F}_i=\sigma(\bigcup_{i\in I}\mathscr{F}_i)$, $\bigwedge_{i\in I}\mathscr{F}_i=\bigcap_{i\in I}\mathscr{F}_i$.

在实直线$\boldsymbol{R}$上, $s\uparrow t$表示$s\to t$, $s\leqslant t$; $s\uparrow\uparrow t$表示$s\to t$, $s<t$. 设(s_n)为实数列, 则$s_n\uparrow t$, $s_n\uparrow\uparrow t$还进一步意味着(s_n)为增序列. 对$\downarrow$, $\downarrow\downarrow$有类似的说明. 设(f_n)为一列数值函数, $f_n\uparrow f(f_n\downarrow f)$表示$(f_n)$为单调增(单调减), 且$f=\lim_n f_n$.

一般地, $(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$表示一个概率空间. 一个随机变量$\xi$的数学期望记为$\boldsymbol{E}[\xi]$, 如果它有意义. $L^p(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$, $p\geqslant 1$, 表示p次可积随机变量全体组成的Banach空间, 其范数记为$\|\xi\|_p=(\boldsymbol{E}|\xi|^p)^{1/p}$.

§1. 单调类定理

1.1 定义 令Ω为一集合, $\mathscr{C}$为Ω上的一个类. 称$\mathscr{C}$为**π-类**, 如果$A,B\in\mathscr{C}\Rightarrow AB\in\mathscr{C}$. $\mathscr{C}$称为**λ-类**, 如果

i) $\Omega\in\mathscr{C}$;

ii) $A,B\in\mathscr{C}$, $A\subset B\Rightarrow B\backslash A\in\mathscr{C}$;

iii) $A_n\in\mathscr{C}$, $A_n\uparrow A\Rightarrow A\in\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$称为**单调类**, 如果$A_n\in\mathscr{C}$, $A_n\uparrow A$或$A_n\downarrow A\Rightarrow A\in\mathscr{C}$.

显然, 如果$\mathscr{C}$同时为π-类和λ-类, 或同时为域和单调类, 则$\mathscr{C}$为σ-域.

下一定理是**集合形式的单调类定理**.

1.2 定理 设$\mathscr{C}$, $\mathscr{F}$为Ω的两个类, 且$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$.

1) 若$\mathscr{F}$为λ类, $\mathscr{C}$为π-类, 则$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$;

2) 若$\mathscr{F}$为单调类, $\mathscr{C}$为域, 则$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$.

证明 1) 一切包含$\mathscr{C}$的λ-类之交$\mathscr{F}'$仍是λ-类(称为$\mathscr{C}$产生的λ-类). 令

$$\mathscr{F}_1=\{B\in\mathscr{F}':\forall A\in\mathscr{C}, B\cap A\in\mathscr{F}'\}.$$

显然, $\mathscr{F}_1$是λ-类, 且$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}_1$, 故$\mathscr{F}'=\mathscr{F}_1$. 令

$$\mathscr{F}_2=\{B\in\mathscr{F}':\forall A\in\mathscr{F}', B\cap A\in\mathscr{F}'\}.$$

显然, $\mathscr{F}_2$是λ-类, 且$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}_2$, 故$\mathscr{F}'=\mathscr{F}_2$. 这表明$\mathscr{F}'$是$\pi$-类, 于

是 $\mathscr{F}'$ 是 σ-域，我们有 $\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$.

2) 一切包含 $\mathscr{C}$ 的单调类之交 $\mathscr{F}'$ 仍是单调类（称为 $\mathscr{C}$ 产生的单调类）. 与 1) 的证明类似，可证 $\mathscr{F}'$ 是 π-类. 令

$$\mathscr{F}'' = \{B \in \mathscr{F}' ; B^c \in \mathscr{F}'\},$$

则 $\mathscr{F}''$ 是单调类，且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}''$，故 $\mathscr{F}''=\mathscr{F}'$. 这表明 $\mathscr{F}'$ 是域，于是 $\mathscr{F}'$ 是 σ-域. 我们有 $\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$. □

作为定理 1.2 的一个简单应用，我们有

1.3 系 1) 令 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一概率空间，ξ 与 η 为两个可积随机变量. 设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$，$\mathscr{C}$ 为一 π-类. 如果 $\boldsymbol{E}[\xi]=\boldsymbol{E}[\eta]$，且对一切 $A\in\mathscr{C}$，有 $\boldsymbol{E}[\xi I_A]=\boldsymbol{E}[\eta I_A]$，则

$$\boldsymbol{E}[\xi|\sigma(\mathscr{C})]=\boldsymbol{E}[\eta|\sigma(\mathscr{C})], \text{a.s.} \tag{3.1}$$

2) 令 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为一可测空间，$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$，$\mathscr{C}$ 为一 π-类，设 μ 与 ν 为两个有界符号测度，使得 $\mu(\Omega)=\nu(\Omega)$，且对一切 $A\in\mathscr{C}$，有 $\mu(A)=\nu(A)$，则限于 $\sigma(\mathscr{C})$，μ 与 ν 一致.

证明 我们只证 1)，2) 的证明类似. 令

$$\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{F} ; \boldsymbol{E}[\xi I_A] = \boldsymbol{E}[\eta I_A]\},$$

则 $\mathscr{G}$ 为 λ-类，且由假定，$\mathscr{C}\subset\mathscr{G}$. 故由定理 1.2.1)，$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{G}$，由此推得 (3.1). □

下一定理是与定理 1.2.1) 相应的**函数形式的单调类定理**. 我们今后将经常用到它.

1.4 定理 令 $\mathscr{C}$ 为集合 Ω 上的一 π-类，$\mathscr{H}$ 为 Ω 上的一实值函数的线性空间. 如果 $\mathscr{H}$ 满足下列条件：

i) $1\in\mathscr{H}$；

ii) $f_n\in\mathscr{H}$，$0\leqslant f_n\uparrow f$，f 有限（相应地，有界）$\Rightarrow f\in\mathscr{H}$；

iii) $A\in\mathscr{C}\Rightarrow I_A\in\mathscr{H}$.

则 $\mathscr{H}$ 包含 Ω 上一切 $\sigma(\mathscr{C})$-可测的实值（相应地，有界）函数.

证明 令 $\mathscr{F}=\{A\subset\Omega ; I_A\in\mathscr{H}\}$，则易知 $\mathscr{F}$ 为 λ-类. 依假定，$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$，故由定理 1.2.1)，$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$.

设 ξ 为一 $\sigma(\mathscr{C})$-可测实值（相应地，有界）函数. 令

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} I_{[k/2^n \leqslant \xi < (k+1)/2^n]},$$

则 $\xi_n \in \mathscr{H}$，$0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi^+$. 故由条件 ii)，$\xi^+ \in \mathscr{H}$. 同理，$\xi^- \in \mathscr{H}$，从而 $\xi = \xi^+ - \xi^- \in \mathscr{H}$. □

应用单调类定理是我们最常用的技巧之一，读者应熟练地掌握它. 一般地，有关如何应用单调类定理的细节都将被省略. 作为一个应用的实例，我们用定理 1.4 证明 $\sigma(f)$ 可测函数的一个刻画. 这个刻画在概率论中十分有用，称为 **Doob 可测性定理**.

1.5 定理 设 f 为 Ω 到一可测空间 $(E, \mathscr{E})$ 中的映象，φ 为 Ω 上的一数值函数. 为要 φ 是 $\sigma(f)$-可测的，必须且只需存在 E 上一 $\mathscr{E}$-可测的数值函数 h，使得 $\varphi = h \circ f$（即 $\varphi(\omega) = h(f(\omega))$）. 如果 φ 是实值（有界）的，则可要求 h 也是实值（有界）的.

证明 充分性显然，往证必要性. 令

$$\mathscr{H} = \{h \circ f : h \text{ 为 } E \text{ 上 } \mathscr{E}\text{-可测实值函数}\},$$

则 $\mathscr{H}$ 为线性空间，且 $1 \in \mathscr{H}$. 设 $h_n \circ f \in \mathscr{H}$，$0 \leqslant h_n \circ f \uparrow \Psi$，且 Ψ 有限. 令

$$A = \{x \in E : \sup_n h_n(x) < \infty\},$$

则 $A \in \mathscr{E}$，且 $f(\Omega) \subset A$. 置

$$h(x) = \begin{cases} \sup_n h_n(x), & x \in A, \\ 0, & x \in A^c, \end{cases}$$

则 h 为 E 上 $\mathscr{E}$-可测实值函数，且 $\Psi = h \circ f$，故 $\Psi \in \mathscr{H}$. 于是 $\mathscr{H}$ 满足定理 1.4 的条件 ii). 设 $D \in \sigma(f)$，则存在某个 $B \in \mathscr{E}$，使得 $D = f^{-1}(B)$，故 $I_D = I_B \circ f \in \mathscr{H}$. 于是由定理 1.4，$\mathscr{H}$ 包含一切 $\sigma(f)$ 可测实值函数. 这表明，若 φ 为 $\sigma(f)$-可测实值函数，则存在 E 上一 $\mathscr{E}$-可测实值函数 h，使得 $\varphi = h \circ f$. 若进一步，φ 有界，例如 $|\varphi| \leqslant C$，令 $h' = h^+ \wedge C - h^- \wedge C$，则 $\varphi = h' \circ f$.

现设 φ 为 $\sigma(f)$-可测数值函数，则 $\varphi' = \operatorname{arctg}\varphi$ 为 $\sigma(f)$-可测实值函数，且 $|\varphi'| \leqslant \frac{\pi}{2}$，于是存在 E 上一 $\mathscr{E}$-可测实值函数 h'，使得 $\varphi' = h' \circ f$. 令 $h = \operatorname{tg} h'$，则 h 为 E 上 $\mathscr{E}$-可测数值函数，且有

$\varphi = h \circ f$. □

§2. 一致可积性

1.6 定义 设$(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \boldsymbol{P}_i)$, $i \in I$, 为一族概率空间，$\xi_i \in L^1(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \boldsymbol{P}_i)$, $i \in I$. $\mathscr{H} = \{\xi_i, i \in I\}$称为**一致可积族**，如果

$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{i \in I} \int_{[|\xi_i| > c]} |\xi_i| d\boldsymbol{P}_i = 0.$$

在$(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \boldsymbol{P}_i) \equiv (\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$时，$\mathscr{H}$ 也称为$(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$上的一致可积族.

1.7 定理 设$(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \boldsymbol{P}_i)$, $i \in I$, 为一族概率空间，$\{\xi_i, \eta_i\} \subset L^1(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \boldsymbol{P}_i)$, $i \in I$, $\mathscr{H}' = \{\xi_i, i \in I\}$, $\mathscr{H} = \{\eta_i, i \in I\}$.

1)若 $\mathscr{H}$ 为一致可积族，且对每个 $i \in I$, $|\xi_i| \leqslant |\eta_i|$, $\boldsymbol{P}_i$-a.s.，则 $\mathscr{H}'$ 也为一致可积族；

2)设 $\xi_i \in L^p(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \boldsymbol{P}_i)$, $i \in I$, $p > 1$, 且 $\sup_{i \in I} \boldsymbol{E}_i[|\xi_i|^p] < \infty$, 则 $\mathscr{H}'$ 为一致可积族.

证明 1)直接由定义 1.6 看出.

2)令 $a = \sup_{i \in I} \boldsymbol{E}_i[|\xi_i|^p]$, 则对任何 $c > 0$, 我们有

$$\int_{[|\xi_i| > c]} |\xi_i| d\boldsymbol{P}_i \leqslant \int_{[|\xi_i| > c]} \frac{|\xi_i|^p}{c^{p-1}} d\boldsymbol{P}_i \leqslant \frac{\boldsymbol{E}_i[|\xi_i|^p]}{c^{p-1}} \leqslant \frac{a}{c^{p-1}}.$$

故由定义 1.6, $\mathscr{H}'$ 为一致可积族. □

1.8 定理 令$(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$为一概率空间，$\xi$ 为一可积随机变量，$(\mathscr{G}_i)_{i \in I}$为一族 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域，则$(\boldsymbol{E}[\xi | \mathscr{G}_i])_{i \in I}$为一致可积族.

证明 令 $\eta_i = \boldsymbol{E}[|\xi| | \mathscr{G}_i]$, 则对任何 $c > 0$, 我们有

$$\boldsymbol{P}(\eta_i \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c} \boldsymbol{E}[\eta_i] = \frac{1}{c} \boldsymbol{E}[|\xi|], \quad i \in I,$$

于是

$$\int_{[\eta_i > c]} \eta_i d\boldsymbol{P} = \int_{[\eta_i > c]} |\xi| d\boldsymbol{P} \leqslant \delta \boldsymbol{P}(\eta_i > c) + \int_{[|\xi| \geqslant \delta]} |\xi| d\boldsymbol{P}$$

$$\leqslant \frac{\delta}{c} \boldsymbol{E}[|\xi|] + \int_{[|\xi| \geqslant \delta]} |\xi| d\boldsymbol{P}.$$

给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使得 $\int_{[|\xi|\geq\delta]}|\xi|dP\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，于是当 $c\geqslant\frac{2\delta}{\varepsilon}E[|\xi|]$，有 $\int_{[\eta_i>c]}\eta_i dP\leqslant\varepsilon$，$i\in I$。这表明 $(\eta_i)_{i\in I}$ 为一致可积族。故由定理 1.7.1)，$(E[\xi|\mathscr{G}_i])_{i\in I}$ 为一致可积族。 □

1.9 定理 设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i,P_i)$，$i\in I$，为一族概率空间，$\xi_i\in L^1(\Omega_i,\mathscr{F}_i,P_i)$，$i\in I$，则为要 $\mathscr{H}=\{\xi_i,i\in I\}$ 为一致可积族，必须且只需满足下列条件：

i) $a=\sup_{i\in I}E_i[|\xi_i|]<\infty$；

ii) 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切满足 $P_i(A)\leqslant\delta$ 的 $A\in\mathscr{F}_i$，有

$$\int_A|\xi_i|dP_i\leqslant\varepsilon, \tag{9.1}$$

即 $\lim_{\delta\to 0}\sup_{i\in I}\sup_{A:P_i(A)\leqslant\delta}\int_A|\xi_i|dP_i=0$。

证明 必要性。令 $A\in\mathscr{F}_i$，$c>0$，我们有

$$\int_A|\xi_i|dP_i\leqslant cP_i(A)+\int_{[|\xi_i|>c]}|\xi_i|dP_i,\ i\in I. \tag{9.2}$$

设 $\mathscr{H}$ 为一致可积族，取 c 足够大，使得对一切 $i\in I$，

$$\int_{[|\xi_i|>c]}|\xi_i|dP_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

在(9.2)中令 $A=\Omega$ 得条件 i)；令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2c}$ 得条件 ii)。

充分性。设条件 i)、ii) 成立。任给 $\varepsilon>0$，选取 $\delta>0$，使得条件 ii) 成立。于是当 $c\geqslant\frac{a}{\delta}$ 时，我们有

$$P_i(|\xi_i|\geqslant c)\leqslant\frac{1}{c}E_i[|\xi_i|]\leqslant\frac{a}{c}\leqslant\delta.$$

故由(9.1)，对每个 $i\in I$

$$\int_{[|\xi_i|\geq c]}|\xi_i|dP_i\leqslant\varepsilon.$$

这表明 $\mathscr{H}$ 为一致可积族。 □

1.10 系 设 $(\xi_i)_{i\in I}$ 及 $(\eta_i)_{i\in I}$ 都为一致可积族，则 $(\xi_i+\eta_i)_{i\in I}$ 为一致可积族。

1.11 定理 设(ξ_n)为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上一可积随机变量序列，ξ为一实值随机变量，则为要$\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$，必须且只需$(\xi_n)$为一致可积，且$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

证明 必要性. 设$\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$. 熟知，$L^1$收敛蕴含依概率收敛. 令$A\in\mathscr{F}$，我们有

$$\int_A |\xi_n| dP \leqslant \int_A |\xi| dP + E[|\xi_n - \xi|]. \tag{11.1}$$

给定$\varepsilon>0$，选取一正整数N，使得当$n>N$时，$E[|\xi_n-\xi|]\leqslant\varepsilon/2$. 再选取$\delta>0$，使得对$A\in\mathscr{F}$

$$P(A)\leqslant\delta \Rightarrow \int_A |\xi| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{及} \quad \int_A |\xi_n| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, n\leqslant N.$$

于是由(11.1)，对$A\in\mathscr{F}$

$$P(A)\leqslant\delta \Rightarrow \forall\, n,\ \int_A |\xi_n| dP \leqslant \varepsilon.$$

此外，我们有$\sup\limits_n E[|\xi_n|]<\infty$. 故由定理1.9，$(\xi_n)$为一致可积族.

充分性. 设(ξ_n)一致可积，且$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. 由Fatou引理，$E[|\xi|]\leqslant\sup\limits_n E[|\xi_n|]<\infty$，故$\xi$可积，且$(\xi_n-\xi)$为一致可积(系1.10). 任给$\varepsilon>0$，由定理1.9知，存在$\delta>0$，使得对$A\in\mathscr{F}$

$$P(A)<\delta \Rightarrow \int_A |\xi_n - \xi| dP < \varepsilon,\ n\geqslant 1.$$

取N充分大，使得对一切$n\geqslant N$，有$P(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)<\delta$. 于是，当$n\geqslant N$时，我们有

$$\begin{aligned} E[|\xi_n - \xi|] &= \int_{[|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon]} |\xi_n - \xi| dP \\ &\quad + \int_{[|\xi_n-\xi|<\varepsilon]} |\xi_n - \xi| dP \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

这表明$\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$. □

一致可积随机变量族在本书中将经常遇到. 关于一致可积性的进一步的材料可在本章的问题与补充中找到.

§ 3. 本质上确界

1.12 定义 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，$\mathscr{H}$为随机变量的非空族. 称随机变量η为$\mathscr{H}$的**本质上确界**，如果η满足下列条件：

i) 对一切$\xi\in\mathscr{H}$，有$\xi\leqslant\eta$ a.s.；

ii) 设η'为一随机变量，使得对一切$\xi\in\mathscr{H}$有$\xi\leqslant\eta'$a.s.，则有$\eta\leqslant\eta'$a.s..

容易看出：若$\mathscr{H}$的本质上确界存在，则必唯一（今后我们总不计a.s.相等的两个随机变量的差别）. 我们用ess $\sup_{\xi\in\mathscr{H}}\xi$或ess $\sup\mathscr{H}$表示之.

在上述i)及ii)中将不等号反向，就得到本质下确界的定义. $\mathscr{H}$的本质下确界记为ess $\inf_{\xi\in\mathscr{H}}\xi$或ess $\inf\mathscr{H}$.

下一定理表明，随机变量的非空族的本质上(下)确界总存在.

1.13 定理 令$\mathscr{H}$为随机变量的非空族，则$\mathscr{H}$的本质上(下)确界存在，且有$\mathscr{H}$中的至多可列个元素(ξ_n)，使得

$$\text{ess}\sup\mathscr{H}=\bigvee_n\xi_n\ (\text{ess}\inf\mathscr{H}=\bigwedge_n\xi_n).$$

若进一步，$\mathscr{H}$对取有限上(下)端运算封闭，则(ξ_n)可取为一单调增(单调减)序列.

证明 我们只讨论本质上确界，第二个结论不待证. 为证第一个结论，不妨设$\mathscr{H}$中的元素一致有界，否则我们可以考虑随机变量族$\overline{\mathscr{H}}=\{\text{arctg}\xi:\xi\in\mathscr{H}\}$. 此外，显然可以进一步假定$\mathscr{H}$对取有限上端运算封闭. 这时，令$(\xi_n)\subset\mathscr{H}$为一单调增序列，使得

$$\lim_n E[\xi_n]=\sup_{\xi\in\mathscr{H}}E[\xi].$$

令$\eta=\bigvee_n\xi_n$，往证η为$\mathscr{H}$的本质上确界. 为此只需验证定义1.12中的两个条件. 条件ii)显然成立，故只需证条件i)成立. 设$\xi\in\mathscr{H}$，令$\xi_n'=\xi_n\vee\xi$，则$(\xi_n')\subset\mathscr{H}$，$(\xi_n')$单调增，且$\lim_n\xi_n'=\eta\vee\xi$. 我们有

$$E[\eta \vee \xi] = \lim_n E[\xi_n'] \leqslant \sup_{\xi \in \mathscr{H}} E[\xi] = E[\eta].$$

由于 $\eta \vee \xi \geqslant \eta$，上式表明 $\eta \vee \xi = \eta$ a.s.，此即 $\eta \geqslant \xi$ a.s.. 条件 i)得证. □

1.14 注 令$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间. 设 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$，且 $\mathscr{C}$ 非空. 令 $\mathscr{H} = \{I_C: C \in \mathscr{C}\}$，则由定理 1.13 知，存在$(C_n) \subset \mathscr{C}$，使得

$$I_{\bigcup_n C_n} = \bigvee_n I_{C_n} = \text{ess sup}\, \mathscr{H},$$

$\bigcup_n C_n$ 称为 $\mathscr{C}$ 的**本质上确界**，记为 ess sup$\mathscr{C}$. 类似地，有$(D_n) \subset \mathscr{C}$，使得

$$I_{\bigcap_n D_n} = \bigwedge_n I_{D_n} = \text{ess inf}\, \mathscr{H},$$

$\bigcap_n D_n$ 称为 $\mathscr{C}$ 的**本质下确界**，记为 ess inf$\mathscr{C}$.

定理 1.13 中证明本质上确界存在的方法也是一个有用的技巧，在本书中将多次使用.

§4. 条件期望的推广

1.15 定义 令$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一子 σ-域. 一随机变量 ξ 叫做关于 $\mathscr{G}$ 为 **σ-可积**，如果存在 $\Omega_n \in \mathscr{G}$，$\Omega_n \uparrow \Omega$ a.s.[1]，使得每个 ξI_{Ω_n} 为可积.

1.16 定理 1)为要一随机变量 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积，必须且只需存在一 $\mathscr{G}$-可测有限随机变量 $\eta > 0$ a.s.，使得 $\xi\eta$ 可积.

2)设 ξ 为一随机变量. 如果存在$(G_n) \subset \mathscr{G}$，使得 $\bigcup_n G_n = \Omega$ a.s.，且每个 ξI_{G_n} 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积，则 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积.

证明 1)充分性显然(令 $\Omega_n = [\eta \geqslant \frac{1}{n}]$即可)，往证必要性. 设 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积，即存在 $\Omega_n \in \mathscr{G}$，$\Omega_n \uparrow \Omega$ a.s.，使得每个 ξI_{Ω_n} 可积. 令

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1 + E[|\xi| I_{\Omega_n}])} I_{\Omega_n},$$

---

1) 必要时用 $\Omega_n \cup (\Omega \setminus \bigcup_n \Omega_n)$代替 Ω_n，可做到 $\Omega_n \uparrow \Omega$.

则 $\eta>0$ a.s.，$\eta\in\mathscr{G}$，且 $\xi\eta$ 可积.

2）由1），对每个 n，存在 $\mathscr{G}$-可测有限随机变量 $\eta_n>0$ a.s.，使得 $\eta_n\xi I_{G_n}$ 可积. 令

$$\eta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n\wedge 1}{2^n(1+E[\eta_n|\xi|I_{G_n}])}I_{G_n}.$$

则 $\eta>0$ a.s.，$\eta\in\mathscr{G}$，且 $\xi\eta$ 可积. 由1），η 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积. □

熟知：对任一非负随机变量 ξ，我们总可以定义条件数学期望 $E[\xi|\mathscr{G}]$（令 $E[\xi|\mathscr{G}]=\lim_n E[\xi\wedge n|\mathscr{G}]$ a.s.）. 但即使 ξ 只取有限值，$E[\xi|\mathscr{G}]$ 可能在一正概率集合上取 $+\infty$. 不难证明 $E[\xi|\mathscr{G}]$ 为 a.s. 有限当且仅当 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积.

1.17 定理 设 ξ 为一关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积的随机变量. 令

$$\mathscr{C}=\{A\in\mathscr{G}:E[|\xi|I_A]<+\infty\}.$$

则存在唯一的 $\mathscr{G}$-可测实值随机变量 η，使得对一切 $A\in\mathscr{C}$，有

$$E[\xi I_A]=E[\eta I_A]. \tag{17.1}$$

我们称 η 为 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 的**条件期望**，记为 $E[\xi|\mathscr{G}]$.

证明 无妨设 ξ 非负. 令 $\Omega_n\in\mathscr{G}$，$\Omega_n\uparrow\Omega$，使得 ξI_{Ω_n} 可积. 令 $\eta_n=E[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{G}]$ a.s.，则有 $\eta_{n+1}I_{\Omega_n}=\eta_n$ a.s.，$\eta_n\uparrow\eta$ a.s.，其中 η 为一 $\mathscr{G}$-可测实值随机变量. 令 $A\in\mathscr{C}$，则有

$$E[\xi I_A]=\lim_n E[\xi I_A I_{\Omega_n}]=\lim_n E[\eta_n I_A]=E[\eta I_A].$$

此即(17.1). 由(17.1)，ηI_{Ω_n} 为 ξI_{Ω_n} 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望，故 η 唯一确定. □

上面已指出，$E[\xi|\mathscr{G}]<\infty$ a.s.（即 $E[\xi^+|\mathscr{G}]<\infty$ 且 $E[\xi^-|\mathscr{G}]<\infty$ a.s.）当且仅当 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积，且这时定理1.17中所定义的条件期望 $E[\xi|\mathscr{G}]$ 就是 $E[\xi^+|\mathscr{G}]-E[\xi^-|\mathscr{G}]$.

可积随机变量的条件期望的性质是熟知的. 这些性质对 σ-可积随机变量的条件期望依然保留. 下面我们列出这些性质，但仅对平滑性质给出证明. 其余的证明可如同可积随机变量情形一样进行.

1.18 定理 设 ξ,η 是两个关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积的随机变量.

1）对任意实数 a,b，$a\xi+b\eta$ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积，且

$$E[a\xi+b\eta|\mathscr{G}]=aE[\xi|\mathscr{G}]+bE[\eta|\mathscr{G}]\ \text{a.s.}\ ;$$

2)若 $\xi\leqslant\eta$ a.s.，则

$$E[\xi|\mathscr{G}]\leqslant E[\eta|\mathscr{G}]\ \text{a.s.}.$$

1.19 定理 设随机变量 $\xi_n\geqslant 0$, $n\geqslant 1$，关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积.

1)若 $\xi_n\uparrow\xi$ a.s.，则 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积当且仅当 $\lim_n E[\xi_n|\mathscr{G}]<\infty$ a.s.，且这时我们有

$$E[\xi|\mathscr{G}]=\lim_n E[\xi_n|\mathscr{G}]\ \text{a.s.}\ ;$$

2)若 $\underline{\lim}_n\xi_n$ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积，则

$$\underline{\lim}_n E[\xi_n|\mathscr{G}]\geqslant E[\underline{\lim}_n\xi_n|\mathscr{G}]\ \text{a.s.}.$$

1.20 定理 设随机变量 ξ_n a.s. 收敛于一随机变量 ξ，对每个 η，$|\xi_n|\leqslant\eta$ a.s.，其中 η 为一 $\mathscr{G}$-可测实值随机变量，则

$$E[|\xi_n-\xi||\mathscr{G}]\to 0\ \text{a.s.}.$$

1.21 定理 设 ξ 是一关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积的随机变量，η 为一 $\mathscr{G}$-可测实值随机变量，则 $\xi\eta$ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积，且有

$$E[\xi\eta|\mathscr{G}]=\eta E[\xi|\mathscr{G}]\ \text{a.s.}. \tag{21.1}$$

证明 令 $A_n\in\mathscr{G}$，$A_n\uparrow\Omega$，使得 ξI_{A_n} 可积. 令 $B_n=[|\eta|\leqslant n]$，则 $B_n\in\mathscr{G}$，$B_n\uparrow\Omega$. 令 $\Omega_n=A_n\cap B_n$，则 $\Omega_n\in\mathscr{G}$，$\Omega_n\uparrow\Omega$，且 $\xi\eta I_{\Omega_n}$ 可积，故 $\xi\eta$ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积. 我们有(由(17.1))

$$E[\xi\eta|\mathscr{G}]I_{\Omega_n}=E[\xi\eta I_{\Omega_n}|\mathscr{G}]=\eta I_{\Omega_n}E[\xi|\mathscr{G}]\ \text{a.s.}.$$

故得(21.1). □

1.22 定理 设 $\mathscr{H}$，$\mathscr{G}$ 为两个 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域，且 $\mathscr{G}\subset\mathscr{H}$. 设 ξ 是一关于 $\mathscr{G}$(从而也关于 $\mathscr{H}$)为 σ-可积的随机变量，则 $E[\xi|\mathscr{H}]$ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积，且有

$$E[\xi|\mathscr{G}]=E[\xi|\mathscr{H}|\mathscr{G}]\ \text{a.s.}. \tag{22.1}$$

其中 $E[\xi|\mathscr{H}|\mathscr{G}]$ 是 $E[E[\xi|\mathscr{H}]|\mathscr{G}]$ 的缩写.

证明 令 $\Omega_n\in\mathscr{G}$，$\Omega_n\uparrow\Omega$，使得 ξI_{Ω_n} 可积. 由(17.1)可知 $I_{\Omega_n}E[\xi|\mathscr{H}]$ 可积，即 $E[\xi|\mathscr{H}]$ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积. 由通常的条件期望的平滑性质.

$$E[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{G}]=E[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{H}|\mathscr{G}]\ \text{a.s.}.$$

故有(由(21.1))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{G}]I_{\Omega_n} &= \boldsymbol{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{G}]\\ &= \boldsymbol{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{H}|\mathscr{G}]\\ &= \boldsymbol{E}[I_{\Omega_n}\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{H}]|\mathscr{G}]\\ &= \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{H}]|\mathscr{G}]I_{\Omega_n}\ \text{a.s.}.\end{aligned}$$

由此得(22.1). □

下一定理在本书中经常用到.

1.23 定理 令 ξ 为一随机变量, $A\in\mathscr{G}$. 设 ξI_A 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积. 令 $\mathscr{G}'=\sigma\{G\cap A;G\in\mathscr{G}\}$, 则 ξI_A 关于 $\mathscr{G}'$ 为 σ-可积, 且

$$\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathscr{G}]=\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathscr{G}']\quad \text{a.s.}. \tag{23.1}$$

证明 ξI_A 关于 $\mathscr{G}'$ 为 σ-可积是显然的. 由定理 1.21

$$\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathscr{G}]=\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathscr{G}]I_A\quad \text{a.s.}.$$

故 $\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathscr{G}]$ 可取为 $\mathscr{G}'$ 可测. 但 $\mathscr{G}'\subset\mathscr{G}$, 故由定理 1.22

$$\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathscr{G}']=\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathscr{G}|\mathscr{G}']=\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathscr{G}]\quad \text{a.s.}.$$ □

注 若 ξ 可积, 则对任何 $A\in\mathscr{G}$, 有

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{G}]I_A=\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{G}']I_A\quad \text{a.s.}.$$

更进一步, 若两个子 σ-域 $\mathscr{G}_1$ 与 $\mathscr{G}_2$ 满足条件 $\mathscr{G}_1\cap A=\mathscr{G}_2\cap A$, 且 $A\in\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2$, 则对任一可积随机变量 ξ 有

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{G}_1]I_A=\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{G}_2]I_A\quad \text{a.s.}.$$

§5. 解析集与Choquet 容度

在本节中我们介绍解析集的概念及其基本性质. 利用 Choquet 容度我们证明任一可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 中的 $\mathscr{F}$-解析集是普遍可测的. 这些是第五章中截口定理所必需的准备知识.

1.24 定义 设 E 为一集合, $\mathscr{E}$ 为 E 上一类. 如果 $\mathscr{E}$ 包含空集 $\varnothing$, 称 $\mathscr{E}$ 为 E 上的一个铺, 称序偶 $(E,\mathscr{E})$ 为一**铺集**.

1.25 定义 令 $(F,\mathscr{F})$ 为一铺集, $A\subset F$. 称 A 为一 $\mathscr{F}$-**解析**

集，如果存在一紧可距离化空间 E 和 $E\times F$ 的一子集 $B\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$，使得 A 为 B 在 F 上的投影. 这里 $\mathscr{K}(E)$ 是 E 的紧子集全体所成的铺.

今后，我们用 $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ 表示 $\mathscr{F}$-解析集全体. 由定义立刻推知：设 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，则存在 $B\in\mathscr{F}_\sigma$，使得 $A\subset B$. 特别，为要 $F\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，必须且只需 $F\in\mathscr{F}_\sigma$.

1.26 定理 令 $(F,\mathscr{F})$ 为一铺集，则

1) $\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$；

2) $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ 对可列并及可列交运算封闭.

证明 1) 显然，往证 2). 令 $(A_n)\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 依定义，对每个 n，存在一紧可距离化空间 E_n 及 $B_n\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E_n))_{\sigma\delta}$，使得 A_n 为 B_n 在 F 上的投影. 令 E 为乘积拓扑空间 $\Pi_n E_n$，π 为 $F\times E$ 到 F 上的投影映射. 令

$$C_n = B_n\times\prod_{m\neq n}E_m,$$

则有

$$\bigcap_n A_n=\bigcap_n\pi(C_n)=\pi(\bigcap_n C_n). \tag{26.1}$$

令 $B_n=\bigcap_k B_{nk}$，其中对一切 k，$B_{n,k}\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E_n))_\sigma$. 由于 $B_{n,k}\times\Pi_{m\neq n}E_m\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E_n))_\sigma$，故 $C_n\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$，从而 $\bigcap_n C_n\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$. 由(26.1)知 $\bigcap_n A_n\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，即 $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ 对可列交运算封闭.

现令 E 为和拓扑空间 $\Sigma_n E_n$ 的单点紧化，并将 $\Sigma_n(F\times E_n)$ 与 $F\times(\Sigma_n E_n)$ 视为同一，则有

$$\pi(\sum_n B_n)=\bigcup_n A_n. \tag{26.2}$$

由于 $\Sigma_n B_{n,k}\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E))_\sigma$，从而

$$\sum_n B_n=\sum_n\bigcap_k B_{n,k}=\bigcap_k\sum_n B_{n,k}\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}.$$

由(26.2)，$\bigcup_n A_n\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 这表明 $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ 对可列并运算封闭.
□

1.27 定理 令 $(E,\mathscr{E})$，$(F,\mathscr{F})$ 为两个铺集，$(F\times E,\mathscr{F}\otimes\mathscr{E})$

为其乘积，则有

$$\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes\mathscr{A}(\mathscr{G})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{G}). \qquad (27.1)$$

证明 设 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{G})$，$B\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 令 $A_1\in\mathscr{G}_\sigma$，$B_1\in\mathscr{F}_\sigma$，使得 $A\subset A_1$，$B\subset B_1$. 易见 $\mathscr{F}\otimes\mathscr{A}(\mathscr{G})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{G})$. 于是由定理 1.26，

$$\mathscr{F}_\sigma\otimes\mathscr{A}(\mathscr{G})\subset(\mathscr{F}\otimes\mathscr{A}(\mathscr{G}))_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{G}).$$

同理有 $\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes\mathscr{G}_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{G})$. 因此我们有

$$B\times A=(B_1\times A)\cap(B\times A_1)\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{G}). \quad \square$$

1.28 定理 令 $(F,\mathscr{F})$ 为一铺集，E 为一紧可距离化空间，则对一切 $A'\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E))$，$A'$ 到 F 上的投影 A 为 $\mathscr{F}$-解析集.

证明 存在一紧可距离化空间 G 及 $A''\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{K}(G))_{\sigma\delta}$，使得 A' 是 A'' 在 $F\times E$ 上的投影. 但 $E\times G$ 为紧可距离化空间，$\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{K}(G)\subset\mathscr{K}(E\times G)$，且 A'' 在 F 上的投影为 A. 故依定义，$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$. $\square$

1.29 定理 设 $(F,\mathscr{F})$ 为一铺集，$\mathscr{G}$ 为 F 上一个铺，满足 $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$，则有

$$\mathscr{A}(\mathscr{F})=\mathscr{A}(\mathscr{G})=\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F})). \qquad (29.1)$$

证明 设 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))$，存在一紧可距离化空间 E 及 $A'\in(\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes\mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$，使得 A 为 A' 在 F 上的投影. 由(27.1)，我们有

$$\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes\mathscr{K}(E)\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes\mathscr{A}(\mathscr{K}(E))\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E)).$$

从而 $A'\in\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E)))$. 故由定理 1.28，$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 这表明 $\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 但显然我们有 $\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{G})\subset\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))$. 故有(29.1). $\square$

1.30 定理 设 $(F,\mathscr{F})$ 为一铺集，$A\subset F$. 令 $\mathscr{F}\cap A=\{B\cap A: B\in\mathscr{F}\}$，则有

$$\mathscr{A}(\mathscr{F}\cap A)=\mathscr{A}(\mathscr{F})\cap A, \qquad (30.1)$$

其中 $\mathscr{F}\cap A$ 考虑为 A 上的一个铺.

证明 设 $C\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\cap A)$. 存在一紧可距离化空间 E 及 $C'\in((\mathscr{F}\cap A)\otimes\mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$ 使得 C 为 C' 在 A 上的投影. 由于存在 $C''\in$

$(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$，使得$C'=(A\times E)\cap C''$，故$C=A\cap\pi(C'')\in\mathscr{A}(\mathscr{F})\cap A$. 反之，设$B\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，则存在一紧可距离化空间$E$及$B'\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$，使得$B=\pi(B')$. 由于$(A\times E)\cap B'\in((\mathscr{F}\cap A)\otimes\mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$，且$A\cap B=\pi((A\times E)\cap B')$，故$A\cap B\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\cap A)$. 这表明$\mathscr{A}(\mathscr{F})\cap A\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\cap A)$. 于是有(30. 1). □

1.31 定理 设$(F,\mathscr{F})$为一铺集. 为要$\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$，必须且只需对一切$A\in\mathscr{F}$，有$A^c\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$.

证明 必要性显然，往证充分性. 令

$$\mathscr{G}=\{A\in\mathscr{A}(\mathscr{F}):A^c\in\mathscr{A}(\mathscr{F})\},$$

则$\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$. 由定理1.26，$\mathscr{G}$为$\sigma$-域，故$\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$. □

1.32定理 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间$\mathscr{B}=\mathscr{B}(\boldsymbol{R})$，$\mathscr{K}=\mathscr{K}(\boldsymbol{R})$，$\mathscr{F}\times\mathscr{B}$为$\Omega\times\boldsymbol{R}$上的乘积$\sigma$-域，则有

1) $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}(\mathscr{K})$，$\mathscr{A}(\mathscr{B})=\mathscr{A}(\mathscr{K})$；

2) $\mathscr{F}\times\mathscr{B}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K})=\mathscr{A}(\mathscr{F}\times\mathscr{B})$；

3) 对任何$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K})$，$A$在$\Omega$上的投影为$F$-解析集.

证明 1) 设$K\in\mathscr{K}$，则熟知$K^c\subset\mathscr{K}_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{K})$. 由于$\sigma(\mathscr{K})=\mathscr{B}$，故$\mathscr{K}\subset\mathscr{B}\subset\mathscr{A}(\mathscr{K})$(定理1.31)，从而$\mathscr{A}(\mathscr{B})=\mathscr{A}(\mathscr{K})$(定理1.29).

2) 设$B\in\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}$，则$B^c\in(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K})_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K})$. 又由于$\sigma(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K})=\mathscr{F}\times\mathscr{B}$，故$\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}\subset\mathscr{F}\times\mathscr{B}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K})$(定理1.31)，从而$\mathscr{A}(\mathscr{F}\times\mathscr{B})=\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K})$(定理1.29).

3) 取$(K_n)\subset\mathscr{K}$，使得$\bigcup_n K_n=\boldsymbol{R}$(例如，令$K_n=[-n,n]$). 对每个$n$，我们有(定理1.30)

$$(\Omega\times K_n)\cap\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K})=\mathscr{A}((\Omega\times\mathscr{K}_n)\cap(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}))$$
$$=\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes(\mathscr{K}\cap\mathscr{K}_n)).$$

由于K_n为紧距离空间，且$\mathscr{K}(K_n)=\mathscr{K}\cap K_n$，$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K})$，故由定理1.28，$(\Omega\times K_n)\cap A$在$\Omega$上的投影为$F$-解析集. 但$A=\bigcup_n[(\Omega\times K_n)\cap A]$，故$A$在$\Omega$上的投影也是$\mathscr{F}$-解析集. □

注 在定理1.32中$\boldsymbol{R}$可用任一具有可数基的局部紧的Hausdorff拓扑空间(如$\boldsymbol{R}_+$)代替.

下面我们定义Choquet容度.

1.33 定义 设$(F,\mathscr{G})$为一铺集，其中$\mathscr{G}$对有限并及有限交运算封闭. 对F的一切子集有定义、在$\bar{\boldsymbol{R}}$中取值的集函数I称为F上的**Choquet $\mathscr{G}$-容度**，如果I具有下列性质：

i) I单调增，即

$$A\subset B\Rightarrow I(A)\leqslant I(B); \tag{33.1}$$

ii) I从下连续，即

$$A_n\uparrow A\Rightarrow I(A)=\sup_n I(A_n); \tag{32.2}$$

iii) I沿$\mathscr{G}$从上连续，即

$$A_n\in\mathscr{G},\ A_n\downarrow A\Rightarrow I(A)=\inf_n I(A_n). \tag{33.3}$$

集合A称为***I*-可容的**，如果

$$I(A)=\sup_{B\in\mathscr{G}_\delta,\,B\subset A} I(B). \tag{33.4}$$

1.34 引理 设I是F上的Choquet $\mathscr{G}$-容度，则$\mathscr{G}_{\sigma\delta}$中每个元素都是$I$可容的.

证明 令$A\in\mathscr{G}_{\sigma\delta}$. 若$I(A)=-\infty$，则$I(\varnothing)=-\infty$，$\varnothing\in\mathscr{G}_\delta$，故(33.4)成立，即$A$可容. 现设$I(A)>-\infty$. 我们有

$$A=\bigcap_{n=1}^\infty A_n,\quad A_n\in\mathscr{G}_\sigma,\quad n\geqslant 1,$$

$$A_n=\bigcup_{m=1}^\infty A_{nm},\quad A_{nm}\in\mathscr{G},\quad n,m\geqslant 1.$$

由于$\mathscr{G}$对有限并运算封闭，故可假定对固定的n，$(A_{nm})_{m\geqslant 1}$为增序列. 为证(33.4)，只需证明：对任何$a<I(A)$，存在$B\in\mathscr{G}_\delta$，$B\subset A$，使得$I(B)\geqslant a$.

设$a<I(A)$. 由(33.2)，我们有

$$I(A)=I(A\cap A_1)=\sup_m I(A\cap A_{1m}).$$

故存在m_1，使得$I(A\cap A_{1m_1})>a$. 这时

$$I(A\cap A_{1m_1})=I(A\cap A_{1m_1}\cap A_2)$$
$$=\sup_m I(A\cap A_{1m_1}\cap A_{2m})>a.$$

于是存在m_2，使得$I(A\cap A_{1m_1}\cap A_{2m_2})>a$. 依此类推，我们得到一列自然数$(m_k)_{k\geqslant 1}$，使得对一切$k\geqslant 1$，有

$$I(A \cap A_{1m_1} \cap \cdots \cap A_{km_k}) > a.$$

令 $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_{km_k}$，$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$，由(33.1)，$I(B_n) > a$. 又 $B_n \in \mathscr{F}$，$B_n \downarrow B$，故 $B \in \mathscr{F}_\delta$，且由(33.3)，$I(B) = \inf_n I(B_n) \geqslant a$. 由于 $B_n \subset A_n$，故 $B \subset A$. □

下一定理称为 **Choquet 定理**.

1.35 定理 设 I 是 F 上的 Choquet $\mathscr{F}$-容度，则一切 $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ 都是 I-可容的.

证明 设 $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$，则存在一紧可距离化空间 E 及 $B \in (\mathscr{F} \otimes \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$，使得 $\pi(B) = A$，这里 π 是 $F \times E$ 到 F 上的投影映象. 令 $\mathscr{H}$ 为用有限并运算封闭 $\mathscr{F} \otimes \mathscr{K}(E)$ 所得的铺，易知 $\mathscr{H}$ 对有限交运算也封闭，且有 $\mathscr{H}_{\sigma\delta} = (\mathscr{F} \otimes \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$. 对每个 $H \subset F \times E$，令

$$J(H) = I(\pi(H)).$$

往证 J 是 $F \times E$ 上的 Choquet $\mathscr{H}$-容度. 显然，J 满足定义 1.33 中的性质 i) 及 ii). 剩下只需验证性质 iii).

令 $H = \bigcup_{k=1}^{m} (D_k \times C_k) \in \mathscr{H}$，其中 $D_k \in \mathscr{F}$，$C_k \in \mathscr{K}(E)$，则对任何 $x \in \pi(H)$，我们有 $(\{x\} \times E) \cap H = \{x\} \times C$，其中 $C \neq \varnothing$，且 $C =$ $\bigcup_{\{k: x \in D_k\}} C_k \in \mathscr{K}(E)$. 现设 $(B_n) \subset \mathscr{H}$ 单调降. 令 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi(B_n)$，则对每个 n，存在 $C_n \in \mathscr{K}(E)$，使得 $(\{x\} \times E) \cap B_n = \{x\} \times C_n$. 由于 (B_n) 单调降，故 (C_n) 亦单调降. 又每个 C_n 为 E 的非空紧子集，故 $\bigcap_n C_n \neq \varnothing$，于是

$$(\{x\} \times E) \cap (\bigcap_n B_n) = \{x\} \times \bigcap_n C_n \neq \varnothing.$$

即有 $x \in \pi(\bigcap_n B_n)$. 这表明 $\bigcap_n \pi(B_n) \subset \pi(\bigcap_n B_n)$. 但相反的包含关系恒成立，故有

$$\bigcap_n \pi(B_n) = \pi(\bigcap_n B_n). \qquad (35.1)$$

由于 $\pi(B_n) \in \mathscr{F}$，$\pi(B_n) \downarrow$，由(33.3)我们有

$$J(\bigcap_n B_n) = I(\pi(\bigcap_n B_n)) = I(\bigcap_n \pi(B_n))$$
$$= \inf_n I(\pi(B_n)) = \inf_n J(B_n),$$

即定义 1.33 中的性质 iii) 对 J 成立. 于是 J 是 $F\times E$ 上的 Choquet $\mathscr{K}$-容度.

由于 $B\in\mathscr{K}_{\sigma\delta}$, 由引理 1.34 知, B 为 J-可容的. 但由(35.1)看出: $C\in\mathscr{K}_\delta\Rightarrow\pi(C)\in\mathscr{F}_\delta$. 于是有

$$I(A)=J(B)=\sup_{C\in\mathscr{K}_\delta,C\subset B}J(C)$$

$$=\sup_{C\in\mathscr{K}_\delta,C\subset B}I(\pi(C))$$

$$\leqslant\sup_{D\in\mathscr{F}_\delta,D\subset A}I(D).$$

但恒有 $I(A)\geqslant\sup_{D\in\mathscr{F}_\delta,D\subset A}I(D)$, 故有

$$I(A)=\sup_{D\in\mathscr{F}_\delta,D\subset A}I(D).$$

这表明 A 是 I-可容的. □

作为 Choquet 定理的一个重要应用, 我们将证明可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 中的一切 $\mathscr{F}$-解析集是普遍可测的.

设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为一可测空间, $\mathscr{P}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上概率测度全体. 对每个 $P\in\mathscr{P}$, 我们令 $\mathscr{F}^P$ 表示 $\mathscr{F}$ 按 P 的完备化. 置

$$\hat{\mathscr{F}}=\bigcap_{P\in\mathscr{P}}\mathscr{F}^P.$$

称 $\hat{\mathscr{F}}$ 为 $\mathscr{F}$ 的**普遍完备化**, $\hat{\mathscr{F}}$ 中的元素称为**普遍可测集**.

显见, $\hat{\hat{\mathscr{F}}}=\hat{\mathscr{F}}$. 此外, 若 $\mathscr{F}$ 关于某个概率测度 P 为完备, 则 $\hat{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$.

1.36 定理 令 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为一可测空间, 则有

$$\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\hat{\mathscr{F}}=\mathscr{A}(\hat{\mathscr{F}}).$$

证明 设 $P\in\mathscr{P}$. 令

$$I(A)=\inf_{B\in\mathscr{F},B\supset A}P(B),\qquad A\subset\Omega.$$

容易验证, I 是 Ω 上的 Choquet $\mathscr{F}$-容度. 由 Choquet 定理, 对一切 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$, 有(注意 $\mathscr{F}_\delta=\mathscr{F}$)

$$I(A)=\sup_{B\in\mathscr{F},B\subset A}I(B).$$

于是 $A\in\mathscr{F}^P$. 但 $P\in\mathscr{P}$ 是任意的, 故 $A\in\hat{\mathscr{F}}$. 这表明 $\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\hat{\mathscr{F}}$. 于是我们有 $\hat{\mathscr{F}}\subset\mathscr{A}(\hat{\mathscr{F}})\subset\hat{\hat{\mathscr{F}}}=\hat{\mathscr{F}}$, 从而 $\mathscr{A}(\hat{\mathscr{F}})=\hat{\mathscr{F}}$. □

§ 6. Lebesgue-Stieltjes 积分

1.37引理 设$a(t)$为$\boldsymbol{R}_+$上一非负右连续增函数(允许取$+\infty$). 令

$$c(t)=\inf\{s:a(s)>t\},\ t\in\boldsymbol{R}_+. \tag{37.1}$$

则$c(t)$为$\boldsymbol{R}_+$上非负右连续增函数,称为$a(t)$的**右逆函数**. 设$t\in\boldsymbol{R}_+$,则为要$c(t)<\infty$,必须且只需$t<a(\infty)=\lim_{t\to\infty}a(t)$. 令

$$a_-(t)=a(t-)=\lim_{s\uparrow\uparrow t}a(s),\ t>0,$$

$$c_-(t)=c(t-)=\lim_{s\uparrow\uparrow t}c(s)=\inf\{s:a(s)\geqslant t\}$$

$$=\sup\{s:a(s)<t\},\ t>0,$$

$$a(0-)=a(0),\ c(0-)=c(0),$$

则我们有

$$a_-(c_-(t))\leqslant a_-(c(t))\leqslant t,\ t\in\boldsymbol{R}_+. \tag{37.2}$$

$$a(c(t))\geqslant a(c_-(t))\geqslant t,\ t<a(\infty). \tag{37.3}$$

特别,如果a连续,则对一切$t<a(\infty)$,我们有$a(c(t))=a(c_-(t))=t$. 最后,c与a的关系是对称的,即$a(t)$也是$c(t)$的右逆函数:

$$a(s)=\inf\{t:c(t)>s\},\ s\in\boldsymbol{R}_+. \tag{37.4}$$

此外,我们有

$$a(s)=\sup\{t:c(t)\leqslant s\},\ s\in\boldsymbol{R}_+. \tag{37.5}$$

证明 留给读者作为练习.

下一引理称为**Lebesgue引理**,它把对增函数的Lebesgue-Stieltjes积分化为通常的Lebesgue积分. 我们将在第五章用到这一引理.

1.38 引理 设$a(t)$为$\boldsymbol{R}_+$上一有限值非负右连续增函数,则对任有界或非负Borel函数$f(t)$,我们有

$$\int_{[0,\infty[}f(s)da(s)=\int_{[0,\infty[}f(c(s))I_{[c<\infty]}(s)ds, \tag{38.1}$$

$$\int_{[0,\infty[}f(s)da(s)=\int_{[0,\infty[}f(c_-(s))I_{[c_-<\infty]}(s)ds. \tag{38.2}$$

其中 $c(t)$ 如(37.1)定义.(按约定, $\int_{[0]} f(s)da(s) = f(0)a(0)$.)

证明 设 $u\in \boldsymbol{R}_+$, 如果 $f(t)=I_{[0,u]}(t)$, 则由(37.5)

$$\int_{[0,\infty[} f(s)da(s) = a(u) = \sup\{s; c(s)\leqslant u\}$$

$$= \int_{[0,\infty[} I_{[0,a(u)]}(s)ds$$

$$= \int_{[0,\infty[} f(c(s))I_{[c(s)<\infty]}(s)ds.$$

于是对这样的 f, (38.1)成立. 由单调类定理(定理 1.4), (38.1)对有界或非负 Borel 函数 f 成立. 最后, 由于集合 $\{s; c(s)\neq c_-(s)\}$ 至多是可数的, 故由(38.1)得(38.2). □

下一引理是 Lebesgue-Stieltjes 积分的**分部积分公式**.

1.39 引理 设 $f(t)$, $g(t)$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上的两个右连续有限变差函数(即可表为两个有限值非负右连续增函数之差的函数), 则对 $0\leqslant a<b<+\infty$

$$f(b)g(b) = f(a)g(a) + \int_a^b f(s)dg(s)$$

$$+ \int_a^b g(s-)df(s). \tag{39.1}$$

(按约定, $\int_a^b f(s)dg(s) = \int_{]a,b]} f(s)dg(s)$.)

证明 我们有

$$(f(b)-f(a))(g(b)-f(a)) = \int\int_{]a,b]\times]a,b]} df(x)dg(y)$$

$$= \int\int_{a<x\leqslant y\leqslant b} df(x)dg(y) + \int\int_{a<y<x\leqslant b} df(x)dg(y)$$

$$= \int_a^b dg(y)\int_a^y df(x) + \int_a^b df(x)\int_{]a,x[} dg(y)$$

$$= \int_a^b [f(y)-f(a)]dg(y) + \int_a^b [g(x-)-g(a)]df(x)$$

$$= \int_a^b f(y)dg(y) + \int_a^b g(x-)df(x)$$

$$-f(a)[g(b)-g(a)]-g(a)[f(b)-f(a)].$$

由此推得(39.1). □

下一定理中的(40.1)式称为 **Kunita-Watanahe 不等式**,我们将在第六章中用到它.

1.40 定理 设$a(t)$为$\boldsymbol{R}_+$上的右连续有限变差函数,$b(t)$及$c(t)$为$\boldsymbol{R}_+$上的非负有限值右连续增函数. 如果$|a(0)|\leqslant\sqrt{b(0)}\sqrt{c(0)}$,且对一切$0\leqslant s<t<+\infty$,有

$$|a(t)-a(s)|\leqslant\sqrt{b(t)-b(s)}\sqrt{c(t)-c(s)},$$

则对$\boldsymbol{R}_+$上的任何 Borel 函数f,g有

$$\int_{[0,\infty[}|f(s)g(s)\|da(s)|$$
$$\leqslant\left(\int_{[0,\infty[}f^2(s)db(s)\right)^{1/2}\left(\int_{[0,\infty[}g^2(s)dc(s)\right)^{1/2}. \qquad (40.1)$$

证明 我们将用到如下初等事实:设x,y,z为三个实数,且$x\geqslant 0,z\geqslant 0$,则为要对一切有理数$\lambda$,有$\lambda^2x+2\lambda y+z\geqslant 0$,必须且只需$|y|\leqslant\sqrt{xz}$.

令$\mu(t)=\int_{[0,t]}|da(s)|+b(t)+c(t)$,记$a'=\dfrac{da}{d\mu}$, $b'=\dfrac{db}{d\mu}$, $c'=\dfrac{dc}{d\mu}$. 设λ为一给定的有理数,令

$$v(t)=\lambda^2b(t)+2\lambda a(t)+c(t),$$

则由定理假定及上述初等事实容易看出,v为$\boldsymbol{R}_+$上的非负增函数. 于是我们有

$$\frac{dv}{d\mu}=\lambda^2b'+2\lambda a'+c' \qquad \mu-\text{a.e.}. \qquad (40.2)$$

但有理数全体是可数的,故上式对一切有理数λ同时成立,因此,由上述初等事实,我们有

$$|a'|\leqslant\sqrt{b'c'}, \qquad \mu-\text{a.e.}.$$

现设f,g为$\boldsymbol{R}_+$上的两个 Borel 函数,由 Schwarz 不等式,我们有

$$\int_{[0,\infty[}|f(s)g(s)\|da(s)|=\int_{[0,\infty[}|f(s)g(s)\|a'(s)|d\mu(s)$$

$$\leqslant \int_{[0,\infty[} |f(s)| \sqrt{b'(s)} |g(s)| \sqrt{c'(s)} d\mu(s)$$

$$\leqslant \left(\int_{[0,\infty[} f^2(s) b'(s) d\mu(s) \right)^{1/2} \left(\int_{[0,\infty[} g^2(s) c'(s) d\mu(s) \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{[0,\infty[} f^2(s) db(s) \right)^{1/2} \left(\int_{[0,\infty[} g^2(s) dc(s) \right)^{1/2}.$$

问题与补充

1.1 设 $\mathscr{C}$ 为 Ω 上的一个类，$\lambda(\mathscr{C})$ 与 $m(\mathscr{C})$ 分别是 $\mathscr{C}$ 产生的 λ-类与单调类，则

1) $\lambda(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$ 当且仅当

$$A,B\in\mathscr{C}\Rightarrow AB\in\lambda(\mathscr{C});$$

2) $m(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$ 当且仅当

$$A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^c\in m(\mathscr{C});\ A,B\in\mathscr{C}\Rightarrow AB\in m(\mathscr{C}).$$

1.2 设 $\mathscr{H}$ 为一族 Ω 上的实值(相应地，有界)函数，则为要存在 Ω 上的一个 σ-域 $\mathscr{F}$，使得 $\mathscr{H}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上实值(相应地，有界)可测函数全体，必须且只需下列条件被满足：

i) $\mathscr{H}$ 是一线性空间；

ii) $1\in\mathscr{H}$；

iii) $0\leqslant f_n\uparrow f$，$(f_n)\subset\mathscr{H}$，f 是实值(相应地，有界)函数 $\Rightarrow f\in\mathscr{H}$；

iv) $f,g\in\mathscr{H}\Rightarrow f\wedge g\in\mathscr{H}$.

1.3 设 $\mathscr{H}$ 是一族 Ω 上的有界函数，且满足下列条件：

i) $\mathscr{H}$ 是一线性空间；

ii) $1\in\mathscr{H}$；

iii) $0\leqslant f_n\uparrow f$，$(f_n)\subset\mathscr{H}$，f 有界 $\Rightarrow f\in\mathscr{H}$.

设 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{H}$ 的一个子族，且对乘法运算封闭，则 $\mathscr{H}$ 包含一切 $\sigma(f:f\in\mathscr{C})$-可测有界函数.

1.4 设 $(E_i,\mathscr{E}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间. 对每个 $i\in I$，f_i 是从 Ω 到 E_i 中的映象. 若 φ 是 Ω 上的 $\sigma(f_i,i\in I)$-可测实值(相应地，数

值)函数,则存在 I 的一个可数子集 J 和 $(\Pi_{i\in J}E_i,\Pi_{i\in J}\mathscr{E}_i)$ 上的一个可测实值(相应地,数值)函数 h,使得 $\varphi=h\circ f_J$,其中 f_J 是 Ω 到 $\Pi_{i\in J}E_i$ 中的一个映象,定义如下:$f_J(\omega)=(f_i(\omega))_{i\in J}$.

1.5 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一概率空间,$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域,令 $(E,\mathscr{E})$ 为一可测空间,ξ 为一 $\mathscr{G}$-可测的 E 值随机变量,$f(\omega,x)$ 为一 $\mathscr{F}\times\mathscr{E}$-可测的有界函数. 令

$$f_x(\omega)=f(\omega,x),\ \eta(\omega)=f(\omega,\xi(\omega)),$$

则存在一 $\mathscr{G}\times\mathscr{E}$-可测的有界函数 $h(\omega,x)$,使得

i)对一切 $x\in E$,$E[f_x|\mathscr{G}](\omega)=h(\omega,x)$ a.s.;

ii)$E[\eta|\mathscr{G}](\omega)=h(\omega,\xi(\omega))$ a.s..

1.6 设 $\mathscr{H}$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一族一致可积的随机变量,则 $\mathscr{H}$ 在 $L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中的闭凸包也一致可积.

1.7 设 (ξ_n) 为一可积随机变量序列,且 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$,$E[|\xi_n|]\longrightarrow E[|\xi|]<\infty$,则 (ξ_n) 一致可积,且 $E[|\xi_n-\xi|]\longrightarrow 0$.

1.8 设 (ξ_n) 为一致可积随机变量序列,则

$$\lim_n E\left[\frac{1}{n}\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|\right]=0.$$

1.9 设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i,P_i)$,$i\in I$,为一族概率空间,$\xi_i\in L^1(\Omega_i,\mathscr{F}_i,P_i)$. 为要 $(\xi_i)_{i\in I}$ 为一致可积族,必须且只需存在一 R_+ 上的非负 Borel 函数 $G(t)$,使得

i) $\lim_{t\to+\infty}\frac{G(t)}{t}=+\infty$;

ii) $\sup_{i\in I}E_i[G(|\xi_i|)]<+\infty$.

1.10 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一概率空间,$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一子 σ-域,$A\in\mathscr{F}$,则

1)$[E[I_A|\mathscr{G}]>0]=\text{ess inf}\{B\in\mathscr{G};B\supset A\}$;

2)$[E[I_A|\mathscr{G}]=1]=\text{ess sup}\{B\in\mathscr{G};B\subset A\}$.

1.11 设 (ξ_n) 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一列随机变量. 令

$$s\,\overline{\lim}_n\xi_n=\text{ess inf}\{\eta\in\mathscr{F};\lim_n P(\xi_n>\eta)=0\},$$

$$s\,\underline{\lim}_n\xi_n=\text{ess sup}\{\eta\in\mathscr{F};\lim_n P(\xi_n<\eta)=0\},$$

则

1) $\underline{\lim}_n \xi_n \leqslant s\underline{\lim}_n \xi_n \leqslant s\,\overline{\lim}_n \xi_n \leqslant \overline{\lim}_n \xi_n$ a.s..

2) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Leftrightarrow s\,\overline{\lim}_n \xi_n = s\underline{\lim}_n \xi_n = \xi$ a.s..

其中ξ为一实值随机变量.

1.12 设$\mathscr{H} \subset L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$满足$\inf\{E[\xi],\xi\in\mathscr{H}\}>-\infty$,则下列命题等价:

1) $E[\text{ess inf}\,\mathscr{H}]=\inf\{E[\xi],\xi\in\mathscr{H}\}$;

2) ess inf $\mathscr{H}$可积,且对每个$\mathscr{F}$的子σ域$\mathscr{G}$

$$E[\text{ess inf}\,\mathscr{H}\,|\,\mathscr{G}]=\text{ess inf}\{E[\xi\,|\,\mathscr{G}],\ \xi\in\mathscr{H}\};$$

3) 对任意的$\xi_1,\xi_2\in\mathscr{H}$及$\varepsilon>0$,存在$\xi_3\in\mathscr{H}$,使得

$$E[(\xi_3-\xi_1\vee\xi_2)^+]<\varepsilon.$$

1.13 设ξ为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一实值随机变量,$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子σ-域,$\varphi(x)$为实值凸函数.如果ξ与$\varphi(\xi)$均关于$\mathscr{G}$为σ-可积,则

$$\varphi(E[\xi\,|\,\mathscr{G}])\leqslant E[\varphi(\xi)\,|\,\mathscr{G}],\ \text{a.s.}.$$

此即 **Jensen 不等式**.

1.14 设(ξ_n)为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一列随机变量,$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子σ-域.如果对任给的$\varepsilon>0$,存在一有限值随机变量$\eta\in\mathscr{G}$,使得

$$\text{ess}\sup_n E[|\xi_n|I_{[|\xi_n|>\eta]}\,|\,\mathscr{G}]<\varepsilon\quad \text{a.s.}$$

(这时,称(ξ_n)**关于$\mathscr{G}$条件一致可积**),则

$$E[\underline{\lim}_n\xi_n\,|\,\mathscr{G}]\leqslant\underline{\lim}_n E[\xi_n\,|\,\mathscr{G}]\leqslant\overline{\lim}_n E[\xi_n\,|\,\mathscr{G}]\leqslant E[\overline{\lim}_n\xi_n\,|\,\mathscr{G}].$$

特别,若(ξ_n)一致可积,则

$$E[\underline{\lim}_n\xi_n]\leqslant\underline{\lim}_n E[\xi_n]\leqslant\overline{\lim}_n E[\xi_n]\leqslant E[\overline{\lim}_n\xi_n].$$

1.15 设$(F,\mathscr{F})$,$(G,\mathscr{G})$为两个铺集,f为一从F到G中的映象,使得$f^{-1}(\mathscr{G})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$,则

$$f^{-1}(\mathscr{A}(\mathscr{G}))\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}).$$

1.16 设$(F,\mathscr{F})$为一铺集,I为F上的Choquet-$\mathscr{F}$容度,则I也是F上的Choquet-$\mathscr{F}_\delta$-容度.

1.17 设$a(t)$为$\mathbf{R}_+$上一有限值非负右连续增函数,$c(t)$为它的右逆函数,则

1) $c(t)$在$[0,a(\infty)[$上严格增当且仅当$a(0)=0$及$a(t)$在$\boldsymbol{R}_+$上连续. 这时我们有$a(c(t))=t$, 当$t<a(\infty)$,

2) $c(t)$在$[0,a(\infty)[$上连续当且仅当$a(t)$在$\boldsymbol{R}_+$上严格增. 这时我们有$c(a(t))=t$, $t\in\boldsymbol{R}_+$.

1.18 设$a(t)$为$\boldsymbol{R}_+$上一有限值非负连续增函数, 则对任一$[a(0),a(\infty)[$上的非负 Borel 函数$f(t)$, 我们有

$$\int_0^{\infty} f(a(t))da(t) = \int_{a(0)}^{a(\infty)} f(t)dt.$$

1.19 设f为$\boldsymbol{R}_+$上一非负 Borel 函数, 且局部可积, 即在任一有限区间上可积. 令$a(t)=\int_0^t f(s)ds$, $t\geqslant 0$, $c(t)$为$a(t)$的右逆函数, $A=\{t: f(t)=0\}$, $B=\{t: c(t)\in A\}$, 则B的 Lebesgue 测度为零.

1.20 设$a(t)$, $b(t)$为两个$\boldsymbol{R}_+$上有限值非负右连续增函数, $b(0)>0$, 则对$t>0$我们有

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{a(0)}{b(0)} + \int_0^t \frac{da(t)}{b(t-)} - \int_0^t \frac{a(t)db(t)}{b(t)b(t-)}.$$

第二章　经典鞅论

本章介绍经典鞅论的主要结果，如最大不等式、上穿不等式、Doob 不等式、收敛定理、Riesz 分解定理、Doob 停止定理等. 在§1—4中讨论离散时间鞅. §5讨论连续时间鞅. 为了使读者能加深理解，有时我们还给出一些应用的例子. §6是独立增量过程的引论.

§1.　基本不等式

本章的讨论都在一个固定的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上进行. 在§1—4中还假设给定一个子σ-域的增序列$(\mathscr{F}_n, n\in N)$：对一切$n\in N$

$$\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}.$$

$(\mathscr{F}_n, n\in N)$或$(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$称为一个**流**，它也简记为$\boldsymbol{F}$或$(\mathscr{F}_n)$. 通常我们记

$$\mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n\geq 0}\mathscr{F}_n.$$

一列实值随机变量$(X_n, n\in N)$或$(X_n)_{n\geq 0}$称为**随机序列**，它也可简记为X或(X_n). 一个随机序列$X=(X_n)_{n\geq 0}$称为$\boldsymbol{F}$-**适应的**，如果对每个n，X_n是$\mathscr{F}_n$可测的.

2.1定义　一个$\boldsymbol{F}$-适应的随机序列$(X_n, n\in N)$称为$\boldsymbol{F}$-鞅($\boldsymbol{F}$-$\boldsymbol{F}$上鞅，$\boldsymbol{F}$-下鞅)，如果对每个$n\in N$，X_n可积，且

$$\boldsymbol{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = X_n(\leq X_n, \geq X_n)\ \text{a.s.},$$

这时，对一切$m\geq n\geq 0$

$$\boldsymbol{E}[X_m|\mathscr{F}_n] = X_n(\leq X_n, \geq X_n)\ \text{a.s.},$$

$$\boldsymbol{E}[X_m] = \boldsymbol{E}[X_n](\leq \boldsymbol{E}[X_n], \geq \boldsymbol{E}[X_n]).$$

鞅这个名词起源于将赌注加倍直到赢为止的一种赌法的法语

叫法. 将 X_n 理解为时刻 n 赌徒的赌金，那么鞅性表示再赌一局后赌徒的平均赌金就是他现有的赌金. 因此赌博是公平的. 事实上，鞅是最重要的随机序列的类型之一，已是现代概率论与统计所必不可少的.

对一个随机序列 $X=(X_n)_{n\geq 0}$，令

$$F^0(X)=(\mathscr{F}_n^0(X))_{n\geq 0},\quad \mathscr{F}_n^0(X)=\sigma(X_0,X_1\cdots,X_n),\ n\geq 0.$$

显然，$F^0(X)$是一个流，称为 X 的**自然流**，它也是使 X 为适应序列的最小流.

由条件期望的平滑性质，任一 F-鞅(F-上鞅，F-下鞅)关于它的自然流也是鞅(上鞅，下鞅).

在下面的讨论中，流 F 是固定的，为简便起见，我们将省略字冠“F-”. 例如，F-鞅简称为鞅，适应序列即 F-适应序列.

由定义可见，如果 $X=(X_n)$ 为上鞅(下鞅)，则 $-X=(-X_n)$ 为下鞅(上鞅). 一个随机序列为鞅当且仅当它既是上鞅，又是下鞅.

下面我们给出一些鞅、上鞅、下鞅的例子，读者可直接给以验证.

2.2 例 1)设 ξ 为一可积随机变量. 令 $X_n=E[\xi|\mathscr{F}_n]$，则 (X_n) 为鞅.

2)设(ξ_n)为一适应的可积随机变量序列，对每个 $n\geq 0$，ξ_{n+1} 与 $\mathscr{F}_n$ 独立(从而(ξ_n)为独立序列). 如果对每个 $n\geq 1$，$E[\xi_n]=0(\leq 0,\ \geq 0)$，则$(X_n=\sum_{i=0}^{n}\xi_i,n\geq 0)$为鞅(上鞅，下鞅).

3)设(ξ_n)为一适应的非负可积随机变量序列，对每个 $n\geq 0$，ξ_{n+1} 与 $\mathscr{F}_n$ 独立. 如果对每个 $n\geq 1$，$E[\xi_n]=1(\leq 1,\ \geq 1)$，则$(X_n=\prod_{i=0}^{n}\xi_i,n\geq 0)$为鞅(上鞅，下鞅).

4)(2)的推广) 设(ξ_n)为一适应的可积随机变量序列. 如果对每个 $n\geq 0$，$E[\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n]=0(\leq 0,\geq 0)$，则$(X_n=\sum_{i=0}^{n}\xi_i,n\geq 0)$为

鞅(上鞅,下鞅).

5) 设(ξ_n)为独立同分布随机序列,且

$$\boldsymbol{P}(\xi_n=1)=p,\ \boldsymbol{P}(\xi_n=-1)=q=1-p,\ 0<p<1.$$

令

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\ X_n=\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n},\quad n\geqslant 0,$$

则(X_n)关于它的自然流为鞅.

2.3定理 1) 设$X=(X_n)$, $Y=(Y_n)$为两个鞅(上鞅),则$X+Y=(X_n+Y_n)$为鞅(上鞅), $X\wedge Y=(X_n\wedge Y_n)$为上鞅.

2) 设$X=(X_n)$为鞅(下鞅), f为$\boldsymbol{R}$上一连续凸(连续凸增)函数.如果每个$f(X_n)$可积,则$f(X)=(f(X_n))$为下鞅.

证明 1) 显然.往证2).一方面我们有

$$f(X_n)=f(E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n])(\leqslant f(E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]))\quad \text{a.s.}.\tag{3.1}$$

另一方面,由Jensen不等式

$$f(E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n])\leqslant E[f(X_{n+1})|\mathscr{F}_n]\quad \text{a.s.}.\tag{3.2}$$

合并(3.1)与(3.2)知$(f(X_n))$为下鞅. □

2.4系 1) 设(X_n)为下鞅,则(X_n^+)也为下鞅.若对每个$n\geqslant 0$, $X_n\log^+X_n$可积,则$(X_n\log^+X_n)$为下鞅,这里$\log^+x=(\log x)I_{[1,\infty)}(x)$.

2) 设(X_n)为鞅或非负下鞅, $\lambda\geqslant 1$为一常数.若对每个$n\geqslant 0$, $|X_n|^\lambda$可积,则$(|X_n|^\lambda)$为下鞅.

现在我们要开始讨论最大不等式与上穿不等式.为此先要引进停时的概念.

2.5定义 在$\overline{N}$中取值的随机变量T叫做**停时**(F-停时),或**可选时**,如果对一切$n\geqslant 0$, $[T=n]\in\mathscr{F}_n$,或等价地, $[T\leqslant n]\in\mathscr{F}_n$.

设T为一停时,令

$$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}_\infty;\forall n\geqslant 0, A\cap[T=n]\in\mathscr{F}_n\},$$

称$\mathscr{F}_T$为T**前事件σ-域**.显然有

$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F}_\infty : \forall\, n \geqslant 0, A \cap [T \leqslant n] \in \mathscr{F}_n\},$$

易见，停时 T 为 $\mathscr{F}_T$-可测. $T \equiv n(n \in \overline{N})$ 为停时，且 $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_n$. 若 T 为停时，则对每个 $n \geqslant 1$，$T+n$ 也为停时.

实际上，一个流 $(\mathscr{F}_n)$ 描写了某个随机现象的历史演变，$\mathscr{F}_n$ 代表到时刻 n 为止所观察到的信息. 停时 T 的特性就在于事件"到时刻 n T 已经发生"只依赖于到时刻 n 为止的全部历史，而与任何将来的信息无关. 例如，假设 X_n 表示一赌徒在时刻 n 的赌金，$\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n)$. 该赌徒有权选择停止赌博的时间. 但是作出是否停止赌博的决定只能利用到时刻 n 为止他所获得的信息. 显见，在时刻 n 他不知道任何将来的结果 $X_{n+1}, X_{n+2} \cdots$. 所以，他所选择的停止赌博的时间必须是一个停时. 这也是"停时"或"可选时"这些名称的来源. 下一定理提供了一类常用的与适应随机序列相联系的停时.

2.6定理 设 (X_n) 为适应随机序列，$B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R})$，$S$ 为一停时. 令

$$T(\omega) = \inf\{n : n \geqslant S(\omega),\ X_n(\omega) \in B\},$$

则 T 为停时（按约定 $\inf \varnothing = +\infty$).

特别，$T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in B\}$ 为停时.

证明 对每个 $n \geqslant 0$

$$[T = n] = \bigcup_{k=0}^{n} \{[S = k] (\bigcap_{k \leqslant m < n} [X_m \in B^c]) [X_n \in B]\} \in \mathscr{F}_n.$$

因此，T 为停时. □

2.7例 考虑独立重复试验，每次试验有两个可能结果：成功或失败，即令

$$X_n = \begin{cases} 1, \text{若第 } n \text{ 次试验成立}, \\ 0, \text{若第 } n \text{ 次试验失败}, \end{cases} \quad n \geqslant 1.$$

设 $(\mathscr{F}_n)$ 为 (X_n) 的自然流. 令

$$T_1 = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = 1\},$$
$$T_{n+1} = \inf\{n > T_n : X_n = 1\}, \quad n \geqslant 1.$$

则 T_n 为第 n 次成功的等待时间. 由于 (X_n) 独立同分布，不难证明 $(T_1, T_2-T_1, \cdots, T_n-T_{n-1}, \cdots)$ 也独立同分布，且 T_1 服从几何分布.

2.8定理 设 $(X_n)_{n\geq 0}$ 为一适应序列，ξ 为一 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的实值随机变量，T 为一停时. 令 $X_\infty=\xi$, $X_T(\omega)=X_{T(\omega)}(\omega)$, $\omega\in\Omega$. 则 X_T 为 $\mathscr{F}_T$ 可测.

证明 设 $B\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R})$, $n\geq 0$. 则有

$$[X_T\in B]=\bigcup_{k\in\bar{N}}([X_k\in B]\cap[T=k])\in\mathscr{F}_\infty,$$

$$[X_T\in B]\cap[T=n]=[X_n\in B]\cap[T=n]\in\mathscr{F}_n.$$

这表明 $[X_T\in B]\in\mathscr{F}_T$，即 X_T 为 $\mathscr{F}_T$ 可测. □

2.9定理 设 S、T 为停时，(S_k) 为停时列.

1) $\bigwedge\limits_k S_k$、$\bigvee\limits_k S_k$ 为停时.

2) $A\in\mathscr{F}_S\Rightarrow A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_T$, $A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_T$.

3) $S\leqslant T\Rightarrow\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$.

4) 设 $A\in\mathscr{F}_S$，令

$$S_A=SI_A+(+\infty)I_{A^c}$$

则 S_A 为停时（称为停时 S 到 A 上的局限），且 $\mathscr{F}_{S_A}\cap A=\mathscr{F}_S\cap A$.

证明 1) 由下列等式推得：

$$[\bigwedge_k S_k\leqslant n]=\bigcup_k[S_k\leqslant n],$$

$$[\bigvee_k S_k\leqslant n]=\bigcap_k[S_k\leqslant n].$$

2) 设 $A\in\mathscr{F}_S$，则 $A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_\infty$，且对一切 $n\geq 0$，有

$$A\cap[S\leqslant T]\cap[T=n]=(A\cap[S\leqslant n])\cap[T=n]\in\mathscr{F}_n.$$

故 $A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_T$. 同理可证 $A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_T$.

3) 由2) 推得. 4) 及5) 都显然. □

2.10定理 设 (X_n) 为一鞅（上鞅），S、T 为两个有界停时，且 $S\leqslant T$，则有

$$E[X_T\mid\mathscr{F}_S]=X_S(\leqslant X_S)\quad \text{a.s.}.\tag{10.1}$$

证明 只证上鞅情形. 设 $T\leqslant n$，则 $E[|X_T|]\leqslant\sum\limits_{j=0}^{n}E[|X_j|]$，从而 X_T、X_S 可积. 令 $A\in\mathscr{F}_S$，$j\geq 0$，我们有

$$A \cap [S = j] \cap [T > j] \in \mathscr{F}_j.$$

首先假定 $T-S\leqslant 1$. 这时由上鞅性，我们有

$$\int_A (X_S - X_T)dP = \sum_{j=0}^{n} \int_{A\cap[S=j]\cap[T>j]} (X_j - X_{j+1})dP \geqslant 0.$$

对一般情形，令 $R_j = T\wedge(S+j)$，$j=1,\cdots,n$，则每个 R_j 为停时，且 $S\leqslant R_1\leqslant\cdots\leqslant R_n=T$，$R_1-S\leqslant 1$，$R_{j+1}-R_j\leqslant 1(1\leqslant j\leqslant n-1)$. 令 $A\in\mathscr{F}_S$. 对每个 j，$1\leqslant j\leqslant n$，$A\in\mathscr{F}_{R_j}$(定理2.9.3)). 利用上面已证结果得

$$\int_A X_S dP \geqslant \int_A X_{R_1} dP \geqslant \cdots \geqslant \int_A X_T dP. \qquad (10.2)$$

但由定理2.5，X_i 为 $\mathscr{F}_i$-可测，由(10.2)得(10.1). □

2.11系 设(X_n)为一上鞅，T 为一停时，则有

$$E[|X_{T\wedge k}|] \leqslant E[X_0] + 2E[X_k^-], \qquad (11.1)$$

$$E[|X_T I_{[T<\infty]}|] \leqslant 3\sup_n E[|X_n|]. \qquad (11.2)$$

证明 由于(X_n^-)为下鞅，故由定理2.10有

$$E[|X_{T\wedge k}|] = E[X_{T\wedge k}] + 2E[X_{T\wedge k}^-] \leqslant E[X_0] + 2E[X_k^-].$$

此即(11.1). 于是有

$$E[|X_{T\wedge k} I_{[T<\infty]}|] \leqslant E[X_0] + 2E[X_k^-] \leqslant 3\sup_n E[|X_n|].$$

令 $k\to\infty$，由 Fatou 引理得(11.2). □

定理2.10是 Doob 停止定理的一个特例(有界停时情形)，它的一般形式参见定理2.35及2.38. 下一定理中的不等式(12.3)通常称为上鞅最大不等式.

2.12定理 设(X_n)为一上鞅，$k\geqslant 0$，则对任何 $\lambda>0$，我们有

$$\lambda P(\sup_{n\leqslant k} X_n \geqslant \lambda) \leqslant E[X_0] - \int_{[\sup_{n\leqslant k} X_n<\lambda]} X_k dP, \qquad (12.1)$$

$$\lambda P(\inf_{n\leqslant k} X_n \leqslant -\lambda) \leqslant \int_{[\inf_{n\leqslant k} X_n\leqslant -\lambda]} (-X_k)dP, \qquad (12.2)$$

$$\lambda P(\sup_{n\leqslant k} |X_n| \geqslant \lambda) \leqslant E[X_0] + 2E[X_k^-]. \qquad (12.3)$$

证明 令 $T=\inf\{n\geqslant 0: X_n\geqslant\lambda\}\wedge k$，则 T 为有界停时，且在

$[\sup_{n\le k}X_n\geq\lambda]$上有 $X_T\geq\lambda$；在$[\sup_{n\le k}X_n<\lambda]$上 $T=k$. 于是由定理2.10

$$E[X_0]\geq E[X_T]=\int_{[\sup_{n\le k}X_n\geq\lambda]}X_T dP+\int_{[\sup_{n\le k}X_n<\lambda]}X_T dP$$

$$\geq\lambda P(\sup_{n\le k}X_n\geq\lambda)+\int_{[\sup_{n\le k}X_n<\lambda]}X_k dP.$$

此即(12.1). 同理可证(12.2). 由(12.1)及(12.2)即得(12.3). □

2.13系 设(X_n)为一鞅. 若$E[X_k^2]<\infty$，则对任何$\lambda>0$

$$P(\sup_{n\le k}|X_n|\geq\lambda)\leq\frac{1}{\lambda^2}E[X_k^2]. \tag{13.1}$$

(此即 **Kolmogorov 不等式**.)

证明 由 Jensen 不等式，对一切 $n\leq k$，有

$$E[X_n^2]=E[(E[X_k|\mathscr{F}_n])^2]\leq E[X_k^2]<\infty.$$

故$(-X_n^2)_{n=0,1,\cdots,k}$为上鞅. 对此上鞅及$\lambda^2$应用不等式(12.2)即得(13.1). □

下面我们将证明极其重要的上鞅**上穿不等式**. 为此，先交代一些必要的概念.

设$X=(X_n)_{n\geq 0}$为一适应随机序列，$[a,b]$为一闭区间. 令

$$T_0=\inf\{n\geq 0;X_n\leq a\},$$
$$T_1=\inf\{n;n>T_0,X_n\geq b\},$$
$$\cdots\cdots$$
$$T_{2j}=\inf\{n;n>T_{2j-1},X_n\leq a\},$$
$$T_{2j+1}=\inf\{n;n>T_{2j},X_n\geq b\},$$
$$\cdots\cdots$$

则$(T_k)_{k\geq 0}$为一停时上升列. 若$T_{2j-1}(\omega)<\infty$，则序列$(X_0(\omega),X_1(\omega),\cdots X_{T_{2j-1}}(\omega))$上穿区间$[a,b]$ j次. 我们用$U_a^b[X,k]$表示序列$(X_0,X_1,\cdots,X_k)$上穿$[a,b]$的次数，则显然有

$$[U_a^b[X,k]=j]=[T_{2j-1}\leq k<T_{2j+1}]\in\mathscr{F}_k.$$

从而$U_a^b[X,k]$为$\mathscr{F}_k$可测随机变量.

2.14定理 若(X_n)为一上鞅，则对$N\geq 1$，$k\geq 0$，有

$$P(U_a^b[X,N]\geq k+1)\leq\frac{1}{b-a}E[(X_N-a)^- I_{[U_a^b[X,N]=k]}],$$

(14.1)

$$E[U_a^b[X,N]] \leqslant \frac{1}{b-a}E[(X_N-a)^-].\tag{14.2}$$

若(X_n)为一下鞅，则对 $N\geqslant 1, k\geqslant 1$，有

$$P(U_a^b[X,N]\geqslant k) \leqslant \frac{1}{b-a}E[(X_N-a)^+ I_{[U_a^b[X,N]=k]}],\tag{14.3}$$

$$E[U_a^b[X,N]] \leqslant \frac{1}{b-a}E[(X_N-a)^+].\tag{14.4}$$

证明 设(X_n)为上鞅，则由定理2.10，对 $k\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant E[X_{T_{2k+1}\wedge N}-X_{T_{2k}\wedge N}] \\ &= E[(X_{T_{2k+1}\wedge N}-X_{T_{2k}\wedge N})(I_{[T_{2k}\leqslant N<T_{2k+1}]}+I_{[N\geqslant T_{2k+1}]})] \\ &\geqslant E[(X_N-a)I_{[T_{2k}\leqslant N<T_{2k+1}]}+(b-a)I_{[N\geqslant T_{2k+1}]}] \end{aligned}\tag{14.5}$$

由于$[U_a^b[X,N]\geqslant k+1]\subset[N\geqslant T_{2k+1}]$及$[T_{2k}\leqslant N<T_{2k+1}]\subset[U_a^b[X,N]=k]$，(14.1)由(14.5)即得. 将(14.1)式两边对 $k\geqslant 0$相加可得(14.2).

现设(X_n)为下鞅，则由定理2.10，对 $k\geqslant 1$，有

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant E[X_{T_{2k-1}\wedge N}-X_{T_{2k}\wedge N}] \\ &= E[(X_{T_{2k-1}\wedge N}-X_{T_{2k}\wedge N})(I_{[T_{2k-1}\leqslant N<T_{2k}]}+I_{[N\geqslant T_{2k}]})] \\ &\geqslant E[(b-X_N)I_{[T_{2k-1}\leqslant N<T_{2k}]}+(b-a)I_{[N\geqslant T_{2k}]}] \\ &= E[(a-X_N)I_{[T_{2k-1}\leqslant N<T_{2k}]}+(b-a)I_{[N\geqslant T_{2k-1}]}]. \end{aligned}\tag{14.6}$$

由于$[U_a^b[X,N]\geqslant k]\subset[N\geqslant T_{2k-1}]$及$[T_{2k-1}\leqslant N<T_{2k}]\subset[U_a^b[X,N]=k]$，(14.3)由(14.6)即得. 将(14.3)式两边对 $k\geqslant 1$相加可得(14.4). □

最后，在下一定理中证明 **Doob** 不等式.

2.15定理 设(X_n)为一非负下鞅. 令 $X^*=\sup\limits_n X_n$，则有

$$E[X^*]\leqslant \frac{e}{e-1}(1+\sup_n E[X_n\log^+ X_n]),\tag{15.1}$$

$$\|X^*\|_p \leqslant q\sup_n\|X_n\|_p,\tag{15.2}$$

其中 $p>1$及 $q>1$为一对共轭指数：$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证明 设 $k\geqslant 0$，令 $X_k^*=\sup\limits_{n\leqslant k}X_n$，设 $\Phi(\lambda)$ 为 $\boldsymbol{R}_+$上一有限值右

连续增函数，且 $\Phi(0)=0$. 由 Fubini 定理及(12.2)，我们有

$$E[\Phi(X_k^*)] = \int_\Omega\int_{[0,X_k^*]} d\Phi(\lambda)dP = \int_{[0,\infty)} P(X_k^* \geqslant \lambda)d\Phi(\lambda)$$

$$\leqslant \int_{[0,\infty)}\left[\frac{1}{\lambda}\int_{[X_k^*\geqslant\lambda]} X_k dP\right]d\Phi(\lambda) = E\left[X_k\left(\int_0^{X_k^*}\frac{d\Phi(\lambda)}{\lambda}\right)\right].$$

(15.3)

令 $\Phi(\lambda)=(\lambda-1)^+$，由(15.3)得

$$E[(X_k^*-1)] \leqslant E[(X_k^*-1)^+] \leqslant E[X_k\log^+ X_k^*].$$

(15.4)

由于 $\log x \leqslant \frac{x}{e}$ $(x\geqslant 0)$，对任何 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$，我们有

$$a\log^+ b \leqslant a\log^+ a + \frac{b}{e},$$

从而有

$$E[X_k\log^+ X_k^*] \leqslant E[X_k\log^+ X_k] + \frac{1}{e}E[X_k^*]. \quad (15.5)$$

由(15.4)及(15.5)得

$$E[X_k^*] \leqslant \frac{e}{e-1}(1 + \sup_k E[X_k\log^+ X_k]). \quad (15.6)$$

但由于 $X_k^* \uparrow X^*$，在(15.6)中令 $k\to\infty$，由 Fatou 引理得(15.1).

现在(15.3)中令 $\Phi(\lambda)=\lambda^p, p>1$，则有

$$E[(X_k^*)^p] \leqslant \frac{p}{p-1}E[X_k(X_k^*)^{p-1}] = qE[X_k(X_k^*)^{p-1}].$$

故由 Hölder 不等式(注意 $(p-1)q=p$)得

$$E[(X_k^*)^p] \leqslant q(E[(X_k)^p])^{1/p}(E[(X_k^*)^p])^{1/q}. \quad (15.7)$$

为证(15.2)，不妨设 $\sup_n\|X_n\|_p < +\infty$. 于是有

$$\|X_k^*\|_p \leqslant \left\|\sum_{n=0}^k X_n\right\|_p \leqslant \sum_{n=0}^k \|X_n\|_p < \infty.$$

在(15.7)两边用 $(E[(X_k^*)^p])^{1/q}$ 去除，我们有

$$\|X_k^*\|_p \leqslant q\|X_k\|_p \leqslant q\sup_n\|X_n\|_p. \quad (15.8)$$

由于 $X_k^* \uparrow X^*$，在(15.8)中令 $k\to\infty$，由 Fatou 引理得(15.2). □

2.16系 设(X_n)为一鞅，$p>1$及$q>1$为一对共轭指数，则

$$\|\sup_n |X_n|\|_p \leqslant q \sup_n \|X_n\|_p. \tag{16.1}$$

§2. 收敛定理

2.17定理 设(X_n)为一上鞅. 如果$\sup_n \boldsymbol{E}[X_n^-]<\infty$（或者等价地，$\sup_n \boldsymbol{E}[|X_n|]<\infty$，因为$\boldsymbol{E}[|X_n|]=\boldsymbol{E}[X_n]+2\boldsymbol{E}[X_n^-]$），则当$n\to+\infty$时，$X_n$ a.s. 收敛于一可积随机变量X_∞. 若(X_n)为非负上鞅，则对一切$n\geqslant 0$，有

$$\boldsymbol{E}[X_\infty|\mathscr{F}_n]\leqslant X_n \quad \text{a.s.}. \tag{17.1}$$

证明 设$a,b\in\boldsymbol{Q}$，$a<b$. 令$U_a^b(X)$为序列$(X_n)_{n\geqslant 0}$上穿区间$[a,b]$的次数，即$U_a^b(X)=\lim_{N\to\infty}U_a^b[X,N]$. 由(14.2)，我们有

$$\boldsymbol{E}[U_a^b(X)]\leqslant\frac{1}{b-a}\sup_N \boldsymbol{E}[(X_N-a)^-]\leqslant\frac{1}{b-a}(a^+\sup_N \boldsymbol{E}[X_N^-])<\infty.$$

于是$U_a^b(X)<\infty$ a.s.. 令

$$W_{a,b}=[\liminf_{n\to\infty}X_n<a,\ \limsup_{n\to\infty}X_n<b],$$

$$W=\bigcup_{a,b\in\boldsymbol{Q},a<b}W_{a,b}.$$

由于$W_{a,b}\subset[U_a^b(X)=+\infty]$，故$\boldsymbol{P}(W_{a,b})=0$，从而$\boldsymbol{P}(W)=0$. 若$\omega\notin W$，则$\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)$存在，记为$X_\infty(\omega)$；若$\omega\in W$，令$X_\infty(\omega)=0$. 于是$X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X_\infty$. 由Fatou引理

$$\boldsymbol{E}[|X_\infty|]\leqslant\sup_n \boldsymbol{E}[|X_n|]<\infty,$$

即X_∞为可积.

如果(X_n)非负，则由于对任何$m>n$有

$$\boldsymbol{E}[X_m|\mathscr{F}_n]\leqslant X_n \quad \text{a.s.}.$$

令$m\to\infty$，由Fatou引理得(17.1). □

2.18定理 设(X_n)为一鞅（上鞅）. 如果(X_n)一致可积，则存在一可积随机变量X_∞，使得$X_n\xrightarrow{\text{a.s.},L^1}X_\infty$，且对一切$n\geqslant 0$

$$E[X_\infty|\mathscr{F}_n] = X_n(\leqslant X_n) \text{ a.s.}. \tag{18.1}$$

证明 由于(X_n)一致可积，故$\sup_n E[|X_n|]<\infty$，(定理1.9). 由定理2.17，$X_n \longrightarrow X_\infty$ a.s.. 于是由定理1.11，$X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$. 由此容易推得(18.1). (18.1)是一致可积鞅的一般形式. □

2.19系 设ξ为一可积随机变量，令$\xi_n=E[\xi|\mathscr{F}_n]$，$\eta=E[\xi|\mathscr{F}_\infty]$，则$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}, L^1} \eta$.

证明 由于(ξ_n)一致可积(定理1.8)，故由定理2.18，$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}, L^1} \xi_\infty$. 设$A\in\bigcup_n\mathscr{F}_n$，则存在某个$n$，使得$A\in\mathscr{F}_n$，于是有

$$E[\xi_\infty I_A]=E[\xi_n I_A]=E[\xi I_A]=E[\eta I_A].$$

由于$\xi_\infty,\eta\in\bigvee_n\mathscr{F}_n=\mathscr{F}_\infty$，由系1.3.1)$\xi_\infty=\eta$ a.s.. □

2.20系 设(X_n)为一鞅或非负下鞅，$p>1$. 如果$\sup_n E[|X_n|^p]<\infty$，则(X_n)一致可积，$X_n\xrightarrow{\text{a.s.}, L^p}X_\infty$，且有

$$\|X_\infty\|_p=\sup_n\|X_n\|_p. \tag{20.1}$$

证明 由定理1.7.2)知，(X_n)一致可积，故由定理2.18，$X_n\to X_\infty$ a.s.. 对非负下鞅$(|X_n|)$应用Doob不等式(15.2)，有$X^*\in L^p$. 又$|X_n-X_\infty|^p\leqslant(2X^*)^p$，故由控制收敛定理，$X_n\xrightarrow{L^p}X_\infty$，从而有(20.1). □

下一定理推广了系2.19.

2.21定理 设(ξ_n)为一可积随机变量序列，且$\xi_n\to\xi_\infty$ a.s.. 如果存在一可积随机变量ξ，使得对一切n，$|\xi_n|\leqslant\xi$ a.s.，则

$$E[\xi_n|\mathscr{F}_n]\xrightarrow{\text{a.s.}, L^1}E[\xi_\infty|\mathscr{F}_\infty].$$

证明 令$u_m=\inf_{n\geqslant m}\xi_n$，$v_m=\sup_{n\geqslant m}\xi_n$，则$|u_m|\leqslant\xi$，$|v_m|\leqslant\xi$ a.s.，故有$u_m\xrightarrow{\text{a.s.}, L^1}\xi_\infty$，$v_m\xrightarrow{\text{a.s.}, L^1}\xi_\infty$. 另一方面，$E[u_m|\mathscr{F}_n]\leqslant E[\xi_n|\mathscr{F}_n]\leqslant E[v_m|\mathscr{F}_n]$，$n\geqslant m$. 于是由系2.19，我们有

$$E[u_m|\mathscr{F}_\infty]\leqslant\liminf_{n\to\infty}E[\xi_n|\mathscr{F}_n]\leqslant E[v_m|\mathscr{F}_\infty] \text{ a.s.}, \tag{21.1}$$

$$E[u_m|\mathscr{F}_\infty] \leqslant \limsup_{n\to\infty} E[\xi_n|\mathscr{F}_n] \leqslant E[v_m|\mathscr{F}_\infty] \text{ a.s.},$$

$$(21.2)$$

在(21.1)及(21.2)中令$m\to\infty$得$\lim\limits_{n\to\infty}E[\xi_n|\mathscr{F}_n]=E[\xi_\infty|\mathscr{F}_\infty]$ a.s.. 又由于$(E[|\xi||\mathscr{F}_n])$一致可积，且

$$|E[\xi_n|\mathscr{F}_n]| \leqslant E[|\xi_n||\mathscr{F}_n] \leqslant E[|\xi||\mathscr{F}_n] \quad \text{a.s.},$$

故$(E[\xi_n|\mathscr{F}_n])$一致可积，从而由定理1.11，$E[\xi_n|\mathscr{F}_n]\xrightarrow{L^1}E[\xi_\infty|\mathscr{F}_\infty]$. □

现在我们研究以$-N=\{\cdots,-2,-1,0\}$，为参数集的上鞅收敛性.

设$(\mathscr{F}_n)_{n\in -N}$为一列$\mathscr{F}$的子$\sigma$-域，对一切$n\in -N$，$\mathscr{F}_{n-1}\subset\mathscr{F}_n$. 一个$(\mathscr{F}_n)_{n\in -N}$适应的随机序列$(X_n)_{n\in -N}$称为**鞅**(**上鞅**)，如果对每个$n\in -N$，$X_n$可积，且有

$$E[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] = X_{n-1}(\leqslant X_{n-1}) \text{ a.s.}.$$

2.22定理 设$(X_n)_{n\in -N}$为一上鞅，如果$\lim\limits_{n\to -\infty}E[X_n]<+\infty$，则$(X_n)$一致可积，且$X_n\xrightarrow{\text{a.s.}, L^1}X_{-\infty}$.

证明 我们用$U_a^b[X,-N]$表示序列$(X_{-N},X_{-N+1},\cdots,X_0)$上穿区间$[a,b]$的次数，则由(14.2)得

$$EU_a^b[X,-N] \leqslant \frac{1}{b-a}E[(X_0-a)^-].$$

令$U_a^b(X)=\lim\limits_{N\to+\infty}U_a^b[X,-N]$，我们有

$$EU_a^b(X) \leqslant \frac{1}{b-a}E[(X_0-a)^-] < +\infty.$$

由于$U_a^b(X)$为序列$(-X_0,-X_{-1},-X_{-2},\cdots)$上穿$[-b,-a]$的次数，故由定理2.17的证明知$X_n\to X_{-\infty}$ a.s..(注意这一结论无条件地成立，但不必有$|X_{-\infty}|<\infty$ a.s..)

当$n\to-\infty$时，$E[X_n]\uparrow A>-\infty$. 依假定$A<+\infty$. 往证$(X_n)_{n\in -N}$一致可积. 由于$(E[X_0|\mathscr{F}_n])_{n\in -N}$一致可积，只需证$(X_n-E[X_0|\mathscr{F}_n])$一致可积. 于是，不妨假定$(X_n)$为非负上鞅. 给定$\varepsilon$

>0，取自然数 k 足够大，使得 $A-E[X_{-k}]<\frac{\varepsilon}{2}$. 对 $c>0$ 及 $n<-k$，由上鞅性，我们有

$$\int_{[X_n>c]} X_n dP = E[X_n] - \int_{[X_n\le c]} X_n dP \le E[X_n] - \int_{[X_n\le c]} X_{-k} dP$$

$$= E[X_n] - E[X_{-k}] + \int_{[X_n>c]} X_{-k} dP.$$

由于 $A\geq E[X_n]\geq E[X_{-k}]$，故 $n<-k$ 时，$E[X_n]-E[X_{-k}]<\frac{\varepsilon}{2}$.
另一方面，由于 $P(X_n>c)\leq \frac{1}{c}E[X_n]\leq\frac{A}{c}$，故当 c 足够大时，对一切 $n\in -N$，有

$$\int_{[X_n>c]} X_{-k}dP<\frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$\int_{[X_j>c]} X_j dP<\varepsilon,\quad j=0,-1,\cdots,-k.$$

于是当 c 足够大时，有

$$\sup_n\int_{[X_n>c]}X_n dP<\varepsilon.$$

这表明 (X_n) 一致可积. 既然 $X_n\to X_{-\infty}$ a.s.，故由定理1.11，$X_n \xrightarrow{L^1} X_{-\infty}$. □

2.23系 设 ξ 为一可积随机变量，$(\mathcal{G}_n)_{n\in N}$ 为一列单调下降的 $\mathcal{F}$ 的子 σ-域. 令 $\xi_n=E[\xi|\mathcal{G}_n]$，则

$$\xi_n\xrightarrow{a.s.,\,L^1}E[\xi|\bigcap_n\mathcal{G}_n].$$

证明 对一切 $n\in -N$，令 $\mathcal{F}_n=\mathcal{G}_{-n}$，$\eta_n=\xi_{-n}$，则 $(\eta_n)_{n\in -N}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n\in -N}$ 为一致可积. 故由定理2.22知，当 $n\to-\infty$ 时，$\eta_n\xrightarrow{a.s.,\,L^1}\eta_{-\infty}$，即 $n\to\infty$ 时，$\xi_n\xrightarrow{a.s.,\,L^1}\eta_{-\infty}$.

设 $A\in\bigcap_n\mathcal{G}_n$，我们有 $\lim_{n\to\infty}E[\xi_nI_A]=E[\eta_{-\infty}I_A]$. 但对一切 n，$E[\xi_nI_A]=E[\xi I_A]$，故有 $E[\eta_{-\infty}I_A]=E[\xi I_A]$. 由于 $\eta_{-\infty}\in\bigcap_n\mathcal{G}_n$，故 $\eta_{-\infty}=E[\xi|\bigcap_n\mathcal{G}_n]$. □

系2.19与2.23合在一起，通称 **Lévy 定理**.

下面我们利用鞅收敛定理证明强大数定律. 它是 Doob 于1944年给出的，是鞅论的早期应用中最精彩的例子之一.

2.24定理 设$(\xi_n)_{n\geq 1}$为独立同分布可积随机变量序列. 令$X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i, n\geq 1$，则

$$\frac{X_n}{n}\longrightarrow \boldsymbol{E}[\xi_1] \quad \text{a.s.}.$$

证明 依假设我们有

$$\boldsymbol{E}[\xi_i|X_n]=\boldsymbol{E}[\xi_1|X_n] \quad \text{a.s.}, \ i=1,\cdots,n, n\geq 1.$$

从而对$n\geq 1$，有

$$\frac{X_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}[\xi_i|X_n]=\boldsymbol{E}[\xi_1|X_n]=\boldsymbol{E}[\xi_1|X_n,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots]$$
$$=\boldsymbol{E}[\xi_1|X_n,X_{n+1},X_{n+2},\cdots] \quad \text{a.s.}.$$

令$\mathscr{G}_n=\sigma(X_n,X_{n+1},\cdots)$，则由系2.23得$\frac{X_n}{n}\xrightarrow{\text{a.s.},L^1}Z=\boldsymbol{E}[\xi_1|\bigcap_n\mathscr{G}_n]$. 由于$Z\in\bigcap_n\sigma(\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)$，由 Kolmogorov 的0-1律，$Z$ a.s. 等于一个常数. 因为$\boldsymbol{E}[Z]=\boldsymbol{E}[\xi_1]$，故$Z=\boldsymbol{E}[\xi_1]$ a.s.. □

下面是鞅收敛定理在测度论上一个简单而重要的应用.

2.25引理 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可分可测空间，$(A_n)_{n\geq 0}$为生成$\mathscr{F}$的一列集合. 令$\mathscr{F}_n=\sigma(A_0,\cdots,A_n)$，$\mathscr{P}_n$为$\mathscr{F}_n$的原子全体（即$\mathscr{P}_n$为生成$\mathscr{F}_n$的$\Omega$的有限分割）. 设$\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}'$为$(\Omega,\mathscr{F})$上的两个概率测度，且$\boldsymbol{P}'\ll\boldsymbol{P}$，$\frac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}}$为其 Radon-Nikodym 导数. 令

$$X_n=\sum_{A\in\mathscr{P}_n}\frac{\boldsymbol{P}'(A)}{\boldsymbol{P}(A)}I_A, \quad n\geq 0,$$

（依约定，$\frac{0}{0}=0$），则(X_n)为一致可积的$(\mathscr{F}_n)$-鞅，且$\lim_{n\to\infty}X_n=\frac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}}$ $\boldsymbol{P}$-a.s..

证明 令$\xi=\frac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}}$，熟知

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_n]=\sum_{A\in P_n}\frac{\boldsymbol{E}[\xi I_A]}{\boldsymbol{P}(A)}I_A=X_n \quad \boldsymbol{P}\text{-a.s.}.$$

故(X_n)为一致可积鞅，且由系2.19，有

$$\lim_{n} X_n = E[\xi \mid \bigvee_n \mathscr{F}_n] = E[\xi \mid \mathscr{F}] = \xi \quad P\text{-a.s.}. \quad \square$$

2.26定理 设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可分可测空间，$(E, \mathscr{E})$为一可测空间，$(P_x)_{x\in E}$、$(P'_x)_{x\in E}$为$(\Omega, \mathscr{F})$上的两个测度的可测族（即对一切$A\in\mathscr{F}$，$x\mapsto P_x(A)$，$x\mapsto P'_x(A)$为E上的$\mathscr{E}$-可测函数），使得对一切$x\in E$，$P'_x \ll P_x$，则存在$E\times\Omega$上的$\mathscr{E}\times\mathscr{F}$-可测的非负实值函数$X(x,\omega)$，使得对一切$x\in E$，$X(x,\cdot)$为$P'_x$关于$P_x$的Radon-Nikodym导数.

证明 令$(A_n)_{n\ge 1}$为生成$\mathscr{F}$的一列集合. 我们沿用引理2.25的记号. 令

$$X_n(x,\omega) = \sum_{A\in\mathscr{A}_n} \frac{P'_x(A)}{P_x(A)} I_A(\omega).$$

则X_n为$\mathscr{E}\times\mathscr{F}$-可测. 对每个$x\in E$，由引理2.25，$X_n(x,\cdot)$ P_x a.s. 收敛于$\frac{dP'_x}{dP_x}$. 因此，只需令

$$X(x,\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n(x,\omega), & \text{若此极限存在且有限}, \\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases} \quad \square$$

§3. 上鞅的分解定理

本节研究上鞅的构造. 主要结果是上鞅的Doob分解，Riesz分解，Krickeberg分解.

2.27定义 随机序列$(X_n)_{n\ge 0}$称为**F-可料的**，如果X_0为$\mathscr{F}_0$可测，且对每个$n\ge 1$，X_n为$\mathscr{F}_{n-1}$-可测.

$(A_n)_{n\ge 0}$称为**增序列**，如果对每个$n\ge 0$，$0\le A_n\le A_{n+1}$ a.s.，这时定义$A_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. 增序列$(X_n)$称为**可积的**，若$E[A_\infty]<\infty$.

2.28定理 设$X=(X_n)$为一上鞅，则X可唯一地分解为

$$X_n = M_n - A_n, \tag{28.1}$$

其中(M_n)为一鞅，(A_n)为一可料增过程，且$A_0=0$. (28.1)称为X的Doob分解.

证明 如果(28.1)是满足定理要求的分解，则由(A_n)的可料性及(M_n)的鞅性可得

$$A_{n+1}-A_n=\boldsymbol{E}[A_{n+1}-A_n|\mathscr{F}_n]=\boldsymbol{E}[X_n-X_{n+1}|\mathscr{F}_n]$$
$$=X_n-\boldsymbol{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n].$$

由于$A_0=0$，我们有

$$A_n=\sum_{j=0}^{n-1}(X_j-\boldsymbol{E}[X_{j+1}|\mathscr{F}_j]),\ n\geqslant 1. \qquad (28.2)$$

这表明满足要求的分解是唯一的. 另一方面，如果用(28.2)定义(A_n)，并令$M_0=X_0$，

$$M_n=X_n+A_n=M_0+\sum_{j=0}^{n-1}(X_{j+1}-\boldsymbol{E}[X_{j+1}|\mathscr{F}_j]),n\geqslant 1.$$

则$X_n=M_n-A_n$正是所要求的分解. □

2.29定义 一非负上鞅(X_n)叫做**位势**，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{E}[X_n]=0$，即$X_n\xrightarrow{L^1}0$.

由定理1.11知，任何位势为一致可积上鞅.

2.30定义 设$X=(X_n)$为一上鞅. 如果存在一鞅$Y=(Y_n)$及一位势$Z=(Z_n)$，使得$X_n=Y_n+Z_n$，则称X有Riesz分解：$X=Y+Z$.

设上鞅$X=(X_n)$有Riesz分解，则其Riesz分解必唯一. 事实上，设$X_n=Y_n+Z_n$，$X_n=Y'_n+Z'_n$为X的两个Riesz分解，则$(Y_n-Y'_n)$为鞅，且

$$Y_n-Y'_n=Z'_n-Z_n\xrightarrow{L^1}0.$$

由定理1.11，$(Y_n-Y'_n)$为一致可积鞅. 于是由(18.1)，对一切n，有$Y_n=Y'_n$ a.s.，从而也有$Z_n=Z'_n$ a.s..

2.31定理 1)为要一上鞅(X_n)有Riesz分解，必须且只需$\lim\limits_{n\to\infty}E[X_n]>-\infty$.

2)设(X_n)为非负上鞅，$X_n=Y_n+Z_n$为其Riesz分解，则(Y_n)为一非负鞅.

3)设(X_n)为一致可积上鞅，则$X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$. 令

$$Y_n = E[X_\infty | \mathscr{F}_n],\ Z_n = X_n - Y_n,$$

则 $X_n = Y_n + Z_n$ 为 (X_n) 的 Riesz 分解.

证明 1) 必要性显然. 往证充分性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n] > -\infty$, $X_n = M_n - A_n$ 为 (X_n) 的 Doob 分解, 则 (A_n) 可积: $E[A_\infty] < \infty$. 令 $Y_n = M_n - E[A_\infty | \mathscr{F}_n]$, $Z_n = E[A_\infty | \mathscr{F}_n] - A_n$, 则 $X_n = Y_n + Z_n$ 为 (X_n) 的 Riesz 分解.

2) 设 (X_n) 为一非负上鞅, $X_n = Y_n + Z_n$ 为其 Riesz 分解, 则由 1), 我们有

$$\begin{aligned} Y_n &= M_n - E[A_\infty | \mathscr{F}_n] \\ &= \lim_{p\to\infty} E[M_p | \mathscr{F}_n] - \lim_{p\to\infty} E[A_p | \mathscr{F}_n] \\ &= \lim_{p\to\infty} E[M_p - A_p | \mathscr{F}_n] \\ &= \lim_{p\to\infty} E[X_p | \mathscr{F}_n] \geqslant 0. \end{aligned}$$

3) 显然. □

2.32定理 设 (X_n) 为一上鞅(鞅), 则下列命题等价:

1) $\sup_n E[X_n^-] < \infty$ ($\sup_n E[|X_n|] < \infty$),

2) (X_n) 可分解为(称为 Krickeberg 分解):

$$X_n = L_n - M_n, \tag{32.1}$$

其中 (L_n) 为一非负上鞅(鞅), (M_n) 为一非负鞅. 此外, 若1)成立, 我们可使分解(32.1)有下述最小性: 若 $X_n = L'_n - M'_n$ 是又一这样的分解, 则对每个 n, $L_n \leqslant L'_n$, $M_n \leqslant M'_n$ a. s..

证明 2)⇒1) 显然. 往证1)⇒2). 因为 $(-X_n^-)$ 是上鞅, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} E[-X_n^-] > -\infty$ (由1)), 由定理2.31 $(-X_n^-)$ 有 Riesz 分解:

$$-X_n^- = Y_n + Z_n,$$

其中 (Y_n) 为一鞅, (Z_n) 为一位势. 令 $L_n = X_n - Y_n$, $M_n = -Y_n$, 则 (L_n) 为上鞅, (M_n) 为鞅. 同时, 我们有

$$L_n = X_n^+ + Z_n \geqslant 0,\ M_n = X_n^- + Z_n \geqslant 0.$$

于是1)⇒2)得证. 设 $X_n = L'_n - M'_n$ 是又一满足要求的分解, 则 $M'_p \geqslant X_p^- = M_p - Z_p$,

$$M'_n = \lim_{p\to\infty} E[M_p | \mathscr{F}_n] \geq \lim_{p\to\infty} E[M_p - Z^p | \mathscr{F}_n] = M_n.$$

由此即得 $L'_n = X_n + M'_n \geq X_n + M_n = L_n$. □

§4. Doob 停止定理

在§1中，为了证明鞅与上鞅的一些基本不等式，我们已经对有界停时证明了 Doob 停止定理(也称可选取样定理). 这里将把这结果推广到更一般的场合. 有两种推广. 第一种是推广到可闭鞅与可闭上鞅(见定义2.33)，这时 Doob 停止定理对一切停时成立. 第二种是推广到一般的鞅与上鞅，但这时 Doob 停止定理只对某些停时成立. 后者在统计中有重要的应用.

2.33定义 一鞅(上鞅)$(X_n, n\in N)$称为**可右闭的**，如果存在一可积随机变量 $X_\infty \in \mathscr{F}_\infty$，使得对一切 $n\in \boldsymbol{N}$，$E[X_\infty | \mathscr{F}_n] = X_n$ $(\leq X_n)$ a.s.. 这时$(X_n, n\in \overline{N})$称为**右闭鞅(上鞅)**，X_∞称为$(X_n, n\in N)$的**右闭元**.

由鞅收敛定理可知，一可右闭的鞅的右闭元是唯一的，一可右闭的上鞅有一最大的右闭元(见定理2.34后的注). 由定义即知，一可右闭鞅即为一致可积鞅. 必须指出，一个鞅可以是右闭上鞅，但不是右闭鞅.

2.34定理 设$(X_n, n\in N)$为一上鞅. 为要(X_n)为可右闭的，必须且只需$(X_n^-, n\in N)$为一致可积的.

证明 必要性. 设 X_∞ 为(X_n)的右闭元，则对每个 n

$$X_n \geq E[X_\infty | \mathscr{F}_n] \geq - E[X_\infty^- | \mathscr{F}_n] \quad \text{a.s.},$$

$$X_n^- \leq E[X_\infty^- | \mathscr{F}_n] \quad \text{a.s.}.$$

由于$(E[X_\infty^- | \mathscr{F}_n])$一致可积，故$(X_n^-, n\in N)$也一致可积.

充分性. 设(X_n^-)为一致可积上鞅，则 $\sup_n E[X_n^-] < \infty$，由定理2.17，$X_n \to X_\infty$ a.s.，其中 X_∞ 为一可积随机变量. 往证 X_∞ 为(X_n)的右闭元. 设 $A\in \mathscr{F}_n$，我们有

$$\int_A X_n dP \geq \int_A X_{n+m} dP = \int_A X_{n+m}^+ dP - \int_A X_{n+m}^- dP, m\geq 1. \tag{34.1}$$

由于 $X_{n+m}^- \xrightarrow{L^1} X_\infty^-$, $m\to\infty$ (由定理1.11)时有
$$\lim_{m\to\infty}\int_A X_{n+m}^- dP = \int_A X_\infty^- dP. \qquad (34.2)$$
但 $X_{n+m}^+ \to X_\infty^+$ a.s., $m\to\infty$, 由 Fatou 引理
$$\int_A X_\infty^+ dP \leqslant \varliminf_{m\to\infty}\int_A X_{n+m}^+ dP. \qquad (34.3)$$
由(34.1)—(34.3), 我们有 $E[I_A X_n] \geqslant E[I_A X_\infty]$, 即 $E[X_\infty|\mathscr{F}_n] \leqslant X_n$ a.s.. 这表明 X_∞ 是(X_n)的右闭元. □

注 设(X_n)为一可右闭上鞅. 从上面的证明可知, $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ a.s. 存在, 且 X_∞ 是(X_n)的右闭元. 实际上, X_∞ 是最大的右闭元. 若 ξ 是(X_n)的又一右闭元, 则
$$\xi = E[\xi|\mathscr{F}_\infty] = \lim_{n\to\infty} E[\xi|\mathscr{F}_n] \leqslant \lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty \quad \text{a.s.}.$$

下一定理是右闭鞅及右闭上鞅的 **Doob 停止定理**.

2.35定理 设$(X_n, n\in \overline{N})$为一鞅(上鞅), S, T 为两个停时, 且 $S\leqslant T$, 则 X_S, X_T 可积, 并且有
$$E[X_T|\mathscr{F}_S] = X_S (\leqslant X_S) \quad \text{a.s.}. \qquad (35.1)$$

证明 设$(X_n, n\in\overline{N})$为鞅. 令 $S_n = SI_{[S\leqslant n]} + (+\infty)I_{[S>n]}$. 由于集合$\{0,1,\cdots,n,+\infty\}$与集合$\{0,1,\cdots,n,n+1\}$保序同构, 故由定理2.10,
$$X_{S_n} = E[X_\infty|\mathscr{F}_{S_n}] \quad \text{a.s.}.$$
由于 $\mathscr{F}_S \cap [S=S_n] = \mathscr{F}_{S_n}\cap[S=S_n]$ (定理2.9.2)), 故由定理1.23
$$E[X_\infty|\mathscr{F}_S]I_{[S=S_n]} = E[X_\infty|\mathscr{F}_{S_n}]I_{[S=S_n]}$$
$$= X_{S_n}I_{[S=S_n]} = X_S I_{[S=S_n]} \quad \text{a.s.}.$$
由于$[S=S_n]\uparrow\Omega$, 故得
$$E[X_\infty|\mathscr{F}_S] = X_S \quad \text{a.s.}.$$
特别, 这表明 X_S 可积. 对停时 T 也有同样的等式, 故有
$$E[X_T|\mathscr{F}_S] = E[E[X_\infty|\mathscr{F}_T]|\mathscr{F}_S] = E[X_\infty|\mathscr{F}_S] = X_S \quad \text{a.s.}.$$
现设$(X_n, n\in\overline{N})$为上鞅. 令 $Y_n = E[X_\infty|\mathscr{F}_n]$, $Z_n = X_n - Y_n$, Y_∞

$=X_\infty$ 及 $Z_\infty=0$，则 $(Y_n,n\in\overline{N})$ 为鞅，$(Z_n,n\in\overline{N})$ 为非负上鞅. 由于 $E[Z_{S_n}]\leqslant E[Z_0]$（定理2.10），故由 Fatou 引理，$Z_S$ 可积，从而 $X_S=Y_S+Z_S$ 可积. 令 $T_n=TI_{[T\leqslant n]}+(+\infty)I_{[T>n]}$，则由定理2.10

$$Z_{S_n}\geqslant E[Z_{T_n}|\mathscr{F}_{S_n}] \quad \text{a.s.},$$

$$Z_SI_{[S=S_n]}\geqslant E[Z_{T_n}|\mathscr{F}_{S_n}]I_{[S=S_n]}$$

$$=E[Z_{T_n}|\mathscr{F}_S]I_{[S=S_n]} \quad \text{a.s.}, \tag{35.2}$$

由于 $Z_{T_n}\uparrow Z_T$，在(35.2)中令 $n\to\infty$ 得

$$Z_S\geqslant E[Z_T|\mathscr{F}_S] \quad \text{a.s.}.$$

但由已证结果，$Y_S=E[Y_T|\mathscr{F}_S]$ a.s.，所以

$$X_S\geqslant E[X_T|\mathscr{F}_S] \quad \text{a.s.}. \quad \square$$

下一定理是定理2.35的加强形式.

2.36定理 设 $(X_n,n\in\overline{N})$ 为一鞅（上鞅），S,T 为两个停时，则

$$E[X_T|\mathscr{F}_S]=X_{T\wedge S}(\leqslant X_{T\wedge S}) \quad \text{a.s.}. \tag{36.1}$$

证明 由定理2.9.2)，$X_TI_{[T\leqslant S]}\in\mathscr{F}_T$，从而由(35.1)，有

$$E[X_T|\mathscr{F}_S]=E[X_TI_{[T\leqslant S]}+X_{S\vee T}I_{[T>S]}|\mathscr{F}_S]$$

$$=X_TI_{[T\leqslant S]}+X_SI_{[T>S]}$$

$$=X_{T\wedge S} \quad \text{a.s.}.$$

（(X_n) 为上鞅时，第二个等号改为 $\leqslant$）. $\square$

2.37系 设 ξ 为一可积随机变量，S,T 为两个有限停时，则

$$E[\xi|\mathscr{F}_S\ \mathscr{F}_T]=E[\xi|\mathscr{F}_{S\wedge T}] \quad \text{a.s.}.$$

下一定理是关于一般的鞅与上鞅的 **Doob 停止定理.**

2.38定理 1)设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为一鞅，S,T 为两个有限停时，设 X_T 可积，则为要

$$E[X_T|\mathscr{F}_S]=X_{T\wedge S} \quad \text{a.s.} \tag{38.1}$$

必须且只需

$$\lim_{n\to\infty}E[X_nI_{[T>n]}|\mathscr{F}_S]=0, \quad \text{a.s.},$$

或等价地，

$$\varliminf_{n\to\infty}E[X_nI_{[T>n]}|\mathscr{F}_S]=0$$

$$(\text{或}\varlimsup_{n\to\infty}E[X_nI_{[T\geqslant n]}|\mathscr{F}_S]=0) \quad \text{a.s.}.$$

特别，若$\lim\limits_{n\to\infty}E[|X_n|I_{[T>n]}]=0$，则(38.1)成立.

2) 设$(X_n)_{n\geq 0}$为一上鞅，S,T为两个有限停时. 设X_T可积，且$\lim\limits_{n\to\infty}E[X_nI_{[T>n]}|\mathscr{F}_S]\geq 0$ a.s.，则

$$E[X_T|\mathscr{F}_S]\leqslant X_{T\wedge S}\quad \text{a.s.}. \tag{38.2}$$

特别，若$\lim\limits_{n\to\infty}E[X_n^-I_{[T>n]}]=0$，则(38.2)成立.

证明 1) 对每个n，$X_{T\wedge n}\in\mathscr{F}_n$. 由系2.37及定理2.10，有

$$E[X_{T\wedge n}|\mathscr{F}_S]=E[X_{T\wedge n}|\mathscr{F}_{S\wedge n}]=X_{T\wedge S\wedge n},$$

$$\begin{aligned}E[X_T|\mathscr{F}_S]&=\lim_{n\to\infty}E[X_TI_{[T\leq n]}|\mathscr{F}_S]\\&=\lim_{n\to\infty}E[X_{T\wedge n}-X_nI_{[T>n]}|\mathscr{F}_S]\\&=\lim_{n\to\infty}(X_{T\wedge S\wedge n}-E[X_nI_{[T>n]}|\mathscr{F}_S])\\&=X_{T\wedge S}-\lim_{n\to\infty}E[X_nI_{[T>n]}|\mathscr{F}_S].\end{aligned}$$

这表明极限$\lim\limits_{n\to\infty}E[X_nI_{[T>n]}|\mathscr{F}_S]$总存在，且(38.1)成立当且仅当它a.s.等于零. 其余的结论显然.

2)的证明类似，故略去. □

下一定理是定理2.38的一个十分有用的推论.

2.39 定理 设$(X_n)_{n\geq 0}$为一鞅(上鞅)，T为一停时，且$E[T]<\infty$. 若存在一常数C，使得对每个$n\geq 0$，在$[T\geq n+1]$上

$$E[|X_{n+1}-X_n||\mathscr{F}_n]\leqslant C\quad \text{a.s.}, \tag{39.1}$$

则$E[|X_T|]<\infty$，且

$$E[X_T]=E[X_0]\quad (\leqslant E[X_0]). \tag{39.2}$$

证明 由定理2.38，为证(39.2)只需证明X_T可积及$\lim\limits_{n\to\infty}E[|X_n|I_{[T>n]}]=0$. 为此，令$Y_0=|X_0|$，$Y_j=|X_j-X_{j-1}|$，$j\geq 1$，则

$$\begin{aligned}E\Big[\sum_{j=0}^{T}Y_j\Big]&=\sum_{n=0}^{\infty}E\Big[\sum_{j=0}^{n}Y_jI_{[T=n]}\Big]=\sum_{j=0}^{\infty}E[Y_jI_{[T\geq j]}]\\&=\sum_{j=1}^{\infty}E[E[Y_j|\mathscr{F}_{j-1}]I_{[T\geq j]}]+E[Y_0]\end{aligned}$$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty} P(T \geqslant j) + E[Y_0]$$

$$= CE[T] + E[|X_0|] < \infty.$$

由于 $|X_T| \leqslant \sum_{j=0}^{T} Y_j$，故 $E[|X_T|] < \infty$. 同时，我们有

$$E[|X_n| I_{[T>n]}] \leqslant E\left[\sum_{j=0}^{T} |Y_j| I_{[T>n]}\right] \to 0,\ n \to \infty. \quad \square$$

下面我们利用定理2.39证明在统计中十分有用的著名的 Wald 等式.

2.40定理 （**Wald 等式**） 设 $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ 为独立同分布随机变量序列，且 $E[|\xi_1|] < \infty$. 令 $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$. 设 $T \geqslant 1$ 为一停时，且 $E[T] < \infty$，则

$$E\left[\sum_{j=1}^{T} \xi_j\right] = E[\xi_1]E[T]. \tag{40.1}$$

若又有 $E[\xi_1^2] < \infty$，则

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{T} \xi_j - TE[\xi_1]\right)^2\right] = D[\xi_1]E[T], \tag{40.2}$$

其中 $D[\xi_1] = E[\xi_1^2] - (E[\xi_1])^2$ 表示 ξ_1 的方差.

证明 令 $X_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j - nE[\xi_1]$，$n \geqslant 1$，则 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 为鞅，且

$$E[|X_{n+1} - X_n| | \mathscr{F}_n] = E[|\xi_{n+1} - E[\xi_1]| | \mathscr{F}_n]$$

$$= E[|\xi_{n+1} - E[\xi_1]|] \leqslant 2E[|\xi_1|].$$

由定理2.39，我们有 $E[X_T] = E[X_1] = 0$，即(40.1)成立，令 $Y_n = X_n^2 - nD[\xi_1]$. 对鞅 (Y_n) 作类似的讨论可证(40.2). $\square$

最后，作为本节的结束，我们将离散时间上鞅的主要性质作一小结. 设 (X_n) 为一上鞅，则

(X_n) 一致可积 $\Leftrightarrow$ $X_n \xrightarrow{a.s.,L^1} X_\infty$

$\Downarrow$

(X_n^-) 一致可积 $\Leftrightarrow$ (X_n) 可右闭

$\Downarrow$

$\sup\limits_n E[X_n^+]<\infty \Leftrightarrow (X_n)$ 有 Krickeberg 分解

$\Downarrow \qquad\qquad \Big\} \to X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty$，$X_\infty$ 可积

$\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n]>-\infty \Leftrightarrow (X_n)$ 有 Riesz 分解.

§5. 连续时间鞅

我们继续在固定的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上进行讨论. 但在§5及§6中给定一个连续时间的流 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t, t\in \boldsymbol{R}_+)$（或记为 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$）：对一切$0\leqslant s<t$，$\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$. 令 $\mathscr{F}_\infty=\bigvee\limits_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_t$ 及

$$\mathscr{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s,\quad t\geqslant 0,$$

$$\mathscr{F}_{t-}=\bigvee_{s<t}\mathscr{F}_s=\sigma\Big(\bigcup_{s<t}\mathscr{F}_s\Big),\ t>0.$$

自然地定义 $\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0$，$\mathscr{F}_{\infty-}=\mathscr{F}_\infty$. 一个流 $\boldsymbol{F}$ 称为**右连续的**，如果对每个 $t\geqslant 0$，$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$. 显然，流 $\boldsymbol{F}_+=(\mathscr{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$是右连续的.

参数集为 $\boldsymbol{R}_+$ 的一族实值随机变量$(X_t, t\in\boldsymbol{R}_+)$（或记为$(X_t)_{t\geqslant 0}$）称为一个随机过程[1]，或简称过程，它也简记为 X 或(X_t). 显然，一随机过程 $X=(X_t(\omega))$实际上是定义在 $\Omega\times\boldsymbol{R}_+$ 上的一实值函数，使得对每个 t，$X_t(\omega)$为$\mathscr{F}$-可测. 对每个 $\omega\in\Omega$，$X_\cdot(\omega)$是 $\boldsymbol{R}_+$ 上的一个函数，称为 X 的一条**轨道**（或**路径**，或**样本函数**）. 如果 X 的全部轨道是连续的（右连续的，左连续的），则称 X 为**连续**（**右连续**、**左连续**）**过程**. 如果 X 的全部轨道是右连续并有左极限的（简称**右连左极**），则称 X 为**右连左极过程**. 这时我们以 $X_-=(X_{t-})$记左极限过程，其中约定 $X_{0-}=X_0$，以 $\Delta X=(\Delta X_t)$记 X 的**跳过程**：$\Delta X_t=X_t-X_{t-}$，$t\geqslant 0$，或 $\Delta X=X-X_-$.

随机过程 X 称为 $\boldsymbol{F}$ **适应的**，如果对每个 $t\geqslant 0$，X_t 为$\mathscr{F}_t$可测. 令

$$\boldsymbol{F}^0(X)=(\mathscr{F}_t^0(X)),\ \mathscr{F}_t^0(X)=\sigma\{X_s, s\leqslant t\},\ t\geqslant 0.$$

---

1) 一般地，任何一族随机变量称为一个随机过程. 随机序列也称为离散时间随机过程，以区间为参数集的随机过程称为连续时间随机过程.

$\boldsymbol{F}^0(X)$称为 X 的**自然流**. 显然,X 总是 $\boldsymbol{F}^0(X)$-适应的. 如果 X 是 $\boldsymbol{F}$-适应的,则对每个 $t\geqslant 0$,$\mathscr{F}_t^0(X)\subset\mathscr{F}_t$.

对任何 $n\geqslant 1$ 及 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in\boldsymbol{R}_+$,

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{P}(X_{t_1}\leqslant x_1,X_{t_2}\leqslant x_2,\cdots,X_{t_n}\leqslant x_n)$$

称为 X 的**一个有限维(n 维)分布**. X 的有限维分布全体称为 X 的**有限维分布族**. 令

$$(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}_+},\mathscr{B}^{\boldsymbol{R}_+})=\prod_{t\geqslant 0}(E_t,\mathscr{E}_t),(E_t,\mathscr{E}_t)=(\boldsymbol{R},\mathscr{B}(\boldsymbol{R})),\ t\geqslant 0.$$

由 Kolmogorov 扩张定理,X 的有限维分布族决定$(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}_+},\mathscr{B}^{\boldsymbol{R}_+})$上的一个概率测度,记为 $\boldsymbol{P}^X$ 或 $L(X)$,叫做 X 的**分布律**或**分布**. 原则上,一个随机过程的概率特性由它的分布所决定. 实际上,为了决定一个过程的分布,我们通常就给出它的有限维分布族. 值得指出的是,无论 $\boldsymbol{R}_+$上的连续函数全体 $C(\boldsymbol{R}_+)$,还是 $\boldsymbol{R}_+$上右连左极函数全体 $D(\boldsymbol{R}_+)$,都不属于 $\mathscr{B}^{\boldsymbol{R}_+}$. 如果 X 是连续(右连左极)过程,我们只能断定在分布 $\boldsymbol{P}^X$ 之下,$C(\boldsymbol{R}_+)(D(\boldsymbol{R}_+))$的外测度为1. 这时我们可以在$(C(\boldsymbol{R}_+),\mathscr{B}^{\boldsymbol{R}_+}\cap C(\boldsymbol{R}_+))(D(\boldsymbol{R}_+),\mathscr{B}^{\boldsymbol{R}_+}\cap D(\boldsymbol{R}_+))$上定义一个概率测度如下:

$$\mu(A\cap C(\boldsymbol{R}_+))=\boldsymbol{P}^X(A)(\mu(A\cap D(\boldsymbol{R}_+))=\boldsymbol{P}^X(A)).$$

我们也称 μ 为 X 的分布(律),也记为 $\boldsymbol{P}^X$.

一般地,若 $E\subset\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}_+}$,$\mathscr{E}=\mathscr{B}^{\boldsymbol{R}_+}\cap E$,$\boldsymbol{P}$ 为$(E,\mathscr{E})$上一概率测度,则定义一个过程如下:

$$X_t(\varphi)=\varphi_t,\ \varphi=(\varphi_t)\in E,\ t\geqslant 0,$$

该过程叫做**坐标过程**或**标准过程**,$\boldsymbol{P}$ 正是 X 的分布.

在本节中首先研究连续时间上鞅的轨道性质,然后对右连续的连续时间上鞅,建立与离散时间上鞅相应的结果,只是 Doob 分解要到第五章才讨论.

2.41定义 一个 $\boldsymbol{F}$-适应随机过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$叫做 $\boldsymbol{F}$-鞅($\boldsymbol{F}$-上鞅,$\boldsymbol{F}$-下鞅),如果对每个 $t\geqslant 0$,X_t 可积,且对一切$0\leqslant s<t$

$$\boldsymbol{E}[X_t|\mathscr{F}_s]=X_s(\leqslant X_s,\geqslant X_s)\quad\text{a.s.}.$$

显见,任一 $\boldsymbol{F}$-鞅($\boldsymbol{F}$-上鞅,$\boldsymbol{F}$-下鞅)关于 $\boldsymbol{F}^0(X)$是鞅(上鞅,下

鞅). 如同离散时间情形,由于流 $\boldsymbol{F}$ 固定,我们也省略字冠"$\boldsymbol{F}$-". 因此鞅指 $\boldsymbol{F}$-鞅,除非另作声明.

类似地,我们可定义参数集为 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ 或 $\boldsymbol{R}_+\backslash\{0\}$ 的鞅、上鞅与下鞅.

现在我们开始研究上鞅的轨道性质. 为此,需将上穿不等式推广到连续时间情形.

设 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 为一适应过程,u 为 $\boldsymbol{R}_+$ 的一有限子集. 令 $u=\{t_1,\cdots,t_n\}$,$t_1<t_2<\cdots<t_n$. 记 $U_a^b[X,u]$ 为 $\{X_{t_1},\cdots,X_{t_n}\}$ 上穿 $[a,b]$ 的次数. 对 $\boldsymbol{R}_+$ 的任一子集 D,定义

$$U_a^b[X,D]=\sup\{U_a^b[X,u]:u \text{ 为 } D \text{ 的有限子集}\}.$$

设 $D=\{t_1,t_2,\cdots\}$ 为一可数集. 令 $u_n=\{t_1,\cdots,t_n\}$. 易见

$$U_a^b[X,D]=\lim_{n\to\infty}U_a^b[X,u_n].$$

2.42定理 设 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 为一上鞅,D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 的一可数稠子集,则对任何 $r<s(r,s\in\boldsymbol{R}_+)$,$a<b(a,b\in\boldsymbol{R})$ 及 $\lambda>0$,我们有

$$\lambda\boldsymbol{P}(\sup_{t\in D\cap[r,s]}|X_t|\geqslant\lambda)\leqslant\boldsymbol{E}[X_r]+2\boldsymbol{E}[X_s^-], \tag{42.1}$$

$$\boldsymbol{E}U_a^b[X,D\cap[r,s]]\leqslant\frac{1}{b-a}\boldsymbol{E}[(X_s-a)^-]. \tag{42.2}$$

如果 X 的几乎所有轨道是右连续的,则上述不等式中的 $D\cap[r,s]$ 可用 $[r,s]$ 代替.

证明 设 $D\cap[r,s]=\{t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots\}$. 令 $u_n=\{t_1,\cdots,t_n\}$,则用 u_n 代替 $D\cap[r,s]$ 后所得相应的不等式(42.1)及(42.2)分别由(12.3)及(14.2)推得(注意,(X_t^-) 及 $((X_t-a)^-)$ 都是下鞅),然后令 $n\to\infty$,即得(42.1)及(42.2). 定理的最后一个断言是显然的.
□

2.43定理 设 (X_t) 为一上鞅,D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 的一可数稠子集,则对几乎所有 ω,对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$ $(t\in\boldsymbol{R}_+\backslash\{0\})$,$\lim\limits_{s\in D,s\downarrow\downarrow t}X_s(\omega)$ $(\lim\limits_{s\in D,s\uparrow\uparrow t}X_s(\omega))$ 存在且有穷. 如果 (X_t) 的几乎所有轨道右连续,则对几乎所有 ω,对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+\backslash\{0\}$,$X_{t-}(\omega)=\lim\limits_{s\in\boldsymbol{R}_+,s\uparrow\uparrow t}X_s(\omega)$ 存在且有穷.

证明 设 $t\in\boldsymbol{R}_+$, $a,b\in\boldsymbol{R}$, $a<b$. 令

$$H_{t,a,b}=\{\omega;\ \sup_{s\in D\cap[0,t]}|X_s(\omega)|=\infty$$
$$\text{或}\ U_a^b[X(\omega),D\cap[0,t]]=\infty\},$$

则 $H_{t,a,b}\in\mathscr{F}_t$，且由定理2.42知，$\boldsymbol{P}(H_{t,a,b})=0$. 令

$$H_t=\bigcup_{a<b,\ a,b\in\boldsymbol{Q}}H_{t,a,b},\quad H=\bigcup_{t\in\boldsymbol{R}_+}H_t=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n,$$

则 $H_t\in\mathscr{F}_t$，$H_t\uparrow H$，且 $\boldsymbol{P}(H)=0$. 若 $\omega\notin H$，则对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+(\boldsymbol{R}_+\setminus\{0\})$，$\lim\limits_{s\in D,s\downarrow\downarrow t}X_s(\omega)$（$\lim\limits_{s\in D,s\uparrow\uparrow t}X_s(\omega)$）存在且有穷.

如果(X_t)的几乎所有轨道右连续，显然对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+\setminus\{0\}$，$\lim\limits_{s\in D,s\uparrow\uparrow t}X_s(\omega)=\lim\limits_{s\in\boldsymbol{R}_+,s\uparrow\uparrow t}X_s(\omega)$. □

下一定理称为 **Föllmer 引理**（Föllmer[1]），它与经典结果的区别，在于取消了 $\mathscr{F}_0$中包含 $\mathscr{F}$ 中一切 $\boldsymbol{P}$-零概集的限制.

2.44 定理 设(X_t)为一上鞅（鞅），D 为 $\boldsymbol{R}_+$的一可数稠子集，则存在一个 $\boldsymbol{F}_+$-适应过程$(\overline{X}_t)$，使得

1）$(\overline{X}_t)$为右连续，且对几乎所有的 ω，对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$，有

$$\overline{X}_t(\omega)=\lim_{s\in D,s\downarrow\downarrow t}X_s(\omega),\tag{44.1}$$

2）对几乎所有 ω，对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+\setminus\{0\}$，$\overline{X}_{t-}(\omega)=\lim\limits_{s\in\boldsymbol{R}_+,s\uparrow\uparrow t}\overline{X}_s(\omega)$ 存在且有穷，此外有

$$\overline{X}_{t-}(\omega)=\lim_{s\in D,s\uparrow\uparrow t}X_s(\omega),\tag{44.2}$$

3）对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$，有

$$X_t\geqslant\boldsymbol{E}[\overline{X}_t|\mathscr{F}_t]\ (X_t=\boldsymbol{E}[\overline{X}_t|\mathscr{F}_t])\quad\text{a.s.},\tag{44.3}$$

4）$(\overline{X}_t)$为$(\mathscr{F}_{t+})$-上鞅（鞅）.

证明 我们沿用定理2.43中的记号. 对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$，令 $H_{t+}=\bigcap\limits_{s>t}H_s$，则 $H_{t+}\in\mathscr{F}_{t+}$. 如果 $\omega\notin H_{t+}$，则存在 $t_1>t$，使得 $\omega\notin H_{t_1}$，故极限 $\lim\limits_{s\in D,s\downarrow\downarrow t}X_s(\omega)$存在且有穷. 令

$$\overline{X}_t(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{s\in D,s\downarrow\downarrow t}X_s(\omega), & \omega\notin H_{t+},\\ 0, & \omega\in H_{t+}.\end{cases}\tag{44.4}$$

则显然$(\overline{X}_t)$为 $\boldsymbol{F}_+$-适应过程. 往证$(\overline{X}_t)$满足所要求的性质.

1) 设 $t\in \boldsymbol{R}_+$，$\omega\in H_{t+}$，则对一切 $s>t$，$\omega\in H_{s+}$. 由于 $H_{t+}=\bigcap_{r>t} H_{r+}$，故存在 $r_0>t$，使得对一切 $r_0\geqslant r>t$，有 $\omega\in H_{r+}$. 给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，$\delta<r_0-t$，使得当 $s\in D$，$s>t$，$s-t<\delta$ 时有 $|\overline{X}_t(\omega)-X_s(\omega)|\leqslant\varepsilon$. 于是当 $r>t$，且 $r-t<\delta$ 时，有

$$|\overline{X}_r(\omega)-\overline{X}_t(\omega)|=\lim_{s\in D, s\downarrow r}|\overline{X}_t(\omega)-X_s(\omega)|\leqslant\varepsilon.$$

这表明 $\overline{X}_\cdot(\omega)$ 在 t 处右连续. 因此，$(\overline{X}_t)$ 的一切轨道在 $\boldsymbol{R}_+$ 上右连续. 最后，如果 $\omega\in H$，则对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$，由(44.4)得(44.1).

2) 设 $t>0$，$\omega\in H$，则 $\lim_{s\in D, s\uparrow t}X_s(\omega)$ 存在且有穷. 与1)类似可证(44.2).

3) 只证上鞅情形. 设 $r_n\in D$，$r_n\downarrow\downarrow t$. 对任何 $A\in\mathscr{F}_t$，有

$$\int_A X_t dP\geqslant\int_A X_{r_n}dP. \tag{44.5}$$

由于(X_{r_n})一致可积(定理2.22)，由1)可知 $X_{r_n}\xrightarrow{L^1}\overline{X}_t$. 在(44.5)的右边令 $n\to\infty$ 得

$$\int_A X_t dP\geqslant\int_A \overline{X}_t dP.$$

即(44.3)成立.

4) 只证上鞅情形. 设 $s<t$，$s,t\in\boldsymbol{R}_+$. 令 $s_n\in D$，$s_n<t$，且 $s_n\downarrow\downarrow s$. 又令 $t_n\in D$，$t_n\downarrow\downarrow t$，则对任何 $A\in\mathscr{F}_{s+}$，我们有

$$\int_A X_{s_n}dP\geqslant\int_A X_{t_n}dP. \tag{44.6}$$

由于(X_{s_n})，(X_{t_n})一致可积(定理2.22)，在(44.6)的两边令 $n\to\infty$ 得

$$\int_A \overline{X}_s dP\geqslant\int_A \overline{X}_t dP.$$

这表明$(\overline{X}_t)$为 $\boldsymbol{F}_+$ 上鞅. □

2.45定义 设(X_t)，(Y_t)为两个随机过程，称(X_t)为(Y_t)的**修正**，如果对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$，$X_t=Y_t$ a.s.；称(X_t)与(Y_t)**无区别**，如对几乎所有 ω，轨道 $X_\cdot(\omega)$与 $Y_\cdot(\omega)$一致.

显然，两个无区别过程互为修正，但一般反之不然。然而，两个

右连续(或左连续)过程若互为修正，则无区别. 今后，我们将视两个无区别的过程为同一.

2.46定理 设(X_t)为右连续$\boldsymbol{F}$-上鞅(鞅)，则(X_t)也为$\boldsymbol{F}_+$-上鞅(鞅)，且(X_t)的几乎所有轨道右连左极.

证明 这是定理2.44的推论，因为依假设，(X_t)与$(\overline{X}_t)$无区别. □.

2.47定理 设$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$右连续，$(X_t)$为一$\boldsymbol{F}$-上鞅. 为要$(X_t)$有右连续适应修正，必须且只需$\boldsymbol{R}_+$上的函数$t\mapsto \boldsymbol{E}[X_t]$为右连续.

证明 令D为$\boldsymbol{R}_+$的一可数稠子集. 由于$\boldsymbol{F}$右连续，定理2.44中的$(\overline{X}_t)$为$\boldsymbol{F}$-上鞅，且由(44.3)，对每个$t\geqslant 0$，得$X_t\geqslant \overline{X}_t$ a.s.，令$t_n\in D$，$t_n\downarrow\downarrow t$. 由于$(X_{t_n})$一致可积(定理2.22)，故有

$$\boldsymbol{E}[\overline{X}_t]=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}[X_{t_n}].$$

因此，为要$X_t=\overline{X}_t$ a.s.，或等价地，$\boldsymbol{E}[X_t]=\boldsymbol{E}[\overline{X}_t]$(因为有$X_t\geqslant\overline{X}_t$ a.s.)，必须且只需

$$\boldsymbol{E}[X_t]=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}[X_{t_n}]. \tag{47.1}$$

由于$s\mapsto \boldsymbol{E}[X_s]$是单调非增函数，这等价于它在$t$处右连续. 因此，如果函数$s\mapsto\boldsymbol{E}[X_s]$在$\boldsymbol{R}_+$上右连续，则上鞅$(\overline{X}_t)$为上鞅$(X_t)$的右连续适应修正. 反之，若存在$(X_t)$的右连续适应修正$(Y_t)$，则$\boldsymbol{E}[X_t]=\boldsymbol{E}[Y_t]$. 根据上述论证，$t\mapsto\boldsymbol{E}[Y_t]=\boldsymbol{E}[X_t]$为$\boldsymbol{R}_+$上的右连续函数. □

2.48系 设$\boldsymbol{F}$右连续，则一切$\boldsymbol{F}$-鞅有右连续适应修正.

若两个过程互为修正，则它们有相同的有限维分布族，即在分布意义上，它们是没有区别的. 因此，我们可以假设$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$右连续，并只讨论右连续的鞅或上鞅. 现在，我们能将离散时间上鞅的基本结果推广到连续时间情形，除了上鞅的Doob分解. 相应的上鞅的Doob-Meyer分解定理将在第五章§4中给出.

下一定理是**Doob不等式**，它可由定理2.15直接推得.

2.49定理 设(X_t)为一非负右连续下鞅，$X^*=\sup\limits_{t\geqslant 0}X_t$，则

$$E[X^*] \leqslant \frac{e}{e-1}(1 + \sup_{t\geq 0} E[X_t \log^+ X_t]) , \tag{49.1}$$

$$\|X^*\|_p \leqslant q \sup_{t\geq 0} \|X_t\|_p , \tag{49.2}$$

其中 $p>1$ 及 $q>1$ 为一对共轭指数.

关于收敛定理,我们只叙述结果,其证明与离散时间情形完全类似.

2.50 定理 设 (X_t) 为一右连续上鞅. 如果 $\sup_t E[X_t^-]<\infty$ (或等价地,$\sup_t E[|X_t|]<\infty$),则当 $t\to\infty$ 时,X_t a.s. 收敛于一可积随机变量 X_∞. 若 (X_t) 为非负上鞅,则 $(X_t, t\in\overline{\boldsymbol{R}}_+)$ 为上鞅.

2.51 定理 设 (X_t) 为一一致可积右连续上鞅(鞅),则 $t\to\infty$ 时,$X_t \xrightarrow{a.s., L^1} X_\infty$,且 $(X_t, t\in\overline{\boldsymbol{R}}_+)$ 为上鞅(鞅).

2.52 系 设 $(\mathscr{F}_t)$ 右连续. 令 ξ 为一可积随机变量,(ξ_t) 为鞅 $(E[\xi|\mathscr{F}_t])$ 的右连续适应修正,则当 $t\to\infty$ 时,

$$\xi_t \xrightarrow{a.s., L^1} E[\xi|\mathscr{F}_\infty].$$

2.53 系 设 (X_t) 为一右连续鞅或非负下鞅,$p>1$. 如果 $\sup_{t\geq 0} E[|X_t|^p]<\infty$,则 $t\to\infty$ 时,$X_t \xrightarrow{a.s., L^p} X_\infty$. 此外有 $\|X_\infty\|_p = \sup_{t\geq 0}\|X_t\|_p$.

2.54 定理 设 $(X_t)_{t>0}$ 为一右连续 $(\mathscr{F}_t)_{t>0}$-上鞅. 如果 $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{0+}$,$\sup_{t>0} E[X_t]<\infty$,则 $t\downarrow 0$ 时 X_t a.s. 及 L^1-收敛于一 $\mathscr{F}_0$-可测随机变量 X_0,且 $(X_t)_{t\geq 0}$ 为 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-上鞅.

现在我们要讨论上鞅的 Riesz 分解. 由于上鞅的 Doob 分解尚未建立,这里的证明路线与离散时间情形有所不同. 至于 Krickeberg 分解,其叙述与证明都与离散时间情形相似,故略去.

2.55 定义 设 (X_t) 为一非负右连续上鞅. 称 (X_t) 为**位势**,如果 $\lim_{t\to\infty} E[X_t]=0$.

设 $X=(X_t)$ 为一右连续上鞅. 如果存在一右连续鞅 $Y=(Y_t)$ 及一位势 $Z=(Z_t)$,使得

$$X_t = Y_t + Z_t , \tag{55.1}$$

则称 X 有 **Riesz 分解**：$X=Y+Z$. 易见. 若 X 有 Riesz 分解，则必唯一.

2.56定理 设$(\mathscr{F}_t)$右连续，(X_t)为一右连续上鞅.

1)(X_t)有 Riesz 分解当且仅当$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{E}[X_t]>-\infty$.

2)设(X_t)有 Riesz 分解(55.1). 若(X_t)非负，则(Y_t)也非负.

3)若(X_t)一致可积，则 $t\to\infty$时，$X_t\xrightarrow{L^1}X_\infty$. 此时令$(Y_t)$为鞅$(\boldsymbol{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t])$的右连续适应修正，$Z_t=X_t-Y_t$，则$(Z_t)$为一位势.

证明 1)必要性显然. 往证充分性. 令

$$Y_{t,s}=\boldsymbol{E}[X_{t+s}|\mathscr{F}_t],\ t,s\in\boldsymbol{R}_+.$$

对 $s>r$

$$Y_{t,s}=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[X_{t+s}|\mathscr{F}_{t+r}]|\mathscr{F}_t]\leqslant\boldsymbol{E}[X_{t+r}|\mathscr{F}_t]=Y_{t,r},\quad \text{a.s.}.$$

令 $Y_t=\lim\limits_{n\to\infty}Y_{t,n}$ a.s.，则 $n\to\infty$时，$Y_{t,n}\xrightarrow{L^1}Y_t$. 对 $t>s$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[Y_t|\mathscr{F}_s]&=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}[Y_{t,n}|\mathscr{F}_s]=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}[X_{t+n}|\mathscr{F}_s]\\&=\lim_{n\to\infty}Y_{s,n+(t-s)}=Y_s\ \text{a.s.}.\end{aligned}$$

对每个 $t\in\boldsymbol{R}_+$，取 $Y_t\in\mathscr{F}_t$，则(Y_t)为一鞅. 由于$(\mathscr{F}_t)$右连续，由系2.58，(Y_t)有右连续适应修正，仍记为(Y_t). 令 $Z_t=X_t-Y_t$. 因为对一切 n，$Y_{t,n}\leqslant X_t$ a.s.，故有 $Y_t\leqslant X_t$ a.s.. 因此，(Z_t)为非负上鞅，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[Z_t]&=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}[X_t-Y_{t,n}]\\&=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}[X_t-X_{t+n}]\\&=\boldsymbol{E}[X_t]-\lim_{s\to\infty}\boldsymbol{E}[X_s],\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{E}[Z_t]=\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{E}[X_t]-\lim_{s\to\infty}\boldsymbol{E}[X_s]=0,$$

即(Z_t)为位势.

2)由1)的证明看出. 3)显然. □

现在我们要对连续时间鞅(上鞅)建立 Doob 停止定理. 将只限于讨论可右闭鞅(上鞅). 当然，必须先引进停时的概念. 但关于停时的详细讨论要在第三章§1中给出.

2.57定义 在$\overline{\boldsymbol{R}}_+$中取值的随机变量 T 叫做 ***F*-停时或可选时**，如果对一切 $t\geqslant0$，$[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t$.

对每个停时 T，令

$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F}_\infty: \forall t \in \boldsymbol{R}_+, A[T \leqslant t] \in \mathscr{F}_t\}. \quad (57.1)$$

这是一个 σ 域，称为 **T 前事件 σ-域**.

一个 $\boldsymbol{F}_+$ 停时 T 称为 **$\boldsymbol{F}$-宽停时**. 关于 $\boldsymbol{F}_+$ 的 T 前事件 σ-域记为 $\mathscr{F}_{T+}$，即

$$\mathscr{F}_{T+} = \{A \in \mathscr{F}_\infty: \forall t \in \boldsymbol{R}_+, A[T \leqslant t] \in \mathscr{F}_{t+}\}. \quad (57.2)$$

2.58定理 设 $(X_t, t \in \boldsymbol{R}_+)$ 为一右连续鞅(上鞅)，S、T 为两个停时，且 $S \leqslant T$，则 X_S、X_T 可积，且

$$\boldsymbol{E}[X_T | \mathscr{F}_S] = X_S (\leqslant X_S) \quad \text{a.s.}. \quad (58.1)$$

证明 只证上鞅情形. 对一切自然数 n，令 $D_n = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \cdots, +\infty\}$，则 $(X_t, t \in D_n)$ 为 $(\mathscr{F}_t, t \in D_n)$-上鞅. 令

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k-1}{2^n} \leqslant S < \frac{k}{2^n}]} + (+\infty) I_{[S=+\infty]},$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k-1}{2^n} \leqslant T < \frac{k}{2^n}]} + (+\infty) I_{[T=+\infty]},$$

则 S_n、T_n 为 $(\mathscr{F}_t, t \in D_n)$-停时(见定理3.7.2))，且 $S_n \downarrow S$，$T_n \downarrow T$. 由定理2.35，有

$$\boldsymbol{E}[X_{T_n} | \mathscr{F}_{S_n}] \leqslant X_{S_n} \quad \text{a.s.},$$

其中 X_{S_n}、X_{T_n} 为可积的. 特别，对 $A \in \mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{S_n}$(见定理3.4.2))

$$\int_A X_{T_n} d\boldsymbol{P} \leqslant \int_A X_{S_n} d\boldsymbol{P}. \quad (58.2)$$

但是

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T, \lim_{n\to\infty} X_{S_n} = X_S,$$

且 $X_S \in \mathscr{F}_S$，$X_T \in \mathscr{F}_T$(见定理3.12). 为从(58.2)推得(58.1)，只需证明 (X_{S_n}) 及 (X_{T_n}) 一致可积. 由定理2.35知，对每个 $n \geqslant 1$，

$$\boldsymbol{E}[X_{S_n} | \mathscr{F}_{S_{n+1}}] \leqslant X_{S_{n+1}} \quad \text{a.s.}.$$

令 $Y_{-n} = X_{S_n}$，$\mathscr{G}_{-n} = \mathscr{F}_{S_n}$，$n \geqslant 1$，则 $(Y_n)_{n \leqslant -1}$ 为 $(\mathscr{G}_n)_{n \leqslant -1}$-上鞅. 由于 $\boldsymbol{E}[Y_{-n}] = \boldsymbol{E}[X_{S_n}] \leqslant \boldsymbol{E}[X_0]$(定理2.35)，$(Y_n)_{n \leqslant -1} = (X_{S_n})_{n \geqslant 1}$ 一致可积(定理2.22). 同理，(X_{T_n}) 一致可积. □

下一定理是 Doob 停止定理的加强形式，其证明与定理2.36完全类似. 故略去.

2.59定理 设$(X_t, t\in \overline{\boldsymbol{R}}_+)$为一右连续鞅(上鞅)，$S,T$ 为两个停时，则

$$\boldsymbol{E}[X_T|\mathscr{F}_S] = X_{T\wedge S}(\leqslant X_{T\wedge S}) \quad \text{a.s.}. \tag{59.1}$$

2.60系 设$(\mathscr{F}_t)$右连续，ξ 为一可积随机变量，S,T 为两个停时，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_T|\mathscr{F}_S] &= \boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_S|\mathscr{F}_T] \\ &= \boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{S\wedge T}] \quad \text{a.s.}.\end{aligned} \tag{60.1}$$

证明 令(X_t)为鞅$(\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_t])$的右连续适应修正，$X_\infty = \boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_\infty]$，则(60.1)由(59.1)即得. □

2.61系 设$(X_t)_{t\geqslant 0}$为一右连续上鞅，则对任何停时 T

$$\boldsymbol{E}[|X_T|I_{[T<\infty]}] \leqslant 3\sup_{t\geqslant 0}\boldsymbol{E}[|X_t|]. \tag{61.1}$$

证明 令 $a>0, X_t^a = X_{t\wedge a}, X_\infty^a = X_a$，则$(X_t^a, t\in\overline{\boldsymbol{R}}_+)$为上鞅，且$X_T^a = X_{T\wedge a}$. 注意到$(X_t^-)$为下鞅. 由定理2.58. 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[|X_{T\wedge a}|I_{[T<\infty]}] &\leqslant \boldsymbol{E}[|X_{T\wedge a}|] = \boldsymbol{E}[X_{T\wedge a}] + 2\boldsymbol{E}[X_{T\wedge a}^-] \\ &\leqslant \boldsymbol{E}[X_0] + 2\boldsymbol{E}[X_a^-] \leqslant 3\sup_{t\geqslant 0}\boldsymbol{E}[|X_t|].\end{aligned}$$

令 $a\to\infty$即得(61.1). □

下一定理是 Doob 停止定理的一个简单应用.

2.62定理 设(X_t)为一非负右连续上鞅. 令

$$T_n = \inf\left\{t: X_t < \frac{1}{n}\right\},\ T = \sup_n T_n, \tag{62.1}$$

则 T 为宽停时，且对几乎所有 $\omega\in[T<\infty]$

$$X_t(\omega) = 0,\ t\geqslant T(\omega),$$

对所有 $\omega\in[T>0]$, $t<T(\omega)$,

$$X_t(\omega) > 0,\ \lim_{s\uparrow t} X_s(\omega) > 0$$

(T 称为(X_t)的**归零时**).

证明 对任何 $t\in\boldsymbol{R}_+$，我们有

$$[T_n < t] = \bigcup_{r<t, r\in Q_+}\left[X_r < \frac{1}{n}\right] \in \mathscr{F}_t;$$

从而$[T_n\leqslant t]\in\mathscr{F}_t$，这表明$T_n$为宽停时，从而$T$为宽停时.

令$X_\infty=0$，则$(X_t,t\in\overline{\boldsymbol{R}}_+)$为右连续上鞅. 由定理2.46知，$(X_t,t\in\boldsymbol{R}_+)$为$\boldsymbol{F}_+$-上鞅. 由定理2.58，我们有

$$\boldsymbol{E}[X_{T\vee t}]\leqslant\boldsymbol{E}[X_{T_n}]\leqslant\frac{1}{n}.$$

由于n是任意的，故$\boldsymbol{E}[X_{T\vee t}]=0$，从而$X_{T\vee t}=0$ a.s.，特别有

$$X_tI_{[t\geq T]}=X_{T\vee t}I_{[t\geq T]}=0\quad\text{a.s.}.\tag{62.2}$$

由于(X_t)的轨道右连续，这意味着对几乎所有$\omega\in[T<\infty]$，对一切$t\geqslant T(\omega)$，有$X_t(\omega)=0$.

另一方面，我们有$[T>t]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[T_n>t]$. 设$t<T(\omega)$，则存在$n$，使得$T_n(\omega)>t$，于是由$T_n$的定义知，对一切$s\leqslant t$，$X_s(\omega)\geqslant\frac{1}{n}$，从而$\lim\limits_{s\to t}X_s(\omega)\geqslant\frac{1}{n}$. □

2.63定义 一个流$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$称为**完备的**，如果$\mathscr{F}_0$包含一切$\boldsymbol{P}$-零概集. 若流$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$既完备又右连续，则称$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$满足**通常条件**.

如果$\boldsymbol{F}$满足通常条件，(X_t)为一$\boldsymbol{F}$-上鞅，$\boldsymbol{E}[X_t]$在$\boldsymbol{R}_+$上右连续，则由定理2.46及2.47知，(X_t)有一右连续适应修正，且此修正是一$\boldsymbol{F}$-上鞅. 特别，若$\boldsymbol{F}$满足通常条件，每个$\boldsymbol{F}$-鞅有一右连续适应修正，且此修正也是$\boldsymbol{F}$-鞅.

设(X_t)为一非负右连续$\boldsymbol{F}$-上鞅. 令

$$S_1=\inf\{t:X_t=0\text{ or }X_{t-}=0\},$$
$$S_2=\inf\{t:X_t=0\},$$
$$S_3=\inf\{t:X_{t-}=0\},$$
$$T_n=\inf\left\{t:X_t<\frac{1}{n}\right\},\qquad T=\sup_n T_n.$$

由定理2.62，我们有$S_1=S_2=S_3=T$ a.s.. 若$\boldsymbol{F}$满足通常条件，不难看出，S_1,S_2,S_3,T都是$\boldsymbol{F}$-停时.

任一流总可完备化. 首先，将概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$完备化，即设

$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备的：$\mathscr{F}=\mathscr{F}^P$. 以$\mathscr{N}$记$P$-零概集全体产生的$\sigma$-域. 对任一流$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0}$，令

$$\boldsymbol{F}^P=(\mathscr{F}_t\vee\mathscr{N})_{t\geqslant0},$$

则$\boldsymbol{F}^P$是一完备流，称为$\boldsymbol{F}$的**完备化**. 易见，$\boldsymbol{F}^P_+$满足通常条件，它称为$\boldsymbol{F}$的**通常化**，记为$\tilde{\boldsymbol{F}}=(\tilde{\mathscr{F}}_t)_{t\geqslant0}$. 不难证明，对每个$t\geqslant0$

$$\mathscr{F}_{t+}\vee\mathscr{N}=\bigcap_{s>t}(\mathscr{F}_s\vee\mathscr{N})=\tilde{\mathscr{F}}_t,$$

即$\tilde{\boldsymbol{F}}=(\mathscr{F}_{t+}\vee\mathscr{N})_{t\geqslant0}$.

对任一随机过程$X=(X_t)_{t\geqslant0}$，以$\boldsymbol{F}^P(X)$记X的自然流$\boldsymbol{F}^0(X)$的完备化，并称$\boldsymbol{F}^P(X)$为X的**完备自然流**. 以$\boldsymbol{F}(X)$记$\boldsymbol{F}^0(X)$的通常化，并称$\boldsymbol{F}(X)$为X的**通常自然流**. 显然，若两个过程互为修正，则它们有同一个完备自然流.

§6. 独立增量过程

2.64定义 随机过程(X_t)称为在$\boldsymbol{R}_+$上**随机连续**，若对每个$t\in\boldsymbol{R}_+$，当$s\to t$时，X_s依概率收敛于X_t.

称随机过程(X_t)有**平稳增量**，若对一切$s<t$，$s,t\in\boldsymbol{R}_+$，X_t-X_s的分布只依赖于$t-s$.

一适应过程(X_t)称为(关于$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$)**独立增量过程**，若对一切$s<t$，$s,t\in\boldsymbol{R}_+$，$X_t-X_s$与$\mathscr{F}_s$独立. 这时，对一切$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$

$$X_{t_0},X_{t_1}-X_{t_0},\cdots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\text{ 相互独立.}\qquad(64.1)$$

独立性(64.1)(特别，不相交区间上的增量相互独立)等价于(X_t)关于其自然流$\boldsymbol{F}^0(X)$为独立增量过程. 如果不指明流，那么一个独立增量过程总是关于它的自然流而言的. 一个独立增量过程称为**齐次的**，若它有平稳增量.

易见，若(X_t)关于$\boldsymbol{F}$为独立增量过程，则关于$\boldsymbol{F}^P$($\boldsymbol{F}$的完备化)亦然. 若(X_t)又随机连续，则(X_t)关于$\tilde{\boldsymbol{F}}$($\boldsymbol{F}$的通常化)也为独立增量过程. 为简便起见，称随机连续的独立增量过程为Lévy过

程，不论其是否齐次. Lévy 过程即是本节的研究对象. 所以，下面我们总假设流$\mathcal{F}$满足通常条件.

对任一 Lévy 过程 X，以 $\varphi_{st}(u)$ 记增量 $X_t-X_s\ (s\leqslant t)$ 的特征函数：

$$\varphi_{st}(u)=\boldsymbol{E}[\exp\{iu(X_t-X_s)\}].$$

由增量的独立性，我们有

$$\varphi_{rs}(u)\varphi_{st}(u)=\varphi_{rt}(u),\quad r\leqslant s\leqslant t. \tag{64.2}$$

由 X 的随机连续性知，$\varphi_{st}(u)$ 是 (s,t,u) 的连续函数.

2.65引理 设 X 为一 Lévy 过程，则对一切 $u\in\boldsymbol{R}$，$s<t$，$s,t\in\boldsymbol{R}_+$，有 $\varphi_{st}(u)\neq 0$.

证明 令 $t_0=\inf\{t\geqslant s:\varphi_{st}(u)=0\}$. 由于 $\varphi_{ss}(u)=1$，必有 $t_0>s$. 只需证明 $t_0=\infty$. 事实上，若 $t_0<\infty$，则 $\varphi_{st_0}(u)=0$. 由(64.2)

$$\varphi_{st}(u)\varphi_{tt_0}(u)=0,\quad s\leqslant t<t_0.$$

因为 $\varphi_{st}(u)\neq 0$，故 $\varphi_{tt_0}(u)=0$. 令 $t\uparrow\uparrow t_0$ 得 $\varphi_{t_0t_0}(u)=0$. 这与 $\varphi_{t_0t_0}(u)=1$ 矛盾. □

2.66定理 设 X 为一 Lévy 过程. 令

$$Z_{st}(u)=[\varphi_{st}(u)]^{-1}\exp\{iu(X_t-X_s)\},\quad s\leqslant t. \tag{66.1}$$

则 $(Z_{st}(u))_{t\geqslant s}$ 为 $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant s}$-鞅.

证明 令 $s\leqslant t'<t$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[Z_{st}(u)\mid\mathcal{F}_{t'}]&=[\varphi_{st}(u)]^{-1}\exp\{iu(X_{t'}-X_s)\}\\&\quad\cdot\boldsymbol{E}[e^{iu(X_t-X_{t'})}\mid\mathcal{F}_{t'}]\\&=e^{iu(X_{t'}-X_s)}\frac{\varphi_{t't}(u)}{\varphi_{st}(u)}=Z_{st'}(u).\quad\Box\end{aligned}$$

鞅 $(Z_{st}(u))_{t\geqslant s}$ 在研究独立增量过程中将起到重要的作用. 为简便起见，Z_{0t} 及 φ_{0t} 分别记为 Z_t 及 φ_t.

2.67引理 **（Ottaviani 不等式）** 设独立随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 满足下列条件：

$$P(|\xi_k+\cdots+\xi_n|>a)\leqslant\alpha,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

其中 $a>0$，$\alpha\in(0,1)$ 为常数，则对任一 $b>0$

$$P\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_1+\cdots+\xi_k|\geqslant a+b\right)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}P(|\xi_1+\cdots+\xi_n|\geqslant b).$$

(67.1)

证明 令

$A_k=[|\xi_1+\cdots+\xi_k|\geqslant a+b]$,

$B_k=[|\xi_k+\cdots+\xi_n|\geqslant a]$, $\qquad k=1,2,\cdots,n$, $B_{n+1}=\varnothing$

$C=[|\xi_1+\cdots+\xi_n|\geqslant b]$,

则

$$\bigcup_{k=1}^{n}(A_kB_{k+1}^c)\subset C,$$

$$\sum_{k=1}^{n}P(A_1^c\cdots A_{k-1}^cA_kB_{k+1}^c)\leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_kB_{k+1}^c\right)\leqslant P(C).$$

另一方面,B_{k+1}^c与$(A_1^c\cdots A_{k-1}^cA_k)$独立,故

$$\begin{aligned}P(C)&\geqslant\sum_{k=1}^{n}P(A_1^c\cdots A_{k-1}^cA_kB_{k+1}^c)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(A_1^c\cdots A_{k-1}^cA_k)P(B_{k+1}^c)\\&\geqslant(1-\alpha)\sum_{k=1}^{n}P(A_1^c\cdots A_{k-1}^cA_k)\\&=(1-\alpha)P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right).\end{aligned}$$

由此即得(67.1). □

2.68定理 每个 Lévy 过程有适应右连左极修正,且此修正亦为 Lévy 过程.

证明 设$X=(X_t)$为一 Lévy 过程. 首先证明,对每个$c>0$

$$P(\sup\{|X_t|:t\in[0,c]\cap Q\}<\infty)=1.\qquad(68.1)$$

事实上,对每个$t\in[0,c]$,当$n\to\infty$时$P(|X_c-X_t|\geqslant n)\downarrow 0$. 由$X$的随机连续性,对每个$n$及$t_0\in[0,c]$,

$$\overline{\lim_{t\to t_0}}P(|X_c-X_t|\geqslant n)\leqslant P(|X_c-X_{t_0}|\geqslant n).$$

由 Dini 定理,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant c}P(|X_c-X_t|\geqslant n)=0.$$

取 n_1 使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant c} P(|X_c - X_t| \geqslant n_1) < \frac{1}{2}.$$

由引理2.67得

$$P\{\sup_{t\in[0,c]\cap Q} |X_t| \geqslant n + n_1\} \leqslant 2P(|X_c| \geqslant n). \qquad (68.2)$$

(68.1)由(68.2)即得.

现在将 Föllmer 引理应用于 $(Z_t(u))_{t\geqslant 0}$，则存在 $\Omega_0 \in \mathscr{F}$，$P(\Omega_0)=1$，使得对每个 $\omega\in\Omega_0$

1）对一切 $c>0$ $\sup_{t\in[0,c]\cap Q} |X_t(\omega)| < \infty$，

2）对一切 $u\in Q$ 及 $t\geqslant 0(t>0)$ $\lim_{r\in Q_-, r\downarrow\downarrow t} e^{iuX_r(\omega)}$ $(\lim_{r\in Q_+, r\uparrow\uparrow t} e^{iuX_r(\omega)})$ 存在且有穷. 进一步，我们可断定，对每个 $\omega\in\Omega_0$ 及一切 $t\geqslant 0$，$\lim_{r\in Q_-, r\downarrow\downarrow t} X_r(\omega)$（对一切 $t>0$ $\lim_{r\in Q_+, r\uparrow\uparrow t} X_r(\omega)$）存在且有穷. 事实上，若有两列有理数 (r_n)，(r_n')，使得 $r_n \downarrow\downarrow t$，$r_n' \downarrow\downarrow t$，及

$$\lim_n X_{r_n}(\omega) = a \neq b = \lim_n X_{r_n'}(\omega),$$

则 a，b 均有穷，且对一切 $u\in Q$，$e^{iua}=e^{iub}$. 但当$0<u<\frac{2\pi}{|b-a|}$时，这是不可能的.

令

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{r\in Q_-, r\downarrow\downarrow t} X_r(\omega), & \omega\in\Omega_0, \\ 0, & \omega\notin\Omega_0, \end{cases} \qquad t\geqslant 0,$$

则 $Y=(Y_t)_{t\geqslant 0}$为右连左极过程. 由 X 的随机连续性，对每个 $t\geqslant 0$，$P(X_t=Y_t)=1$. 即 Y 是 X 的右连左极修正.

由于流满足通常条件，易见 Y 是适应的. 因此，Y 也是 Lévy 过程. □

下一定理给出了独立增量过程与鞅之间的另一种联系.

2.69定理 设 $X=(X_t)$ 为独立增量过程，且对一切 $t\geqslant 0$，$E[|X_t|]<\infty$. 令 $m_t=E[X_t]$，$t\geqslant 0$，则(X_t-m_t)为鞅.

若又有 $d_t=D[X_t]<\infty$，$t\geqslant 0$，则$((X_t-m_t)^2-d_t)$为鞅.

证明 由于 $X_t-X_s(s<t)$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立，我们有

$$E[X_t - X_s|\mathscr{F}_s] = E[X_t - X_s] = m_t - m_s, \quad \text{a.s.},$$
$$E[X_t - m_t|\mathscr{F}_s] = X_s - m_s, \quad \text{a.s.},$$

故$(X_t - m_t)$为鞅.

现设$d_t = D[X_t] < \infty$. 不妨设$m_t \equiv 0$. 对$s < t$

$$E[|X_t - X_s|^2|\mathscr{F}_s] = E[|X_t - X_s|^2], \quad \text{a.s.}. \tag{69.1}$$

由于X_s与$X_t - X_s$独立,有

$$\begin{aligned} d_t = D[X_t] &= D[X_s] + D[X_t - X_s] \\ &= d_s + E[|X_t - X_s|^2]. \end{aligned} \tag{69.2}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} E[|X_t - X_s|^2|\mathscr{F}_s] &= E[X_t^2|\mathscr{F}_s] - 2X_s E[X_t|\mathscr{F}_s] + X_s^2 \\ &= E[X_t^2|\mathscr{F}_s] - X_s^2 \quad \text{a.s.}. \end{aligned} \tag{69.3}$$

由(69.1)—(69.3)得

$$E[X_t^2 - d_t|\mathscr{F}_s] = X_s^2 - d_s \quad \text{a.s.},$$

故$(X_t^2 - d_t)$为鞅. □

对齐次 Lévy 过程$X = (X_t)$,增量$X_t - X_s (s \leqslant t)$的特征函数$\varphi_{s,t}(u)$只依赖于$t-s$:$\varphi_{s,t}(u) = \varphi_{t-s}(u)$,且$(\varphi_t(u))_{t \geqslant 0}$满足下列函数方程:

$$\varphi_{t+s}(u) = \varphi_t(u)\varphi_s(u), \quad t, s \in \boldsymbol{R}_+.$$

由于$\varphi_t(u)$是t的连续函数,我们有

$$\varphi_t(u) = [\varphi_1(u)]^t,$$

且$\varphi_1(u)$为无穷可分的.

若(X_t)的期望存在,则

$$m_t = m_0 + (m_1 - m_0)t, \quad t \geqslant 0.$$

若(X_t)的方差存在,则

$$d_t = d_0 + (d_1 - d_0)t, \quad t \geqslant 0.$$

2.70定理 设$X = (X_t)$为一右连左极齐次 Lévy 过程,T为一有限停时,令

$$Y_t = X_{T+t} - X_T, \quad t \geqslant 0,$$

则

1) $Y=(Y_t)_{t\geq 0}$ 与 $\mathscr{F}_T$ 独立.

2) Y 关于 $(\mathscr{F}_{T+t})_{t\geq 0}$ 为独立增量过程.

3) Y 与 $X-X_0$ 同分布.

证明 由于 $\left\{Z_t=\frac{1}{\varphi_t(u)}e^{iu(X_t-X_0)}\right\}$ 为右连左极鞅, 对任何有界停时 S, 由定理2.58, 我们有

$$E[Z_{S+t}|\mathscr{F}_S]=Z_S,\quad \text{a.s.}.$$

$$E[e^{iu(X_{S+t}-X_S)}|\mathscr{F}_S]=\frac{\varphi_{S+t}(u)}{\varphi_S(u)}=\varphi_t(u)\quad \text{a.s.}.\qquad (70.1)$$

对任一 $A\in\mathscr{F}_T$ 及 n, $A[T\leqslant n]\in\mathscr{F}_{T\wedge n}$. 对 $T\wedge n$ 应用(70.1)得

$$\begin{aligned}E[I_{A[T\leqslant n]}e^{iuY_t}]&=E[I_{A[T\leqslant n]}e^{iu(X_{T\wedge n+t}-X_{T\wedge n})}]\\&=E[I_{A[T\leqslant n]}\varphi_t(u)]\\&=\varphi_t(u)P(A[T\leqslant n]).\end{aligned}\qquad (70.2)$$

在(70.2)中令 $n\to\infty$ 得

$$E[I_Ae^{iuY_t}]=E[I_A]\varphi_t(u).\qquad (70.3)$$

在(70.3)中令 $A=\Omega$ 得

$$E[e^{iuY_t}]=\varphi_t(u),$$

$$E[I_Ae^{iuY_t}]=E[I_A]E[e^{iuY_t}].$$

因此, Y_t 与 $\mathscr{F}_T$ 独立, 与 X_t-X_0 同分布.

对 $0\leqslant s<t$, 将已证得结果用于停时 $T+s$ 知, $X_{T+t}-X_{T+s}$ 与 $\mathscr{F}_{T+s}$ 独立. 因此, $Y=(Y_t)$ 关于 $(\mathscr{F}_{T+t})$ 为独立增量过程, 与 $\mathscr{F}_T$ 独立, 且与 $X-X_0$ 同分布. □

注 在定理2.70中, 若停时 T 可取 $+\infty$, 则过程 Y 仅定义在 $[T<\infty]$ 上. 用 $([T<\infty],\mathscr{F}\cap[T<\infty],P(\cdot)/P[T<\infty])$ 代替 $(\Omega,\mathscr{F},P)$, 结论依然成立.

2.71定义 一随机过程 $W=(W_t)$ 称为 **Wiener** 过程或 **Brown** 运动(关于 $(\mathscr{F}_t)$), 若满足下列条件:

1) $W_0=0$.

2) W 为独立增量过程(关于 $(\mathscr{F}_t)$).

3)对一切 $s<t$，$s,t\in \mathbf{R}_+$，W_t-W_s 有正态分布 $N(0,\sigma^2(t-s))$，$\sigma^2>0$.

若 $\sigma=1$，Wiener 过程称为标准的. 显见，Wiener 过程是齐次 Lévy 过程.

很久以来人们就发现，悬浮于液体之中的微小粒子作极其不规则的运动，即所谓的 Brown 运动，它依最初发现这一现象的英国植物学家的名字得名. Wiener 过程是 Brown 运动的一种合理的数学模型. 实际上，Wiener 过程可用来拟合许多不同领域的随机现象.

2.72定义 一随机过程 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 称为 Gauss 过程或正态过程，如果它的有限维分布都是正态分布.

显然，一个正态过程 X 的分布由它的均值函数

$$m_t = \mathbf{E}[X_t],\quad t\geqslant 0,$$

及协方差函数

$$C(t,s) = \mathbf{E}[(X_t - m_t)(X_s - m_s)],\quad t,s\geqslant 0,$$

完全决定. 易见，Wiener 过程是正态过程，且

$$\begin{cases}\mathbf{E}[W_t] = 0, & t\geqslant 0\\ \mathbf{E}[W_tW_s] = \sigma^2(t\wedge s), & t,s\geqslant 0.\end{cases}\tag{72.1}$$

反之，如果 $W=(W_t)$ 是一个正态过程，它的均值函数与协方差函数如(72.1)确定，则 W 是一个关于 $\mathbf{F}(W)$ 的 Wiener 过程.

2.73定理 设 $W=(W_t)$ 为一 Wiener 过程，则 W 有适应连续修正，且此修正也是 Wiener 过程.

证明 由于 Wiener 过程是齐次 Lévy 过程，由定理2.68，W 有右连左极修正 $X=(X_t)$. 令

$$H=\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n=l}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{p2^n}\left[\left|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}\right|\geqslant\frac{1}{m}\right].$$

不难看出，若 $\omega\in H^c$，$X_.(\omega)$ 是 $\mathbf{R}_+$ 上的连续函数. 另一方面，对固定的 p 与 m，

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{p2^n}\left[\left|X_{\frac{j}{2^n}}-X_{\frac{j-1}{2^n}}\right|\geqslant\frac{1}{m}\right]\right)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p2^n} P\left(\left|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}\right| \geqslant \frac{1}{m}\right)$$

$$\leqslant m^4 \sum_{j=1}^{p2^n} E\left[\left|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}\right|^4\right]$$

$$= m^4(p2^n)\left(3\frac{\sigma^4}{2^{2n}}\right) \qquad \left(X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2^n}\right)\right)$$

$$= 3pm^4\sigma^4 \cdot \frac{1}{2^n} \to 0,\ 当\ n \to \infty.$$

从而对任一 l

$$P\left(\bigcap_{n=l}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{p2^n} \left[\left|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}\right| \geqslant \frac{1}{m}\right]\right) = 0.$$

所以，$P(H)=0$. 令

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \omega \in H^c, \\ 0, & \omega \in H, \end{cases} \qquad t \geqslant 0.$$

很清楚，$Y=(Y_t)$ 是 $W=(W_t)$ 的连续修正. 由于流满足通常条件，Y 是适应的. □

注 根据定理2.73，今后我们在 Wiener 过程的定义中再增加一条要求：它是一个连续过程.

2.74定理 设 $W=(W_t)$ 为一 Wiener 过程，则对每个 $t>0$，$n \to \infty$ 时，$\sum_{j=1}^{2^n}\left(W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t}\right)^2 \xrightarrow{a.s.,\ L^2} \sigma^2 t$.

证明 令

$$V_n = \sum_{j=1}^{2^n}\left(W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t}\right)^2.$$

由于 $\left\{\left(W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t}\right): j=1,\cdots,2^n\right\}$ 独立同分布及

$$\left(W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t}\right) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2^n}t\right),$$

我们有

$$E[V_n] = \sum_{j=1}^{2^n} E\left[\left|W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t}\right|^2\right] = 2^n \cdot \frac{\sigma^2}{2^n}t = \sigma^2 t,$$

$$D[V_n] = \sum_{l=1}^{2^n} D\left[\left|W_{\frac{l}{2^n}t} - W_{\frac{l-1}{2^n}t}\right|^2\right] = 2^n \cdot 2\left(\frac{\sigma^2}{2^n}t\right)^2 = \frac{\sigma^4 t^2}{2^{n-1}}.$$

由于 $D[V_n] \to 0$，故得 $V_n \xrightarrow{L^2} \sigma^2 t$. 另一方面，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|V_n - E[V_n]| \geqslant \frac{1}{n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^2 D[V_n]$$

$$= \sigma^4 t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理得 $V_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2 t$. □

注 对每个 t 及 n，令 $D_n: 0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,k_n} = t$ 为 $[0,t]$ 的分割，使得当 $n \to \infty$ 时，$\max|t_{n,j} - t_{n,j-1}| \to 0$. 用同样的方法能证明，对 Wiener 过程 W

$$\sum_{j=1}^{k_n} (W_{t_{n,j}} - W_{t_{n,j-1}})^2 \xrightarrow{L^2} \sigma^2 t.$$

若对每个 n，D_{n+1} 是 D_n 的加细，则仍有

$$\sum_{j=1}^{k_n} (W_{t_{n,j}} - W_{t_{n,j-1}})^2 \longrightarrow \sigma^2 t \quad \text{a.s.}.$$

事实上，定义 $V_{-n} = \sum_{j=1}^{k_n} (W_{t_{n,j}} - W_{t_{n,j-1}})^2, n \geqslant 1$，则 $(V_n)_{n \leqslant -1}$ 为鞅（关于一个适当的流）. 证明细节留给读者作为练习.

2.75定义 一随机过程 $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ 称为参数（或速率）为 $\lambda > 0$ 的（齐次）**Poisson 过程**，（关于 $(\mathscr{F}_t)$），若满足下列条件：

1) $N_0 = 0$，

2) N 为独立增量过程（关于 $(\mathscr{F}_t)$），

3) 对一切 $s < t$，$s, t \in \mathbf{R}_+$，$N_t - N_s$ 服从参数为 $\lambda(t-s)$ 的 Poisson 分布.

2.76定理 设 $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ 为一 Poisson 过程，则 N 有适应右连左极修正，其轨道都是只取非负整数值的单调增加的跳为1的阶梯函数.

证明 由于 Poisson 过程是齐次 Lévy 过程，由定理2.68，N 有右连左极修正 $X = (X_t)$. 令

$$A = \left(\bigcap_{r \in Q_+} [X_r \in N]\right) \cap \left(\bigcap_{r, s \in Q_+, r < s} [X_s - X_r \geqslant 0]\right).$$

显然，$P(A)=1$，对 $\omega \in A$，$X.(\omega)$是右连左极增函数，且仅在 N 中取值．令

$$H = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n=l}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{p2^n} \left[\left|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}\right| \geqslant 2\right].$$

则对任一固定的 p

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{p2^n}\left[\left|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}\right| \geqslant 2\right]\right) \leqslant \sum_{j=1}^{p2^n} P\left(X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}} \geqslant 2\right)$$

$$= p2^n(1 - e^{-\lambda 2^{-n}} - \lambda 2^{-n} e^{-\lambda 2^{-n}}) \to 0, \text{ 当 } n \to \infty.$$

因此，$P(H)=0$．不难看出，$\omega \in AH^c$ 时，$X.(\omega)$是只取非负整数值的单调增加的跳为1的右连左极阶梯函数．现在定义

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \omega \in AH^c, \\ 0, & \omega \notin AH^c, \end{cases} \qquad t \geqslant 0.$$

则 $Y=(Y_t)$是所要的修正． □

注 与 Wiener 过程情形相同，今后我们在 Poisson 过程的定义中再增加一条要求：全部轨道是只取非负整数值的单调增加的跳为1的右连左极阶梯函数．

2.77定理 设 $N=(N_t)$是参数为 λ 的 Poisson 过程．令

$$T_n = \inf\{t \geqslant 0; N_t = n\}, \quad n \geqslant 1, \tag{77.1}$$

则

1) 对每个 $n \geqslant 1$，T_n 是 a.s. 有穷停时，

2) T_1服从参数为 λ 的指数分布，

3) $(T_1, T_2-T_1, \cdots, T_n-T_{n-1}, \cdots)$为独立同分布序列．

证明 对任一 $n \geqslant 1$ 及 $t>0$，$[T_n \leqslant t]=[N_t \geqslant n] \in \mathscr{F}_t$，因此，$T_n$ 为停时．此外，

$$P(T_n \leqslant t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \to 1, \text{ 当 } t \to \infty.$$

所以，T_n a.s. 有穷．特别，

$$P(T_1 \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

即 T_1服从参数为 λ 的指数分布．定义

$$Y_t = N_{T_1+t} - N_{T_1},\ t \geqslant 0.$$

由定理2.70，$Y=(Y_t)$是关于$(\mathscr{F}_{T_1+t})$的参数为λ的 Poisson 过程，且与$\mathscr{F}_{T_1}$独立. 此外，

$$T_2 - T_1 = \inf\{t \geqslant 0;\ Y_t = 1\}.$$

所以，T_2-T_1与$T_1(T_1\in\mathscr{F}_{T_1})$独立同分布. 用同样的方法，按归纳法可证$(T_1, T_2-T_1, \cdots, T_n-T_{n-1}, \cdots)$为独立同分布序列. □

注 事实上，一个 Poisson 过程$N=(N_t)$可表示为：

$$N_t = n,\ 当\ T_n \leqslant t < T_{n+1},$$

其中T_n，$n\geqslant 1$，由(77.1)定义，且$T_0=0$.

设$(S_n)_{n\geqslant 1}$为独立同分布序列，其共同分布是参数为$\lambda>0$的指数分布. 定义

$$\tilde{T}_0 = 0,\ \tilde{T}_n = S_1 + \cdots + S_n,\ n \geqslant 1,$$

$$\tilde{N}_t = n,\ \tilde{T}_n \leqslant t < T_{n+1},\ n \geqslant 0,$$

则$\tilde{N}=(\tilde{N}_t)_{t\geqslant 0}$是关于$\boldsymbol{F}(\tilde{N})$的参数为$\lambda$的 Poisson 过程，因为$\tilde{N}$与$N$同分布.

一般地，设$(T_n)_{n\geqslant 0}$为一列随机变量，使得

1) $0=T_0\leqslant T_1\leqslant\cdots\leqslant T_n\leqslant\cdots, T_n\uparrow\infty$，

2) 对每个$n\geqslant 0$，$T_n<\infty\Rightarrow T_n<T_{n+1}$.

定义

$$X_t = n,\ 当\ T_n \leqslant t < T_{n+1}.$$

$X=(X_t)$称为**计数过程**或**点过程**. 计数过程常用作随时间依次发生的事件的模型，如一排队系统中顾客的来到，来到一电话交换台的呼唤，路上的交通事故等等. 因此，X_t可看作$[0,t]$中来到的顾客数. T_n称为第n个来到时刻($T_n=\infty$意味着第n个顾客不出现). Poisson 过程是最简单但最重要、最有用的计数过程.

问题与补充

2.1 设$(X_n)_{n\geqslant 1}$为独立同分布随机变量序列，X_1服从$(0,1)$上

的均匀分布. 令 $d\in(0,1)$,定义

$$T=\inf\{n\geqslant 1:\ X_n\geqslant d\},$$
$$S=\inf\{n\geqslant 1:\ X_1+\cdots+X_n\geqslant 1\}.$$

计算 $\boldsymbol{E}[T]$,$\boldsymbol{E}[X_T]$,$\boldsymbol{E}[S]$及 $\boldsymbol{E}[X_S]$.

2.2 设$(X_n)_{n\geqslant 1}$为一个$(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$-适应同分布随机变量序列,对每个 $n\geqslant 1$,X_{n+1}与 $\mathscr{F}_n$ 独立,T 为$(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$-有限停时,则

1)$(X_{T+n})_{n\geqslant 1}$与 $\mathscr{F}_T$ 独立,

2)$(X_{T+n})_{n\geqslant 1}$与$(X_{n\geqslant 1})$同分布.

2.3 设$(X_n)_{n\geqslant 1}$为一个$(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$-适应非负随机变量序列,对每个 $n\geqslant 1$,X_{n+1}与 $\mathscr{F}_n$ 独立,则

$\boldsymbol{E}[\sup\limits_{n\geqslant 1}X_n]\leqslant 2\sup\{\boldsymbol{E}[X_T I_{[T<\infty]}]:T$ 为$(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$-停时$\}$(预言家不等式).

2.4 设$(X_n)_{n\geqslant 0}$为鞅,则$(|X_n|)_{n\geqslant 0}$为鞅当且仅当

1)对每个 $n\geqslant 1$,$X_nX_0\geqslant 0$ a.s.,

2)对每个 $n\geqslant 0$,$[X_n=0]\subset[X_{n+1}=0]$ a.s..

2.5 设 $X=(X_n)$为一$(\mathscr{F}_n)$-鞅(上鞅),T 为一$(\mathscr{F}_n)$-停时,则在 T 停止的序列 $X^T=(X_n^T)$(定义为 $X_n^T=X_{T\wedge n}$)也是$(\mathscr{F}_n)$-鞅(上鞅).

2.6 令 $a<b$, $a,b\in\boldsymbol{R}$ 及 $N\geqslant 1$.

1)若(X_n)为一个$(\mathscr{F}_n)$-上鞅,则

$$\boldsymbol{P}(U_a^b[X,N]\geqslant 1|\mathscr{F}_0)$$
$$\leqslant\frac{1}{b-a}\{\boldsymbol{E}[(X_N-a)^- I_{[U_a^b[X,N]=0]}|\mathscr{F}_0]-(X_0-a)^-\},$$

$$\boldsymbol{E}[U_a^b[X,N]|\mathscr{F}_0]\leqslant\frac{1}{b-a}\{\boldsymbol{E}[(X_N-a)^-|\mathscr{F}_0]-(X_0-a)^-\}.$$

2)若(X_n)为一个$(\mathscr{F}_n)$-下鞅,则

$$(X_0-a)^+\leqslant\boldsymbol{E}[(X_N-a)^+ I_{[U_a^b[X,N]=0]}|\mathscr{F}_0],$$

$$\boldsymbol{E}[U_a^b[X,N]|\mathscr{F}_0]\leqslant\frac{1}{b-a}\{\boldsymbol{E}[(X_N-a)^+|\mathscr{F}_0]-(X_0-a)^+\}.$$

2.7 设(X_n)为一鞅,且 $\boldsymbol{E}[\sup\limits_n|X_{n+1}-X_n|]<\infty$,则对几乎

所有 ω，或$\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)$存在且有穷，或$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n(\omega)=+\infty$及$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n(\omega)=-\infty$同时成立.

2.8 设(A_n)为一$(\mathscr{F}_n)$-适应的事件列，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \left[\sum_n P[A_n|\mathscr{F}_{n-1}]=+\infty\right] \quad \text{a.s..}$$

(推广的 Borel-Cantelli 引理).

2.9 设(X_n)为一非负上鞅. 为要(X_n)为位势，必须且只需任一非负鞅(Y_n)若满足$\forall\, n, Y_n\leqslant X_n$ a.s.，必为零：对一切 $n, Y_n=0$ a.s..

2.10 设(X_n)为一$(\mathscr{F}_n)$-适应可积随机变量序列. 为要(X_n)为位势，必须且只需存在一$(\mathscr{F}_n)$-适应可积增序列(A_n)，使得对一切 n

$$X_n = E[A_\infty|\mathscr{F}_n] - A_n \quad \text{a.s..}$$

此外若要求(A_n)可料且 $A_0=0$，则(A_n)为唯一决定的.

2.11 设$(Y_n)_{n\geqslant0}$，$(Z_n)_{n\geqslant0}$为两个非负鞅，则

$$X_n = Y_n - Z_n,\ n\geqslant 0,$$

为(X_n)的 Krickeberg 分解当且仅当$E[Y_0]+E[Z_0]=\sup\limits_n E[|X_n|]$.

2.12 设$(X_n)_{n\geqslant0}$为一$(\mathscr{F}_n)$-适应序列，对每个 $n\geqslant0$，X_{n+1}与$\mathscr{F}_n$独立，$\sup\limits_n E[|X_n|]<\infty$，且 $E[X_n]=0$，$n\geqslant0$. 令 T 为一$(\mathscr{F}_n)$-停时，且 $E[T]<\infty$，则

$$E[X_0+X_1+\cdots+X_T]=0.$$

2.13 为要一适应序列(X_n)为可右闭上鞅(鞅)，必须且只需

1)$\sup\limits_n E[|X_n|]<\infty$，

2)对一切有限停时 $S\leqslant T$，$E[X_S]\geqslant E[X_T]$($=E[X_T]$).

2.14 设 $X=(X_n)_{n\geqslant0}$为一$(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant0}$适应序列，则下列命题等价：

1)存在一列停时 $T_k\uparrow\infty$，使得对每个 k、$X^{T_k}=(X_{T_k\wedge n})$为$(\mathscr{F}_n)$-鞅，

2) X_n 可积，且对每个 $n\geqslant 0$，X_{n+1} 关于 $\mathscr{F}_n$ 为 σ-可积，并有

$$E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]=X_n \quad \text{a.s.}.$$

2.15 设 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 为一 Wiener 过程，则下列过程均为 Wiener 过程：

$$W_t^{(1)}=-W_t,\ t\geqslant 0.$$

$$W_t^{(2)}=W_{t+s}-W_s,\ t\geqslant 0,\ \text{对一固定的 } s>0,$$

$$W_t^{(3)}=\begin{cases} tW_{1/t}, & t>0,\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

$$W_t^{(4)}=W_a-W_{a-t},\ 0\leqslant t\leqslant a,\ \text{对一固定的 } a>0.$$

2.16 设 $W=(W_t)$ 为一标准 Wiener 过程.

1) **证明**

$$B_t=W_t-tW_1,\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

是一正态过程，均值函数为零，协方差函数为

$$C(t,s)=\begin{cases} t(1-s), & t\leqslant s,\\ (1-t)s, & t>s.\end{cases}$$

(这样的连续正态过程称为 Brown 桥.)

2) **证明** $(W_t,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$ 在 $W_1=0$ 的条件之下的条件分布与一个 Brown 桥同分布.

2.17 设 $W=(W_t)$ 为一 Wiener 过程，T 为一停时，且 $E[T]<\infty$，则 $E[W_T]=0$ 且 $E[W_T^2]=\sigma^2E[T]$.

2.18 设 $W=(W_t)$ 为一标准 Wiener 过程，$a<0<b$. 定义

$$T=\inf\{t\geqslant 0;\ W_t=a \text{ 或 } W_t=b\}.$$

计算 $E[T]$ 及 $P(W_T=a)$.

2.19 设 $W=(W_t)$ 为一标准 Wiener 过程，T 为一停时，定义

$$X_t=\begin{cases} W_t, & t\leqslant T,\\ 2W_T-W_t, & t>T,\end{cases}\quad t\geqslant 0.$$

则 $X=(X_t)$ 仍为一标准 Wiener 过程（反射原理）. 利用反射原理证明，对固定的 $t>0$，$\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}W_s$，$|W_t|$ 及 $\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}W_s-W_t$ 有下列共同的分布密度：

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/(2t)}I_{]0,\infty[}(x).$$

2.20 设$(T_n)_{n\geq 0}$为一列随机变量，且

$$0=T_0<T_1<\cdots<T_n<\cdots,\ T_n\uparrow\infty,$$

$N=(N_t)$如下定义：

$$N_t=n,\ \text{当}\ T_n\leqslant t<T_{n+1},$$

则下列命题等价：

1）N 是参数为 λ 的 Poisson 过程（关于其自然流），

2）对每个 $t>0$ 及 $n\geqslant 1$，给定 $N_t=n$ 时，$(T_1,\cdots,T_n)$的分布与 n 个独立的，在$[0,t]$上均匀分布的随机变量的顺序统计量的分布相同，且 N_t 服从参数为 λt 的 Poisson 分布，

3）$(T_1,T_2-T_1,\cdots,T_{n+1}-T_n,\cdots)$为独立同分布序列，且对任一 $\boldsymbol{R}_+$ 上的非负 Borel 函数 f，有

$$\boldsymbol{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}f(T_n)\Big]=\lambda\int_0^{\infty}f(t)dt.$$

第三章　过程与停时

从本章开始，我们将连续用三章的篇幅，介绍随机过程一般理论及其初步应用.

本章的基本出发点是一可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$及其上的一个流$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$，而自始至终不出现概率测度.

§1.　停时

我们先回忆第二章§5中给出的停时的定义.

3.1定义　$(\Omega,\mathscr{F})$上一$\overline{\boldsymbol{R}}_+$-值随机变量$T$称为**$\boldsymbol{F}$-停时**，若对每个$t\geq 0$，$[T\leq t]\in\mathscr{F}_t$；称为**$\boldsymbol{F}$-宽停时**，若对每个$t>0$，$[T<t]\in\mathscr{F}_t$，或等价地，$T\wedge t\in\mathscr{F}_t$.

显然，$\boldsymbol{F}$-宽停时与$\boldsymbol{F}_+$-停时是同一个概念（注意$\boldsymbol{F}_+=(\mathscr{F}_{t+})$）. 特别，$\boldsymbol{F}$-停时也是$\boldsymbol{F}$-宽停时. 下面，一切停时都是对$\boldsymbol{F}$而言的，除非另行说明.

读者不难自行证明下一定理.

3.2定理　1）设S,T为停时（宽停时），则$S\wedge T,S\vee T$为停时（宽停时）.

2）设(S_n)为停时（宽停时）列，则$\bigvee_n S_n$为停时（宽停时），$\bigwedge_n S_n$为宽停时. 若(S_n)为尾定的，即对每个$\omega\in\Omega$，存在自然数n_ω，使得$n\geq n_\omega$时，有$S_n(\omega)=S_{n_\omega}(\omega)$，则$\bigwedge_n S_n$为停时.

3.3定义　设T为一停时，令

$$\mathscr{F}_{T+}=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\forall\, t\in\boldsymbol{R}_+,\ A[T\leq t]\in\mathscr{F}_{t+}\},\qquad(3.1)$$

$$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\forall\, t\in\boldsymbol{R}_+,\ A[T\leq t]\in\mathscr{F}_t\},\qquad(3.2)$$

$$\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_0\vee\sigma\{A[t<T]:\ A\in\mathscr{F}_t,\ t\in\boldsymbol{R}_+\},\qquad(3.3)$$

则 $\mathscr{F}_{T+}$，$\mathscr{F}_T$，$\mathscr{F}_{T-}$ 都为 σ-域．$\mathscr{F}_T$ 称为 **T 前事件 σ-域**，$\mathscr{F}_{T-}$ 称为 **严格 T 前事件 σ-域**．容易证明

$$\mathscr{F}_{T+}=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\ \forall t\in \boldsymbol{R}_+,\ A[T<t]\in\mathscr{F}_t\},\tag{3.4}$$

$$\mathscr{F}_{T-}=\sigma\{A[t\leqslant T]:\ A\in\mathscr{F}_{t-},\ t\in \boldsymbol{R}_+\},\tag{3.5}$$

$$\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_0\vee\sigma\{A[t<T]:\ A\in\mathscr{F}_{t+},\ t\in \boldsymbol{R}_+\}.\tag{3.6}$$

设 T 为一宽停时，则仍可按(3.1)，(3.3)分别定义 $\mathscr{F}_{T+}$ 及 $\mathscr{F}_{T-}$，而(3.2)定义的 $\mathscr{F}_T$ 不一定是 σ-域了(例如，若对某个 $t\in \boldsymbol{R}_+$，使得 $[T\leqslant t]\notin\mathscr{F}_t$，则 $\Omega\notin\mathscr{F}_T$)．因此对宽停时 T，一般我们只能定义 $\mathscr{F}_{T+}$，$\mathscr{F}_{T-}$．但(3.4)—(3.6)仍成立．事实上，对任一 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ 值随机变量 T，我们都能用(3.3)定义 $\mathscr{F}_{T-}$，且(3.5)及(3.6)也成立．

显然，对每个停时 T，我们有 $\mathscr{F}_{T-}\subset\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T+}$；对每个宽停时 T，我们有 $\mathscr{F}_{T-}\subset\mathscr{F}_{T+}$．如果 $T\equiv t$ 为常值，$t\in\overline{\boldsymbol{R}}_+$，则 T 为停时，且 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$，$\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{t-}$，$\mathscr{F}_{T+}=\mathscr{F}_{t+}$(记得 $\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0$，$\mathscr{F}_{\infty-}=\mathscr{F}_\infty$)．

下一定理罗列了有关 σ-域 $\mathscr{F}_T$，$\mathscr{F}_{T-}$，$\mathscr{F}_{T+}$ 的一些主要性质．

3.4定理 在下面的叙述中，S，T 表示停时，(S_n) 为停时列，R，U 表示宽停时，(R_n) 为宽停时列．

1) R 为 $\mathscr{F}_{R-}$ 可测．

2) $S\leqslant T\Rightarrow\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$；$R\leqslant U\Rightarrow\mathscr{F}_{R-}\subset\mathscr{F}_{U-}$，$\mathscr{F}_{R+}\subset\mathscr{F}_{U+}$．

3) $\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{S\wedge T}$．

4) $A\in\mathscr{F}_{S\vee T}\Rightarrow A[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_T$，$A[S<T]\in\mathscr{F}_T$，$A[S=T]\in\mathscr{F}_{S\wedge T}$．

5) $\mathscr{F}_S\vee\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{S\vee T}=\{A\cup B:A\in\mathscr{F}_S,B\in\mathscr{F}_T,AB=\varnothing\}$．

6) $A\in\mathscr{F}_{R+}\Rightarrow A[R<U]\in\mathscr{F}_{U-}$．

7) $A\in\mathscr{F}_\infty\Rightarrow A[R=\infty]\in\mathscr{F}_{R-}$．

8) $R\leqslant U$，且在 $[R<\infty]$ 上 $R<U\Rightarrow\mathscr{F}_{R+}\subset\mathscr{F}_{U-}$．

9) $S\leqslant T$，且在 $[T>0]$ 上 $S<T\Rightarrow\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_{T-}$．

10) 若 $R=\bigvee\limits_n R_n$，$U=\bigwedge\limits_n R_n$，则

$$\mathcal{F}_{R} = \bigvee_n \mathcal{F}_{R_n},\quad \mathcal{F}_{U} = \bigwedge_n \mathcal{F}_{R_n}.$$

11) 若 $S=\bigvee_n S_n$，且对每个 n，在 $[0<S_n<\infty]$ 上有 $S_n<S$，则

$$\mathcal{F}_{S-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n}.$$

证明 1) 由于对一切 $t\in \boldsymbol{R}_+$，$[R>t]$ 为 $\mathcal{F}_{R-}$ 的生成元，$[R=0]^c=[R>0]$，故 R 为 $\mathcal{F}_{R-}$ 可测.

2) 设 $A\in\mathcal{F}_S$，则对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$，

$$A[T\leqslant t]=(A[S\leqslant t])[T\leqslant t]\in\mathcal{F}_t,$$

从而 $A\in\mathcal{F}_T$. 于是 $\mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_T$. 类似地，有 $\mathcal{F}_{R-}\subset\mathcal{F}_{U-}$.

设 $A\in\mathcal{F}_t$，则 $A[t<R]\in\mathcal{F}_{R-}$. 故由(3.6)得

$$A[t<R]=(A[t<R])[t<U]\in\mathcal{F}_{U-},$$

从而 $\mathcal{F}_{R-}\subset\mathcal{F}_{U-}$.

3) 由2)只需证 $\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T\subset\mathcal{F}_{S\wedge T}$. 设 $A\in\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T$，则对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$，

$$A[S\wedge T\leqslant t]=(A[S\leqslant t])\cup(A[T\leqslant t])\in\mathcal{F}_t.$$

这表明 $A\in\mathcal{F}_{S\wedge T}$，故 $\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T\subset\mathcal{F}_{S\wedge T}$.

4) 设 $A\in\mathcal{F}_{S\vee T}$. 由1)及2)知，$S$，$T$ 都为 $\mathcal{F}_{S\vee T}$ 可测，故 $A[S\leqslant T]\in\mathcal{F}_{S\vee T}$. 对每个 $t\in\boldsymbol{R}_+$，

$$(A[S\leqslant T])[T\leqslant t]=(A[S\leqslant T])[S\vee T\leqslant t]\in\mathcal{F}_t.$$

这表明 $A[S\leqslant T]\in\mathcal{F}_T$. 同理可证 $A[S<T]\in\mathcal{F}_T$. 于是 $A[S=T]\in\mathcal{F}_T$. 但 S 与 T 地位对称，故

$$A[S=T]\in\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_{S\wedge T}.$$

5) 设 $C\in\mathcal{F}_{S\vee T}$，$A=C[T<S]$，$B=C[S\leqslant T]$，则由4)知，$A\in\mathcal{F}_S$，$B\in\mathcal{F}_T$，且 $AB=\varnothing$，$A\cup B=C$. 所以

$$\mathcal{F}_{S\vee T}\subset\{A\cup B:A\in\mathcal{F}_S,B\in\mathcal{F}_T,AB=\varnothing\}\subset\mathcal{F}_S\vee\mathcal{F}_T.$$

由2) $\mathcal{F}_S\vee\mathcal{F}_T\subset\mathcal{F}_{S\vee T}$ 是显然的，故5)得证.

6) 设 $A\in\mathcal{F}_R$. 对每个 $r\in\boldsymbol{R}_+$，$A[R\leqslant r]\in\mathcal{F}_r$. 由(3.6)，有

$$A[R<U]=\bigcup_{r\in Q_+}(A[R\leqslant r][r<U])\in\mathcal{F}_{U-}.$$

7) 令 $\mathcal{G}=\{A\in\mathcal{F}_\infty: A[R=\infty]\in\mathcal{F}_{R-}\}$，则 $\mathcal{G}$ 为 σ-域. 令 $A\in\mathcal{F}_t$，则

$$A[R=\infty]=\bigcap_{k=n}^{\infty}(A[k<R])\in\mathscr{F}_{R-}.$$

即 $A\in\mathscr{G}$. 因此 $\mathscr{G}\supset\bigcup_n\mathscr{F}_n$, $\mathscr{G}\supset\sigma(\bigcup_n\mathscr{F}_n)=\mathscr{F}_\infty$, $\mathscr{G}=\mathscr{F}_\infty$.

8)令 $A\in\mathscr{F}_{R+}$,则 $A[R<U]\in\mathscr{F}_{U-}$(由6),$A[R=\infty]\in\mathscr{F}_{R-}\subset\mathscr{F}_{U-}$(由7),且

$$A=(A[R<U])\cup(A[R=\infty])\in\mathscr{F}_{U-}.$$

9)令 $A\in\mathscr{F}_S$,则 $A[S=0]\in\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}_{T-}$,且

$$A=(A[S<T])\cup(A[T=0])\in\mathscr{F}_{T-}.$$

10)令 $t\in\boldsymbol{R}_+$ 及 $A\in\mathscr{F}_t$,则 $A[t<R_n]\in\mathscr{F}_{R_n-}$,且

$$A[t<R]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A[t<R_n])\in\bigvee_n\mathscr{F}_{R_n-}.$$

由定义3.3,我们有

$$\mathscr{F}_{R-}\subset\bigvee_n\mathscr{F}_{R_n-}.$$

反包含关系总是成立的.

令 $A\in\bigcap_n\mathscr{F}_{R_n+}$. 对每个 $t\in\boldsymbol{R}_+$,由(3.4),有

$$A[U<t]=\bigcup_n(A[R_n<t])\in\mathscr{F}_t.$$

这表明 $A\in\mathscr{F}_{U+}$. 因此,

$$\bigcap_n\mathscr{F}_{R_n+}\subset\mathscr{F}_{U+}.$$

反包含关系也总是成立的.

11)由9),我们有 $\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n}\subset\mathscr{F}_{S-}$. 由10),我们有

$$\mathscr{F}_{S-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n-}\subset\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n}.$$

因此,$\mathscr{F}_{S-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n}$. □

3.5系 设 S,T 为停时,R,U 为宽停时.

1)$[S\leqslant T]$,$[S<T]$,$[S=T]$都属于 $\mathscr{F}_{S\wedge T}$;$[S<T]\in\mathscr{F}_{T-}$.

2)设随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_{S\vee T}$,则 $\xi I_{[S\leqslant T]}\in\mathscr{F}_T$,$\xi I_{[S<T]}\in\mathscr{F}_T$,$\xi I_{[S=T]}\in\mathscr{F}_{S\wedge T}$.

3)设随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_{R+}$,则 $\xi I_{[R<U]}\in\mathscr{F}_{U-}$.

4)我们有

$$\mathscr{F}_{S\vee T}\cap[S\leqslant T]=\mathscr{F}_T\cap[S\leqslant T],$$

$$\mathscr{F}_{S\vee T}\cap[S<T]=\mathscr{F}_T\cap[S<T],$$
$$\mathscr{F}_{S\vee T}\cap[S=T]=\mathscr{F}_{S\wedge T}\cap[S=T]$$
$$=\mathscr{F}_S\cap[S=T]$$
$$=\mathscr{F}_T\cap[S=T].$$

5)我们有

$$\mathscr{F}_{S\wedge T}\cap[S\leqslant T]=\mathscr{F}_S\cap[S\leqslant T],$$
$$\mathscr{F}_{S\wedge T}\cap[S<T]=\mathscr{F}_S\cap[S<T].$$

6)设(S_n)为尾定停时列,则

$$\mathscr{F}_{\bigvee_n S_n}=\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n}$$
$$=\{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n:A_n\in\mathscr{F}_{S_n},\forall\ n\geqslant 1,A_kA_j=\varnothing,k\neq j\},\quad(5.1)$$
$$\mathscr{F}_{\bigwedge_n S_n}=\bigcap_n\mathscr{F}_{S_n}.\quad(5.2)$$

证明 我们只证6).令$S=\bigvee_n S_n$.由于(S_n)尾定,有$\bigcup_{n=1}^{\infty}[S_n=S]=\Omega$.令$A\in\mathscr{F}_S$,

$$A_1=A[S=S_1],A_n=A(\bigcap_{j<n}[S_j<S])[S=S_n],n\geqslant 2.$$

则由于$[S_j<S]\in\mathscr{F}_S$,故由定理3.4.4),$A_n\in\mathscr{F}_{S_n},n\geqslant 1$.此外有$A_kA_j=\varnothing,k\neq j,A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.(5.1)得证.

令$T=\bigwedge_n S_n$.设$A\in\bigcap_n\mathscr{F}_{S_n}$,则由定理3.4.4),对每个$n$,$A[S_n=T]\in\mathscr{F}_T$,故$A=\bigcup_n(A[S_n=T])\in\mathscr{F}_T$.(5.2)得证. □

注 在4)及5)中,$\mathscr{F}_{S\vee T}$,$\mathscr{F}_{S\wedge T}$,$\mathscr{F}_T$,$\mathscr{F}_S$可分别用$\mathscr{F}_{(S\vee T)-}$,$\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}$,$\mathscr{F}_{T-}$,$\mathscr{F}_{S-}$代替.

3.6定理 假定$\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{0-}$.设$(T_n)$是宽停时的单调序列,且$T=\lim_{n\to\infty}T_n$.

1)若(T_n)单调降,且对一切n在$[0<T_n]$上有$T<T_n$,则

$$\mathscr{F}_{T+}=\bigcap_n\mathscr{F}_{T_n}.\quad(6.1)$$

2)若(T_n)单调增,且对一切n,在$[0<T]$上有$T_n<T$,则

$$\mathscr{F}_{T-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n+}.\quad(6.2)$$

证明 1)令$\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t+},t\geqslant 0$.由于$\mathscr{G}_0=\mathscr{F}_{0+}=\mathscr{F}_0$,我们有

$\mathscr{G}_{t-}=\mathscr{F}_{t-}$, $t\geqslant 0$. T, T_n 为$(\mathscr{G}_t)$-停时. 由定理3.4.9), 有

$$\mathscr{F}_{T+}=\mathscr{G}_T\subset\mathscr{G}_{T_n-}=\mathscr{F}_{T_n-}.$$

另一方面, 由定理3.4.10)

$$\mathscr{F}_{T+}\subset\bigcap_n\mathscr{F}_{T_n-}\subset\bigcap_n\mathscr{F}_{T_n+}=\mathscr{F}_{T+}.$$

(6.1)得证.

2) 同理有 $\mathscr{F}_{T_n+}\subset\mathscr{F}_{T-}$. 由定理3.4.10),

$$\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n+}\subset\mathscr{F}_{T-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n-}\subset\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n+}.$$

(6.2)得证. □

3.7定理 1) 设 S 为一停时, 随机变量 $T\in\mathscr{F}_S$, 且 $T\geqslant S$, 则 T 也是停时. 如果 S 为一宽停时, 随机变量 $T\in\mathscr{F}_{S+}$, $T\geqslant S$, 在$[S<\infty]$上有 $T>S$, 则 T 也是停时.

2) 设 S 为一宽停时. 对每个自然数 $n\geqslant 1$, 令

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}I_{\left[\frac{k-1}{2^n}\leqslant S<\frac{k}{2^n}\right]}+(+\infty)I_{[S=+\infty]},\qquad(7.1)$$

则 S_n, $n\geqslant 1$, 为停时, 且 $S_n\downarrow S$.

3) 设 S, T 为两个停时, 则 $S+T$ 为停时.

证明 1) 对第一种情形, 对一切 $t\geqslant 0$, $[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_S$. 由 $\mathscr{F}_S$ 的定义, 我们有

$$[T\leqslant t]=[T\leqslant t][S\leqslant t]\in\mathscr{F}_t.$$

因此, T 为停时. 对第二种情形, 对每个 $t\geqslant 0$, $[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_{S+}$. 由定理3.4.6), 我们有

$$[T\leqslant t]=[T\leqslant t][S<t]\in\mathscr{F}_{t-}\subset\mathscr{F}_t$$

(注意, 依假设 $T>0$). 因此, T 也为停时.

2) 由定理3.4.1), $S_n\in\mathscr{F}_{S-}$. 显然, $S_n\geqslant S$, 且在$[S<\infty]$上 $S_n>S$. 故由1), S_n, $n\geqslant 1$, 为停时. $S_n\downarrow S$ 是显然的.

3) 由于 $S+T\geqslant S\vee T$, $S+T\in\mathscr{F}_{S\vee T}$, 由1) $S+T$ 为停时. □

3.8定义 设 T 为 Ω 上的一非负函数, $A\subset\Omega$, 令

$$T_A=TI_A+(+\infty)I_{A^c}.$$

称 T_A 为 T 到 A 上的**局限**. 显然, $T\leqslant T_A$.

3.9定理 1) 设 T 为停时, $A\in\mathscr{F}_{\infty}$, 则为要 T_A 为停时, 必须且只需 $A\in\mathscr{F}_T$.

2) 设 T 为停时, $A\in\mathscr{F}_T$, 则

$$\mathscr{F}_{T_A}\cap A=\mathscr{F}_T\cap A,\quad \mathscr{F}_{T_A}\cap A^c=\mathscr{F}_{\infty}\cap A^c,$$

$$\mathscr{F}_{T_A-}\cap A=\mathscr{F}_{T-}\cap A,\quad \mathscr{F}_{T_A-}\cap A^c=\mathscr{F}_{\infty-}\cap A^c.$$

特别, 若 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$, 则对任一 $A\in\mathscr{F}_T$, $\mathscr{F}_{T_A}=\mathscr{F}_{T_A-}$.

证明 1) 显然.

2) 设 $B\in\mathscr{F}_{T_A}$, 则 $AB\in\mathscr{F}_{T_A}$. 故对一切 $t\geqslant 0$,

$$AB[T\leqslant t]=AB[T_A\leqslant t]\in\mathscr{F}_t.$$

这表明 $AB\in\mathscr{F}_T$, 从而 $B\cap A=(AB)\cap A\in\mathscr{F}_T\cap A$. 故有 $\mathscr{F}_{T_A}\cap A\subset\mathscr{F}_T\cap A$. 但 $T\leqslant T_A$, $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T_A}$, 于是 $\mathscr{F}_{T_A}\cap A=\mathscr{F}_T\cap A$. 注意 $(T_A)_{A^c}=+\infty$, 故由上证,

$$\mathscr{F}_{T_A}\cap A^c=\mathscr{F}_{(T_A)_{A^c}}\cap A^c=\mathscr{F}_{\infty}\cap A^c.$$

设 $B\in\mathscr{F}_t$, 则 $B[t<T_A]\in\mathscr{F}_{T_A-}$, $B[t<T]\in\mathscr{F}_{T-}$. 由于

$$(B[t<T_A])\cap A=(B[t<T])\cap A\in\mathscr{F}_{T-}\cap A,$$

故 $\mathscr{F}_{T_A-}\cap A\subset\mathscr{F}_{T-}\cap A$. 但 $\mathscr{F}_{T-}\subset\mathscr{F}_{T_A-}$, 于是 $\mathscr{F}_{T_A-}\cap A=\mathscr{F}_{T-}\cap A$. 类似地, 我们有

$$\mathscr{F}_{T_A-}\cap A^c=\mathscr{F}_{(T_A)_{A^c}-}\cap A^c=\mathscr{F}_{\infty-}\cap A^c.$$

现设 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$, $A\in\mathscr{F}_T$. 令 $B\in\mathscr{F}_{T_A}$, 则由(9.1), $AB\in\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}\subset\mathscr{F}_{T_A-}$. 又由(9.2), $A^cB\in\mathscr{F}_{T_A-}\cap A^c\subset\mathscr{F}_{T_A-}$, 故有 $B=(AB)\cup(A^cB)\in\mathscr{F}_{T_A-}$. 于是 $\mathscr{F}_{T_A}=\mathscr{F}_{T_A-}$. □

§2. 循序可测、可选与可料过程

在这一节中我们研究三类最有用的可测过程: 循序可测、可选与可料过程.

3.10定义 设 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为一随机过程. 称 X 为**可测过程**, 如果作为 (ω,t) 的函数, $X_t(\omega)$ 为 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$-可测; 称 X 为**循序(可测)过程**, 如果对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$, X 限于 $\Omega\times[0,t]$ 为 $\mathscr{F}_t\times$

$\mathscr{B}([0,t])$-可测.

显然，循序过程为可测且适应的，但逆命题一般不成立.

3.11定理 右连续(左连续)适应过程为循序过程.

证明 设 $X=(X_t)$ 为右连续适应过程. 对每个给定的 $t\geqslant 0$，定义 $\Omega\times[0,t]$ 上一列过程 $X^{(n)}$ 如下：

$$X_s^{(n)}(\omega)=X_0(\omega)I_{[s=0]}+\sum_{k=1}^{2^n}X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega)I_{\left[\frac{(k-1)t}{2^n}<s\leqslant\frac{kt}{2^n}\right]},\ s\in[0,t],$$

则 $X^{(n)}$，$n\geqslant 1$，为 $\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}([0,t])$-可测，且在 $\Omega\times[0,t]$ 上，$\lim\limits_{n\to\infty}X_s^{(n)}(\omega)=X_s(\omega)$. 故限于 $\Omega\times[0,t]$，X 为 $\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}([0,t])$-可测，这表明 X 为循序过程. X 为左连续情形证明类似. □

3.12定理 设 (X_t) 为一循序过程，则对一切停时 T，$X_TI_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_T$-可测.

证明 由于对每个 $t\geqslant 0$，$T\wedge t\in\mathscr{F}_t$，故 $X_{T\wedge t}$ 作为 $(\Omega,\mathscr{F}_t)$ 到 $(\Omega\times[0,t],\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}([0,t]))$ 中的可测映射：$\omega\mapsto(\omega,T(\omega)\wedge t)$ 及 $(\Omega\times[0,t],\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}([0,t]))$ 到 $(\boldsymbol{R},\mathscr{B}(\boldsymbol{R}))$ 中的可测映射：$(\omega,s)\mapsto X_s(\omega)$ 的复合，为 $\mathscr{F}_t$-可测的(注意，这一结论对宽停时也成立).

设 $A\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R})$，则对任何 $t\geqslant 0$，

$$[X_TI_{[T<\infty]}\in A][T\leqslant t]=[X_{T\wedge t}\in A][T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t.$$

又 $X_TI_{[T<\infty]}=\lim\limits_{n\to\infty}X_{T\wedge n}I_{[T\leqslant n]}$，从而 $X_TI_{[T<\infty]}\in\mathscr{F}_\infty$，故 $[X_TI_{[T<\infty]}\in A]\in\mathscr{F}_T$，即 $X_TI_{[T<\infty]}\in\mathscr{F}_T$. □

注 设 $(X_t,t\in\boldsymbol{R}_+)$ 为一循序过程，实值随机变量 $X_\infty\in\mathscr{F}_\infty$，则对一切停时 T，$X_T=X_TI_{[T<\infty]}+X_\infty I_{[T=\infty]}\in\mathscr{F}_T$.

3.13定义 $\Omega\times\boldsymbol{R}_+$ 的一子集 B 称为**随机集**，如果它的示性函数 I_B 是一随机过程：$I_B=((I_B)_t)_{t\geqslant 0}$，这里 $(I_B)_t=I_{B_t}$，B_t 为 B 在 t 处的截口；如果 $B\in\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，$B$ 称为**可测(随机)集**. $\Omega\times\boldsymbol{R}_+$ 的一子集 B 称为**循序集**，若 I_B 是循序过程. 循序集全体构成 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 的一子 σ-域，称为**循序 σ-域**. 易见，一个过程为循序的当且仅当它是关于循序 σ-域可测的.

3.14定义 设 U,V 为 Ω 上两个 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-值函数，且 $U\leqslant V$. 定义

$$[\![U,V]\!] = \{(\omega,t) \in \Omega \times \boldsymbol{R}_+ : U(\omega) \leqslant t \leqslant V(\omega)\},$$
$$[\![U,V [\![= \{(\omega,t) \in \Omega \times \boldsymbol{R}_+ : U(\omega) \leqslant t < V(\omega)\},$$
$$]\!] U,V]\!] = \{(\omega,t) \in \Omega \times \boldsymbol{R}_+ : U(\omega) < t \leqslant V(\omega)\},$$
$$]\!] U,V [\![= \{(\omega,t) \in \Omega \times \boldsymbol{R}_+ : U(\omega) < t < V(\omega)\}.$$

注意，当$V=+\infty$时，有$[\![U,+\infty]\!] = [\![U,+\infty [\![$. 若$U$及$V$是随机变量，$[\![U,V]\!]$，$[\![U,V [\![$，…称为**随机区间**. $[\![U]\!]$定义为$[\![U,U]\!]$，称为U**的图**.

3.15定义 $\Omega\times\boldsymbol{R}_+$上由全体右连左极适应过程产生的$\sigma$-域称为**可选$\sigma$-域**，记为$\mathscr{O}$. $\Omega\times\boldsymbol{R}_+$上由全体左连续适应过程产生的$\sigma$-域称为**可料$\sigma$-域**，记为$\mathscr{P}$. 一随机集或过程称为**可选的**（**可料的**），如果它是$\mathscr{O}$-（$\mathscr{P}$-）可测的.

由定理3.11知，可选过程或可料过程都为适应过程.

若$X=(X_t)_{t\geqslant0}$为一右连左极适应过程，则左极限过程$X_-=(X_{t-})_{t\geqslant0}$为可料过程. 下一定理给出了一些基本的可选集与可选过程，可料集与可料过程.

3.16定理 1）设S,T为一对停时，且$S\leqslant T$，则由S,T所构成的各类随机区间以及它们的图都是可选集. 若实值随机变量$\xi\in\mathscr{F}_S$，则$X=\xi I_{[\![S,T [\![}$为可选过程.

2）设S,T为一对宽停时，且$S\leqslant T$，则$]\!] S,T]\!]$为可料集. 若实值随机变量$\xi\in\mathscr{F}_{S+}$，则$X=\xi I_{]\!] S,T]\!]}$为可料过程.

证明 1）易见$I_{[\![S,T [\![}$为右连左极适应过程，因此$[\![S,T [\![$为可选集. 令$T_n=S+\dfrac{1}{n}$，则$[\![S]\!]=\bigcap\limits_n [\![S,T_n [\![$为可选集. $[\![T]\!]$也为可选集，故$[\![S,T]\!]$，$]\!] S,T]\!]$，$]\!] S,T [\![$都为可选集.

由系3.5.2）知，$X_t=\xi I_{[S\leqslant t]}I_{[t<T]}\in\mathscr{F}_t$，故$X=\xi I_{[\![S,T [\![}$为右连左极适应过程，从而为可选过程.

2）由于$I_{]\!] S,T]\!]}$为左连续适应过程，故$]\!] S,T]\!]$为可料集，由系3.5.3）知，对$t>0$，$X_t=\xi I_{[S<t]}I_{[t\leqslant T]}\in\mathscr{F}_{t-}$，显然，$X_0=0$，因此$X=\xi I_{]\!] S,T]\!]}$为左连续适应过程，从而为可料过程. □

3.17定理 停时全体记为$\mathscr{T}$，则

$$\mathcal{O} = \sigma\{[\![S,\infty[\![\,:\, S \in \mathcal{T}\}.$$

证明 令 $\mathscr{C} = \{[\![S,\infty[\![\,:\, S\in\mathcal{T}\}$. 由于 $\mathscr{C}\subset\mathcal{O}$，有 $\sigma(\mathscr{C})\subset\mathcal{O}$，只需证 $\mathcal{O}\subset\sigma(\mathscr{C})$.

设 (X_t) 为一右连左极适应过程. 往证 (X_t) 为 $\sigma(\mathscr{C})$-可测. 给定 $\varepsilon>0$，令 $T_0^\varepsilon=0$，并归纳定义 $(T_n^\varepsilon)_{n\geq 1}$ 如下：

$$T_{n+1}^\varepsilon(\omega) = \inf\{t: t > T_n^\varepsilon(\omega), |X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_t(\omega)| \geqslant \varepsilon$$
$$\text{或 } |X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_{t-}(\omega)| \geqslant \varepsilon\}. \qquad (17.1)$$

我们用归纳法证明一切 T_n^ε 为停时. 注意，(17.1)右边的集合是 $\boldsymbol{R}_+$ 中对右极限封闭的集，从而对任何 $r\in\boldsymbol{R}_+$，我们有

$$[T_{n+1}^\varepsilon = r]\subset[T_n^\varepsilon<r]([|X_{T_n^\varepsilon}-X_r|\geqslant\varepsilon]\cup[|X_{T_n^\varepsilon}-X_{r-}|\geqslant\varepsilon])$$
$$\subset[T_{n+1}^\varepsilon\leqslant r]. \qquad (17.2)$$

由于 $\quad \bigcup\limits_{r\leqslant t}[T_{n+1}^\varepsilon = r] = \bigcup\limits_{r\leqslant t}[T_{n+1}^\varepsilon \leqslant r] = [T_{n+1}^\varepsilon \leqslant t]$，

由(17.2)得

$$[T_{n+1}^\varepsilon \leqslant t] = \bigcup_{r\leqslant t}\{[T_n^\varepsilon < r]([|X_{T_n^\varepsilon} - X_r| \geqslant \varepsilon]$$
$$\cup\, [|X_{T_n^\varepsilon} - X_{r-}| \geqslant \varepsilon])\}$$
$$= \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{r\in Q_t}\{[T_n^\varepsilon < r][|X_{T_n^\varepsilon} - X_r| > \varepsilon(1-\frac{1}{m})]\},$$

其中 $Q_t = (Q\cap[0,t])\cup\{t\}$. 假定 T_n^ε 为停时，由定理3.4.4)，$[T_{n+1}^\varepsilon\leqslant t]\in\mathcal{F}_t$，从而 T_{n+1}^ε 也是停时.

显然 (T_n^ε) 单调增，且当 $T_{n+1}^\varepsilon(\omega)<\infty$ 时，$T_{n+1}^\varepsilon(\omega)>T_n^\varepsilon(\omega)$，此外 $|X_{T_{n+1}^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega)|\geqslant\varepsilon$ 或 $|X_{T_{n+1}^\varepsilon(\omega)-}(\omega) - X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega)|\geqslant\varepsilon$. 由于 $X.(\omega)$ 在 $]0,\infty[$ 上左极限存在且有穷，故 $(T_n^\varepsilon(\omega))_{n\geq 1}$ 没有有穷聚点，从而 $T_n^\varepsilon(\omega)\uparrow+\infty$. 令

$$X^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} X_{T_n^\varepsilon} I_{[\![T_n^\varepsilon, T_{n+1}^\varepsilon[\![}.$$

由于对一切 $t\in[T_n^\varepsilon(\omega), T_{n+1}^\varepsilon(\omega)[$，$|X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_t(\omega)|<\varepsilon$，故对一切 $(\omega,t)\in\Omega\times\boldsymbol{R}_+$，有 $|X_t^\varepsilon(\omega) - X_t(\omega)|<\varepsilon$，从而

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} X_t^\varepsilon(\omega) = X_t(\omega).$$

但易证 $X_{T_n^\varepsilon}I_{]T_n^\varepsilon,T_{n+1}^\varepsilon[}$ 为 $\sigma(\mathscr{C})$-可测(用 $\mathscr{F}_{T_n^\varepsilon}$-可测简单函数逼近 $X_{T_n^\varepsilon}$)，故 X^ε 为 $\sigma(\mathscr{C})$-可测，从而 X 也 $\sigma(\mathscr{C})$-可测. □

3.18定义 一随机集 B 称为**稀疏集**，如果 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![T_n]\!]$，其中 (T_n) 为一停时列. 显然，稀疏集是可选集.

3.19定理 设 B 为一循序集，且包含在一稀疏集之中，则 B 也是稀疏集.

证明 设 $B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![T_n]\!]$，$(T_n)$ 为停时列. 令

$$L_n=\{\omega:(\omega,T_n(\omega))\in B\}.$$

则 $I_{L_n}=I_B(T_n)I_{[T_n<\infty]}$. 由定理3.12，$L_n\in\mathscr{F}_{T_n}$，故

$$(T_n)_{L_n}=T_nI_{L_n}+(+\infty)I_{L_n^c}$$

为停时. 显然有

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![(T_n)_{L_n}]\!]. \quad \square$$

3.20定理 设 (X_t) 为一可选过程，则存在一可料过程 (Y_t)，使得 $A=\{(\omega,t):X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$ 为稀疏集.

证明 令 $\mathscr{H}$ 为使定理成立的可选过程全体. 显然 $\mathscr{H}$ 为一线性空间. 令 $\mathscr{C}=\{[\![S,T[\![:S\leqslant T,\ S,T\in\mathscr{T}\}$($\mathscr{T}$ 为停时全体). 若 $S\leqslant T,U\leqslant V,S,T,U,V\in\mathscr{T}$，则

$$[\![S,T[\![\cap[\![U,V[\![=[\![(S\vee U),(S\vee U)\vee(T\wedge V)[\![.$$

这表明 $\mathscr{C}$ 为 π-类(定义1.1). 设 $S,T\in\mathscr{T}$，$S\leqslant T$. 令 $X=I_{[\![S,T[\![}$，则 $Y=I_{]\!]S,T]\!]}$ 为可料过程，且 $[X\neq Y]\subset[\![S]\!]\cup[\![T]\!]$. 于是 $\mathscr{C}$ 中集合的示性函数属于 $\mathscr{H}$. 设 $X^{(n)}\in\mathscr{H}$，$0\leqslant X^{(n)}\uparrow X<+\infty$. 取可料过程 $Y^{(n)}$，使得所有的 $[X^{(n)}\neq Y^{(n)}]$ 为稀疏集. 令

$$\bar{Y}=\varlimsup_{n\to\infty}Y^{(n)}, \qquad Y=\bar{Y}I_{[|\bar{Y}|<\infty]}.$$

则 Y 为可料过程，且

$$[X\neq Y]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[X^{(n)}\neq Y^{(n)}]. \tag{20.1}$$

(20.1)的右边仍为稀疏集. 由定理3.19，$X\in\mathscr{H}$. 由于 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{O}$，由单调类定理知，$\mathscr{H}$ 正是可选过程全体. □

3.21定理 令

$$\mathscr{C}_1 = \{A \times \{0\}: A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{A \times]s,t]: 0 < s < t,\ s,t \in \mathbf{Q}_+, A \in \bigcup_{r<s} \mathscr{F}_r\},$$

$$\mathscr{C}_2 = \{A \times \{0\}: A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{A \times [s,t[: 0 < s < t,\quad s,t \in \mathbf{Q}_+,\quad A \in \bigcup_{r<s} \mathscr{F}_r\},$$

$$\mathscr{C}_3 = \{A \times \{0\}: A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{]\!]S,\infty[\![: S \in \mathscr{T} \}.$$

则 $\sigma(\mathscr{C}_1) = \sigma(\mathscr{C}_2) = \sigma(\mathscr{C}_3) = \mathscr{P}$. 特别，$\mathscr{P} \subset \mathscr{O}$.

证明 首先，$\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{P}$ 是显然的，故 $\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \mathscr{P}$. 另一方面，对每个左连续适应过程$(X_t)$，令

$$X_t^{(n)} = X_0 I_{[t=0]} + \sum_{k=0}^{\infty} X_{\frac{k}{2^n}} I_{[\frac{k}{2^n} < t \leq \frac{k+1}{2^n}]},$$

则 $\lim_{n\to\infty} X_t^{(n)} = X_t$. 易见，对每个 $n \geq 1$，$(X_t^{(n)})$ 为 $\sigma(\mathscr{C}_1)$-可测，故(X_t)亦然，$\mathscr{P} \subset \sigma(\mathscr{C}_1)$，从而 $\sigma(\mathscr{C}_1) = \mathscr{P}$.

其次，设 $A \in \mathscr{F}_r$，$r < s$，则有

$$A \times]s,t] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A \times [s + \frac{t-s}{n}, t + \frac{1}{m}[,$$

$$A \times [s,t[= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A \times]r + (1 - \frac{1}{n})(s-r), t - \frac{t-s}{n}].$$

这表明 $\mathscr{C}_1 \subset \sigma(\mathscr{C}_2)$，$\mathscr{C}_2 \subset \sigma(\mathscr{C}_1)$. 故有 $\sigma(\mathscr{C}_2) = \sigma(\mathscr{C}_1) = \mathscr{P}$.

我们有 $\sigma(\mathscr{C}_3) \subset \mathscr{P}$，$\mathscr{C}_1 \subset \sigma(\mathscr{C}_3)$ $(A \times]s,t] =]\!]s_A, t_A]\!]$，$0 < s < t$，$A \in \bigcup_{r<s} \mathscr{F}_r$)，故有 $\sigma(\mathscr{C}_3) = \mathscr{P}$. 最后，由于 $\mathscr{C}_2$中元素为可选集，故 $\mathscr{P} \subset \mathscr{O}$.

3.22 系 设 T 为一停时. 在$[T < \infty]$上定义 $f(\omega) = (\omega, T(\omega))$，则

$$f^{-1}(\mathscr{O}) = \mathscr{F}_T \cap [T < \infty], \tag{22.1}$$

$$f^{-1}(\mathscr{P}) = \mathscr{F}_{T-} \cap [T < \infty]. \tag{22.2}$$

证明 我们只证(22.2)，(22.1)的证明是类似的. 设 $A \in \mathscr{F}_0$，则 $f^{-1}(A \times \{0\}) = A[T=0] \in \mathscr{F}_{T-} \cap [T < \infty]$. 设 $S \in \mathscr{T}$，则

$$f^{-1}( ]\!]S,\infty[\![ ) = [S < T < \infty] \in \mathscr{F}_{T-} \cap [T < \infty].$$

由定理3.21，$f^{-1}(\mathscr{P}) \subset \mathscr{F}_{T-} \cap [T < \infty]$. 反之，设 $A \in \mathscr{F}_0$，则

$A[T<\infty]=f^{-1}(A\times \boldsymbol{R}_+)\in f^{-1}(\mathscr{P})$. 设 $A\in\mathscr{F}_t$，则

$$(A[t<T])[T<\infty]=f^{-1}(A\times]t,\infty[)\in f^{-1}(\mathscr{P}).$$

因此，$\mathscr{F}_{T-}\cap[T<\infty]\subset f^{-1}(\mathscr{P})$，(22.2)得证. 事实上，(22.2)对任一宽停时 T 成立. □

3.23 系 1) 设 T 为一停时，则对任一可选过程 (X_t)，$X_TI_{[T<\infty]}\in\mathscr{F}_T$. 反之，若实值随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_T$，则存在一可选过程 (X_t)，使得 $\xi I_{[T<\infty]}=X_TI_{[T<\infty]}$.

2) 设 T 为一宽停时，则对任一可料过程 (X_t)，$X_TI_{[T<\infty]}\in\mathscr{F}_{T-}$. 反之，若实值随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_{T-}$，则存在一可料过程 (X_t)，使得 $\xi I_{[T<\infty]}=X_TI_{[T<\infty]}$.

证明 在 $[T<\infty]$ 上令 $f(\omega)=(\omega,T(\omega))$，则对任何过程 (X_t)，限于 $[T<\infty]$，$X_TI_{[T<\infty]}$ 为 X 与 f 复合所得. 由系3.22及Doob可测性定理(定理1.5)即得欲证之结论. □

3.24系 设 T 为一停时，$X=(X_t)$ 为一可选(可料)过程，则 X 在 T 处停止的过程

$$X^T=(X_t^T)_{t\geq 0}=(X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$$

仍是可选(可料)的.

证明 事实上，停止过程可表为：

$$X^T=XI_{[0,T[}+X_TI_{[T,\infty[}.$$

早已知道，$I_{[0,T[}$ 及 $X_TI_{[T,\infty[}=(X_TI_{[T<\infty]})I_{[T,\infty[}$ 为可料过程(定理3.12及3.16.2)). 因此，若 X 可选(可料)，则 X^T 也可选(可料). 事实上，若 X 可料，对任一宽停时 T，X^T 也可料. □

§3. 可料时与可及时

3.25定义 Ω 上一 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-值随机变量 T 称为**可料时**，如果 $[T,\infty[$ 为可料集.

显然，可料时是停时，一常值停时是可料时. 此外，若 T 为一宽停时，由于 $]T,\infty[$ 为可料集，T 为可料时当且仅当 $[T]$ 为可料集.

3.26定义 设 T 为一宽停时，$(T_n)_{n\geq 1}$ 为一宽停时上升列，且对一切 n，有 $T_n\leq T$. 令 $A\subset\Omega$. 我们说序列 (T_n) 在 A **上预报** T，如果在 $A[T>0]$ 上，对一切 n，有 $T_n<T$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$. 若 (T_n) 在整个 Ω 上预报 T，我们就简称 (T_n) **预报** T.

称宽停时 T 为**可预报的**，如果存在一列单调上升的宽停时 (T_n) 预报 T.

3.27定理 设 T 为一可预报的宽停时. 若 $[T=0]\in\mathscr{F}_0$，则 T 为可料时. 特别，若 $\mathscr{F}_{0+}=\mathscr{F}_0$，则一切可预报宽停时为可料时.

证明 设 (T_n) 是预报 T 的宽停时上升列，则

$$[\![T,\infty[\![= ([T=0]\times\{0\})\cup(\bigcap_n]\!] T_n,\infty[\![)\in\mathscr{P}.$$

故 T 为可料时. □

3.28系 $\mathscr{P}=\sigma\{[\![S,T[\![:S,T$ 为可预报的可料时，且 $S\leq T\}$.

证明 在定理3.21中，$\mathscr{C}_2$ 由两类元素组成. 第一类元素为 $A\times\{0\}$，其中 $A\in\mathscr{F}_0$. 我们有

$$A\times\{0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[\![0_A,(\frac{1}{n})_A[\![.$$

停时 0_A 及 $(\frac{1}{n})_A$ 分别被序列 $(k\wedge 0_A)_{k\geq 1}$ 及 $\left(k\wedge\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)_A\right)_{k\geq 1}$ 所预报. 第二类元素为 $A\times[s,t[$，其中 $0<s<t$，$A\in\bigcup\limits_{r<s}\mathscr{F}_r$. 我们有 $A\times[s,t[=[\![s_A,t_A[\![$、取 n 充分大，使得 $A\in\mathscr{F}_{s-\frac{1}{n}}$，则停时 s_A 及 t_A 分别被序列 $\left((n+k)\wedge\left(s-\frac{1}{n+k}\right)_A\right)_{k\geq 1}$ 及 $\left((n+k)\wedge\left(t-\frac{1}{n+k}\right)_A\right)_{k\geq 1}$ 所预报. □

下一定理罗列了有关可料时的一些主要性质.

3.29定理 1）设 (S_n) 为一可料时序列，则 $\bigvee\limits_n S_n$ 为可料时. 如果 (S_n) 是尾定的，则 $\bigwedge\limits_n S_n$ 为可料时.

2）设 S 为一可料时，T 为一停时，则

$$A\in\mathscr{F}_{S-}\Rightarrow A[S\leq T]\in\mathscr{F}_{T-},A[S=T]\in\mathscr{F}_{T-}.$$

特别，$[S=T]\in\mathscr{F}_{T-}$.

3）设 S,T 为可料时，则 $\mathscr{F}_{S-}\cap\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}$.

4）设 S,T 为可料时，则

$$A\in\mathscr{F}_{(S\vee T)-}\Rightarrow A[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_{T-},$$

$$A[S<T]\in\mathscr{F}_{T-},A[S=T]\in\mathscr{F}_{(S\wedge T)-},$$

$$\mathscr{F}_{(S\vee T)-}=\mathscr{F}_{S-}\vee\mathscr{F}_{T-}$$
$$=\{A\cup B:A\in\mathscr{F}_{S-},B\in\mathscr{F}_{T-},AB=\varnothing\}.$$

5）设 (S_n) 为尾定的可料时序列，则

$$\mathscr{F}_{(\bigvee_n S_n)-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n-}$$
$$=\{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n:A_n\in\mathscr{F}_{S_n-},n\geqslant1,A_kA_j=\varnothing,k\neq j\},$$

$$\mathscr{F}_{(\bigwedge_n S_n)-}=\bigcap_n\mathscr{F}_{S_n-}.$$

6）设 S 为一停时，$A\in\mathscr{F}_{\infty-}$. 若 S_A 为可料时，则必有 $A\in\mathscr{F}_{S-}$.

7）设 S 为一可料时，则对一切 $A\in\mathscr{F}_{S-}$，S_A 为可料时.

8）设 S 为一可料时，实值随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_{S-}$，则 $\xi I_{[S,\infty[}$ 为可料过程.

证明 1）我们有

$$[\![\bigvee_n S_n,\infty[\![=\bigcap_n[\![S_n,\infty[\![.$$

若 (S_n) 尾定，则

$$[\![\bigwedge_n S_n,\infty[\![=\bigcup_n[\![S_n,\infty[\![.$$

2）由定理3.4，$A[S<T]\in\mathscr{F}_{T-}$，$A[T=\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$，只要证明 $A[S=T][T<\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$. 设 (X_t) 为一可料过程，使得 $I_AI_{[S<\infty]}=X_SI_{[S<\infty]}$（系3.23.2））. 令 $Y=XI_{[\![S]\!]}$，则 Y 可料，且

$$Y_TI_{[T<\infty]}=X_TI_{[S=T]}I_{[T<\infty]}=X_SI_{[S=T<\infty]}=I_AI_{[S=T<\infty]}.$$

因此 $A[S=T<\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$（系3.23.2））.

3）只需证明 $\mathscr{F}_{S-}\cap\mathscr{F}_{T-}\subset\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}$. 设 $A\in\mathscr{F}_{S-}\cap\mathscr{F}_{T-}$，则

$$A[S\leqslant T]=A[S=S\wedge T]\in\mathscr{F}_{(S\wedge T)-},$$

$$A[T\leqslant S]=A[T=S\wedge T]\in\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}.$$

因此 $A=(A[S\leqslant T])\cup(A[T\leqslant S])\in\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}$.

4)我们有

$$A[S\leqslant T]=A[S\vee T=T]\in\mathscr{F}_T,$$

$$A[S<T]=(A[S\leqslant T])\cap[S<T]\in\mathscr{F}_T.$$

因此 $A[S=T]\in\mathscr{F}_{T-}$. 但 S 与 T 地位对称，故得

$$A[S=T]\in\mathscr{F}_{S-}\cap\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}.$$

设 $C\in\mathscr{F}_{(S\vee T)}$. 令 $A=C[T<S]$; $B=C[S\leqslant T]$，则

$$C=A\cup B,\ A\in\mathscr{F}_{S-},\ B\in\mathscr{F}_{T-},\ AB=\varnothing.$$

5)其证明与系3.5.6)完全类似.

6)令 $X=I_{[S_A,\infty[}$，则 X 为可料过程. 由系3.23.2)，$I_{A[S<\infty]}=X_S I_{[S<\infty]}\in\mathscr{F}_{S-}$，即 $A[S<\infty]\in\mathscr{F}_{S-}$. 由定理3.4.7)，$A[S=\infty]\in\mathscr{F}_{S-}$，故 $A\in\mathscr{F}_{S-}$.

7)设 $A\in\mathscr{F}_{S-}$. 由系3.23.2)，存在一可料过程 X，使得 $I_A I_{[S<\infty]}=X_S I_{[S<\infty]}$. 故 $[\![S_A]\!]=[X=1]\cap[\![S]\!]$ 为可料集. 由于 S_A 为停时，故 S_A 为可料时.

8)容易由7)推得. □

3.30定理 设 A 为一可料集，并包含在一列可料时的图的并之中，则 A 本身是一列可料时的图的并.

证明 完全类似于定理3.19的证明. □

3.31定理 设 A 为一列停时(可料时)的图的并，则存一列停时(可料时)(T_n)，使得 $A=\bigcup_n[\![T_n]\!]$，且 $[\![T_n]\!]\cap[\![T_m]\!]=\varnothing$，$n\neq m$.

证明 只证可料情形. 设 (S_n) 为一列可料时，使得 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![S_n]\!]$. 令 $T_1=S_1$，对 $n\geqslant 2$，令

$$B_n=\bigcap_{k=1}^{n-1}[S_k\neq S_n],\ T_n=(S_n)_{B_n},$$

则 $B_n\in\mathscr{F}_{S_n-}$，T_n 为可料时，$[\![T_n]\!]\cap[\![T_m]\!]=\varnothing$，当 $n\neq m$，且 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![T_n]\!]$. □

3.32定理 设 $(X_t)_{t\geqslant0}$ 为一右连左极适应过程，则存在一列严

介绍

格正的停时(T_n)，使得

$$[\Delta X \neq 0] = \{(\omega,t): 0 < t < +\infty, X_t(\omega) \neq X_{t-}(\omega)\}$$
$$= \bigcup_n [\![T_n]\!]. \qquad (32.1)$$

→稀疏集

证明 在定理3.17的证明中令$\varepsilon_k = \frac{1}{k}$，往证$[\Delta X \neq 0] \subset \bigcup_{n,k \geq 1} [\![T_n^{\frac{1}{k}}]\!]$. 设$0 < t < +\infty$，$|X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)| \geq \frac{2}{k}$，则对某个$n \geq 1$，有

$$T_n^{\frac{1}{k}}(\omega) \leq t < T_{n+1}^{\frac{1}{k}}(\omega).$$

对一切$s \in]T_n^{\frac{1}{k}}(\omega), T_{n+1}^{\frac{1}{k}}(\omega)[$，由(17.1)，我们有

$$|X_s(\omega) - X_{T_n^{\frac{1}{k}}(\omega)}(\omega)| < \frac{1}{k}, \quad |X_{s-}(\omega) - X_{T_n^{\frac{1}{k}}(\omega)}(\omega)| < \frac{1}{k}.$$

因此$|X_s(\omega) - X_{s-}(\omega)| < \frac{2}{k}$. 这表明必有$t = T_n^{\frac{1}{k}}(\omega)$. 故(32.1)由定理3.19即得. □

下一定理给出了右连左极适应过程为可料过程的刻画.

3.33定理 设$X = (X_t)$为一右连左极适应过程，则为要X可料，必须且只需X满足下列条件：

1) 存在一列严格正的可料时(T_n)，使得$[\Delta X \neq 0] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$，

2) 对每个可料时T，$X_T I_{[T<\infty]} \in \mathscr{F}_{T-}$.

证明 必要性. 设X可料，则在定理3.17的证明中，可归纳地证明T_n^ε为可料时. 事实上，设T_n^ε为可料时，则

$$A =]\!] T_n^\varepsilon, \infty [\![\cap ([\, |X_{T_n^\varepsilon} I_{[\![T_n^\varepsilon,\infty[\![} - X| \geq \varepsilon]$$
$$\cup [\, |X_{T_n^\varepsilon} I_{[\![T_n^\varepsilon,\infty[\![} - X_-| \geq \varepsilon])$$

为可料集. 我们早已知道T_{n+1}^ε是停时. 由于$[\![T_{n+1}^\varepsilon]\!] \subset A$，$[\![T_{n+1}^\varepsilon]\!] = A \cap [\![0, T_{n+1}^\varepsilon]\!]$为可料集，故$T_{n+1}^\varepsilon$为可料时. 由定理3.32的证明可知条件1)成立. 条件2)由系3.23.2)可得.

充分性. 设条件1)及2)满足. 由定理3.31，不妨设(T_n)的图互不相交，故有

$$X = X_- I_{\bigcap_n [\![T_n]\!]^c} + \sum_n X_{T_n} I_{[\![T_n]\!]}.$$

由于 $X_{T_n} I_{[T_n<\infty]} \in \mathscr{F}_{T_n-}$，$X_{T_n} I_{[T_n]} = X_{T_n} I_{[T_n<\infty]}(I_{[T_n,\infty[} - I_{]T_n,\infty[})$ 为可料过程，从而 X 为可料过程. □

3.34 定义 一停时 T 称为**可及时**，如果存在一列可料时 (T_n)，使得 $[\![T]\!] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$.

显然，可料时是可及时.

3.35 定理 设 T 为一停时，(S_n) 为一宽停时的上升列，且被 T 控制，即 $S_n \leqslant T$. 令

$$A[(S_n)] = \{(\bigcap_n [S_n < T]) \cap [\lim_{n\to\infty} S_n = T]\} \cup [T = 0] \tag{35.1}$$

(即 (S_n) 在 $A[(S_n)]$ 上预报 T)，则 $A[(S_n)] \in \mathscr{F}_{T-}$，$T_{A[(S_n)]}$ 为可及时.

证明 注意有 $\lim_n S_n \leqslant T$，故 $[\lim_n S_n = T] = [\lim_n S_n < T]^c \in \mathscr{F}_{T-}$，从而 $A[(S_n)] \in \mathscr{F}_{T-}$. 令 $R_n = (S_n)_{[S_n < \lim_n S_n]} \wedge n$，则 (R_n) 预报 $R = \lim_n R_n$，且 $R > 0$. 由定理3.27，R 为可料时. 由于 $[\![T_{A[(S_n)]}]\!] \subset [\![R]\!] \cup [\![0]\!]$，故 $T_{A[(S_n)]}$ 为可及时. □

3.36 定理 1) 设 S, T 为可及时，则 $S \vee T, S \wedge T$ 为可及时.

2) 设 T 为可及时，则对一切 $A \in \mathscr{F}_T$，T_A 为可及时.

3) 设 (T_n) 为可及时的单调序列，$T = \lim_n T_n$. 若 (T_n) 为增序列，则 T 为可及时；若 (T_n) 为尾定降序列，则 T 亦为可及时.

证明 1), 2) 显然，往证3). 在增序列情形，由定理3.35 $T_{A[(S_n)]}$ 为可及时，又由(35.1)，$A[(S_n)]^c = (\bigcup_n [T_n = T]) \cap [T > 0]$. 因此 $[\![T_{A[(S_n)]^c}]\!] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$，从而 $T_{A[(S_n)]^c}$ 为可及时. 最终，$T = T_{A[(S_n)]} \wedge T_{A[(S_n)]^c}$ 为可及时. 在尾定降序列情形，我们有 $[\![T]\!] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$，故 T 为可及时. □

有了可及时概念，我们可以仿照定理3.17定义可及 σ-域.

3.37 定义 令 $\mathscr{A}$ 为可及时全体. 由 $\{[\![S,\infty[\![; S \in \mathscr{A}\}$ 在 $\Omega \times \mathbf{R}_+$ 上生成的 σ-域叫做**可及 σ-域**. 关于可及 σ-域可测的集合与过程称为**可及集与可及过程**.

设 S 为可及时，则 $[\![S]\!]=[\![S,\infty[\![\setminus]\!]S,\infty[\![$ 为可及集.

注 如果在定理3.19、3.20、3.21中，用可及时代替那里的停时，用可及过程代替那里的可选过程，定理的结论仍成立，其证明完全类似.

下一定理建立了可及时与可料时，可及过程与可料过程之间的联系.

3.38定理 1）设 X 为一可及过程，则为要 X 为可料过程，必须且只需对一切可料时 T，$X_T I_{[T<\infty]}\in\mathscr{F}_{T-}$.

2）设 S 为一可及时，则为要 S 为可料时，必须且只需对一切可料时 T，$[S=T]\in\mathscr{F}_{T-}$.

证明 1）必要性由系3.23.2）即得，往证充分性. 根据定义3.37下面的注，存在一可料过程 Y，使得 $[X\neq Y]$ 为一列可及时图的并. 于是由定义3.34及定理3.31，存在一列可料时 (S_n)，使得当 $n\neq m$ 时，有 $[\![S_n]\!]\cap[\![S_m]\!]=\varnothing$，并且 $[X\neq Y]\subset\bigcup_n[\![S_n]\!]$. 于是我们有

$$X=YI_A+\sum_n X_{S_n}I_{[S_n<\infty]}I_{[\![S_n]\!]},$$

其中 $A=\bigcap_n[\![S_n]\!]^c$. 由于 A 为可料集，故 YI_A 为可料过程. 另一方面，每个 S_n 是可料时，故依假设，$X_{S_n}I_{[S_n<\infty]}\in\mathscr{F}_{S_n-}$，从而 $X_{S_n}I_{[S_n<\infty]}I_{[\![S_n]\!]}$ 为可料过程. 于是 X 为可料过程.

2）必要性由定理3.29.2）得到，往证充分性. 令 $X=I_{[\![S]\!]}$，则 X 为可及过程，并且由假设，对一切可料时 T

$$[S=T<\infty]=[S=T][T<\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$$

（注意，T 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测），即 $X_T I_{[T<\infty]}=I_{[S=T<\infty]}\in\mathscr{F}_{T-}$. 由1）$X$ 为可料过程，从而 S 为可料时. □

3.39定义 流 $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)$ 称为**拟左连续的**，如果对每个可料时 T，$\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$.

3.40定理 1）为要流 $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)$ 为拟左连续的，必须且只需一切可及时为可料时.

2）设 $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)$ 为拟左连续的，则对任一列停时 (T_n)，有

$$\mathscr{F}_{\bigvee_n T_n} = \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n}. \qquad (40.1)$$

证明 1)必要性. 设 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续. 令 S 为一可及时, T 为一可料时,则 $[S=T]\in\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$. 由定理3.28.2), S 为可料时.

充分性. 设一切可及时为可料时. 令 T 为一可料时, $A\in\mathscr{F}_T$, 则 T_A 为可 及 时. 依假设, T_A 为可料时, 从而 $A\in\mathscr{F}_{T-}$(定理3.29.6)). 这表明 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$, 即 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续.

2)由系3.5.6), 我们有 $\mathscr{F}_{\bigvee_{n=1}^{k} T_n}=\bigvee_{n=1}^{k}\mathscr{F}_{T_n}$. 为证(40.1), 不妨假定$(T_n)$为增序列. 令 $T=\bigvee_{n=1}^{\infty} T_n$. 设 $H=\bigcap_n[T_n<T]$, 则 $H\in\mathscr{F}_T$. 令 $A\in\mathscr{F}_T$, 往证 $AH\in\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}$ 及 $AH^c\in\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}$. 我们有

$$AH^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A[T=T_n])\in\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}.$$

由于 $T_H>0$, 且在整个 Ω 上, T_H 被序列$((T_n)_{[T_n<T]}\wedge n)$所预报, 故 T_H 为可料时. 于是依假设有 $\mathscr{F}_{T_H}=\mathscr{F}_{T_H-}$, 从而 $AH\in\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T_H}=\mathscr{F}_{T_H-}$. 但在 H 上, $T=T_H$, 故 $H=H\cap[T_H=T]$, 从而有(定理3.29.2)) $AH=AH\cap[T_H=T]\in\mathscr{F}_{T-}$. 但恒有 $\mathscr{F}_{T-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n-}\subset\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}$(定理3.4.10)), 故 $AH\in\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}$. 于是 $A=(AH^c)\cup(AH)\in\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}$. □

§4. 有限变差过程

3.41定义 一过程称为**增过程**, 如果它的所有轨道为 $\boldsymbol{R}_+$ 上非负有限值右连续增函数. 两个增过程之差称为**有限变差过程**.

显然, 有限变差过程为右连左极过程, 从而适应有限变差过程是可选过程.

设 $A=(A_t)_{t\geq 0}$ 为一有限变差过程. 对每个 $\omega\in\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{R}_+$ 上的有限变差函数 $A.(\omega)$ 可以唯一地分解为: $A.(\omega)=A^c.(\omega)+A^d.(\omega)$, 其中 $A^c.(\omega)$ 为连续有限变差函数, $A^d.(\omega)$ 为纯断有限变差函数:

$$A_t^d(\omega) = \sum_{0<s\leqslant t} \Delta A_s(\omega). \tag{41.1}$$

我们称过程 A^c 为 A 的**连续部分**,称过程 A^d 为 A 的**纯断部分**(或跳部分).

设 A 为一有限变差过程,称 A 为**纯断的**,如果 $A^c=0$.

下一定理描绘了适应及可料有限变差过程的结构.

3.42定理 设 A 为一适应(可料)有限变差过程,则 A^d 亦然(从而 A^c 为可料过程).此外,存在一列图互不相交的严格正停时(可料时),使得

$$A_t^d = \sum_n \Delta A_{S_n} I_{[S_n\leqslant t]}. \tag{42.1}$$

(约定 $\Delta A_\infty=0$.)

证明 只证 A 为可料情形.由定理3.31及3.33知,存在一列图互不相交的严格正可料时(S_n),使得$[\Delta A\neq 0]\subset\bigcup_n [\![S_n]\!]$.由于(41.1)中的级数绝对收敛,从而与被求和各项的次序无关,于是有(42.1).由于ΔA可料,故$\Delta A_{S_n}\in\mathscr{F}_{S_n-}$,从而由定理3.29.8)知,$A^d$为可料过程. □

注 由(41.1)及(42.1),我们有

$$\sum_{0<s\leqslant t} |\Delta A_s| = \sum_n |\Delta A_{S_n}| I_{[S_n\leqslant t]}.$$

下一定理是前一定理的推论,有时是有用的.

3.43定理 设 A 为一纯断适应(可料)有限变差过程,则存在一列严格正停时(可料时)(T_n)(这里,(T_n)的图一般并非互不相交),及一列实数(λ_n),使得对一切$t\geqslant 0$,有

$$\sum_n |\lambda_n| I_{[T_n\leqslant t]} < \infty, \tag{43.1}$$

$$A_t = \sum_n \lambda_n I_{[T_n\leqslant t]}. \tag{43.2}$$

如果 A 为增过程,每个 λ_n 可取为正实数.

证明 我们只讨论 A 为可料情形.由(42.1),只需对形如 $A=\xi I_{[S,\infty[}$ 的增过程证明定理,其中 S 为一严格正的可料时,ξ 为非负 $\mathscr{F}_{S-}$-可测实值随机变量.令(ξ_n)为非负 $\mathscr{F}_{S-}$-可测简单函数

的增序列，使得$\lim_n \xi_n = \xi$，则$\xi = \sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n - \xi_{n-1})$，$\xi_0 = 0$. 于是存在一列正实数$(\lambda_n)$及$(H_n) \subset \mathscr{F}_{S-}$使得$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n I_{H_n}$. 令$T_n = S_{H_n}$，则$T_n$为可料时，且

$$A_t = \sum_n \lambda_n I_{[T_n \leqslant t]}. \quad \square$$

3.44定理 设$A=(A_t)$为一适应(可料)有限变差过程，则A的变差过程$B_t = \int_{[0,t]} |dA_s|$为适应(可料)增过程，且$A$可表为两个适应(可料)增过程之差.

证明 由定理3.42，

$$\int_{[0,t]} |dA_s^d| = \sum_n |\Delta A_{S_n}| I_{[S_n \leqslant t]}$$

为适应(可料)增过程及

$$\int_{[0,t]} |dA_s^c| = |A_0| + \lim_{n\to\infty} \sum_{0\leqslant k<2^n} |A^c_{\frac{k+1}{2^n}t} - A^c_{\frac{k}{2^n}t}|$$

为适应连续(从而可料)增过程，它们的和$B_t = \int_{[0,t]} |dA_s|$为适应(可料)增过程. 令

$$A^+ = \frac{1}{2}(B + A),\ A^- = \frac{1}{2}(B - A),$$

则A^+, A^-为适应(可料)增过程，且$A = A^+ - A^-$. $\square$

下面我们研究可测过程对有限变差过程按轨道的Lebesgue-Stieltjes积分.

3.45定义 设$H=(H_t)$为一可测过程，$A=(A_t)$为一有限变差过程. 如果对一切$\omega\in\Omega$，对一切$t\geqslant 0$，Lebesgue-Stieltjes积分

$$\int_{[0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega)$$

存在且有穷(即$\int_{[0,t]} |H_s(\omega)||dA_s(\omega)| < +\infty$)，我们称$H$关于$A$可积. 这时，定义

$$B = (B_t), B_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega)$$

为 H 关于 A 的**积分**，记为 $B=H.A$. 显然，B 仍为有限变差过程.

3.46定理 设 $H=(H_t)$ 为一可测过程，$A=(A_t)$ 为一有限变差过程，且 H 关于 A 可积.

1)如果 H 为循序的，A 为适应的，则 $H.A$ 为适应的.

2)如果 H 为可料的，A 为可料的，则 $H.A$ 为可料的.

证明 首先，不妨假定 A 为增过程. 于是容易由单调类定理证明：对任何使得 $\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s|<\infty$ 的可测过程 H，$\int_{[0,\infty[}H_s dA_s\in\mathscr{F}$. 由此，在$(\Omega,\mathscr{F}_t)$上考虑 $HI_{[0,t]}$ 及 A^t，立刻推得1). 为证2)，考虑 A 的如下分解：

$$A_t=A_t^c+\sum_n \Delta A_{S_n}I_{[S_n\leqslant t]},$$

其中(S_n)为一列图互不相交的可料时(定理3.42)，我们有

$$\int_{[0,t]}H_s dA_s=\int_{[0,t]}H_s dA_s^c+\sum_n H_{S_n}\Delta A_{S_n}I_{[S_n\leqslant t]}.$$

由1)，右边第一个过程为适应连续过程，从而为可料过程. 因 H 可料，$H_{S_n}I_{[S_n<\infty]}\in\mathscr{F}_{S_n-}$，故由定理4.31.8)，$H_{S_n}\Delta A_{S_n}I_{[S_n,\infty[}$ 为可料过程，从而右边第二个过程亦为可料过程. □

§5. 时间变换

3.47定义 一族停时 $\tau=(\tau_t)_{t\geqslant0}$ 称为一个**时间变换**(简称时变)，如果

1)对每个 $t\geqslant0$，τ_t 是停时，

2)对每个 $\omega\in\Omega$，$\tau.(\omega)$ 是 $\boldsymbol{R}_+$ 上的一 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-值右连续增函数.

时变 $\tau=(\tau_t)_{t\geqslant0}$ 称为**连续的**，如果 τ 是一 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-值连续过程.

令
$$\boldsymbol{G}=(\mathscr{G}_t)_{t\geqslant0},\ \mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{\tau_t},\ t\geqslant0. \tag{47.1}$$

则 $\boldsymbol{G}=(\mathscr{G}_t)$是原来的流 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$经时变 τ 而得的流. 如果 $\boldsymbol{F}$ 右连续，则 $\boldsymbol{G}$ 亦右连续(定理3.4.10)).

对一时变 $\tau=(\tau_t)_{t\geqslant0}$，它的右逆过程 $A=(A_t)$：

$$A_t = \inf\{s \geqslant 0: \tau_s > t\}$$

为一 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-值适应增过程. 实际上, 对任一 $t \geqslant 0$,

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0; A_s > t\}, \tau_{t-} = \inf\{s \geqslant 0; A_s \geqslant t\},$$

即 $\tau = (\tau_t)$ 也是 $A = (A_t)$ 的右逆过程(引理1.37). 对任何 $t \geqslant 0$, $s > 0$, 有

$$[\tau_{s-} \leqslant t] = [A_t \geqslant s]. \qquad (47.2)$$

由于 τ_{s-} 为停时, 故 $A_t \in \mathscr{F}_t$, 即 A 为适应过程. 由(47.2)可知, A_t 为 $\boldsymbol{G}$-宽停时.

3.48定理 设 $A = (A_t)$ 为一 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ 值适应(可料)增过程, $\tau = (\tau_t)$ 为 A 的右逆过程:

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0: A_s > t\},$$

则对每个 $t > 0$, τ_{t-} 为停时(可料时), 对每个 $t \geqslant 0$, τ_t 为宽停时.

特别, 若流 $\boldsymbol{F}$ 右连续, 则 $\tau = (\tau_t)$ 为一时变, 称为与 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-值适应增过程 $A = (A_t)$ **相联系的时变**.

证明 对每个 $t > 0$, 仍由(47.2), $[\tau_{t-} \leqslant s] = [A_s \geqslant t] \in \mathscr{F}_s$, $s \geqslant 0$, 即 τ_{t-} 为停时. 对每个 $t \geqslant 0$, $\tau_{(t+\frac{1}{n})-} \downarrow \tau_t$, 故 τ_t 为宽停时.

若 A 为可料, 注意到 $\tau_{t-} = \inf\{s \geqslant 0: A_s \geqslant t\}$, 则 $[\![\tau_{t-}]\!] = [\![0, \tau_{t-}]\!] \cap [A \geqslant t]$ 为可料集, 故 τ_{t-} 为可料时.

其余的结论是明显的. □

前面已指出, 每个时变都与一个 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-值适应增过程——它的右逆过程相联系.

3.49定理 设 $\tau = (\tau_t)$ 为一时变, $\boldsymbol{G} = (\mathscr{G}_t)$ 由(47.1)定义.

1)若 S 为一 $\boldsymbol{G}$-宽停时, 则 τ_S 为 $\boldsymbol{F}$-宽停时, 且 $\mathscr{G}_{S+} \subset \mathscr{F}_{\tau_S+}$.

2)若 S 为一非负随机变量, $S \in \mathscr{F}_{\tau_S}$, 且 τ_S 为 $\boldsymbol{F}$-停时, 则 S 为 $\boldsymbol{G}$-停时, 且 $\mathscr{F}_{\tau_S} \cap \mathscr{G}_\infty \subset \mathscr{G}_S$.

证明 1)设 $A \in \mathscr{G}_{S+}$, 则对每个 $t > 0$, 有

$$A[\tau_S < t] = (A[\tau_\infty < t, S = \infty]) \cup \Big(\bigcup_{r \in Q_+} A[S < r][\tau_r < t]\Big).$$

由于 $A[S = \infty] \in \mathscr{G}_\infty \subset \mathscr{F}_{\tau_\infty} \subset \mathscr{F}_\infty$, $A[S < r] \in \mathscr{G}_r = \mathscr{F}_{\tau_r}$, 故得 $A[\tau_S < t] \in \mathscr{F}_t$. 这表明 τ_S 为 $\boldsymbol{F}$-宽停时(取 $A = \Omega$), $\mathscr{G}_{S+} \subset \mathscr{F}_{\tau_S+}$.

2)设 $A\in\mathscr{G}_\infty\cap\mathscr{F}_{\tau_S}$，则对每个 $t\geq0$，有

$$A[S\leqslant t]=(A[S\leqslant t])[\tau_S\leqslant\tau_t]\in\mathscr{F}_{\tau_t}=\mathscr{G}_t.$$

这表明 S 为 $\boldsymbol{G}$ 停时，且 $\mathscr{G}_\infty\cap\mathscr{F}_{\tau_S}\subset\mathscr{G}_S$. □

3.50系 设 $\boldsymbol{F}$ 右连续. 为要一非负随机变量 S 为 $\boldsymbol{G}$-停时，必须且只需 τ_S 为 $\boldsymbol{F}$-停时及 $S\in\mathscr{F}_{\tau_S}$. 这时有 $\mathscr{G}_S=\mathscr{G}_\infty\cap\mathscr{F}_{\tau_S}$.

证明 这时 $\boldsymbol{G}$ 也右连续，故由定理3.49即得. □

3.51定理 设 $\tau=(\tau_t)$ 为一时变，$A=(A_t)$ 为其右逆过程：$A_t=\inf\{s\geq0:\tau_s>t\}$，$t\geq0$.

1)若 T 为 $\boldsymbol{F}$-宽停时，则 A_T 为 $\boldsymbol{G}$-宽停时，且 $\mathscr{F}_{T+}\cap\mathscr{G}_\infty\subset\mathscr{G}_{A_T+}$.

2)设 $\boldsymbol{F}$ 右连续，$\tau_{A_t}=t$，$t\geq0$.[1] 若 T 为一非负随机变量，$T\in\mathscr{G}_{A_T}$，A_T 为 $\boldsymbol{G}$-停时，则 T 为 $\boldsymbol{F}$-停时，且 $\mathscr{G}_{A_T}\subset\mathscr{F}_T$.

证明 1)设 $B\in\mathscr{F}_{T+}\cap\mathscr{G}_\infty$，则对任一 $t>0$，有

$$B[A_T<t]=(B[T=\infty][A_\infty<t])\cup\{\bigcup_n B[T<\infty][T<\tau_{t-\frac{1}{n}}]\}.$$

由于 $(B[T<\infty])[T<\tau_{t-\frac{1}{n}}]\in\mathscr{F}_{\tau_{t-\frac{1}{n}}}\subset\mathscr{F}_{\tau_t}=\mathscr{G}_t$，$B[T=\infty][A_\infty<t]=B[T=\infty][A_\infty<t][\tau_t=\infty]\in\mathscr{F}_{\tau_t}=\mathscr{G}_t$，故得 $B[A_T<t]\in\mathscr{G}_t$. 这表明 A_T 是 $\boldsymbol{G}$ 宽停时，且 $\mathscr{F}_{T+}\cap\mathscr{G}_\infty\subset\mathscr{G}_{A_T+}$.

2)设 $B\in\mathscr{G}_{A_T}$. 对每个 $t\geq0$，A_t 为 $\boldsymbol{G}$-停时，且

$$B[T\leqslant t]=(B[T\leqslant t])[A_T\leqslant A_t]\in\mathscr{G}_{A_t}.$$

由系3.50，$\mathscr{G}_{A_t}\subset\mathscr{F}_{\tau_{A_t}}=\mathscr{F}_t$. 因此，$T$ 为 $\boldsymbol{F}$-停时，且 $\mathscr{G}_{A_T}\subset\mathscr{F}_T$. □

3.52定理 设 $\tau=(\tau_t)$ 为一时变，且对每个 $t\geq0$，$\tau_t<\infty$.

1)若 $X=(X_t)_{t\geq0}$ 为 $\boldsymbol{F}$-可选过程，则 $(X_{\tau_t})_{t\geq0}$ 为 $\boldsymbol{G}$-可选过程.

2)若 $X=(X_t)_{t\geq0}$ 为 $\boldsymbol{F}$-可料过程，则 $(X_{\tau_{t-}})_{t\geq0}$ 为 $\boldsymbol{G}$-可料过程.

证明 易见，若 $(X_t)_{t\geq0}$ 右连左极，则 $(X_{\tau_t})_{t\geq0}$ 亦然；若 $(X_t)_{t\geq0}$ 左连续，则 $(X_{\tau_{t-}})_{t\geq0}$ 亦然. 若 $(X_t)_{t\geq0}$ 为 $\boldsymbol{F}$-可选过程，显然 $(X_{\tau_t})_{t\geq0}$ 及

---

1) 例如，设 τ 连续，$\tau_0=0$ 及 $\tau_{\infty-}=\infty$.

$(X_{\tau_{t-}})_{t\geq 0}$为$G$-适应过程.

设T为一F-停时. 若$X=I_{[0,T[}$,则$(X_{\tau_t})_{t\geq 0}$右连左极且G适应,故为G可选过程. 若$X=I_{[0,T]}$,则$(X_{\tau_{t-}})_{t\geq 0}$左连续,且$G$-适应,故为$G$-可料过程. 又若$X=I_{[0]}I_A, A\in\mathscr{F}_0$,同理$(X_{\tau_{t-}})_{t\geq 0}$为$G$可料. 由单调类定理即得欲证之结论. □

下一定理详细讨论了一个简单而有用的时变的例子.

3.53定理 设T为一停时,令

$$G=(\mathscr{G}_t),\ \mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t\wedge T},\ t\geq 0.$$

1)若S为F停时,则$S\wedge T$、$S_{[S\leq T]}$为G停时.

2)若S为F-宽停时,则$S_{[S<T]}$为G-宽停时.

3)若S为G-停时,则$\mathscr{G}_S=\mathscr{G}_{S\wedge T}=\mathscr{F}_{S\wedge T}$.

4)若X为F-可选(F-可料)过程,则X^T,$XI_{[0,T]}$为G-可选(G-可料)过程.

5)若S为F-可料时,则$S_{[S\leq T]}$为G-可料时.

证明 这里涉及到的是时变$\tau=(\tau_t)$:$\tau_t=t\wedge T$. 它的右逆过程是$A=(A_t)$:$A_t=t_{[t<T]}$. 由于$\mathscr{G}_t\subset\mathscr{F}_t$,$t\geq 0$,每个$G$-停时也是$F$-停时.

首先,我们证明$\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_T$. $\mathscr{G}_\infty\subset\mathscr{F}_T$是明显的. 设$t\geq 0$,$A\in\mathscr{F}_t$,则$A[t<T]=(A[t<T])[t=t\wedge T]\in\mathscr{F}_{t\wedge T}\subset\mathscr{G}_\infty$,故$A[T=\infty]\in\mathscr{G}_\infty$. 于是,若$A\in\mathscr{F}_\infty$,则$A[T=\infty]\in\mathscr{G}_\infty$. 现在设$A\in\mathscr{F}_T$,则$A[T<\infty]=\bigcup\limits_n(A[T\leq n])$,$A[T\leq n]\in\mathscr{F}_{n\wedge T}\subset\mathscr{G}_\infty$,$n\geq 1$,故$A[T<\infty]\in\mathscr{G}_\infty$,$A=(A[T=\infty])\cup(A[T<\infty])\in\mathscr{G}_\infty$. 于是$\mathscr{F}_T\subset\mathscr{G}_\infty$.

1)设S为一F-停时,则对一切$t\geq 0$,有

$$[S\wedge T\leq t]\in\mathscr{F}_{S\wedge T\wedge t}\subset\mathscr{G}_t,$$

$$[S_{[S\leq T]}\leq t]=[S\leq T][S\leq t]=[S\leq T\wedge t]\in\mathscr{F}_{t\wedge T}=\mathscr{G}_t.$$

因此,$S\wedge T$,$S_{[S\leq T]}$为G-停时.

2)由于$S_{[S<T]}=A_S$,由定理3.51.1)知,$S_{[S<T]}$为G-宽停时.

3)设S为一G-停时,则$\mathscr{G}_S\subset\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_T$,$\mathscr{G}_S\subset\mathscr{F}_S$,故$\mathscr{G}_S\subset\mathscr{F}_T$

$\bigcap \mathscr{G}_S = \mathscr{F}_{T\wedge S}$. 另一方面，设 $A\in\mathscr{F}_{S\wedge T}$，则对一切 $t\geqslant 0$，

$$A[S\wedge T\leqslant t]\in \mathscr{F}_t\bigcap \mathscr{F}_{S\wedge T}\subset \mathscr{G}_t.$$

这表明 $A\in\mathscr{G}_{S\wedge T}$，$\mathscr{F}_{S\wedge T}\subset\mathscr{G}_{S\wedge T}\subset\mathscr{G}_S$，故 $\mathscr{G}_S=\mathscr{G}_{S\wedge T}=\mathscr{F}_{S\wedge T}$.

4）关于 X^T 的结论直接由定理3.52可得. 另一方面，

$$XI_{[\![0,T[\![} = X^T - X_T I_{[\![T,\infty[\![}.$$

由1)，T 为 $\boldsymbol{G}$-停时. 因此，$X_T I_{[T<\infty]} = X_T^T I_{[T<\infty]}\in\mathscr{G}_T$，$X_T I_{[\![T,\infty[\![}$ 为 $\boldsymbol{G}$-可料过程. 故当 X^T 为 $\boldsymbol{G}$-可选过程（$\boldsymbol{G}$-可料过程）时，$XI_{[\![0,T[\![}$ 亦然.

5）设 S 为一 $\boldsymbol{F}$-可料时，则 $X=I_{[\![S,\infty[\![}$ 为 $\boldsymbol{F}$-可料过程，$X^T=I_{[\![S\wedge T,\infty[\![}$ 为 $\boldsymbol{G}$-可料过程，即 $S_{[S<T]}$ 为 $\boldsymbol{G}$-可料时. □

问题与补充

3.1 设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为一右连续适应过程，S 为一宽停时，$B\subset\boldsymbol{R}$ 为开集. 则

$$T=\inf\{t>S: X_t\in B\}\ (\text{或}\ \inf\{t\geqslant S: X_t\in B\})$$

为宽停时.

3.2 设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为一右连左极适应过程，S 为一停时，$B\subset\boldsymbol{R}$ 为一闭集，则

$$T=\inf\{t\geqslant S: X_t\in B\ \text{或}\ X_{t-}\in B\}$$

为停时. 特别，若 (X_t) 为一连续适应过程，S 为一停时，$B\subset\boldsymbol{R}$ 为一闭集，则

$$T=\inf\{t\geqslant S: X_t\in B\}$$

为停时.

3.3 设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为一适应增过程，则对任一 $a\in\boldsymbol{R}$，

$$T=\inf\{t\geqslant 0;\ X_t\geqslant a\}$$

为停时.

3.4 设 $\boldsymbol{G}=(\mathscr{G}_n)$ 为一离散时间流，令

$$\mathscr{F}_t=\mathscr{G}_n,\ n\leqslant t<n+1,$$

则 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$为右连续流.

1)若 S 为一 $\boldsymbol{G}$-停时,则 S 也是 $\boldsymbol{F}$-停时,且 $\mathscr{F}_S=\mathscr{G}_S$.

2)若 T 为一 $\boldsymbol{F}$-停时,则

$$S=\begin{cases}n, & n\leqslant T<n+1,\\ \infty, & T=\infty\end{cases}$$

为 $\boldsymbol{G}$-停时,且 $\mathscr{G}_S=\mathscr{F}_T$.

3.5 设 $X=(X_t)$为一 $\boldsymbol{F}$-适应过程.若对任一 $\varepsilon>0$,X 是$(\mathscr{F}_{t+\varepsilon})$-循序的,则 X 是$(\mathscr{F}_t)$-循序的.

3.6 设(X_t)为一适应过程,D 为 $\boldsymbol{R}_+$中一可数稠子集,令

$$Y_t^+=\lim_{n\to\infty}\sup\{X_s:s\in D\cap]t,t+\frac{1}{n}[\},t\geqslant 0,$$

$$Y_t^-=\lim_{n\to\infty}\inf\{X_s:s\in D\cap]t,t+\frac{1}{n}[\},t\geqslant 0,$$

$$Z_t^+=\lim_{n\to\infty}\sup\{X_s:s\in D\cap](t-\frac{1}{n})^+,t[\},t>0,$$

$$Z_t^-=\lim_{n\to\infty}\inf\{X_s:s\in D\cap](t-\frac{1}{n})^+,t[\},t>0,$$

$$Z_0^+=Z_0^-=X_0.$$

则(Y_t^+),(Y_t^-),(Z_t^+),(Z_t^-)均为循序过程.

3.7 给定两个流$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$,$\boldsymbol{G}=(\mathscr{G}_t)$. 以$\mathscr{O}(\boldsymbol{F})$,$\mathscr{P}(\boldsymbol{F})$,$\mathscr{T}(\boldsymbol{F})$,$\mathscr{T}_P(\boldsymbol{F})$,记 $\boldsymbol{F}$-可选 σ-域,$\boldsymbol{F}$-可料 σ 域,$\boldsymbol{F}$-停时全体,$\boldsymbol{F}$-可料时全体,记号 $\mathscr{O}(\boldsymbol{G})$,$\mathscr{P}(\boldsymbol{G})$,$\mathscr{T}(\boldsymbol{G})$,$\mathscr{T}_P(\boldsymbol{G})$有类似的意义.

1)下列命题等价:

(i)$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}$,即$\forall\ t\geqslant 0$, $\mathscr{F}_t=\mathscr{G}_t$.

(ii)$\mathscr{O}(\boldsymbol{F})=\mathscr{O}(\boldsymbol{G})$,

(iii)$\mathscr{T}(\boldsymbol{F})=\mathscr{T}(\boldsymbol{G})$.

2)下列命题等价:

(i)$\mathscr{F}_0=\mathscr{G}_0$,且$\forall\ t\geqslant 0\ \mathscr{F}_{t+}=\mathscr{G}_{t+}$,

(ii)$\mathscr{P}(\boldsymbol{F})=\mathscr{P}(\boldsymbol{G})$,

(iii)$\mathscr{T}_P(\boldsymbol{F})=\mathscr{T}_P(\boldsymbol{G})$.

3.8 设 $f\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R})$,$X=(X_t)$为一可选(可料)过

程，则 $Z_t = f(t, X_t)$ 为可选（可料）过程.

3.9 两个流 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 与 $\boldsymbol{G}=(\mathscr{G}_t)$ 若满足下列条件：

$$\mathscr{F}_0 = \mathscr{G}_0,\ \forall t \geqslant 0,\ \mathscr{F}_{t-} = \mathscr{G}_{t-},$$

则对任一 $\boldsymbol{F}$-宽停时 T，$\mathscr{F}_{T-} = \mathscr{G}_{T-}$.

3.10 设 S 为一停时，随机变量 $T \geqslant S$，$T \in \mathscr{F}_S$，且在 $[S<\infty]$ 上有 $T>S$，则 T 为可料时.

3.11 设 S 为一可料时，T 为一停时. 若 $S \leqslant T$，且 $\mathscr{F}_S = \mathscr{F}_T$，则 T 为可料时.

3.12 设 S, T 为两个可料时，则 $S+T$ 为可料时.

3.13 设 S 为一可料时，随机变量 $T \geqslant S$，$T \in \mathscr{F}_S$，且 $[T=S] \in \mathscr{F}_{S-}$，则 T 为可料时.

3.14 设 T 为一停时，令

$$\boldsymbol{G} = (\mathscr{G}_t),\ \mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{T+t},\ t \geqslant 0.$$

1）若 S 为一 $\boldsymbol{F}$-停时（$\boldsymbol{F}$-可料时），则

$$\widetilde{S} = \begin{cases} (S-T)^+, & T<\infty, \\ 0, & T=\infty \end{cases}$$

为 $\boldsymbol{G}$-停时（$\boldsymbol{G}$-可料时）.

2）若 (X_t) 为一 $\boldsymbol{F}$-可选（$\boldsymbol{F}$-可料）过程，则 $(X_{T+t} I_{[T<\infty]})$ 为 $\boldsymbol{G}$-可选（$\boldsymbol{G}$-可料过程）.

3.15 设 $X=(X_t)$ 为一右连左极过程，T 为一 $\boldsymbol{F}^0(X)$-停时. 若 T 只取可列个值，则 T 关于 $\sigma(X_{T\wedge t}, t\geqslant 0)$ 为可测.

3.16 设 $X=(X_t)$ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上一右连左极过程，满足下列条件：i）$\forall t \geqslant 0$，$X_t(\omega') = X_t(\omega) \Rightarrow \omega = \omega'$，ii）$\forall \omega \in \Omega$，$t \geqslant 0$，存在 $\omega' \in \Omega$，使得 $\forall s \geqslant 0$，$X_s(\omega') = X_{s\wedge t}(\omega)$.

1）一非负随机变量 T 为 $\boldsymbol{F}^0(X)$-停时当且仅当 $\forall t \geqslant 0$，

$T(\omega) \leqslant t$，$\forall s \leqslant t$ $X_s(\omega) = X_s(\omega') \Rightarrow T(\omega) = T(\omega')$.

2）若 T 为一 $\boldsymbol{F}^0(X)$-停时，则 $A \in \mathscr{F}^0_T(X)$ 当且仅当

$$\omega \in A,\ T(\omega) = T(\omega'),$$

$$\forall s \leqslant T(\omega)\ X_s(\omega) = X_s(\omega') \Rightarrow \omega' \in A.$$

3）对任一 $\boldsymbol{F}^0(X)$-停时 T，$\mathscr{F}^0_T(X) = \mathscr{F}^0_\infty(X^T)$，其中 $X^T=$

$(X_{T\wedge t})$.

3.17 在上一问题中，我们再假设：$\forall\ \omega\in\Omega, t\geqslant 0$，存在 $\omega'\in\Omega$，使得 $\forall\ s\geqslant 0, X_s(\omega')=X_s(\omega)I_{[s<t]}+X_{t-}(\omega)I_{[s\geqslant t]}$.

1）一非负随机变量 T 为 $\boldsymbol{F}^0(X)$-可料时，当且仅当 $\forall\ t\geqslant 0$，

$T(\omega)\leqslant t, \forall\ s<t\quad X_s(\omega)=X_s(\omega')\Rightarrow T(\omega)=T(\omega')$.

2）若 T 为一 $\boldsymbol{F}^0(X)$-可料时，则 $A\in\mathscr{F}^0_{T-}(X)$ 当且仅当

$$\omega\in A, T(\omega)=T(\omega'),$$

$$\forall\ s<T(\omega)\ X_s(\omega)=X_s(\omega')\Rightarrow\omega'\in A.$$

3）对任一 $\boldsymbol{F}^0(X)$-可料时 T，$\mathscr{F}^0_{T-}(X)=\mathscr{F}^0_\infty(X^{T-})$，其中 $X^{T-}=XI_{[\![0,T[\![}+X_{T-}I_{[\![T,\infty[\![}$.

4）设 $Z=(Z_t)$ 为 $\mathscr{F}^0_\infty(X)\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$-可测过程，则 Z 为 $\boldsymbol{F}^0(X)$-可料过程，当且仅当 Z 关于 $\boldsymbol{F}^0_-(X)=(\mathscr{F}^0_{t-}(X))$ 为适应的.

第四章　截口定理及其应用

本章主要介绍截口定理及其应用．我们要证明可料时都是 a.s. 可预报的．这一结果今后将经常用到．我们还将利用绝不可及时的概念研究适应右连左极过程的跳与拟左连续性．

§1.　截口定理

在这一节中，我们将利用第一章中的解析集与容度理论证明关于可测集的截口引理，并在此引理基础上建立随机过程一般理论中的截口定理．

4.1 定义　设 Ω 为一集合，$A \subset \Omega \times \boldsymbol{R}_+$．令

$$D_A(\omega) = \inf\{t \in R_+ ; (\omega, t) \in A\}, \omega \in \Omega.$$

D_A 称为集合 A 的**初遇**．这里及今后，我们恒约定 $\inf \varnothing = +\infty$．

4.2 定理　设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为一可测空间．对一切 $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F} \times \mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+))$，$D_A$ 为 $\hat{\mathscr{F}}$-可测．

证明　令 $r>0$，则 $[D_A<r]$ 是集合 $A \cap (\Omega \times [0, r[)$ 在 Ω 上的投影，故由定理 1.32，$[D_A<r] \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ 但 $\mathscr{A}(\mathscr{F}) \subset \hat{\mathscr{F}}$，故 D_A 为 $\hat{\mathscr{F}}$-可测．□

注　设 (X_t) 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上一可测过程，则 $\sup\limits_t |X_t|$ 为 $\hat{\mathscr{F}}$-可测．事实上，对一切 $a>0$，令

$$T_a = \inf\{t \geqslant 0 ; |X_t| > a\},$$

则由定理可知，T_a 为 $\hat{\mathscr{F}}$-可测．于是

$$[\sup_t |X_t| > a] = [T_a < \infty] \in \hat{\mathscr{F}}.$$

这表明 $\sup\limits_t |X_t|$ 为 $\hat{\mathscr{F}}$-可测．

下一引理常称为**截口引理**．它是解析集与容度理论在概率论

中的重要应用之一.

4.3引理 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间,$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\mathbf{R}_+))$,则存在一随机变量$T\in\mathscr{F}^+$,使得

$$T(\omega)<\infty\Rightarrow(\omega,T(\omega))\in A, \tag{3.1}$$

$$P([T<\infty])=P([D_A<\infty]). \tag{3.2}$$

证明 令 $\overline{P}(A)=\inf\{P(B):B\in\mathscr{F},B\supset A\},A\subset\Omega$,则$\overline{P}$为一$\Omega$上的Choquet $\mathscr{F}$-容度.

令$\mathscr{H}$为用有限并运算封闭$\mathscr{F}\otimes K(\mathbf{R}_+)$所得的铺.易知$\mathscr{H}$对有限交运算亦封闭.由定理1.32知

$$\mathscr{A}(\mathscr{H})=\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}(\mathbf{R}_+))=\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)),$$

令π表示$\Omega\times\mathbf{R}_+$到Ω上的投影映射,则对任何$C\in\mathscr{A}(\mathscr{H})$,由定理1.32知,$\pi(C)\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$.令

$$I(C)=\overline{P}(\pi(C)),C\subset\Omega\times\mathbf{R}_+.$$

由定理1.35的证明可知,I是$\Omega\times\mathbf{R}_+$上的Choquet $\mathscr{H}$-容度.

由于$A\in\mathscr{A}(\mathscr{H})$,故由定理1.35,对任给$\varepsilon>0$,存在$B\in\mathscr{H}_\delta$,$B\subset A$,使得$I(B)>I(A)-\varepsilon$,即

$$P(D_B<\infty)>P(D_A<\infty)-\varepsilon.$$

由于D_B为$\mathscr{F}^P$-可测,故存在一随机变量$S_\varepsilon\in\mathscr{F}^+$,使得$S_\varepsilon=D_B$ a.s..令$C\in\mathscr{F}$,$C\subset[S_\varepsilon=D_B]$,使得$P(C)=1$.置

$$T_\varepsilon=S_\varepsilon I_C+(+\infty)I_{C^c},$$

则$T_\varepsilon\in\mathscr{F}$,$T_\varepsilon=S_\varepsilon=D_B$ a.s.,且在$[T_\varepsilon<\infty]$上有$T_\varepsilon=D_B$.但对每个$\omega\in\Omega$,$B(\omega)=\{t\geqslant0:(\omega,t)\in B\}$是$\mathbf{R}_+$中的紧集,故$D_B(\omega)<\infty\Rightarrow(\omega,D_B(\omega))\in B\subset A$.于是我们有

$$T_\varepsilon(\omega)<\infty\Rightarrow(\omega,T_\varepsilon(\omega))\in A,$$

$$P(T_\varepsilon(\omega)<\infty)=P(D_B<\infty)>P(D_A<\infty)-\varepsilon.$$

令$T_0=+\infty$,我们用归纳法定义一列满足(3.1)的非负$\mathscr{F}$-可测随机变量(T_n)如下:设T_n已定义,令

$$A_n=A\cap\{(\omega,t):T_n(\omega)=\infty\}=A\cap([T_n=\infty]\times\mathbf{R}_+),$$

则$A_n\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\mathbf{R}_+))$.由上所证,存在一随机变量$S_n\in\mathscr{F}^+$,使得

$$S_n(\omega) < \infty \Rightarrow (\omega, S_n(\omega)) \in A_n,$$

$$P(S_n < \infty) \geqslant \frac{1}{2} P(D_{A_n} < \infty)$$

$$= \frac{1}{2} P([T_n = \infty] \cap [D_A < \infty]).$$

我们令 $T_{n+1} = T_n \wedge S_n$，则 T_{n+1} 满足(3.1)，且有

$$P(T_{n+1} < \infty) = P(T_n < \infty) + P(S_n < \infty) \geqslant P(T_n < \infty)$$

$$+ \frac{1}{2} P([T_n = \infty] \cap [D_A < \infty]). \qquad (3.3)$$

令 $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n = \bigwedge_n T_n$，由于 $T_{n+1} I_{[T_n < \infty]} = T_n I_{[T_n < \infty]}$，故 $T I_{[T_n < \infty]} = T_n I_{[T_n < \infty]}$，从而有

$$[T < \infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [T_n < \infty], \ [T = \infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [T_n = \infty].$$

在(3.3)中令 $n \to \infty$ 得

$$P(T < \infty) \geqslant P(T < \infty) + \frac{1}{2} P([T = \infty] \cap [D_A < \infty]).$$

于是 $P([T=\infty] \cap [D_A < \infty]) = 0$，即 $[D_A < \infty] \subset [T < \infty]$ a.s.. 但由于 $[T < \infty] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [T_n < \infty]$，故 T 满足(3.1)，从而 $[T < \infty] \subset [D_A < \infty]$ a.s.，即(3.2)成立. □

注 今后我们称满足(3.1)的非负随机变量 T 为 A 的一个截口.(3.2)表明，除了一个 P-零概集外，T 是 A 的一个完整的截口.截口引理由此得名.

4.4 引理 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间，$\mathscr{C}$ 为生成 $\mathscr{F}$ 的一个域，则对任何 $A \in \mathscr{F}$，我们有

$$P(A) = \sup\{P(B); B \in \mathscr{C}_\delta, B \subset A\}$$

$$= \inf\{P(C); C \in \mathscr{C}_\sigma, C \supset A\}. \qquad (4.1)$$

证明 令 $\mathscr{G}$ 表示 $\mathscr{F}$ 中满足(4.1)的 A 的全体. 由于 $\mathscr{C}_\sigma = \{A; A^c \in \mathscr{C}_\delta\}$，我们有 $A \in \mathscr{G} \Rightarrow A^c \in \mathscr{G}$.

现设 $A_n \in \mathscr{G}$，$A_n \uparrow A$，往证 $A \in \mathscr{G}$. 给定 $\varepsilon > 0$，取 n 足够大，使得 $P(A \backslash A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $B \in \mathscr{C}_\delta$，$B \subset A_n$，使得 $P(A_n \backslash B) < \frac{\varepsilon}{2}$，于是 B

$\subset A$，且 $P(A)<P(B)+\varepsilon$. 另一方面，对每个 n，取 $C_n\in\mathscr{C}_\sigma$，$C_n\supset A_n$ 使得 $P(C_n\backslash A_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}$. 令 $C=\bigcup\limits_n C_n$，则 $C\in\mathscr{C}_\sigma$，$C\supset A$，且 $P(C\backslash A)<\varepsilon$. 这表明 $A\in\mathscr{G}$. 综上所证，$\mathscr{G}$ 为一单调类. 但显然有 $\mathscr{C}\subset\mathscr{G}$，故 $\mathscr{G}=\mathscr{F}$. □

下一定理是引理 4.3 的一个重要应用，将用以证明截口定理.

4.5 定理 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一概率空间，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 的一子 σ-域，$\mathscr{C}$ 为生成 $\mathscr{G}$ 的一个域. 令 $A\in\mathscr{G}$，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $B\in\mathscr{C}_\delta$，使得

$$B\subset A,\tag{5.1}$$

$$P(\pi(A))\leqslant P(\pi(B))+\varepsilon.\tag{5.2}$$

证明 选定一随机变量 $T\in\mathscr{F}^+$，使之满足(3.1)及(3.2). 在 $\mathscr{G}$ 上定义一测度 μ 如下：

$$\mu(G)=P(\{\omega:(\omega,T(\omega))\in G\}),\ G\in\mathscr{G}.$$

则 A 为 μ 的支撑，且 $\mu(A)=P([T<\infty])=P(\pi(A))$. 对任何 $G\in\mathscr{G}$，我们有

$$\{\omega:(\omega,T(\omega))\in G\}\subset\pi(G),$$

从而 $\mu(G)\leqslant P(\pi(G))$. 对任给 $\varepsilon>0$，由引理 4.4，存在 $B\in\mathscr{C}_\delta$，$B\subset A$，使得 $\mu(A)\leqslant\mu(B)+\varepsilon$. 于是

$$P(\pi(A))=\mu(A)\leqslant\mu(B)+\varepsilon\leqslant P(\pi(B))+\varepsilon.\quad\square$$

下面我们利用定理 4.5 证明随机过程一般理论中的截口定理. 我们假设概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及流 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 已给定.

4.6 引理 设 $\mathscr{T}$ 为一族宽停时，满足下列条件：

i) $0\in\mathscr{T}$，$+\infty\in$；

ii) $S,T\in\mathscr{T}\Rightarrow S\wedge T\in\mathscr{T}$，$S\vee T\in\mathscr{T}$；

iii) $S,T\in\mathscr{T}\Rightarrow S_{[S<T]}\in\mathscr{T}$；

iv) $S_n\in\mathscr{T}$，$n=1,2\cdots$，$S_n\uparrow S\Rightarrow S\in\mathscr{T}$.

令 $\mathscr{C}_0=\{[\![S,T[\![:S\leqslant T,\ S,T\in\mathscr{T}\}$，$\mathscr{C}$ 为用有限并运算封闭 $\mathscr{C}_0$ 所得的类，则 $\mathscr{C}$ 为 $\Omega\times\boldsymbol{R}_+$ 上的一个域. 对任何 $B\in\mathscr{C}_\delta$，令 D_B 为 B 的初遇(定义 4.1)，则我们有 $[\![D_B]\!]\subset B$，并且存在一宽停时 T

$\in \mathcal{V}$，使得 $T = D_B$ a.s..

证明 由条件 i)—iii)，$\mathcal{G}$ 是一个域.

对每个 $\omega \in \Omega$，$B(\omega) = \{t \geq 0: (\omega, t) \in B\}$ 是 $\boldsymbol{R}_+$ 中对右极限封闭的集，故有 $[\![D_B]\!] \subset B$. 令

$$\mathscr{H} = \{S \in \mathcal{V}: S \leq D_B\}.$$

则 $\mathscr{H}$ 对可列上端运算封闭. 由定理 1.13，存在 $T \in \mathscr{H}$，使得

$$T = \text{ess sup} \mathscr{H}.$$

往证 $T = D_B$ a.s.. 设 (B_n) 为 $\mathcal{G}$ 中元素下降列，使得 $B = \bigcap_n B_n$. 令

$$C_n = B_n \cap [\![T, \infty [\![.$$

则 (C_n) 为 $\mathcal{G}$ 中元素下降列，且有

$$\bigcap_n C_n = B \cap [\![T, \infty [\![= B.$$

设 $G = [\![S, T [\![\in \mathcal{G}_0$，则由条件 iii)，$D_G = S_{[S<T]} \in \mathcal{V}$，这里 D_G 为 G 的初遇. 于是，设 $C_n = C_{n1} \cup C_{n2} \cup \cdots \cup C_{nm}$，其中 $C_{nk} \in \mathcal{G}_0$，$k = 1, 2, \cdots, m$，则 $D_{C_n} = \bigwedge_{k=1}^{m} D_{C_{nk}} \in \mathcal{V}$（条件 ii)），且 $D_{C_n} \geq T$. 但由于 $C_n \supset B$，故 $D_{C_n} \leq D_B$，即 $D_{C_n} \in \mathscr{H}$. 又因 T 是 $\mathscr{H}$ 的本质上确界，故对一切 n，必须有 $D_{C_n} = T$ a.s.. 最后，由于 $[\![D_{C_n}]\!] \subset C_n$，故 $[\![T]\!]$ a.s. 含于 $\bigcap_n C_n = B$ 中[1]，从而 $T \geq D_B$ a.s.. 但已证 $T \leq D_B$，故有 $T = D_B$ a.s.. □

下面两个定理统称为**截口定理**，它们是随机过程一般理论中的最重要的结果.

4.7 定理 设 A 是可选集（可及集），则对任给 $\varepsilon > 0$，存在一停时（可及时）T，使得

i) $[\![T]\!] \subset A$;

ii) $\boldsymbol{P}(T < \infty) \geq \boldsymbol{P}(\pi(A)) - \varepsilon$，

这里 $\pi(A)$ 为 A 在 Ω 上的投影.

证明 只对可选情形证明，可及情形的证明完全相同. 令 $\mathcal{V}$ 为停时全体，则 $\mathcal{V}$ 满足引理 4.6 的四个条件. 采用引理 4.6 的记

1) 这里 a.s. 的含义是：对几乎所有 $\omega \in [T < \infty]$，有 $(\omega, T(\omega)) \in B$.

号，由定理 3.17 知，$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{O}$. 依假定，$A\in\sigma(\mathscr{C})$. 故由定理 4.5 存在 $B\in\mathscr{C}_\delta$，使得 $B\subset A$，且 $P(\pi(B))\geqslant P(\pi(A))-\varepsilon$. 又由引理 4.6，存在停时 $S\in\nu$，使得 $S=D_B$ a.s.. 令

$$L=\{\omega:(\omega,S(\omega))\in B\},$$

则 $I_B(S)I_{[S<\infty]}=I_L$，故 $L\in\mathscr{F}_S$（定理 3.12）. 由于 $[\![D_B]\!]\subset B$，故 $P(L\cup[S=+\infty])=1$. 令 $T=S_L$，则 T 为停时，$[\![T]\!]\subset B\subset A$，且 $T=S=D_B$ a.s.，故有

$$P(T<\infty)=P(D_B<\infty)=P(\pi(B))\geqslant P(\pi(A))-\varepsilon. \qquad \square$$

4.8 定理 设 A 为可料集，则对任给 $\varepsilon>0$，存在可料时 T，使得

i) $[\![T]\!]\subset A$;

ii) $P(T<\infty)\geqslant P(\pi(A))-\varepsilon$.

证明 令 ν 为可料时全体. 证明与定理 4.7 完全相同，只是要注意，这里 $L\in\mathscr{F}_{S-}$（系 3.23.2)），故 S_L 为可料时（定理 3.29.7)）. $\square$

4.9 定义 $\Omega\times\mathbf{R}_+$ 的一子集 A 叫做**不足道集**（关于概率测度 P），如果 A 在 Ω 上的投影 $\pi(A)$ 是 P-零概率（不要求 $\pi(A)\in\mathscr{F}$，但要求 $\pi(A)\in\mathscr{F}^P$）. 一个过程 X 叫做**不足道过程**，如果集合 $\{(\omega,t):X_t(\omega)\neq 0\}$ 为不足道集.

两个过程 $X=(X_t)$，$Y=(Y_t)$ 称为 **P-无区别**（记为 $X=Y$），如果 $\{(\omega,t):X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$ 为 P-不足道集（参看定义 2.45）. 称 X 不大于 Y（记为 $X\leqslant Y$），如果 $\{(\omega,t):X_t(\omega)>Y_t(\omega)\}$ 为 P-不足道集. 今后，在确定的过程类中，如在可选可料或可料过程类中，我们将两个无区别过程视为同一个过程.

下面我们给出截口定理在过程理论中的一些初步应用. 为叙述方便，我们省略可及情形.

4.10 定理 设 $X=(X_t)$，$Y=(Y_t)$ 为两个可选（可料）过程. 如果对每个有界停时（可料时）T，我们有 $X_T\leqslant Y_T$ a.s.，则 $X\leqslant Y$.

证明 只讨论可选情形，我们采用反证法. 设 $A=\{(\omega,t):X_t(\omega)>Y_t(\omega)\}$ 不是不足道集. 由于 A 是可选集，故由定理 4.7，

存在停时 S，使得 $[\![S]\!]\subset A$，且 $P(S<\infty)>0$. 取常数 $C>0$，使得 $P(S\leqslant C)>0$. 令 $=S\wedge C$，则 T 为有界停时，且在 $[S\leqslant C]$ 上有 $X_T>Y_T$，这与假定矛盾. 于是 A 必为不足道集. 依定义，$X\leqslant Y$. □

4.11 系 设 $X=(X_t)$，$Y=(Y_t)$ 为两个可选（可料）过程. 如果对每个有界停时（可料时）T，我们有 $X_T=Y_T$ a.s.，则 X 与 Y 无区别.

在实际应用中，下一定理有时比定理 4.10 更有效.

4.12 定理 设 $X=(X_t)$，$Y=(Y_t)$ 为两个可选（可料）过程. 如果对每个停时（可料时）T，$X_T I_{[T<\infty]}$ 及 $Y_T I_{[T<\infty]}$ 可积，且 $E[X_T I_{[T<\infty]}]\leqslant E[Y_T I_{[T<\infty]}]$，则 $X\leqslant Y$.

证明 只讨论可选情形，设集合 $A=\{(\omega,t):X_t(\omega)>Y_t(\omega)\}$ 不是不足道集，由定理4.7，存在停时 T，使得 $[\![T]\!]\subset A$，且 $P(T<\infty)>0$. 这时有 $E[X_T I_{[T<\infty]}]>E[Y_T I_{[T<\infty]}]$，这与定理假设矛盾，故 A 为不足道集，即 $X\leqslant Y$. □

4.13 系 若在定理 4.12 中有 $E[X_T I_{[T<\infty]}]=E[Y_T I_{[T<\infty]}]$，则 $X=Y$.

注 在定理 4.12 及系 4.13 中，如果只考虑有界甚至有穷停时（可料时）是不够的.

§2. 可料时的 a.s. 可预报性

4.14 定义 设 T 为一宽停时，(T_n) 为一宽停时的上升列，且对一切 n，$T_n\leqslant T$. 令 $A\subset\Omega$，我们说序列 (T_n) 在 A 上 a.s. **预报** T，如果在 $A[T>0]$ 上，对每个 n，有 $T_n<T$ a.s.，且 $\lim\limits_n T_n=T$ a.s.. 如果 (T_n) 在 Ω 上 a.s. 预报 T，简称 (T_n) a.s. **预报** T.

一宽停时 T 称为 a.s. **可预报的**，如果存在一宽停时的上升列 (T_n) a.s. 预报 T.

我们将证明，一切可料时是 a.s. 可预报的.

4.15 引理 令 $\mathscr{T}$ 为可预报宽停时全体，则 $\mathscr{T}$ 有下列性质：

i) $0\in\mathscr{T}$，$+\infty\in\mathscr{T}$.

ii) $S,T\in\mathscr{Y}\Rightarrow S\wedge T, S\vee T\in\mathscr{Y}$,

iii) $\mathscr{Y}$ 中元素上升列的极限属于 $\mathscr{Y}$,

iv) $\mathscr{Y}$ 中元素尾定下降列的极限属于 $\mathscr{Y}$,

v) 设 $S\in\mathscr{Y}$, T 为一宽停时, $T=S$ a.s., 则 $T\in\mathscr{Y}$,

vi) $S,T\in\mathscr{Y}\Rightarrow S_{[S<T]}\in\mathscr{Y}$.

证明 i)及 ii)显然.

iii) 设(T_n)为 $\mathscr{Y}$ 中元素上升列, 且 $T=\lim\limits_n T_n$. 对每一 n, 设 $(S_{n,k})_{k\geq 1}$为 a.s. 预报 T_n 的宽停时上升列. 令

$$S_k = S_{1,k}\vee S_{2,k}\vee\cdots\vee S_{k,k},$$

则$(S_k)_{k\geq 1}$ a.s. 预报 T.

iv)设(T_n)为 $\mathscr{Y}$ 中元素尾定下降列, 且 $T=\lim\limits_n T_n$. 对每一 n, 设$(S_{n,k})_{k\geq 1}$为 a.s. 预报 T_n 的宽停时上升列. 必要时对足标 k 取子序列, 不妨设对一切 n 及 k 有

$$P(e^{-S_{n,k}}-e^{-T_n}>2^{-k})\leqslant 2^{-(n+k)}.$$

令 $S_k=\inf\limits_n S_{n,k}$, 则$(S_k)$为一宽停时的上升列, 且对一切 k, $S_k\leqslant T$. 在$[T>0]$上, 对一切 n, 有 $T_n>0$, 从而对一切 k, 有 $S_{n,k}<T_n$ a.s.. 但由于(T_n)为尾定的, 故在$[T>0]$上, 对一切 k, 有 $S_k<T$ a.s.. 令 $S=\lim\limits_k S_k$. 对一切 k

$$\begin{aligned}P(e^{-S}-e^{-T}>2^{-k})&\leqslant P(e^{-S_k}-e^{-T}>2^{-k})\\&\leqslant P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}[e^{-S_{n,k}}-e^{-T}>2^{-k}]\Big)\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(e^{-S_{n,k}}-e^{-T_n}>2^{-k})\leqslant 2^{-k}.\end{aligned}$$

这表明 $S=T$ a.s., 故(S_n) a.s. 预报 T, 即 $T\in\mathscr{Y}$.

v) 设宽停时列(S_n)a.s. 预报 S, 则序列$(S_n\wedge T)$a.s. 预报 T, 故 $T\in\mathscr{Y}$.

vi) 设宽停时列(S^n)及(T^m)分别 a.s. 预报 S 及 T. 令

$$U_n^m = n\wedge S^n_{[S^n<T^m]}.$$

对固定的 m, $(U_n^m)_{n\geq 1}$a.s. 预报宽停时 $U^m=S_{[S\leqslant T^m]\cap[T^m>0]}$. (由于

$[S\leqslant T^m]\cap[T^m>0]$属于 $\mathscr{F}_{S+}$，但一般不属于 $\mathscr{F}_S$.U^m 只是宽停时，即使 S 是一个停时.）因此 $U^m\in\mathscr{Y}$. 显然，(U^m)是尾定下降列，故由 iv）其极限 U 属于 $\mathscr{Y}$. 但是 $U=S_{[S<T]}$ a.s.，故由 v），$S_{[S<T]}\in\mathscr{Y}$.□

4.16 定理 一切可料时是 a.s. 可预报的.

证明 令 $\mathscr{Y}$ 为 a.s. 可预报宽停时全体，并沿用引理 4.6 的记号. 由系 3.28 知，$\mathscr{P}\subset\sigma(\mathscr{C})$. 由定理 4.7 的证明容易看出，截口定理对 $\sigma(\mathscr{C})$中的集合也成立(因这时 $S_L=S$ a.s.，故由 $\mathscr{Y}$ 的性质 v)，$S_L\in\mathscr{Y}$).

设 T 为一可料时，则 $[\![T]\!]\in\mathscr{P}$，$[\![T]\!]\in\sigma(\mathscr{C})$. 于是，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $S^\varepsilon\in\mathscr{Y}$，使得 $[\![S^\varepsilon]\!]\subset[\![T]\!]$，且 $\boldsymbol{P}(S^\varepsilon<\infty)\geqslant\boldsymbol{P}(T<\infty)-\varepsilon$. 令

$$T_n=S^{\frac{1}{2}}\wedge S^{\frac{1}{3}}\wedge\cdots\wedge S^{\frac{1}{n}},\ n\geqslant 2.$$

我们有 $T_n\in\mathscr{Y}$，$(T_n)_{n\geqslant 2}$是尾定下降列，且$\lim\limits_n T_n=T$ a.s.. 故由 $\mathscr{Y}$ 的性质 iv）及 v）知，$T\in\mathscr{Y}$，即 T 是 a.s. 可预报的. □

更进一步，我们要证明一切可料时可由一列可料时 a.s. 预报

4.17 定理 设 $T>0$ 为一可料时. 令 $A\subset[\![0,T[\![$ 为一可选集(可料集)，使得对几乎所有 $\omega\in[T<\infty]$，$T(\omega)$为集合 $A(\omega)=\{t\geqslant 0:(\omega,t)\in A\}$的极限点，则存在被 T 控制的停时(可料时)的增序列(T_n)，使得$\bigcup\limits_n[\![T_n]\!]\subset A$ a.s.，且$\lim\limits_n T_n=T$ a.s..

证明 只证 A 为可料集情形. 设(V_n)为 a.s. 预报 T 的宽停时列. 对每个 n，可料集 $A_n^T=A\cap]\!]V_n,T[\![$ 在 Ω 上的投影 a.s. 包含$[T<\infty]$. 由定理 4.8，对每个 n，存在可料时 U_n，使得 $[\![U_n]\!]\subset A_n^T$，且

$$\boldsymbol{P}(T<\infty)\leqslant\boldsymbol{P}(\pi(A_n^T))\leqslant\boldsymbol{P}(U_n<\infty)+\frac{1}{2^n}.$$

由于$\lim\limits_n V_n=T$ a.s.，故$\liminf\limits_{n\to\infty}U_n=T$ a.s..

对每个 n，及一切 $k\geqslant 1$，令

$$S_{n,k}=\inf_{n\leqslant m\leqslant n+k}U_m,\quad S_n=\inf_k S_{n,k}=\lim_{k\to\infty}S_{n,k}.$$

则$(S_{n,k})_{k\geq 1}$为可料时的下降列，往证$(S_{n,k})_{k\geq 1}$是 a.s. 尾定的．设$\omega \in \bigcap_{m=n}^{\infty}[U_m=\infty]$，则对一切$k\geq 1$，$S_{n,k}(\omega)=\infty$．设$\omega\in(\bigcup_{m=n}^{\infty}[U_m<\infty])\cap(\bigcap_{l=1}^{\infty}[V_l<T])\cap[\lim_{l\to\infty}V_l=T]$，则存在$m_0\geq n$，使$\omega\in[U_{m_0}<\infty]$，且对一切$l\geq 1$，有$V_l(\omega)<T(\omega)$，此外有$\lim_{l\to\infty}V_l(\omega)=T(\omega)$．由于$U_{m_0}(\omega)<T(\omega)$，故存在$k_0\geq m_0-n$，使当$k\geq k_0$时，有$U_{n+k}(\omega)>V_{n+k}(\omega)>U_{m_0}(\omega)$．这表明，当$k\geq k_0$时，恒有$S_{n,k}(\omega)=S_{n,k_0}(\omega)$，即$(S_{n,k}(\omega))_{k\geq 1}$是尾定的．注意到$P(\bigcap_{l=1}^{\infty}[V_l<T])\cap[\lim_{l\to\infty}V_l=T])=1$，上述论证表明$(S_{n,k})_{k\geq 1}$是 a.s. 尾定的．令

$$A_{n,k}=\bigcap_{i=1}^{\infty}[S_{n,k}=S_{n,k+i}],\quad R_{n,k}=(S_{n,k})_{A_{n,k}}\wedge T,$$

则$A_{n,k}\in\mathscr{F}_{S_{n,k}-}$，$R_{n,k}$为可料时，$(R_{n,k})_{k\geq 1}$为尾定下降列(注意$A_{n,k}\subset A_{n,k-1}$)，故其极限$R_n=\lim_k R_{n,k}$为可料时，且$R_n=S_n$ a.s.．令

$$T_n=R_1\vee R_2\vee\cdots\vee R_n.$$

由于(S_n)为上升列，故$T_n=R_n=S_n$ a.s.，从而

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\liminf_{n\to\infty}U_m=T\ \text{a.s.}.$$

最后，由于每个$S_{n,k}$的图含于A中，且$(S_{n,k})_{k\geq 1}$是 a.s. 尾定的，故其极限S_n的图 a.s. 含于A中，从而每个T_n的图 a.s. 含于A中．□

4.18 系 一切可料时可由一列可料时 a.s. 预报．

证明 设U为一可料时．令$T=U_{[U>0]}$，则T为可料时，且$T>0$．由定理 4.17，存在可料时的上升列(T_n)，使得$\bigcup_n[\![T_n]\!]\subset[\![0,T[\![$ a.s.，且$\lim_n T_n=T$ a.s.．置$U_n=T_n\wedge U_{[U=0]}$，则(U_n)为 a.s. 预报U的可料时的上升列．□

§ 3. 绝不可及时

4.19 定义 设T为一停时，称T为**绝不可及时**．如果对一切可料时S，有$P(T=S<\infty)=0$．

显然，绝不可及时是 a.s. 正的．若一停时 a.s. 等于一绝不可及时，则它也是绝不可及时．如果一停时既是可及时，又是绝不可及时，则它 a.s. 等于 $+\infty$．

4.20 定理 设 T 为一停时，则存在 $A\subset[T<\infty]$，$A\in\mathscr{F}_T$，使得 T_A 为可及时，T_{A^c} 为绝不可及时．这样的集合 A 是 a.s. 唯一确定的．

证明 令

$$\mathscr{H}=\{\bigcup_n[S_n=T<\infty]:(S_n)\text{ 为一列可料时}\}.$$

显然，$\mathscr{H}\subset\mathscr{F}_T$，$\mathscr{H}$ 对可列并运算封闭．由注 1.14，存在 $A\in\mathscr{H}$，使得 $A=\operatorname{ess\,sup}\mathscr{H}$．易见 T_A 为可及时，T_{A^c} 为绝不可及时，也不难证明 A 的 a.s. 唯一性． □

注 通常 T_A 及 T_{A^c} 分别称为 T 的**可及部分**及**绝不可及部分**，并记为 T^a 及 T^i．它们是 a.s. 唯一确定的．

现在我们已作好研究适应右连左极过程的跳的准备．

4.21 定理 设 $X=(X_t)$ 为一适应右连左极过程，则存在一列严格正的停时 (T_n) 满足下列条件：

i) $[\Delta X\neq 0]\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]$；

ii) 每个 T_n 或为可料时，或为绝不可及时；

iii) 当 $n\neq m$ 时，$[\![T_n]\!]\cap[\![T_m]\!]=\varnothing$．

我们今后称这样的停时列 (T_n) 为**穷举 X 的跳的标准停时列**．

证明 由定理 3.32，存在一列严格正的停时 (U_n)，使得条件 i) 满足．由定理 4.20，对每个 n，存在可及时 U_n^a 及绝不可及时 U_n^i，使得 $[\![U_n]\!]=[\![U_n^a]\!]\cup[\![U_n^i]\!]$．于是，由可及时定义，存在一列严格正停时 (S_n) 满足条件 i) 及 ii)．令 $\mathscr{N}_1=\{n:S_n\text{ 为可料时}\}$，$\mathscr{N}_2=\{n:S_n\text{ 为绝不可及时}\}$．置

$T_1=S_1$，

$$B_n=\begin{cases}\displaystyle\bigcap_{k\leqslant n-1,k\in\mathscr{N}_1}[S_k\neq S_n], & n\in\mathscr{N}_1,\\ \displaystyle\Big(\bigcap_{k\in\mathscr{N}_1}[S_k\neq S_n]\Big)\cap\Big(\bigcap_{k\leqslant n-1,k\in\mathscr{N}_2}[S_k\neq S_n]\Big), & n\in\mathscr{N}_2,\end{cases}\quad n\geqslant 2$$

$$T_n = (S_n)_{B_n}, \quad n \geqslant 2.$$

如果 S_n 为可料时，则 $B_n \in \mathscr{F}_{S_n-}$，从而 T_n 为可料时；如果 S_n 为绝不可及时，则 $B_n \in \mathscr{F}_{S_n}$，$T_n$ 为绝不可及时．显然，(T_n) 满足条件 i)—iii)． □

注 若在条件 ii) 中将可料时改成可及时，则可要求条件 i) 中等号成立．

4.22 定义 设 $X=(X_t)$ 为一右连左极适应过程，$T>0$ 为一停时．称 T 为 X 的一个**跳跃时**，如果在 $[T<\infty]$ 上，有 $X_T \neq X_{T-}$ a.s.，即 $P(T<\infty, X_T\neq X_{T-})=P(T<\infty)$．称 X **只有可及跳**，如果 X 的一切跳跃时 a.s. 等于一可及时．称 X **只有绝不可及跳**，如果 X 的一切跳跃时为绝不可及时．

称只有绝不可及跳的右连左极适应过程为**拟左连续过程**．

4.23 定理 设 $X=(X_t)$ 为一右连左极适应过程，则下列命题等价：

1) X 为拟左连续，

2) 对任一可料时 $T>0$，在 $[T<\infty]$ 上，有 $X_T=X_{T-}$ a.s.，

3) 设 (T_n) 为任一停时的增序列，且 $T=\lim\limits_n T_n$，则在 $[T<\infty]$ 上有 $\lim\limits_n X_{T_n}=X_T$ a.s.．

证明 3)⇒2) 由定理 4.16 看出，2)⇒1) 由定理 4.20 看出．往证 1)⇒2)⇒3)．

设 X 为拟左连续，$T>0$ 为一可料时．令

$$B = [T<\infty] \cap [X_T \neq X_{T-}],$$

则 T_B 为 X 的一跳跃时．依假定，T_B 为绝不可及时．于是有

$$P(T_B = T < \infty) = 0.$$

这表明在 $[T<\infty]$ 上，有 $X_T=X_{T-}$ a.s.，1)⇒2) 得证．

设 2) 成立．令 (T_n) 为停时的增序列，且 $T=\lim\limits_n T_n$．令

$$A = \bigcap_n [T_n < T],$$

则 $T_A>0$，且 $(T_n)_{[T_n<T]}\wedge n$ 预报 T_A，故 T_A 为可料时．由 2)，在 $[T_A<\infty]$ 上，有 $X_{T_A}=X_{T_A-}$ a.s.，即在 $A[T<\infty]$ 上有

$X_T=X_{T-}$ a.s.．于是在 $A[T<\infty]$ 上，有 $\lim\limits_n X_{T_n}=X_T$ a.s.．但在 $A^c[T<\infty]$ 上，恒有 $\lim\limits_n X_{T_n}=X_T$，故在 $[T<\infty]$ 上，有

$$\lim_n X_{T_n}=X_T \quad \text{a.s.}.$$

于是，2）⇒3）得证．□

注　一稀疏集 A 称为**绝不可及的**，若 $A=\bigcup\limits_n [\![T_n]\!]$，其中每个 T_n 为绝不可及时．故一右连左极适应过程 X 为拟左连续的，当且仅当 $[\Delta X\neq 0]$ 为绝不可及的．

4.24 定理　设 $X=(X_t)$ 为一右连左极适应过程，则为要 X 只有可及跳，必须且只需对任一绝不可及时 T，在 $[T<\infty]$ 上有

$$X_T=X_{T-} \quad \text{a.s.}.$$

证明　与定理 4.23 中 1）⇔2）的证明类似．□

下一定理给出了适应有限变差过程的一个有用的分解．

4.25 定理　设 $A=(A_t)$ 为一适应有限变差过程，则 A 有唯一分解：

$$A=A^c+A^{da}+A^{di},$$

其中 A^c 为连续适应有限变差过程，A^{da} 为只有可及跳的适应纯断有限变差过程，A^{di} 为拟左连续适应纯断有限变差过程．

证明　令 (T_n) 为一穷举 A 的跳的标准停时列．设 $\Gamma_1=\{n:T_n$ 为可料时$\}$，$\Gamma_2=\{n:T_n$ 为绝不可及时$\}$．令

$$A_t^{da}=\sum_{n\in\Gamma_1}\Delta A_{T_n}I_{[T_n\le t]},\quad A_t^{di}=\sum_{n\in\Gamma_2}\Delta A_{T_n}I_{[T_n\le t]},\quad t\geq 0.$$

由定理 3.42，$A=A^c+A^{da}+A^{di}$ 为满足定理要求的一个分解．设 A 有另一个满足定理要求的分解：$A=\bar{A}^c+\bar{A}^{da}+\bar{A}^{di}$．令 $B=A^{da}-\bar{A}^{da}=\bar{A}^{di}-A^{di}$，则 B 为适应纯断有限变差过程．设 $T>0$ 为一停时，T^a 及 T^i 分别为其可及部分及绝不可及部分：$[\![T]\!]=[\![T^a]\!]\cup[\![T^i]\!]$．在 $[T^a<\infty]$ 上，有 $\Delta B_{T^a}=\Delta A^{da}_{T^a}-\Delta\bar{A}^{da}_{T^a}=0$ a.s.；在 $[T^i<\infty]$ 上，有 $\Delta B_{T^i}=\Delta\bar{A}^{di}_{T^i}-\Delta A^{di}_{T^i}=0$ a.s.；故在 $[T<\infty]$ 上有 $\Delta B_T=0$ a.s.．由系 4.11，ΔB 与零过程无区别，即 B 与一连续过程无区别．但 B 为纯断有限变差过程，故 B 与零过程无区别，即

A^{da}与$\overline{A}^{da}$无区别，A^{di}与$\overline{A}^{di}$无区别．分解的唯一性得证．□

§4. 完备流与通常条件

4.26 定理 设$(\mathscr{F}_t)$完备（参见定义2.63），则一切不足道可测过程为可料过程．

证明 设X为一不足道可测过程，$A=\{\omega:\exists\ t\in \boldsymbol{R}_+$使得$X_t(\omega)\neq 0\}$，则$P(A)=0$，且$A\in\mathscr{F}_0$．令

$$\mathscr{C}=\{C\times[t,\infty[:C\in\mathscr{F},\ t\in\boldsymbol{R}_+\}.$$

易见$\mathscr{C}$为一π-类，且$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$．另一方面，令

$$\mathscr{H}=\{Y\in\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+):\ YI_{A\times\boldsymbol{R}_+}\text{为可料过程}\},$$

则对一切$H\in\mathscr{C}$，$I_H\in\mathscr{H}$．由单调类定理（定理1.4），$\mathscr{H}$即为$\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$-可测过程全体．特别，$X=XI_{A\times\boldsymbol{R}_+}$为可料过程．

□

4.27 系 设$(\mathscr{F}_t)$完备．令$A\in\mathscr{F}$，$P(A)=0$，则对每个非负随机变量ξ，$\xi_A=\xi I_{A^c}+(+\infty)I_A$为可料时．

证明 由于$[\![\xi_A,+\infty[\![$为不足道可测集，它是可料的．由定义3.25，ξ_A为可料时．□

4.28 系 设$(\mathscr{F}_t)$完备．令X与Y为两个无区别的可测过程．若X可选（可及，可料），则Y亦然．

证明 注意到$Y=XI_{[X=Y]}+YI_{[X\neq Y]}$，且$I_{[X\neq Y]}$与$I_{[X=Y]}$均为可料过程，即得欲证之结论．□

4.29 定理 设$(\mathscr{F}_t)$完备．

1）若T为一停时（可及时，可料时），$S=T$ a.s.，则S亦然，且$\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_S$，$\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{S-}$．

2）设S为一非负随机变量，则为要S是一停时（可及时，可料时），必须且只需$[\![S]\!]$为可选集（可及集，可料集）．

证明 1）得自系4.28，因为S为一随机变量，且可测过程$I_{[\![S,\infty[\![}$与$I_{[\![T,\infty[\![}$无区别．等式$\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_S$与$\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{S-}$直接由$\mathscr{F}_T$与$\mathscr{F}_{T-}$的定义可得．

2) 只需证充分性，只证可料情形，其余情形类似．设 $[\![S]\!]$ 为可料集．由截口定理，对任给 $\varepsilon>0$，存在可料时 T^{ε} 使得 $[\![T^{\varepsilon}]\!]\subset[\![S]\!]$，且 $P(T^{\varepsilon}<\infty)\geqslant P(S<\infty)-\varepsilon$．令

$$S_n=T^{\frac{1}{2}}\wedge\cdots\wedge T^{\frac{1}{n}},\ n\geqslant 2.$$

则 $(S_n)_{n\geqslant 2}$ 为可料时的尾定降序列，且 $\lim\limits_n S_n=S$ a.s.，故由 1）S 为可料时．□

4.30 定理 设 $(\mathscr{F}_t)$ 完备，则任一循序集 A 的初遇 D_A 为宽停时，若又有 $[\![D_A]\!]\subset A$，则 D_A 为停时．

证明 对任一 $t\geqslant 0$，令

$$A_t=\{(\omega,s):s<t,(\omega,s)\in A\}.$$

则 $A_t=A\cap(\Omega\times[0,t[)\in\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，$[D_A<t]=\pi(A_t)$，其中 $\pi(A_t)$ 为 A_t 在 Ω 上的投影．由于 $\mathscr{F}_t$ 关于 P 完备，由定理 1.36 及 1.40，$[D_A<t]=\pi(A_t)\in\mathscr{A}(\mathscr{F}_t)=\mathscr{F}_t$．因此，$D_A$ 为宽停时．

若又有 $[\![D_A]\!]\subset A$，则 $[D_A\leqslant t]=\pi(\bar{A}_t)$，其中

$$\bar{A}_t=\{(\omega,s):s\leqslant t,(\omega,s)\in A\}.$$

类似地，$[D_A\leqslant t]=\pi(\bar{A}_t)\in\mathscr{A}(\mathscr{F}_t)=\mathscr{F}_t$．因此，$D_A$ 为停时．□

4.31 定理 设 $(\mathscr{F}_t)$ 完备．令 H 为一可料集，且 $[\![D_H]\!]\subset H$，其中 D_H 为 H 的初遇，则 D_H 为可料时．

证明 首先，由定理 4.30，D_H 为停时，从而 $[\![D_H]\!]=H\cap[\![0,D_H]\!]$ 为可料集．由定理 4.29.2)，D_H 为可料时．□

4.32 定理 设 $(\mathscr{F}_t)$ 完备．则一切右连续适应过程为可选过程．

证明 设 X 为一右连续适应过程．对任给 $\varepsilon>0$，以 $\mathscr{A}$ 记满足下列条件的停时 S 全体：存在一可选过程 $Y^{(S)}$，使得

$$\{(\omega,t):t\in[0,S(\omega)[,|X_t(\omega)-Y_t^{(S)}(\omega)|\geqslant\varepsilon\}$$

为不足道集．易见，$\mathscr{A}$ 非空（因为 $0\in\mathscr{A}$），且有下列性质：

i) $S,T\in\mathscr{A}\Rightarrow S\vee T\in\mathscr{A}$，

ii) $S_n\in\mathscr{A}$，$n=1,2,\cdots$，$S_n\uparrow S\Rightarrow S\in\mathscr{A}$，

iii) $S\in\mathscr{A}$，T 为一停时，$T=S$ a.s. $\Rightarrow T\in\mathscr{A}$．

由定理 1.13，存在 $T\in\mathscr{A}$，使得 $T=\text{ess sup}\mathscr{A}$. 往证 $T=+\infty$ a.s.. 令

$$A=\{(\omega,t):t>T(\omega),|X_t(\omega)-X_{T(\omega)}(\omega)|\geqslant\varepsilon\}.$$

A 为循序集. 令 U 为 A 的初遇. 由 X 的右连续性，有 $[\![U]\!]\subset A$. 因此，U 为停时. 令

$$Y^{(U)}=Y^{(T)}I_{[\![0,T[\![}+X_TI_{[\![T,U[\![},$$

则 $U\in\mathscr{A}$，且 $U\geqslant T$，从而 $U=T$ a.s.. 另一方面，仍由 X 的右连续性，在 $[U<\infty]$ 上有 $T<U$. 这表明 $T=U=+\infty$ a.s.. 由 $\mathscr{A}$ 的性质 iii) 知，$+\infty\in\mathscr{A}$. 令 $X^\varepsilon=Y^{(+\infty)}$，则 X^ε 为可选过程，且

$$\{(\omega,t):|X_t(\omega)-X_t^\varepsilon(\omega)|\geqslant\varepsilon\}$$

为不足道集，取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$，令

$$\overline{Y}=\liminf_{n\to\infty}X^{\varepsilon_n},Y=\overline{Y}I_{[|\overline{Y}|<\infty]},$$

则 Y 为可选过程，且 X 与 Y 无区别，由系 4.28，X 可选. □

4.33 定理 设 $(\mathscr{F}_t)$ 完备. 令 X 为一右连左极适应过程. 为要 X 为可料过程，必须且只需满足下列条件：

i) 对每个绝不可及时 S，在 $[S<\infty]$ 上有 $X_S=X_{S-}$ a.s.，

ii) 对每个可料时 T，$X_TI_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_{T-}$-可测.

证明 必要性由定理 3.33 即得，往证充分性. 设条件 i) 及 ii) 成立. 由定理 3.32，存在一列严格正的停时 (U_n)，使得 $[\Delta X\neq0]=\bigcup\limits_n[\![U_n]\!]$. 对每个 n，令 U_n^a 及 U_n^i 分别为 U_n 的可及部分及绝不可及部分：$[\![U_n]\!]=[\![U_n^a]\!]\cup[\![U_n^i]\!]$. 由条件 i)，$U_n^i=+\infty$ a.s.，故 U_n^i 为可料时（定理 4.29.2)），从而 $U_n=U_n^a\wedge U_n^i$ 为可及时. 所以，存在一列严格正的可料时 (T_n)，使得 $[\Delta X\neq0]\subset\bigcup\limits_n[\![T_n]\!]$. 联合条件 ii)，由定理 3.33 知，$X$ 为可料过程. □

注 由以上证明可见，条件 i) 是 X 为可及的充要条件（参见定义 3.37 的注）. 在应用中定理 4.33 比定理 3.33 更方便.

4.34 定理 设 $(\mathscr{F}_t)$ 完备，则一切可料时是可预报的.

证明 设 T 为一可料时，(S_n) 为 a.s. 预报 T 的停时的上升列. 令

$$A = \{(\bigcap_n [S_n < T]) \cap [T = \lim_{n\to\infty} S_n]\} \cup [T = 0],$$

$$T_n = (S_n)_A \wedge \left[T - \frac{1}{n}\right]^+_A$$

因 $P(A) = 1$，由定理 4.29(T_n)，为一列停时，显然，(T_n)预报 T. □

4.35 定理 设$(\mathscr{F}_t)$完备，则下列命题等价：

1) $(\mathscr{F}_t)$拟左连续，即对一切可料时 T，$\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_{T-}$.

2) 一切可及时为可料时.

3) 若(T_n)为一停时的上升列，$T = \lim_n T_n$，则

$$\mathscr{F}_T = \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n}.$$

证明 1)⟺2)及 1)⟹3)早已在定理 3.40 中证过，只需证 3)⟹1). 设 T 为一可料时，(T_n)为预报 T 的停时列(定理 4.34)，由定理 3.4.11)，有

$$\mathscr{F}_T = \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n}.$$

由 3)得 $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_{T-}$，故$(\mathscr{F}_t)$拟左连续. □

4.36 定理 设 $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$是流 $\boldsymbol{F}^0 = (\mathscr{F}_t^0)$的通常化，即

$$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}^0 \vee \mathscr{N}, \quad t \geqslant 0,$$

其中 $\mathscr{N}$ 为 $\boldsymbol{P}$-零概集全体产生的 σ-域(参见定义 2.63).

1) 对每个 $\boldsymbol{F}$-停时 T，存在 $\boldsymbol{F}^0$-宽停时 U，使得 $T = U$ a.s.，且

$$\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_{U+}^0 \vee \mathscr{N}, \quad \mathscr{F}_{T-} = \mathscr{F}_{U-}^0 \vee \mathscr{N}.$$

2) 对每个 $\boldsymbol{F}$-可选过程 X，存在 $\boldsymbol{F}_+^0$-可选过程 Y，使得 X 与 Y 无区别.

证明 1) 由于

$$T = \inf_{n,k\geq 1}\left\{\frac{k}{2^n} I_{[\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}]} + (+\infty) I_{[T < \frac{k-1}{2^n}] \cup [T \geq \frac{k}{2^n}]}\right\}.$$

不妨设 T 有下列形式：

$$T = aI_A + (+\infty)I_{A^c}, \quad a \in \boldsymbol{R}_+, \ A \in \mathscr{F}_a.$$

这时，取 $B \in \mathscr{F}_{a+}^0$，使得 $P(B\Delta A) = 0$，则

$$U = aI_B + (+\infty)I_{B^c}$$

为 F^0-宽停时，且 $U = T$ a.s..

由定理 4.29.1)，有 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_U\supset\mathscr{F}^0_{U+}\vee\mathscr{N}$. 另一方面，对任一 $L\in\mathscr{F}_T$，可取 $L'\in\mathscr{F}^0_\infty$，使得 $P(L\Delta L')=0$，及 F^0-宽停时 V，使得 $V=T_L$ a.s.. 令

$$M=(L'\cap[U=\infty])\cup[V=U<\infty],$$

则 $M\in\mathscr{F}^0_{U+}$，$P(M\Delta L)=0$. 这表明 $L\in\mathscr{F}^0_{U+}\vee\mathscr{N}$，故 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}^0_{U+}\vee\mathscr{N}$. 关于 $\mathscr{F}_{T-}$ 的等式是显然的.

2) 设 $X=I_{[\![T,\infty[\![}$，其中 T 为 F-停时，由 1)，取 F^0_+-停时 U，使得 $U=T$ a.s.，则 $Y=I_{[\![U,\infty[\![}$ 为 F^0_+-可选过程，且与 X 无区别. 再由单调类定理得一般的结论. □

4.37 定理 设 $F=(\mathscr{F}_t)$ 为流 $F^0=(\mathscr{F}^0_t)$ 的完备化，即

$$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}^0_t\vee\mathscr{N},\ t\geqslant 0.$$

1) 对每个 F^0-停时 T，有 $\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}^0_{T-}\vee\mathscr{N}$.

2) 对每个 F^0-可料时 T，存在 F^0-可料时 S，使得 $T=S$ a.s.，且 $\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}^0_{S-}\vee\mathscr{N}$.

3) 对每个 F-可料过程 X，存在 F^0-可料过程 Y，使得 X 与 Y 无区别.

证明 1) 显然.

2) 设 (T^n) 为预报可料时 $T_{[T>0]}$ 的停时列. 对每个 n，设 R^n 为 F^0_+-停时，使得 $R^n=T^n$ a.s.(定理 4.36.1)). 必要的话以 $R^1\vee\cdots\vee R^n$ 代替 R^n，不妨设 R^n 为上升列. 记 $R=\lim\limits_n R^n$. 令 $A_n=[R^n<R]$. 由于 (A_n) 为下降列，$(U_n=R^n_{A_n}\wedge n)$ 为 F^0_+-停时的上升列. (U_n) 预报 U，且 $U>0$，故 U 为 F^0-可料时(参见定理 3.27 的证明). 因为 $P(A_n)=1$，$U_n=R^n\wedge n$ a.s.，$U=R=T_{[T>0]}$ a.s.. 取 $H\in\mathscr{F}^0_0$，使得 $P(H\Delta[T=0])=0$. 令

$$S=U\wedge 0_H,$$

则 S 为 F^0-可料时，且 $T=S$ a.s..

由 1)及定理 4.29.1)，有 $\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{S-}=\mathscr{F}^0_{S-}\vee\mathscr{N}$.

3)的证明与定理 4.36.2)类似. □

4.38 定理 设 $F=(\mathscr{F}_t)$ 为流 $F^0=(\mathscr{F}^0_t)$ 的通常化.

1）对每个 $\boldsymbol{F}$-可及时 T，有 $\boldsymbol{F}^0_-$-可及时 U，使得 $T=U$ a.s..

2）对每个 $\boldsymbol{F}$-可及过程 X、有 $\boldsymbol{F}^0_+$-可及过程 Y，使得 X 与 Y 无区别.

证明 1）令 S 为 $\boldsymbol{F}^0_+$-停时，使得 $S=T$ a.s.. 设 $[\![T]\!]\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]$，其中 (T_n) 为一列 $\boldsymbol{F}$-可料时. 对每个 n，有 $\boldsymbol{F}^0_+$-可料时 S_n，使得 $S_n=T_n$ a.s.（定理 4.37.2））. 显然，$[\![S]\!]\subset\bigcup_n[\![S_n]\!]$ a.s.. 令

$$U=\bigwedge_n (S)_{[S=S_n]},$$

则 U 为 $\boldsymbol{F}^0_+$-可及时：$[\![U]\!]\subset\bigcup_n[\![S_n]\!]$，且 $U=S=T$ a.s..

2）由 1）及单调类定理可得. □

§ 5. 应用于鞅论

在本节中，假设 $(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$ 为一完备概率空间，流 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 满足通常条件.

4.39 定理 设 $X=(X_t)$ 为右连续上鞅（鞅），T 为一停时，则停止过程 $X^T=(X_{t\wedge T})$ 也是上鞅（鞅）.

证明 对每个 $t\geqslant 0$，$X_{t\wedge T}$ 为 $\mathscr{F}_{t\wedge T}$-可测，故 X^T 为适应过程. 令 $a\in\boldsymbol{R}_+$，$0\leqslant s\leqslant a$. 对 $X^a=(X_{t\wedge a})$ 应用定理 2.59 得

$$\boldsymbol{E}[X_{a\wedge T}\mid\mathscr{F}_s]\leqslant X_{s\wedge T}(=X_{s\wedge T})\ \text{a.s.}.$$

故 X^T 为上鞅（鞅）. □

注 令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t\wedge T}$，则流 $(\mathscr{G}_t)$ 满足通常条件，且 X^T 为 $(\mathscr{G}_t)$-上鞅（鞅）.

下一定理虽然简单，但有时很有用.

4.40 定理 设 $X=(X_t)$ 为一适应可测过程，X_∞ 为一可积随机变量，$X_\infty\in\mathscr{F}_\infty$. 若对每个停时 T，X_T 可积，且 $\boldsymbol{E}[X_T]$ 不依赖于 T，则 X 为一致可积鞅. 若 X 又为可选过程，则 X 的几乎所有轨道右连续.

证明 对任一停时 T 及 $A\in\mathscr{F}_T$，有

$$\int_A X_T dP = E[X_{T_A}] - \int_{A^c} X_\infty dP$$
$$= E[X_\infty] - \int_{A^c} X_\infty dP = \int_A X_\infty dP. \qquad (40.1)$$

在(40.1)中取 $T=t\in \boldsymbol{R}_+$. 由于 $X_t\in\mathscr{F}_t$，故得

$$E[X_\infty|\mathscr{F}_t] = X_t \text{ a.s.}.$$

因此，X 为一致可积鞅. 若 X 又为可选过程，则对任一停时 T，$X_T\in\mathscr{F}_T$. 由(40.1)得

$$E[X_\infty|\mathscr{F}_T] = X_T \text{ a.s.}.$$

令 $Y=(Y_t)$ 为鞅$(E[X_\infty|\mathscr{F}_t])$的右连续适应修正(约定 $Y_\infty = X_\infty$). 由定理 2.58，我们有

$$Y_T = E[X_\infty|\mathscr{F}_T] = X_T \text{ a.s.}.$$

由于 Y 可选，由系 4.11，X 与 Y 无区别，故 X 的几乎所有轨道右连续. □

注 令 $X=(X_t)$为一可选过程. 若对一切有界停时 T，X_T 可积，且 $E[X_T]$不依赖于 T，则对每个 $X^n=(X_{t\wedge n})$，$n\geqslant 1$，应用定理知，X 为鞅，其几乎所有轨道右连续.

下一定理是停止定理的可料形式，它是下一章中定义过程的可料投影的基础.

4.41 定理 设$(X_t, t\in\bar{\boldsymbol{R}}_+)$为右连续上鞅(鞅)，则对一切可料时 T 及停时 $U\geqslant T$，有

$$E[X_U|\mathscr{F}_{T-}]\leqslant X_T \quad (= X_{T-}) \text{ a.s.}, \qquad (41.1)$$

其中 X_{T-}在 Ω 上 a.s. 有定义(定理 2.43)，且可积.

证明 令(T_n)为预报 T 的停时列. 由定理 3.4.11)，有

$$\mathscr{F}_{T-} = \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n}.$$

为叙述方便起见，我们只讨论上鞅情形. 由停止定理 2.58，有

$$E[X_U|\mathscr{F}_{T_n}]\leqslant X_{T_n} \text{ a.s.}.$$

应用系 2.19 得

$$E[X_U|\mathscr{F}_{T-}] = \lim_{n\to\infty} E[X_U|\mathscr{F}_{T_n}] \leqslant \lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_{T-} \text{ a.s.}.$$

X_{T-}的可积性由系 2.61 可得. □

4.42 定理 设 ξ 为一可积随机变量，S,T 为两个可料时，则有

$$E[E[\xi|\mathscr{F}_{S-}]|\mathscr{F}_{T-}]=E[\xi|\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}] \quad \text{a.s.}. \qquad (42.1)$$

证明 令 (X_t) 为鞅 $(E[\xi|\mathscr{F}_t])$ 的右连续适应修正，则有

$$\begin{aligned}
&E[E[\xi|\mathscr{F}_{S-}]|\mathscr{F}_{T-}]\\
&=E[X_{S-}|\mathscr{F}_{T-}]\\
&=E[I_{[S>T]}X_{(S\vee T)-}+I_{[S\leqslant T]}X_{S-}|\mathscr{F}_{T-}]\\
&=I_{[S>T]}E[E[X_{S\vee T}|\mathscr{F}_{(S\vee T)-}]|\mathscr{F}_{T-}]+I_{[S\leqslant T]}X_{S-}\\
&=I_{[S>T]}E[X_{S\vee T}|\mathscr{F}_{T-}]+I_{[S\leqslant T]}X_{S-}\\
&=I_{[S>T]}X_{T-}+I_{[S\leqslant T]}X_{S-}=X_{(S\wedge T)-}\\
&=E[\xi|\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}] \quad \text{a.s.}. \qquad \square
\end{aligned}$$

问题与补充

4.1 设 S 为一宽停时，$A\subset [\![S,\infty[\![$ 为一可选集(可料集)，对每个 $\omega\in[S<\infty]$，$S(\omega)$ 是集合 $A(\omega)=\{t\geqslant 0;(\omega,t)\in A\}$ 的极限点，则存在一停时(可料时)的下降列(S_n)，使得 $\bigcup_n [\![S_n]\!]\subset A$，且 $\lim_n S_n=S$ a.s..

4.2 设 $T=T_1\wedge T_2$，$T_1\vee T_2=+\infty$，其中 T_1 为可及时，T_2 为绝不可及时，则 $T_1=T^a$，$T_2=T^i$ a.s..

4.3 设$(\mathscr{F}_t)$完备．令 H 为一可料集，D_H 为其初遇，则存在一停时的上升列(T_n)，使得 $\lim_n T_n=D_H$，且对每个 n，在$\{\omega: D_H(\omega)>0$ 及 $(\omega,D_H(\omega))\in H\}$ 上，有 $T_n<D_H$.

4.4 设$(\mathscr{F}_t)$完备，则每个可料时可由一列只取两进位有理数值的停时预报．

4.5 设 $F^0=(\mathscr{F}_t^0)$ 为右连续流，$F=(\mathscr{F}_t)$ 为其完备化．若 F^0 拟左连续，则 F 亦然．

4.6 设 $F=(\mathscr{F}_t)$ 为流 $F^0=(\mathscr{F}_t^0)$ 的通常化，$X=(X_t)$ 为一右连续 F^0-上鞅(鞅)，则 X 也为 F-上鞅(鞅).

4.7 设$(\mathscr{F}_t)$完备．令S,T为可料时，$S<T$．则对任给$\varepsilon>0$，存在一列可料时(R_n)，使得$R_0=S$，$0<R_{n+1}-R_n<\varepsilon$，$n\geq 0$，$\lim_n R_n=T$．

4.8 设$(\mathscr{F}_t)$完备．令$T>0$为一可料时，则存在一连续适应严格增过程A，使得$A_0=0$及$A_T=1$．

在下列问题中，恒设流$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$满足通常条件．

4.9 设$X=(X_t)$为一右连左极上鞅(鞅)，T为一可料时，则X^{T-}为上鞅(鞅)．

4.10 设$X=(X_t)$为一可料过程，$X_\infty=\lim_{t\to\infty}X_t$存在且有限，对一切可料时$T$，$X_T$可积，且$\boldsymbol{E}[X_T]$不依赖于$T$．令$Y$为鞅$(\boldsymbol{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t])$的右连左极适应修正．则$X=Y_-$．

4.11 设(X_t)为一右连左极上鞅(鞅)．若S,T为可料时，$S\leq T$，则

$$X_{S-}\geq \boldsymbol{E}[X_{T-}|\mathscr{F}_{S-}]\geq \boldsymbol{E}[X_T|\mathscr{F}_{S-}]$$
$$(X_{S-}=\boldsymbol{E}[X_{T-}|\mathscr{F}_{S-}]=\boldsymbol{E}[X_T|\mathscr{F}_{S-}]).$$

4.12 设$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$为一子$\sigma$-域，且$\mathscr{F}_{S-}\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{F}_S$，其中$S$为一停时，则对一切停时$T$及可积随机变量$\xi$，有

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_T|\mathscr{G}]=\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{G}|\mathscr{F}_T].$$

若T又是可料时，则

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}|\mathscr{G}]=\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{G}|\mathscr{F}_{T-}].$$

4.13 设$X=(X_t)$为一可选(可料)过程，对一切有界停时(可料时)T，X_T可积．

1) 如果对一切有界停时(可料时)的降序列(T_n)，$\lim_n \boldsymbol{E}[X_{T_n}]$存在(允许为$\pm\infty$，下同)，则$X$的几乎所有轨道在$\boldsymbol{R}_+$上右极限存在

2)如果对一切一致有界的停时(可料时)的增序列(T_n)，$\lim_n \boldsymbol{E}[X_{T_n}]$存在，则$X$的几乎所有轨道在$]0,\infty[$上左极限存在．

若进一步，对一切有界停时(可料时)T，有$\boldsymbol{E}[|X_T|]\leq K$，其中$K$为一常数，则一切上述右或左极限均有穷．

4.14 设 $X=(X_t)$ 为一有界可选过程．若对任一趋于 $+\infty$ 的有限停时的增序列 (T_n)，$\lim\limits_n \boldsymbol{E}[X_{T_n}]$ 存在，则 $\lim\limits_{t\to\infty} X_t$ a.s. 存在．

4.15 设 $X=(X_t)$ 为一可选过程，且

$$\sup\{\boldsymbol{E}[|X_T|];T \text{ 为有界停时}\}<\infty.$$[1]

若对一切有界停时的降序列 (T_n)，(X_{T_n}) 一致可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}[X_{T_n}] = \boldsymbol{E}[X_{\lim\limits_{n\to\infty} T_n}],$$

则 X 的几乎所有轨道右连续．

4.16 设 $X=(X_t)$ 为一可选过程．为要 X 的几乎所有轨道右连续，必须且只需对一切有界停时的降序列 (T_n)，有

$$X_{T_n} \xrightarrow{P} X_{\lim\limits_{n\to\infty} T_n}.$$

4.17 设 $X=(X_t)$ 为一可料过程，且

$$\sup\{\boldsymbol{E}[|X_T|];T \text{ 为有界可料时}\}<\infty.$$

若对一切可料时的一致有界增序列 (T_n)，(X_{T_n}) 一致可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}[X_{T_n}] = \boldsymbol{E}[X_{\lim\limits_{n\to\infty} T_n}],$$

则 X 的几乎所有轨道左连续．

4.18 设 $X=(X_t)$ 为一可料过程．为要 X 的几乎所有轨道左连续，必须且只需对一切可料时的一致有界增序列 (T_n)，有

$$X_{T_n} \xrightarrow{P} X_{\lim\limits_{n\to\infty} T_n}.$$

4.19 设 $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ 为一列右连续上鞅，对一切 n 及 $t\in\boldsymbol{R}_+$，$X_t^{(n)}\leqslant X_t^{(n-1)}$ a.s.．令

$$X_t(\omega) = \sup_n X_t^{(n)}(\omega),\ t\geqslant 0.$$

若 X_0 可积，则 (X_t) 为上鞅，其几乎所有轨道右连续．

4.20 设 $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ 为一列右连续下鞅，对一切 n 及 $t\in\boldsymbol{R}_+$，$X_t^{(n)}\leqslant X_t^{(n-1)}$ a.s.，且对一切 n，$X^{(n-1)}-X^{(n)}$ 为下鞅．令

$$X_t(\omega) = \sup_n X_t^{(n)}(\omega),\ t\geqslant 0.$$

若对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$，X_t 可积，则 (X_t) 为下鞅，其几乎所有轨道右连续．

---

1) 换言之，(X_t) 在 L^1 中有界．

第五章　过程的投影

本章主要介绍可测过程的可选和可料投影，及有限变差过程的可选和可料对偶投影．作为这一理论的应用，我们将证明极其重要的上鞅的 Doob-Meyer 分解定理．最后，作为随机过程一般理论的一个典型的具体例子，我们详细讨论离散型流．

在本章，我们总假定$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一完备概率空间，流$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$满足通常条件，除非另有说明．$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{F},P)$通常称为一个**带流概率空间**．

§1.　可测过程的投影

5.1 定理　设$X=(X_t)$为一可测过程，使得对一切停时T，$X_TI_{[T<\infty]}$关于$\mathscr{F}_T$为σ-可积[1]，则存在唯一的可选过程，记为${}^oX$，使得对一切停时T，有

$$\boldsymbol{E}[X_TI_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_T]={}^oX_TI_{[T<\infty]}\quad \text{a.s.}. \tag{1.1}$$

这时，我们说X的可选投影存在[2]，并称${}^oX$为X的**可选投影**．

证明　唯一性由系 4.11 得到，往证存在性．我们将证明分为以下四个步骤．

a) 设$X=\xi I[\![r,s[\![$，其中ξ为一有界(或可积)随机变量，$0\leqslant r<s<+\infty$. 令${}^oX=YI_{[\![r,s[\![}$，其中$Y=(Y_t)$为鞅$(\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_t])$的右连左极适应修正(参见 2.48)．显然，${}^oX$可选．由定理 2.58 易见${}^oX$满

1) 由定理 1.16 易见，这一条件等价于表面上较弱的条件：对一切有界停时T，X_T关于$\mathscr{F}_T$为σ-可积．

2) 严格地说，应说X的可选投影存在且有穷．因为由定理的证明可看出，如果允许${}^oX$取$+\infty$，则一切非负可测过程的可选投影都"存在"．但我们只考虑有限值过程，于是说${}^oX$存在，本身就意味着${}^oX$是有限值的．

足(1.1),即^oX 为 X 的可选投影.

b) 设 X,Y 为两个可测过程. 若 X,Y 分别有可选投影$^oX,^oY$,则对任意实数 $\lambda,\beta,\lambda X+\beta Y$ 有可选投影 $\lambda^oX+\beta^oY$. 此外,若 $X\leqslant Y$,则$^oX\leqslant{}^oY$(定理 4.10). 若$(X^{(n)})$为一非负可测过程的上升列,对每个 n,$X^{(n)}$的可选投影存在,且极限过程 $X=\lim\limits_n X^{(n)}$有界,则 X 的可选投影存在,且$^oX=\lim\limits_n{}^o(X^{(n)})$. 由 a)及单调类定理知,一切有界可测过程的可选投影存在.

c) 设 X 为一满足定理条件的非负可测过程. 令 $X^{(n)}=X\wedge n$. 由 b),$X^{(n)}$的可选投影存在,$^o(X^{(n)})$单调增(在一不足道集之外). 设 T 为一停时,则$(^oX_T^{(n)}I_{[T<\infty]})$单调增(在一零概集之外). 由定理 1.19,我们有

$$E[X_TI_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_T]=\lim_{n\to\infty}E[X_T^{(n)}I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_T]$$

$$=\lim_{n\to\infty}{}^oX_T^{(n)}I_{[T<\infty]}.$$

令 $Y=\limsup\limits_{n\to\infty}{}^oX^{(n)}$,$^oX=YI_{[Y<\infty]}$,则$^oX$ 可选,且对一切停时 T,有

$$^oX_TI_{[T<\infty]}=Y_TI_{[T<\infty]}=\lim_{n\to\infty}{}^oX_T^{(n)}I_{[T<\infty]}$$

$$=E[X_TI_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_T]\quad \text{a.s.}.$$

故^oX 满足(1.1),即^oX 为 X 的可选投影.

d) 设 X 为一满足定理条件的可测过程,则 $X^+=X\vee 0$,$X^-=-(X\wedge 0)$也满足定理条件. 由 c),$^o(X^+)$及$^o(X^-)$存在. 易见,$^oX=^o(X^+)-^o(X^-)$为 X 的可选投影. □

注 由定理知,若 X 为循序可测过程,则 X 的可选投影存在,且对一切有穷停时 T,$X_T={}^oX_T$ a.s.. 特别,^oX 为 X 的可选修正.

5.2 定理 设 $X=(X_t)$为一可测过程,使得对一切可料时 T,$X_TI_{[T<\infty]}$关于 $\mathscr{F}_{T-}$ 为 σ-可积,则存在唯一的可料过程,记为^pX,使得对一切可料时 T,有

$$E[X_TI_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]={}^pX_TI_{[T<\infty]}\quad \text{a.s.}.\tag{2.1}$$

这时,我们说 X 的可料投影存在,并称^pX 为 X 的**可料投影**.

证明 设 $X=\xi I_{[r,s[}$,其中 ξ 为一有界(或可积)随机变量,0

$\leqslant r<s<+\infty$. 令 $Y=(Y_t)$ 为鞅 $(E[\xi|\mathscr{F}_t])$ 的右连左极适应修正，及 ${}^pX=Y_-$，则 ${}^pX$ 可料，且满足(2.1)(定理 4.41)，即 ${}^pX$ 是 X 的可料投影. 其余的证明与定理 5.1 完全类似. □

5.3 注 1) 若 X 为一致可积右连左极鞅，则 X_- 为 X 的可料投影.

2) 假设可测过程 X 的可选投影存在. 由系 4.11 可知，为了证明一可选过程 Y 是 X 的可选投影，只需对一切有界停时 T，验证如下等式：

$$E[X_T|\mathscr{F}_T]=Y_T \text{ a.s.}.$$

如果进一步假定对一切停时 T，$X_T I_{[T<\infty]}$ 可积，则由系 4.13 知，只需对一切停时 T，验证如下等式：

$$E[X_T I_{[T<\infty]}]=E[Y_T I_{[T<\infty]}].$$

对可料投影有类似的结论.

下列定理表明，投影与条件期望在性质上有相似之处.

5.4 定理 设 X 为一可测过程，Y 为一可选(可料)过程. 若 X 的可选(可料)投影存在，则 XY 的可选(可料)投影存在，且 ${}^o(XY)=({}^oX)Y$ (${}^p(XY)=({}^pX)Y$).

证明 由定理 1.21 即得. □

5.5 定理 设 X 为一可测过程. 如果 X 的可选及可料投影都存在，则 ${}^oX$ 的可料投影也存在，且 ${}^p({}^oX)={}^pX$. 此外，$[{}^oX\neq{}^pX]$ 与一稀疏集无区别.

证明 第一个结论由定理 1.22 即得，往证第二个结论. 设 $X=\xi I_{[r,s[}$，其中 ξ 为一有界(或可积)随机变量，$0\leqslant r<s<+\infty$. 令 Y 为鞅 $(E[\xi|\mathscr{F}_t])$ 的右连左极适应修正，则

$$[{}^oX\neq{}^pX]=[Y\neq Y_-].$$

我们早已知道 $[Y\neq Y_-]$ 为稀疏集，故 $[{}^oX\neq{}^pX]$ 与稀疏集无区别. 按惯例，由单调类定理可得一般的结论. □

5.6 定理 设 T 为一停时，ξ 为一实值随机变量. 令

$$X=\xi I_{[\![T,\infty[\![},\quad Y=\xi I_{]\!]T,\infty[\![},\quad Z=\xi I_{[\![T]\!]}.$$

1) X 的可选投影存在当且仅当 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ 为 σ-可积.

2）设 T 为可料时，则 X 的可料投影存在当且仅当 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{T-}$ 为 σ-可积．

3）若 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ 为 σ-可积，则 Y 的可料投影存在，而 Z 有可选投影：

$$^{o}Z = E[\xi I_{[T<\infty]} | \mathscr{F}_T] I_{[\![T]\!]}.$$

4）若 T 为可料时，$\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{T-}$ 为 σ-可积，则 Z 的可料投影存在，且

$$^{p}Z = E[\xi I_{[T<\infty]} | \mathscr{F}_{T-}] I_{[\![T]\!]}.$$

证明 我们只证 1)，其余的证明完全类似，设 S 为一停时，显然有

$$X_S I_{[S<\infty]} = \xi I_{[T\leqslant S<\infty]}.$$

若 X 的可选投影存在，则 $X_T I_{[T<\infty]} = \xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ 为 σ-可积．反之，设 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ 为 σ-可积．令 $A_n \in \mathscr{F}_T$，$A_n \uparrow \Omega$，使得每个 $\xi I_{[T<\infty]} I_{A_n}$ 可积．置

$$\Omega_n = (A_n[T \leqslant S]) \cup [S < T],$$

则 $\Omega_n \in \mathscr{F}_S$，$\Omega_n \uparrow \Omega$，且 $X_S I_{[S<\infty]} I_{\Omega_n} = \xi I_{A_n} I_{[T\leqslant S<\infty]}$ 可积，故 $X_S I_{[S<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_S$ 为 σ-可积，即 X 的可选投影存在． □

5.7 定理 设 X 为一可测过程．若 X 的可选(可料)投影存在，则对一切停时(可料时)T，X^T 的可选(可料)投影存在，且

$$(^{o}X) I_{[\![0,T]\!]} = {}^{o}(X^T) I_{[\![0,T]\!]}$$

$$((^{p}X) I_{[\![0,T]\!]} = {}^{p}(X^T) I_{[\![0,T]\!]}). \tag{7.1}$$

证明 我们有

$$X^T = X I_{[\![0,T]\!]} + X_T I_{[T<\infty]} I_{]\!]T,\infty[\![}.$$

由定理 5.4 及 5.6 即知，X^T 的可选(可料)投影存在．(7.1)易由定理 5.4 得到，因为 $X^T I_{[\![0,T]\!]} = X I_{[\![0,T]\!]}$． □

注 若 X 的可选及可料投影都存在，则对一切停时 T，X^T 的可料投影也存在．事实上，

$$X^T = X I_{[\![0,T]\!]} + X_T I_{[T<\infty]} I_{]\!]T,\infty[\![},$$

X^T 的可料投影的存在性由定理 5.4 及 5.6 可得．

5.8 定理 1)设 X 为一可测过程,(T_n) 为一列停时(可料时),使得 $\sup_n T_n=+\infty$. 若对每个 n,$XI_{[\![0,T_n[\![}$ 的可选(可料)投影存在,则 X 的可选(可料)投影存在.

2) 设 X 为一可测过程,(T_n) 为一列停时,使得 $\sup_n T_n=+\infty$. 若对每个 n, $XI_{[\![0,T_n]\!]}$ 的可料投影存在,则 X 的可料投影存在.

证明 我们只证 2),1)的证明类似. 设 S 为一可料时,令 $\Omega_n=[S\leqslant T_n]\cup[S=\infty]$,则 $\Omega_n\in\mathscr{F}_{S-}$, $\bigcup_n\Omega_n=\Omega$ a.s.,且

$$X_S I_{[S<\infty]}I_{\Omega_n}=X_S I_{[S\leqslant T_n]}I_{[S<\infty]}.$$

依假定, $X_S I_{[S\leqslant T_n]}I_{[S<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{S-}$ 为 σ-可积,由定理 1.23 知, $X_S I_{[S<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{S-}$ 为 σ-可积,即 X 的可料投影存在. □

5.9 定理 设 T 为一停时,ξ 为一可积随机变量.

1) $X=\xi I_{[\![0,T[\![}$ 与 $Y=\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]I_{[\![0,T[\![}$ 有相同的可选投影.

2) $\overline{X}=\xi I_{[\![0,T]\!]}$ 与 $\overline{Y}=\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]I_{[\![0,T]\!]}$ 有相同的可料投影.

证明 1) 设 S 为一停时,我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[X_S I_{[S<\infty]}]&=\boldsymbol{E}[\xi I_{[S<T]}]\\&=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]I_{[S<T]}]\\&=\boldsymbol{E}[Y_S I_{[S<\infty]}].\end{aligned}$$

由注 5.3.2),X 与 Y 有相同的可选投影.

2) 设 S 为一可料时,我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[\overline{X}_S I_{[S<\infty]}]&=\boldsymbol{E}[\xi I_{[S\leqslant T]}I_{[S<\infty]}]\\&=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]I_{[S\leqslant T]}I_{[S<\infty]}]\\&=\boldsymbol{E}[\overline{Y}_S I_{[S<\infty]}].\end{aligned}$$

故 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 有相同的可料投影. □

注 显然,$\xi I_{[\![0,T]\!]}$ 与 $\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_T]I_{[\![0,T]\!]}$ 有相同的可选投影.

§2. 增过程的对偶投影

首先,我们研究增过程产生的 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 上的测度.

5.10 定义 设 A 为一增过程. 在 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 上定义一集函

数 μ_A 如下：

$$\mu_A(H) = E\left[\int_{\mathbf{R}_+} I_H(\cdot, s) dA_s(\cdot)\right], H \in \mathscr{F} \times \mathscr{B}(\mathbf{R}_+), \tag{10.1}$$

则 μ_A 为一测度[1]．令

$$T_n = \inf\{t \geq 0;\ A_t \geq n\}.$$

则 T_n 为随机变量，$[\![0, T_n[\![\in \mathscr{F} \times \mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$，$\bigcup_n [\![0, T_n[\![= \Omega \times \mathbf{R}_+$，且 $\mu_A([\![0, T_n[\![) \leq n$，于是 μ_A 为 $\mathscr{F} \times \mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$ 上的 σ-有限测度，称为**由 A 产生的测度**．

由(10.1)易见，μ_A 在不足道集上无负荷，即对一切不足道集 H，$\mu_A(H) = 0$，且对一切 $t \geq 0$，$F \in \mathscr{F}$，有

$$\mu_A(F \times [0, t]) = E[I_F A_t]. \tag{10.2}$$

5.11 定理　为要 $\mathscr{F} \times \mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$ 上一测度 μ 是由某个增过程产生的，必须且只需对每个 $t \geq 0$，如下定义的 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的集函数 Q_t：

$$Q_t(F) = \mu(F \times [0, t]),\ F \in \mathscr{F}, \tag{11.1}$$

为关于 P 绝对连续的 σ-有限测度．这时，产生 μ 的增过程是唯一确定的．

证明　必要性显然(见(10.2))，往证充分性．令 A'_t 为 Radon-Nikodym 导数 $\frac{dQ_t}{dP}$．当 $s < t$ 时，有 $A'_s \leq A'_t$ a.s.．设 $t_k \downarrow t$．对一切 n，令 $F_n = [A'_{t_1} \leq n]$，则

$$\lim_{k \to \infty} E[I_{F_n}(A'_{t_k} - A'_t)] = \lim_{k \to \infty} \mu(F_n \times]t, t_k]) = 0.$$

由于 $\bigcup_n F_n = \Omega$，故 $\lim_k A'_{t_k} = A'_t$ a.s.．令

$$A_t = \inf\{A'_r;\ r > t,\ r \in \mathbf{Q}_+\},\ t \geq 0.$$

则对一切 $t \geq 0$，有 $A_{t+} = A_t$，且 $A_t = A'_t$ a.s.．必要的话，在一零概集上修改轨道，我们可认为 A 是增过程，且对一切 $F \in \mathscr{F}$，有

$$\mu(F \times [0, t]) = Q_t(F) = \int_F A_t dP = E[I_F A_t]$$

---

1)　今后"测度"指非负测度．

$$= E\left[\int_{[0,\infty[} I_{F\times[0,t[}(\cdot,s)dA_s(\cdot)\right].$$

这表明 μ 是由 A 产生的.

若 $B=(B_t)$ 是另一产生 μ 的增过程,则 $B_t=\frac{dQ_t}{dP}$ a.s.,因而 B 与 A 等价. 由于 A,B 是右连续的,故它们无区别.□

5.12 定义 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 上的在不足道集上无负荷的测度 μ 称为可选的(可料的),若对一切非负有界可测过程 X[1)]

$$\mu(X)=\mu^0(X)\quad(\mu(X)=\mu({}^pX)),$$

其中 $\mu(X)=\int Xd\mu=E_\mu[X]$.

注 设 X 为有界可测过程. 由定理 5.4,对一切有界可选(可料)测度 μ,有 ${}^0X=E_\mu[X|\mathscr{O}]$(${}^pX=E_\mu[X|\mathscr{P}]$).

5.13 定理 设 A 为一增过程,μ_A 为由 A 产生的 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 上的测度,则为要 μ_A 是可选的(可料的),必须且只需 A 是适应的(可料的).

证明 充分性. 设 A 适应,$C=(C_t)$ 为与 A 相联系的时变(见定理 3.48). 设 X 为一非负有界可测过程. 由引理 1.38,定理 5.1 及 Fubini 定理,我们有

$$E\left[\int_{[0,\infty[} X_s dA_s\right]=E\left[\int_0^\infty X_{C_s}I_{[C_s<\infty]}ds\right]$$
$$=\int_0^\infty E[X_{C_s}I_{[C_s<\infty]}]ds$$
$$=\int_0^\infty E[{}^0X_{C_s}I_{[C_s<\infty]}]ds$$
$$=E\left[\int_{[0,\infty[} {}^0X_s dA_s\right].$$

这正是 $\mu_A(X)=\mu_A({}^0X)$,故 μ_A 可选.

设 A 可料,则对一切 $t\geqslant 0$,C_{t-} 为可料时(定理 3.48). 同样地,由引理 1.38,定理 5.2 及 Fubini 定理,我们有 $\mu_A(X)=\mu({}^pX)$,即

---

1) 事实上,只需对形如 $X=I_H$ 的过程满足条件即够了,这里 $H\in\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$.

μ_A 可料.

必要性. 设 μ_A 可选. 取 $X = I_F I_{[0,t]}$, 其中 $F \in \mathscr{F}$. X 与 $\boldsymbol{E}[I_F|\mathscr{F}_t]I_{[0,t]}$ 有相同的可选投影, 故

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}[A_t I_F] &= \mu_A(X) = \mu_A({}^o X) \\ &= \boldsymbol{E}[A_t E[I_F|\mathscr{F}_t]] \\ &= \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[A_t|\mathscr{F}_t]\boldsymbol{E}[I_F|\mathscr{F}_t]] \\ &= \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[A_t|\mathscr{F}_t]I_F]. \end{aligned}$$

所以 $A_t = \boldsymbol{E}[A_t|\mathscr{F}_t]$ a.s., 即 A 适应.

设 μ_A 可料. 对一切非负有界可测过程, X 与 ${}^oX$ 有相同的可料投影, 故 $\mu_A(X) = \mu_A({}^pX) = \mu_A({}^oX)$, 即 μ_A 可选, 从而 A 为适应过程. 往证 A 满足定理 4.33 中的条件. 设 S 为一绝不可及时. 显然, $I_{[S]}$ 的可料投影为 0. 由 μ_A 的可料性,

$$\boldsymbol{E}[\Delta A_S] = \mu_A(I_{[S]}) = \mu_A(0) = 0.$$

由于 $\Delta A_S \geqslant 0$, 故有 $\Delta A_S = 0$ a.s., 即 $\boldsymbol{P}([A_S \neq A_{S-}, S < \infty]) = 0$. 设 T 为一可料时, 取 $X = I_F I_{[0,T]}$, 其中 $F \in \mathscr{F}$. 由定理 5.9.2), X 与 $Y = \boldsymbol{E}[I_F|\mathscr{F}_{T-}]I_{[0,T]}$ 有相同的可料投影, 由 μ_A 的可料性,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}[I_F A_T] &= \mu_A(X) = \mu_A(Y) \\ &= \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[I_F|\mathscr{F}_{T-}]A_T] \\ &= \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[I_F|\mathscr{F}_{T-}]\boldsymbol{E}[A_T|\mathscr{F}_{T-}]] \\ &= \boldsymbol{E}[I_F \boldsymbol{E}[A_T|\mathscr{F}_{T-}]]. \end{aligned}$$

故 $A_T = \boldsymbol{E}[A_T|\mathscr{F}_{T-}]$ a.s., 即 $A_T \in \mathscr{F}_{T-}$. 由于 $T \in \mathscr{F}_{T-}$, 故 $A_T I_{[T<\infty]} \in \mathscr{F}_{T-}$. 由定理 4.33 知 A 可料. □

作为定理 5.13 的一个简单应用, 我们得到关于有限变差过程的 Radon-Nikodym 定理.

5.14 定理 设 A, B 为两个适应(可料)增过程, 则下列命题等价:

1) 对几乎所有 ω, $dB.(\omega) \ll dA.(\omega)$,

2) 在 $\mathscr{F} \times \mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 上, $\mu_B \ll \mu_A$,

3) 在 $\mathscr{O}(\mathscr{P})$ 上, $\mu_B \ll \mu_A$,

4) 存在非负可选(可料)过程 H，使得对几乎所有 ω，有

$$B_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega). \qquad (14.1)$$

证明 4)⇒1)显然. 1)⇒2)由绝对连续性的定义易得. 2)⇒3)亦显然. 最后证 3)⇒4). 令 H 为在 $\mathscr{O}(\mathscr{P})$ 上的 Radon-Nikodym 导数 $\frac{d\mu_B}{d\mu_A}$，则 H 可选(可料)且非负. 令

$$T_n = \inf\{ t \geqslant 0;\quad B_t \geqslant n\},$$

则

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{[0,T_n[} H_s(\omega) dA_s(\omega)\right] = \mu_B(⟦ 0,T_n ⟦) \leqslant n.$$ [1]

故 $\left(\int_{[0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega)\right)$ 为适应增过程，它产生的测度与 $(B_t(\omega))$ 产生的测度相同，从而与 (B_t) 无区别，即(14.1)成立. □

5.15 定理 设 A,B 为两个适应(可料)增过程，则下列命题等价:

1) 对几乎所有 ω，$dA.(\omega) \perp dB.(\omega)$，

2) 在 $\mathscr{O}(\mathscr{P})$ 上，$\mu_A \perp \mu_B$，

3) 在 $\mathscr{F} \times \mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 上，$\mu_A \perp \mu_B$，

4) 存在 $D \in \mathscr{O}(\mathscr{P})$，使得对几乎所有 ω，有

$$\int_{[0,\infty[} I_D(\omega,s) dA_s(\omega) = 0,$$

$$\int_{[0,\infty[} I_{D^c}(\omega,s) dB_s(\omega) = 0.$$

证明 2)⇔4)⇒3) 显然.

3)⇒1). 存在 $J \in \mathscr{F} \times \mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，使得

$$\mu_A(J) = \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty)} I_J(\omega,s)) dA_s(\omega)\right] = 0,$$

$$\mu_B(J^c) = \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty)} I_{J^c}(\omega,s) dB_s(\omega)\right] = 0.$$

因此，对几乎所有 ω，有

---

1) 今后，在积分号下，我们用单括号表示随机区间，例如用 $[S,T[$ 表示 $⟦ S,T ⟦$.

$$\int_{[0,\infty[} I_J(\omega,s)dA_s(\omega) = 0,$$

$$\int_{[0,\infty[} I_{J^c}(\omega,s)dB_s(\omega) = 0,$$

即 $dA.(\omega) \perp dB.(\omega)$.

1)⇒2). 令 $C=A+B$，则由定理 5.14，存在非负可选(可料)过程 H 及 K，使得对几乎所有 ω，有

$$A_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega)dC_s(\omega),$$

$$B_t(\omega) = \int_{[0,t]} K_s(\omega)dC_s(\omega),$$

且 $H+K=1$，$HK=0$. 取 $J=[H=0]$，则 $J\in\mathcal{O}(\mathscr{P})$，$J^c=[K=0]$，

$$\mu_A(J) = 0, \quad \mu_B(J^c) = 0,$$

即在 $\mathcal{O}(\mathscr{P})$ 上，$\mu_A \perp \mu_B$. □

注 设 A,B 为两个适应(可料)有限变差过程. 若对几乎所有 ω，$|dB.(\omega)| \ll |dA.(\omega)|$，则存在可选(可料)过程 H，使得对几乎所有 ω，有

$$B_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega)dA_s(\omega),\ t \geqslant 0.$$

事实上，对 A^+，A^- 及 $C=\left(\int_{[0,t]}|dA_s|\right)$ 应用定理 5.14 及 5.15 可知，存在可选(可料)过程 L，使得 $A=L.C$ 及 $|L|=1$. 这时有 $L.A=L^2.C=C$. 对 B^+，B^- 及 C 应用定理 5.14 可知，存在可选(可料)过程 K，使得 $B=K.C$. 最后，$B=H.A$，其中 $H=KL$.

5.16 定理 1) 设 A 为一适应增过程，S，T 为两个停时，$S\leqslant T$，则对任一存在可选投影的非负可测过程 X，有

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{[S,T[} X_s dA_s \,|\, \mathscr{F}_S\right] = \boldsymbol{E}\left[\int_{[S,T[} {}^oX_s dA_s \,|\, \mathscr{F}_S\right]. \quad (16.1)$$

2) 设 A 为一可料增过程，S，T 为两可料时，$S\leqslant T$，则对任一存在可料投影的非负可测过程 X，有

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{[S,T[} X_s dA_s \,|\, \mathscr{F}_{S-}\right] = \boldsymbol{E}\left[\int_{[S,T[} {}^pX_s dA_s \,|\, \mathscr{F}_{S-}\right]. \quad (16.2)$$

证明 我们只证 2)，1)的证明类似．设 $F\in\mathscr{F}_S$，则 $F\in\mathscr{F}_{T-}$，S_F 及 T_F 为可料时，$[\![S_F,T_F[\![$ 为可料集．我们有(定理 5.4 及 5.13)

$$E\left[\left(\int_{[S,T[}X_s dA_s\right)I_F\right]=E\left[\int_{[0,\infty[}I_{[\![S_F,T_F[\![}(\cdot,s)X_s dA_s\right]$$
$$=E\left[\int_{[0,\infty[}I_{[\![S_F,T_F[\![}(\cdot,s)^pX_s dA_s\right]$$
$$=E\left[\left(\int_{[S,T[}{}^pX_s dA_s\right)I_F\right].$$

故得(16.2)． □

注 1)若在(16.1)及(16.2)中，$[S,T[$代之以$]S,T[$，或$]S,T]$，或$[S,T]$，等式仍成立．

2) 若 S,T 为两个停时，则(16.2)对$]S,T]$成立；若 S 为可料时，T 为停时，则(16.2)对$[S,T]$成立；若 S 为停时，T 为可料时，则(16.2)对$]S,T[$成立．

下面我们定义测度的投影，这是研究增过程的对偶投影必需的基础．

5.17 定义 设 μ 为 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$上的一 σ-有限测度，且在不足道集上无负荷．对任一非负有界可测过程 X，令

$$\mu^o(X)=\mu({}^oX),\quad \mu^p(X)=\mu({}^pX),$$

则 μ^o 及 μ^p 分别为 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$上的可选及可料测度，且在不足道集上无负荷(但不一定 σ-有限)．我们分别称 μ^o 及 μ^p 为 μ 的**可选投影及可料投影**．

显然，μ 与 μ^o 限于可选 σ-域 $\mathscr{O}$ 一致，μ 与 μ^p 限于可料 σ-域 $\mathscr{P}$ 一致．此外，为了 μ 为 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$上的可选(可料)测度，必须且只需 $\mu=\mu^o(\mu=\mu^p)$．

5.18 定义 设 A 为一增过程．称 A 为**可积增过程**，如果 $A_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}A_t$ 为一可积随机变量．称 A 为**局部可积增过程**，如果 A_0 关于 $\mathscr{F}_0$ 为 σ-可积，且存在停时 $T_n\uparrow\infty$ a.s.，使得 $A_{T_n}-A_0$ 为可积．称 A 为**准局部可积增过程**，如果存在停时 $T_n\uparrow\infty$ a.s.，使得对一

切 n，$A_{T_n} I_{[T_n>0]}$ 为可积．

显然，局部可积增过程为准局部可积的．事实上，只需考虑 $A_t=A_0$，$t\geqslant 0$ 这一情形，其中 A_0 关于 $\mathscr{F}_0$ 为 σ-可积．令 $E_n\in\mathscr{F}_0$，使得 $E_n\uparrow\Omega$，且每个 $A_0 I_{E_n}$ 为可积．置 $T_n=(+\infty)I_{E_n}$，则 $T_n\uparrow\infty$，$A_{T_n} I_{[T_n>0]}=A_0 I_{E_n}$，故 A 为准局部可积．

设 A 为一有限变差过程，令 $V_t=\int_{[0,t]}|dA_s|$．若 $V=(V_t)$ 为可积增过程，称 A 为**可积变差过程**；若 V 为(准)局部可积增过程，称 A 为(准)**局部可积变差过程**．

显然，为了一有限变差过程 A 为可积变差过程，必须且只需 A 为两个可积增过程之差．对(准)局部可积变差过程也有类似的结论．

5.19 定理 适应有限变差过程为准局部可积变差过程．可料有限变差过程为局部可积变差过程．

证明 只需对增过程证明．设 A 为适应增过程．令

$$T_n=\inf\{t\geqslant 0:\ A_t\geqslant n\},$$

则 T_n，$n\geqslant 1$，为停时，$T_n\uparrow+\infty$，且 $A_{T_n-} I_{[T_n>0]}\leqslant n$，故 A 为准局部可积．如果 A 为可料增过程，则 T_n 为可料时，无妨设 $A_0=0$．这时 $T_n>0$．对每个 n，令 $(S_{n,k})_{k\geqslant 1}$ 为预报 T_n 的停时列，并令 $S_n=\bigvee_{i=1}^{n} S_{i,n}$．则 $S_n<T_n$，$S_n\uparrow+\infty$，且 $A_{S_n}\leqslant n$．故 A 为局部可积．□

5.20 定理 设 μ 为一增过程 A 在 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 上产生的测度，μ^o 及 μ^p 分别为 μ 的可选及可料投影．

1) 为要 μ^o 为一(适应)增过程产生，必须且只需 A 为准局部可积．

2) 为要 μ^p 为一(可料)增过程产生，必须且只需 A 为局部可积．

证明 1) 必要性．设 μ^o 由增过程 A^o 产生．由定理 5.13，A^o 适应．令

$$T_n=\inf\{t\geqslant 0;\ A_t^o\geqslant n\},$$

则 T_n, $n\geqslant 1$, 为停时, $T_n\uparrow+\infty$, 且 $A^0_{T_n}I_{[T_n>0]}\leqslant n$. 于是

$$\begin{aligned}E[A_{T_n}I_{[T_n>0]}]&=\mu(\llbracket 0,T_n\llbracket)\\&=\mu^0(\llbracket 0,T_n\llbracket)\\&=E[A^0_{T_n}I_{[T_n>0]}]\leqslant n.\end{aligned}$$

这表明 A 为准局部可积.

充分性. 设 A 为准局部可积. 令停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得对一切 n, $E[A_{T_n}I_{[T_n>0]}]<\infty$. 令 $Q_t(F)=\mu^0(F\times[0,t])$, $F\in\mathscr{F}$. 记 $F_n=[T_n>t]$, 则 $\bigcup\limits_n F_n=\Omega$. $F_n\times[0,t]=\llbracket 0,T_n\llbracket$, $Q_t(F_n)\leqslant\mu^0(\llbracket 0,T_n\llbracket)=E[A_{T_n}I_{[T_n>0]}]<\infty$. 于是, Q_t 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的 σ-有限测度. 令 $F\in\mathscr{F}$, 且 $P(F)=0$, 则 $F\times[0,t]$ 为可料集, $Q_t(F)=\mu^0(F\times[0,t])=\mu(F\times[0,t])=E[I_FA_t]=0$. 这表明 Q_t 关于 P 为绝对连续. 由定理 5.11 知, μ^0 由一增过程产生. 再由定理 5.13, 这增过程为适应的.

2) 必要性. 设 μ^p 由增过程 A^p 产生. 由定理 5.13, A^p 可料. 令 $F_n=[A^p_0\leqslant n]$, 则 $F_n\in\mathscr{F}_0$, $F_n\uparrow\Omega$, 且

$$\begin{aligned}E[A_0I_{F_n}]&=\mu(F_n\times\{0\})=\mu^p(F_n\times\{0\})\\&=E[A^p_0I_{F_n}]\leqslant n.\end{aligned}$$

故 A_0 关于 $\mathscr{F}_0$ 为 σ-可积. 由于 A^p 局部可积(定理 5.19), 取停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得对每个 n, $A^p_{T_n}-A^p_0$ 可积. 于是

$$\begin{aligned}E[A_{T_n}-A_0]&=\mu(\rrbracket 0,T_n\rrbracket)=\mu^p(\rrbracket 0,T_n\rrbracket)\\&=E[A^p_{T_n}-A^p_0]<+\infty.\end{aligned}$$

这表明 A 局部可积.

充分性. 设 A 局部可积. 令

$$B_t=A_0,\ B^p_t=E[A_0|\mathscr{F}_0],\ t\geqslant 0.$$

显然, μ^p_B 由可料增过程 B^p 产生. 于是不妨设 $A_0=0$(否则考虑 $A-A_0$). 与 1)中充分性的证明相类似, 可证 $Q_t(F)=\mu^p(F\times[0,t])$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的 σ-有限测度, 关于 P 为绝对连续. 再由定理 5.11 及 5.13, μ^p 由一可料增过程产生. □

定理5.20导致如下的定义.

5.21定义 设A为一准局部可积增过程，μ为A在$\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$上产生的测度，$\mu^o$为$\mu$的可选投影. 由定理5.20，存在唯一的适应增过程A^o，使得μ^o由A^o产生. 我们称A^o为A的**可选对偶投影**(注意：由定理5.9，A的可选投影^oA也存在，但^oA一般不再是增过程). 设A为局部可积增过程，μ为由A产生的$\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$上的测度，$\mu^p$为$\mu$的可料投影. 由定理5.20，存在唯一的可料增过程A^p，使得μ^p由A^p产生. 我们称A^p为A的**可料对偶投影**(这里，由定理5.9，A的可料投影^pA也存在，但^pA一般不再是增过程).

设A为(准)局部可积变差过程，将A表为两个(准)局部可积增过程A_1与A_2之差：$A=A_1-A_2$，并令$(A^o=A_1^o-A_2^o)A^p=A_1^p-A_2^p$. 容易证明$(A^o)A^p$与$A$的具体分解无关，称$(A^o)A^p$为$A$的**(可选)可料对偶投影**. 若$A$适应，$A$的可料对偶投影也称为$A$的**补偿子**.

5.22定理 1)设A为一准局部可积变差过程，则对任一可选过程H，有

$$E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s^o|\right]\leqslant E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s|\right]. \quad (22.1)$$

2) 设A为一局部可积变差过程，则对任一可料过程H，有

$$E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s^p|\right]\leqslant E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s|\right]. \quad (22.2)$$

证明 只证1)，2)的证明类似. 令

$$A_t^+=\frac{1}{2}\left[\int_{[0,t]}|dA_s|+A_t\right],$$

$$A_t^-=\frac{1}{2}\left[\int_{[0,t]}|dA_s|-A_t\right],$$

则$A=A^+-A^-$，A^+及A^-为准局部可积增过程. 由于$A^o=(A^+)^o-(A^-)^o$，我们有

$$E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s^o|\right]$$

$$\leqslant E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|d(A^+)_s^0\right]+E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|d(A^-)_s^0\right]$$

$$=E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|dA_s^+\right]+E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|dA_s^-\right]$$

$$=E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s|\right].\quad\square$$

5.23 定理 1)设 A 为一准局部可积变差过程,H 为一可选过程,使得 $H.A$ 为一准局部可积变差过程,则 $H.A^0$ 为一适应有限变差过程,且有 $(H.A)^0=H.A^0$.

2)设 A 为一局部可积变差过程,H 为一可料过程,使得 $H.A$ 为一局部可积变差过程,则 $H.A^p$ 为一可料有限变差过程,且有 $(H.A)^p=H.A^p$.

证明 我们只证 1). 令停时 $T_n\uparrow+\infty$,使得

$$E\left[\int_{[\![0,\infty[\![}|H_s|I_{[\![0,T_n[\![}(\cdot,s)|dA_s|\right]$$

$$=E\left[\int_{[0,T_n[}|H_s||dA_s|\right]<+\infty,$$

则由(22.1)知,H关于A^0可积.由定理3.46.1),$H.A^0$为适应的.无妨假定 A 为增过程,且 H 非负,则对一切非负有界可测过程 X,我们有

$$\mu_{(H.A)^0}(X)=\mu_{H.A}^0(X)=\mu_{H.A}({}^0X)=\mu_A({}^0(HX))$$

$$=\mu_A^0(HX)=\mu_{A^0}(HX)=\mu_{H.A^0}(X).$$

这表明 $(H.A)^0=H.A^0$. $\square$

5.24 系 1)设 A 为一(准)局部可积变差过程,则对任一停时 T,我们有 $((A^T)^0=(A^0)^T)$ $(A^T)^p=(A^p)^T$.

2)设 A 为一局部可积变差过程,则对任一可料时 T,我们有 $(A^{T-})^p=(A^p)^{T-}$,这里 $A^{T-}=AI_{[\![0,T[\![}+A_{T-}I_{[\![T,\infty[\![}$.

证明 在定理5.23中令 $H=I_{[\![0,T]\!]}(I_{[\![0,T[\![})$ 即得 1)(2)). $\square$

5.25 定理 1)设 A 为一适应有限变差过程,H 为一存在可选投影的可测过程,使得 $H.A$ 为准局部可积变差过程,则${}^0H$ 关于 A 可积,且 $(H.A)^0=({}^0H).A$.

2）设 A 为一可料有限变差过程，H 为一存在可料投影的可测过程，使得 $H.A$ 为局部可积变差过程，则 ${}^pH$ 关于 A 可积，且 $(H.A)^p=({}^pH).A$.

证明 我们只证 1）. 令停时 $T_n\uparrow+\infty$，使得 $E\left[\int_{[0,T_n]}|H_s||dA_s|\right]<+\infty$. 由于 $|{}^oH|\leqslant{}^o(|H|)$，故

$$E\left[\int_{[0,T_n]}|{}^oH_s||dA_s|\right]\leqslant E\left[\int_{[0,T_n]}({}^o|H|)_s|dA_s|\right]$$

$$=E\left[\int_{[0,T_n]}|H_s||dA_s|\right]<+\infty.$$

从而 ${}^oH$ 关于 A 可积. 不妨假定 A 为增过程且 H 非负，则对一切非负有界可测过程 X，我们有（注意：$\mu_A=\mu_A^o$，${}^o({}^oHX)={}^o(H{}^oX)={}^oH{}^oX$）

$$\mu_{(H.A)^o}(X)=\mu_{H.A}({}^oX)=\mu_A(H{}^oX)$$
$$=\mu_A({}^oHX)=\mu_{{}^oH.A}(X).$$

这表明 $(H.A)^o={}^oH.A$. □

注 实际上，定理 5.23 及 5.25 可以统一在如下更一般的结果之中：设 A 为一（准）局部可积变差过程，H 为一可测过程，使得 $H.A$ 为（准）局部可积变差过程，则存在（可选）可料过程 K，使得 $((H.A)^o=K.A^o)$ $(H.A)^p=K.A^p$. 此外有 $(K=E_{\mu_A}[H|\mathscr{O}])$ $K=E_{\mu_A}[H|\mathscr{P}]$.

我们考虑准局部可积情形. 由于 $\mu_{H.A}$ 在 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 上关于 μ_A 绝对连续，且 $\frac{d\mu_{H.A}}{d\mu_A}=H$. 又由于 $\mu_{H.A}$ 限于可选 σ-域 $\mathscr{O}$ 为 σ-有限，故 H 对于 $|\mu_A|$ 关于 $\mathscr{O}$ 为 σ-可积，且有

$$\frac{d\mu_{H.A}}{d\mu_A}\Big|_{\mathscr{O}}=E_{\mu_A}[H|\mathscr{O}].$$

记 $K=E_{\mu_A}[H|\mathscr{O}]$，则 $(H.A)^o=K.A^o$. 此外，若 H 可选或者 A 适应且 H 有可选投影，则易见 $K={}^oH$ $|\mu_A|$-a.e.，于是得到定理 5.23 及 5.25.

5.26 定理 1）设 A 为一准局部可积变差过程，S、T 为两个

停时，且 $S\leqslant T$，则对一切存在可选投影的非负可测过程 X，有

$$E\left[\int_{[S,T[}{}^{o}X_s dA_s \mid \mathscr{F}_S\right]=E\left[\int_{[S,T[}X_s dA_s^o \mid \mathscr{F}_S\right]$$

$$=E\left[\int_{[S,T[}{}^{o}X_s dA_s^o \mid \mathscr{F}_S\right].\quad (26.1)$$

2) 设 A 为一局部可积变差过程，S,T 为两个可料时，且 $S\leqslant T$，则对一切存在可料投影的非负可测过程 X，有

$$E\left[\int_{[S,T[}{}^{p}X_s dA_s \mid \mathscr{F}_{S-}\right]=E\left[\int_{[S,T[}X_s dA_s^p \mid \mathscr{F}_{S-}\right]$$

$$=E\left[\int_{[S,T[}{}^{p}X_s dA_s^p \mid \mathscr{F}_{S-}\right].\quad (26.2)$$

证明　与定理 5.16 的证明完全类似，且也有与定理 5.16 类似的注． □

下一定理提供了计算对偶投影的跳的方法．

5.27 定理　1) 设 A 为一准局部可积变差过程，则 ΔA 有可选投影：${}^{o}(\Delta A)=\Delta A^{o}$，即对一切停时 T，有

$$\Delta A_T^o I_{[T<\infty]}=E[\Delta A_T I_{[T<\infty]} \mid \mathscr{F}_T]\quad \text{a.s.}.\qquad (27.1)$$

2) 设 A 为一局部可积变差过程，则 ΔA 有可料投影：${}^{p}(\Delta A)=\Delta A^{p}$，即对一切可料时 T，有

$$\Delta A_T^p I_{[T<\infty]}=E[\Delta A_T I_{[T<\infty]} \mid \mathscr{F}_{T-}]\quad \text{a.s.}.\qquad (27.2)$$

证明　我们只证 1)，并假设 A 为增过程．由定理 5.8 知，A 有可选投影．由于 $A_-\leqslant A$，A_- 也有可选投影，从而 ΔA 的可选投影存在．于是，对一切停时 T，$\Delta A_T I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ 为 σ-可积，并且对一切 $F\in\mathscr{F}_T$，有

$$E[\Delta A_T^o I_{[T<\infty]}I_F]=E\left[\int_{[0,\infty[}I_{[\![T_F]\!]}(\cdot,s)dA_s^o\right]$$

$$=E\left[\int_{[0,\infty[}I_{[\![T_F]\!]}(\cdot,s)dA_s\right]$$

$$=E[\Delta A_T I_{[T<\infty]}I_F],$$

即(27.1)成立． □

5.28 系　1) 设 A 为一准局部可积变差过程．若 A 连续，则 A^o 亦然．若 ΔA 有界，则 ΔA^o 亦然．

2）设 A 为一局部可积变差过程．若 A 连续，则 A^p 亦然，若 ΔA 有界，则 ΔA^p 亦然．

3）设 A 为一适应局部可积增过程，则 A^p 连续当且仅当 A 拟左连续（见定义 4.22）．

在下一定理中给出两个简单的对偶投影的例子．

5.29 定理 1）设 T 为一停时，ξ 为一实值随机变量．为要 $A=\xi I_{[T,\infty[}$ 为准局部可积变差过程，必须且只需 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ 为 σ-可积．这时 A 的可选对偶投影为

$$A^o = \boldsymbol{E}[\xi I_{[T<\infty]} \mid \mathscr{F}_T] I_{[T,\infty[}.$$

2）设 T 为一可料时，ξ 为一实值随机变量．为要 $A=\xi I_{[T,\infty[}$ 为局部可积变差过程，必须且只需 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{T-}$ 为 σ-可积．这时 A 的可料对偶投影为

$$A^p = \boldsymbol{E}[\xi I_{[T<\infty]} \mid \mathscr{F}_{T-}] I_{[T,\infty[}.$$

证明 我们只证 1)．必要性．令停时 $T_n \uparrow +\infty$，使得对每个 n，$\boldsymbol{E}[A_{T_n} I_{[T_n>0]}] < +\infty$．注意到 $A_{T_n} I_{[T_n>0]} = \xi I_{[T_n \geq T]}$．取 $F_n = [T=\infty] \cup [T_n > T] \in \mathscr{F}_T$，则 $F_n \uparrow \Omega$，且对每个 n，$\xi I_{[T<\infty]} I_{F_n} = A_{T_n} I_{[T_n>0]}$ 可积，故 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ 为 σ-可积．

充分性．无妨设 ξ 非负．令 μ_A 为 A 产生的测度，则对一切非负有界可测过程 X，有

$$\begin{aligned}
\mu_A({}^oX) &= \boldsymbol{E}[{}^oX_T \xi I_{[T<\infty]}] \\
&= \boldsymbol{E}[{}^oX_T I_{[T<\infty]} \boldsymbol{E}[\xi I_{[T<\infty]} \mid \mathscr{F}_T]] \\
&= \boldsymbol{E}[X_T I_{[T<\infty]} \boldsymbol{E}[\xi I_{[T<\infty]} \mid \mathscr{F}_T]] \\
&= \mu_B(X),
\end{aligned}$$

其中 $B = \boldsymbol{E}[\xi I_{[T<\infty]} \mid \mathscr{F}_T] I_{[T,\infty[}$．由于 B 适应，由定理 5.23 及定义 5.21 知，A 为准局部可积，且 $B = A^o$． □

最后，我们证一个今后有用的结果．

5.30 定理 设 A,B 为两个可积变差过程．

1）为了 A 与 B 有相同的可选对偶投影，必须且只需对一切停时 T，有

$$E[A_\infty - A_{T-}I_{[T>0]}] = E[B_\infty - B_{T-}I_{[T>0]}]. \quad (30.1)$$

（即$(A_\infty - A_{t-}I_{[t>0]})$与$(B_\infty - B_{t-}I_{[t>0]})$有相同的可选投影．）特别，若$A$与$B$为适应过程，则为了$A$与$B$无区别，必须且只需对一切停时$T$，(30.1)成立．

2）为了A与B有相同的可料对偶投影，必须且只需

$$E[A_0|\mathscr{F}_0] = E[B_0|\mathscr{F}_0] \quad \text{a.s.}, \quad (30.2)$$

且对一切停时T，有

$$E[A_\infty - A_T] = E[B_\infty - B_T] \quad (30.3)$$

（即$(A_\infty - A_t)$与$(B_\infty - B_t)$有相同的可料投影），或等价地，

$$E[A_0|\mathscr{F}_0] = E[B_0|\mathscr{F}_0] \quad \text{a.s.},$$

$$E[A_\infty - A_t|\mathscr{F}_t] = E[B_\infty - B_t|\mathscr{F}_t] \quad \text{a.s.}, \ t \geqslant 0. \quad (30.4)$$

特别，若A与B为可料过程，则为了A与B无区别，必须且只需$A_0 = B_0$ a.s.，且对一切停时T，(30.3)成立，或等价地，(30.4)成立．

证明 1）令μ_A及μ_B分别为A及B产生的测度，则(30.1)即为：对一切停时T，$\mu_A(〚T,\infty〚) = \mu_B(〚T,\infty〚)$．故必要性显然，往证充分性．令$\mathscr{C} = \{〚T,\infty〚: T\text{为停时}\}$，则$\mathscr{C}$为$\pi$-类，且产生可选$\sigma$-域（定理3.17）．此外，$\Omega\times\boldsymbol{R}_+ = 〚0,\infty〚 \in \mathscr{C}$．由(30.1)，$\mu_A$与$\mu_B$限于$\mathscr{C}$一致，故由单调类定理，$\mu_A$与$\mu_B$限于可选$\sigma$-域一致，从而$\mu_A$与$\mu_B$有相同的可选投影，即$A$与$B$有相同的可选对偶投影．

2）(30.3)即为：对一切停时T，$\mu_A(〛T,\infty〚) = \mu_B(〛T,\infty〚)$，而(30.2)即为：对一切$F\in\mathscr{F}_0$，$\mu_A(〚0_F〛) = \mu_B(〚0_F〛)$．令$\mathscr{C} = \{〚0_A〛: A\in\mathscr{F}_0\}\cup\{〛T,\infty〚: T\text{为停时}\}$，则$\mathscr{C}$为$\pi$-类，且产生可料$\sigma$-域（定理3.21）．同样地，若$\mu_A$与$\mu_B$限于$\mathscr{C}$一致，则限于$\mathscr{P}$一致．故$A$与$B$有相同的可料对偶投影当且仅当(30.2)及(30.3)成立．同理，令

$$\mathscr{C}' = \{〚0_A〛: A\in\mathscr{F}_0\}\cup\{B\times]t,\infty[: B\in\mathscr{F}_t, t\geqslant 0\},$$

则可证(30.4)也是一个充要条件． □

5.31 系 1) 设 A 为一(适应)可积变差过程, B 为一可料可积变差过程. 为要 B 为 A 的可料对偶投影, 必须且只需 $B_0=E[A_0|\mathscr{F}_0]$ 及 ${}^oA-B(A-B)$ 为一致可积鞅, 其中 ${}^oA$ 为 A 的可选投影.

2) 设 A 为一可积变差过程, 则 ${}^oA-A^o$ 为一致可积鞅.

证明 1) 对一切 $t\geqslant 0$, ${}^oA_t=E[A_t|\mathscr{F}_t]$ a.s.. 为要(30.4)成立, 必须且只需 $B_0=E[A_0|\mathscr{F}_0]$ a.s. 及对一切 $t\geqslant 0$,

$$ {}^oA_t - B_t = E[A_\infty - B_\infty|\mathscr{F}_t] \text{ a.s.}. $$

故得 1) 的结论.

2) 由 1), ${}^oA-A^p$ 为一致可积鞅. 另一方面, $A^o-A^p=A^o-(A^o)^p$ 也为一致可积鞅, 故 ${}^oA-A^o$ 为一致可积鞅. □

§ 3. 应用于停时与过程的研究

5.32 定理 设 A 为一适应增过程, M 为一非负一致可积右连左极鞅, 则对任何停时 T, 有

$$ E\left[\int_{[0,T]} M_t dA_t\right] = E[M_T A_T]. \tag{32.1} $$

证明 令 $X=M_T I_{[0,T[}$. 由于 $E[M_T|\mathscr{F}_t]=M_{t\wedge T}$, $t\geqslant 0$, M^T 为 M_T 的可选投影, 故 ${}^oX=M^T I_{[0,T[}=MI_{[0,T[}$. 于是

$$ \begin{aligned} E[M_T A_T] &= E\left[\int_{[0,\infty[} X_t dA_t\right] \\ &= E\left[\int_{[0,\infty[} {}^oX_t dA_t\right] \\ &= E\left[\int_{[0,T]} M_t dA_t\right]. \quad \square \end{aligned} $$

5.33 定理 1) 设 A 为一适应增过程, 对一切 $t\geqslant 0$, A_t 可积, 则为要 A 可料, 必须且只需对任何非负有界右连左极鞅 M 及 $t\geqslant 0$, 有

$$ E\left[\int_{[0,t]} M_s dA_s\right] = E\left[\int_{[0,t]} M_{s-} dA_s\right]. \tag{33.1} $$

2) 设 A 为一适应可积增过程. 为要 A 可料, 必须且只需对

任何非负有界右连左极鞅 M，有

$$E\left[\int_{[0,\infty[}M_s dA_s\right]=E\left[\int_{[0,\infty[}M_{s-}dA_s\right].\qquad(33.2)$$

证明 1) 必要性由定理 5.13 可得，因为 $MI_{[0,t]}$ 的可料投影是 $M_-I_{[0,t]}$. 往证充分性. 首先，假设 A 可积. 令

$$\mathscr{C}=\{F\times[0,t]:t\geqslant 0,\ F\in\mathscr{F}\},$$

则 $\mathscr{C}$ 为 π-类，且 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，令 $C=F\times[0,t]\in\mathscr{C}$，$M$ 为 $E[I_F|\mathscr{F}_t]$)的右连左极修正，则 ${}^oI_C=MI_{[0,t]}$，${}^pI_C=M_-I_{[0,t]}$. 由 A 的适应性及(33.1)得

$$\mu_A(I_C)=\mu_A({}^oI_C)=\mu_A({}^pI_C),$$

其中 μ_A 为由 A 产生的测度. 令

$$\mathscr{G}=\{C\in\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{E}_+):\ \mu_A(I_C)=\mu_A({}^pI_C)\},$$

则 $\mathscr{G}$ 为 λ-类，且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{G}$. 故 $\mathscr{G}=\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，即 μ_A 可料. 从而由定理 5.13 知 A 可料. 对一般情形，考虑 $A^n=(A_{t\wedge n})$. 由于 A^n 可积，由上所证，A^n 可料. 最终得 A 为可料过程.

2) 若 M 为非负有界右连左极鞅，则 $M'=MI_{[0,t]}+M_tI_{]t,\infty[}$ 亦然. 由(33.2)，我们有

$$\begin{aligned}&E\left[\int_{[0,t]}M_s dA_s\right]+E[M_t(A_\infty-A_t)]\\&=E\left[\int_{[0,\infty[}M'_s dA_s\right]\\&=E\left[\int_{[0,\infty[}M'_{s-}dA_s\right]\\&=E\left[\int_{[0,t]}M_{s-}dA_s\right]+E[M_t(A_\infty-A_t)].\qquad(33.3)\end{aligned}$$

从(33.3)的两边减去 $E[M_t(A_\infty-A_t)]$ 即得(33.1). 由 1)，A 可料. □

作为定理 5.33 的一个应用，我们得到可料时的一个刻画.

5.34 定理 设 T 为一停时. 为要 T 为可料时，必须且只需对任何非负有界右连左极鞅 M，有

$$E[M_{T-}]=E[M_T].$$

证明 必要性由定理 4.41 推得，往证充分性．令 $A=I_{[T,\infty[}$，则 A 为适应可积增过程，且对任何非负有界右连左极鞅 M，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}M_s dA_s\right]&=\boldsymbol{E}[M_T I_{[T<\infty]}]\\&=\boldsymbol{E}[M_{T-}I_{[T<\infty]}]\\&=\boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}M_{s-}dA_s\right]\end{aligned}$$

（注意 $M_\infty=M_{\infty-}$）．由定理 5.33，A 可料，从而 T 为可料时．□

下一定理给出了绝不可及时的一个有用的刻画．

5.35 定理 设 $T>0$ 为一停时．为要 T 为绝不可及时，必须且只需存在一零初值一致可积鞅 M，使得 M 在〚T〛外连续，且在 $[T<\infty]$ 上，$\Delta M_T=1$.

证明 必要性．设 T 为绝不可及时．令 $A=I_{[T,\infty[}$，则 A 拟左连续，其可料对偶投影 A^p 连续（系 5.28.3)）．令 $M=A-A^p$，则 M 为零初值一致可积鞅（系 5.31.1)），且满足定理要求．

充分性．设存在一致可积鞅 M 满足定理要求，则对任何可料时 S，我们有

$$\Delta M_S=\Delta M_S I_{[S<\infty]}=\Delta M_T I_{[T=S<\infty]}=I_{[T=S<\infty]}.$$

由定理 4.41，$\boldsymbol{P}([T=S<\infty])=\boldsymbol{E}[\Delta M_S]=0$，故 T 为绝不可及时．□

下一定理给出拟左连续流（见定义 3.39）的一个刻画．

5.36 定理 为要流 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 为拟左连续的，必须且只需一切一致可积右连左极鞅为拟左连续的．

证明 必要性．设 $(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续，M 为一致可积右连左极鞅，则对任何可料时 $T>0$，有

$$\boldsymbol{E}[M_T I_{[T<\infty]}\mid\mathscr{F}_{T-}]=M_{T-}I_{[T<\infty]}\quad\text{a.s.}.$$

但 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$，$M_T I_{[T<\infty]}\in\mathscr{F}_T$，故 $\Delta M_T I_{[T<\infty]}=0$ a.s.，即 M 拟左连续．

充分性．设 $(\mathscr{F}_t)$ 非拟左连续，则存在一可料时 T，使得

$P(T<\infty)>0$，且$\mathscr{F}_T\neq\mathscr{F}_{T-}$. 取一集合 $H\in\mathscr{F}_T\setminus\mathscr{F}_{T-}$. 令 $M=(I_H-E[I_H|\mathscr{F}_{T-}])I_{[T,\infty[}$，则 M 为一致可积右连左极鞅(参见问题 5.3)，但非拟左连续. □

5.37 定义 流 $F=(\mathscr{F}_t)$ 称为**全连续的**，如果对任何停时 T，$\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$. 显然，全连续性蕴含拟左连续性.

5.38 定理 下列命题等价：

1) 一切停时为可料时，

2) 一切一致可积右连左极鞅连续.

这时，$(\mathscr{F}_t)$为全连续的.

证明 1)⇒2). 首先，由定理 3.40 知，$(\mathscr{F}_t)$拟左连续. 对任何停时 T 及一致可积右连左极鞅 M，由定理 5.36 知，$M_T=M_{T-}$ a.s.，因为 T 为可料时. 因此，M 与 M_-无区别，即 M 连续. 这时$(\mathscr{F}_t)$全连续是显然的.

2)⇒1). 由定理 5.34 即得. □

5.39 定理 设 $A\in\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，则 $A'=[{}^p(I_A)>0]$为唯一的可料集(不计一不足道集)，使得对任何可料时 T，$A[\![T]\!]$ 为不足道集当且仅当 $A'[\![T]\!]$ 为不足道集. A' 称为 A 的**可料支集**.

证明 设 T 为可料时，由于

$$^p(I_A)_T I_{[T<\infty]}=E[(I_A)_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]\quad \text{a.s.},$$

易见

$$^p(I_A)_T I_{[T<\infty]}=0\quad \text{a.s.}\Leftrightarrow(I_A)_T I_{[T<\infty]}\quad \text{a.s.},$$

从而

$$A[\![T]\!]\ 为不足道集\Leftrightarrow(I_A)_T I_{[T<\infty]}|=0\ \text{a.s.}$$

$$A'[\![T]\!]\ 为不足道集\Leftrightarrow(I_{A'})_T I_{[T<\infty]}=0\ \text{a.s.}$$

$$\Leftrightarrow {}^p(I_A)_T I_{[T<\infty]}=0\ \text{a.s.}.$$

因此，$A[\![T]\!]$ 为不足道集⇔$A'[\![T]\!]$ 为不足道集. 唯一性由截口定理推得. □

5.40 引理 设 $A_n\in\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，$A_n'$ 为 A_n 的可料支集，$n\geq 1$，则$\bigcup_n A_n'$ 是$\bigcup_n A_n$ 的可料支集.

证明 由可料支集的定义即得． □

5.41 引理 设 A 为一局部可积增过程，则 $[\Delta A^p \neq 0]$ 为 $[\Delta A \neq 0]$ 的可料支集，其中 A^p 为 A 的可料对偶投影．

证明 对任何可料时 T，$\Delta A_T^p I_{[T<\infty]} = E[\Delta A_T I_{[T<\infty]} | \mathscr{F}_{T-}]$．$[\Delta A \neq 0] \llbracket T \rrbracket$ 为不足道集 $\Leftrightarrow \Delta A_T I_{[T<\infty]} = 0$ a.s. $\Leftrightarrow \Delta A_T^p I_{[T<\infty]} = 0$ a.s. $\Leftrightarrow [\Delta A^p \neq 0] \llbracket T \rrbracket$ 为不足道集．因此，$[\Delta A^p \neq 0]$ 为 $[\Delta A \neq 0]$ 的可料支集． □

5.42 定理 任一稀疏集的可料支集是一列可料时的图的并．

证明 由引理 5.40，只需对集合 $\llbracket T \rrbracket$ 证明定理成立，其中 $T > 0$ 为一停时．令 $A = I_{[T,\infty[}$，则 A 为可积增过程．由引理 5.41，$[\Delta A^p \neq 0]$ 是 $[\Delta A \neq 0] = \llbracket T \rrbracket$ 的可料支集．显然，$[\Delta A^p \neq 0]$ 是一列可料时的图的并． □

5.43 系 设 A 为一稀疏集，A' 为其可料支集．

1) A 为绝不可及集 $\Leftrightarrow A'$ 为不足道集．

2) A 为可料集 $\Leftrightarrow A = A'$．这时 A 可表为一列可料时的图的并．

3) A 为可及集 $\Leftrightarrow A \subset A'$．这时 A 可表为一列可及时的图的并．

§4. Doob-Meyer 分解定理

5.44 定义 令 $\mathscr{T}$ 为停时全体．一可测过程 X 称为**类(D)过程**，如果 $\{X_T I_{[T<\infty]} : T \in \mathscr{T}\}$ 为一致可积随机变量族．

由 Doob 停止定理不难看出，一切一致可积右连左极鞅或非负右闭右连左极下鞅是类(D)过程．

5.45 定理 设 $A = (A_t)$ 为一零初值可料可积增过程，$Z = (Z_t)$ 为 $(A_\infty - A_t)$ 的可选投影，则 Z 为类(D)位势，A 由 Z 唯一确定．Z 称为**由 A 产生的位势**．

证明 我们早已知道，$(E[A_\infty | \mathscr{F}_t])$ 的右连左极修正是 A_∞ 的可选投影，故 Z 为右连左极，且 $Z_t = E[A_\infty | \mathscr{F}_t] - A_t$ a.s.，对 $s < t$，

有

$$E[Z_t|\mathscr{F}_s]=E[A_\infty|\mathscr{F}_s]-E[A_t|\mathscr{F}_s]$$
$$\leqslant E[A_\infty|\mathscr{F}_s]-A_s=Z_s \text{ a.s.},$$

即 Z 为非负上鞅．另一方面，有

$$\lim_{t\to\infty}E[Z_t]=\lim_{t\to\infty}E[A_\infty-A_t]=0.$$

故 Z 为一位势．最后，$Z_t\leqslant E[A_\infty|\mathscr{F}_t]$ a.s.，故 Z 为类(D)过程．设 μ_A 为由 A 产生的测度，则 μ_A 为有限测度，$\mu_A(〚0〛)=0$，且对任何停时 S，有

$$\mu_A(〛S,\infty〚)=E[A_\infty-A_S]=E[Z_S]. \qquad (45.1)$$

故 μ_A 限于可料 σ-域上由 Z 唯一确定．由于 A 可料，所以 A 也由 Z 唯一确定． □

由定理 5.45，自然会提出这样一个问题：是否任一类(D)位势都由一可料可积增过程产生．回答是肯定的．事实上，(45.1)正是解决这问题的关键．

令 $\mathscr{C}$ 为由

$$\{〚0_F〛:F\in\mathscr{F}_0\}\cup\{〛S,T〛:S\leqslant T \text{ 为停时}\}$$

产生的域，则 $\mathscr{C}$ 产生 $\mathscr{P}$，且 $\mathscr{C}$ 中的每个元素具有形式 $〚0_F〛\cup(\bigcup_{i=1}^m〛U_i,V_i〛)$，其中 $F\in\mathscr{F}_0$，U_i,V_i，$i=1,\cdots,m$，为停时．令 S_1 为 $H\cap〛0,\infty〚$ 的初遇，T_1 为 $H^c\cap〛S_1,\infty〚$ 的初遇，S_2 为 $H\cap〛T_1,\infty〚$ 的初遇，T_2 为 $H^c\cap〛S_2,\infty〚$ 的初遇等等，则 H 可唯一地表示为

$$H=〚0_F〛\cup〛S_1,T_1〛\cup\cdots\cup〛S_n,T_n〛,$$

其中 $F\in\mathscr{F}_0$，S_i,T_i，$i=1,\cdots n$，为停时；在$[S_i<\infty]$上，$S_i<T_i$，$i=1,\cdots,n$；在$[T_i<\infty]$上，$T_i<S_{i+1}$，$i=1,\cdots,n-1$．称 H 的这种表示为典则表示，并令

$$\overline{H}=〚0_F〛\cup〚S_1,T_1〛\cup\cdots\cup〚S_n,T_n〛.$$

5.46 引理 设 $Z=(Z_t)$ 为一类(D)位势，$Z_\infty=0$，设 $H\in\mathscr{C}$，其典则表示为

$$H=〚0_F〛\cup〛S_1,T_1〛\cup\cdots\cup〛S_n,T_n〛. \qquad (46.1)$$

定义

$$\mu(H) = \boldsymbol{E}[Z_{S_1} - Z_{T_1}] + \cdots + \boldsymbol{E}[Z_{S_n} - Z_{T_n}]. \quad (46.2)$$

则 μ 为 $\mathscr{C}$ 上的有限测度.

证明 首先,我们证明如下事实:对任给 $\varepsilon>0$ 及 $H\in\mathscr{C}$,存在 $K\in\mathscr{C}$,使得 $\overline{K}\subset H$, $K\cap[\![0]\!]=\varnothing$,且 $\mu(H)\leqslant\mu(K)+\varepsilon$. 为此,不妨假定 H 为形如 $]\!]S,T]\!]$ 的随机区间,$S\leqslant T$,且在 $[S<\infty]$ 上,$S<T$. 令

$$S_n = \left(S+\frac{1}{n}\right)_{[S+\frac{1}{n}<T]}, \quad T_n = T_{[S+\frac{1}{n}<T]}.$$

我们有 $S_n\geqslant S$, $S=\lim\limits_n S_n$, 在 $[S<\infty]$ 上, $S_n>S$. 同时,$T_n\geqslant T$, $T=\lim\limits_n T_n$. 在 $[S_n<\infty]$ 上,$T=T_n$. 于是,对每个 n, $[\![S_n,T_n]\!]\subset]\!]S,T]\!]$. 由于 Z 为右连续类(D)过程.

$$Z_{S_n}\xrightarrow{L^1}Z_S,\ Z_{T_n}\xrightarrow{L^1}Z_T,$$

$$\lim_n \boldsymbol{E}[Z_{S_n}-Z_{T_n}] = \boldsymbol{E}[Z_S - Z_T].$$

取 n 充分大,使得 $\boldsymbol{E}[Z_{S_n}-Z_{T_n}]\geqslant\boldsymbol{E}[Z_S-Z_T]-\varepsilon$,并令 $K=]\!]S_n,T_n]\!]$,则 K 满足要求.

μ 的有限性及有限可加性是显然的,只需证明 μ 的可列可加性,或等价地,$H_n\in\mathscr{C}$, $H_n\downarrow\varnothing\Rightarrow\mu(H_n)\downarrow 0$. 对任给 $\varepsilon>0$,取 $K_n\in\mathscr{C}$,使得 $K\cap[\![0]\!]=\varnothing$, $\overline{K}_n\subset H_n$ 及 $\mu(H_n)\leqslant\mu(K_n)+\varepsilon 2^{-n}$. 令 $L_n=K_1\cap\cdots\cap K_n$, 则对一切 n, $L_n\in\mathscr{C}$, $\overline{L}_n\subset H$,且

$$\mu(H_n)\leqslant\mu(L_n)+\varepsilon. \quad (46.3)$$

另一方面,$\overline{L}_n\downarrow\varnothing$. 令 D_n 为 $\overline{L}_n$ 的初遇,则 $[\![D_n]\!]\subset\overline{L}_n$, $D_n\uparrow+\infty$. 由于 $L_n\subset]\!]D_n,\infty[\![$,有

$$\mu(L_n)\leqslant\mu(]\!]D_n,\infty[\![)=\boldsymbol{E}[Z_{D_n}-Z_\infty]=\boldsymbol{E}[Z_{D_n}].$$

注意到 $Z_{D_n}\xrightarrow{L^1}0$($Z$ 为类(D)位势),我们有 $\lim\limits_n\mu(L_n)=0$. 由(46.3),有 $\lim\limits_n\mu(H_n)\leqslant\varepsilon$. 令 $\varepsilon\downarrow 0$ 得 $\lim\limits_n\mu(H_n)=0$. □

5.47 定理 设 Z 为一类(D)位势,则存在唯一的可料可积增过程 A,使得 Z 由 A 产生.

证明 唯一性已包含在定理5.45之中,只需证存在性. 将按(46.2)定义的$\mathscr{C}$上的有限测度μ唯一地扩张到可料σ-域上,仍用μ表示之,μ在不足道集上无负荷. 事实上,对任何不足道集H,其初遇$D_H(=+\infty$ a.s.)为可料时,且

$$H \subset [\![0_F]\!] \cup]\!] 0_F, \infty [\![,$$

其中$F=[D_H<\infty]\in\mathscr{F}_0$. 由于$P(F)=0$,$0_F=+\infty$ a.s.,我们有$\mu(H)=0$.

对任何非负有界可测过程X,定义

$$\bar{\mu}(X) = \mu({}^pX), \tag{47.1}$$

则$\bar{\mu}$为$\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$上的有限测度,且在不足道集上无负荷. 由于$\bar{\mu}$是$\mu$的扩张,由(47.1)知,$\bar{\mu}(X)=\bar{\mu}({}^pX)$,即$\bar{\mu}$是可料的. 由定理5.11及5.13,存在唯一的可料可积增过程A,使得$\bar{\mu}$为由A产生的测度. $E[A_0]=\bar{\mu}([\![0]\!])=\mu([\![0]\!])=0$,故$A_0=0$ a.s.. 此外,由(46.2),对任何停时S,有

$$E[A_\infty - A_S] = \mu(]\!] S,\infty [\![) = E[Z_S].$$

这表明Z是$(A_\infty - A_t)$的可选投影,即由A产生的位势. □

作为这一定理的一个重要推论,我们得到下列类(D)上鞅的**Doob-Meyer 分解定理**.

5.48 定理 设X为一右连续类(D)上鞅,则X可唯一地分解为:

$$X = M - A, \tag{48.1}$$

其中M为一致可积鞅,A为零初值可料可积增过程. (48.1)称为X的**Doob-Meyer 分解**.

证明 存在性. 令

$$Z_t = X_t - E[X_\infty | \mathscr{F}_t],$$

则$Z=(Z_t)$为类(D)位势. 由定理5.47,存在可料可积增过程A,使得

$$Z_t = E[A_\infty | \mathscr{F}_t] - A_t.$$

令$M_t=E[X_\infty + A_\infty | \mathscr{F}_t]$,则$X=M-A$为$X$的Doob-Meyer分解.

唯一性．设 $X=\bar{M}-\bar{A}$ 为另一Doob－Meyer 分解，则 $A-\bar{A}=\bar{M}-M$ 既是一致可积鞅，又是可料可积变差过程．由系 5.31，$A-\bar{A}=0$，从而 $A=\bar{A}$，$M=\bar{M}$． □

5.49 定义 设 X 为一致可积右连左极上鞅．X 称为**正则的**，如果对每个可料时 $T>0$，有

$$E[X_{T-}]=E[X_T],$$

或等价地，$X_{T-}=E[X_T|\mathscr{F}_{T-}]$（因为由定理 4.41，$X_{T-}\geqslant E[X_T|\mathscr{F}_{T-}]$）．

由定义知，拟左连续的右连左极上鞅为正则的；一致可积的右连左极鞅为正则的；正则的可料一致可积右连左极上鞅必连续．下列定理也是显然的．

5.50 定理 设 X 为一类(D)右连左极上鞅，$X=M-A$ 为其 Doob-Meyer 分解．为要 A 连续，必须且只需 X 为正则的．

§5. 离散型流

5.51 定义 假设

i) $(\mathscr{G}_n)_{n\geqslant 0}$ 为一离散参数流；

ii) $(T_n)_{n\geqslant 0}$ 为一列严格增的随机变量（即 $\forall\ n\geqslant 0, T_n<\infty\Rightarrow T_n<T_{n+1}$），且 $T_0=0, T_n\uparrow+\infty$．

iii) $\forall\ n\geqslant 1, T_n$ 为 $\mathscr{G}_n$-可测．

定义

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathscr{G}_n\cap[T_n\leqslant t<T_{n+1}])$$

$$=\{\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n[T_n\leqslant t<T_{n+1}];A_n\in\mathscr{G}_n, n\geqslant 0\},\quad t\geqslant 0. \tag{51.1}$$

并记为 $\mathscr{F}_t$．易见，$\forall\ t\geqslant 0$，$\mathscr{F}_t$ 为 σ-域，且 $\mathscr{F}_0=\mathscr{G}_0$．我们将证明 $F=(\mathscr{F}_t)$ 为右连续流，称它为**离散型流**．它是本节讨论的对象．

5.52 定理 1) $F=(\mathscr{F}_t)$ 为一右连续流．

2) $\forall\ n\geqslant 1, T_n$ 为 F-停时．

3) 若 $\mathscr{G}'_n=\mathscr{G}_n\vee\mathscr{N}$，$\mathscr{F}'_t=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(\mathscr{G}'_n\cap[T_n\leqslant t<T_{n+1}])$，其中 $\mathscr{N}$ 为 P-零概集全体产生的 σ-域，则 $\boldsymbol{F}'=(\mathscr{F}'_t)$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的通常化.

证明 令 $s<t$，$A\in\mathscr{F}_s$ 及 $A=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}A_k[T_k\leqslant s<T_{k+1}]$，$A_k\in\mathscr{G}_k$，则

$$\begin{aligned}&A[T_n\leqslant t<T_{n+1}]\\&=\{(\bigcup_{k=0}^{n-1}A_k[T_k\leqslant s<T_{k+1}])\cup(A_n[T_n\leqslant s])\}\\&\quad\cap[T_n\leqslant t<T_{n+1}]\in\mathscr{G}_n\cap[T_n\leqslant t<T_{n+1}].\end{aligned}$$

因此，$A\in\mathscr{F}_t$，从而 $\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$. 往证 $\mathscr{F}_t=\bigcap\limits_n\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}$. 设 h 为 $(\bigcap\limits_n\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}})$-可测，则对一切 $n\geqslant1$，

$$h=\sum_{k=1}^{\infty}h_k^{(n)}I_{[T_k\leqslant t+\frac{1}{n}<T_{k+1}]},\ h_k^{(n)}\in\mathscr{G}_k.$$

令 $h_k=\limsup\limits_{n\to\infty}h_k^{(n)}$. 对每个 $\omega\in[T_k\leqslant t<T_{k+1}]$，存在正整数 n_ω，使得

$$\begin{aligned}n>n_\omega&\Rightarrow\omega\in[T_k\leqslant t+\frac{1}{n}<T_{k+1}]\\&\Rightarrow h(\omega)=h_k^{(n)}(\omega)=h_k(\omega).\end{aligned}$$

显然，$h_k\in\mathscr{G}_k$，故

$$h=\sum_{k=0}^{\infty}h_kI_{[T_k\leqslant t<T_{k+1}]}\in\mathscr{F}_t.$$

这表明 $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$.

对一切 $n\geqslant1$，$t\geqslant0$，有

$$[T_n\leqslant t]=\bigcup_{k=n}^{\infty}[T_k\leqslant t<T_{k+1}]\in\mathscr{F}_t.$$

所以，T_n 为停时.

第三个结论是显然的. □

5.53 定理 为要 $\mathscr{F}_\infty=\mathscr{G}_\infty$，必须且只需对每个 $n\geqslant0$，有

$$\mathscr{G}_n\cap[T_{n+1}=\infty]=\mathscr{G}_\infty\cap[T_{n+1}=\infty].\qquad(53.1)$$

证明 令 $\mathscr{F}_\infty=\bigvee\limits_{t\geqslant0}\mathscr{F}_t$，$\mathscr{G}_\infty=\bigvee\limits_{n\geqslant0}\mathscr{G}_n$，易见 $\mathscr{F}_\infty\subset\mathscr{G}_\infty$.

充分性. 设 $A\in\mathscr{G}_n$，则对每个 $t\geqslant0$，有

$$A[T_n \leqslant t] = \bigcup_{k=n}^{\infty} A[T_k \leqslant t < T_{k+1}] \in \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{\infty}.$$

(我们顺便证得$\mathscr{G}_n \subset \mathscr{G}_{T_n}$.)因此,$A[T_n < \infty] \in \mathscr{F}_{\infty}$. 另一方面,

$$A[T_n = \infty] = \bigcup_{k=1}^{n} A[T_{k-1} < \infty, T_k = \infty]. \qquad (53.2)$$

由(53.1),$A[T_k = \infty] = A_{k-1}[T_k = \infty]$,$A_{k-1} \in \mathscr{G}_{k-1}$. 已证$A_{k-1}[T_{k-1} < \infty] \in \mathscr{F}_{\infty}$,故

$A[T_{k-1} < \infty, T_k = \infty] = A_{k-1}[T_{k-1} < \infty][T_k = \infty] \in \mathscr{F}_{\infty}$.
由(53.2)有$A[T_n = \infty] \in \mathscr{F}_{\infty}$,从而$A \in \mathscr{F}_{\infty}$,$\mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_{\infty}$,$\mathscr{G}_{\infty} \subset \mathscr{F}_{\infty}$.

必要性. 对$t \geqslant 0$及$A \in \mathscr{F}_t$,有

$$A[T_{n+1} = \infty] = \{(\bigcup_{k=n}^{n-1} A_k[T_k \leqslant t < T_{k+1}])$$
$$\cup (A_n[T_n \leqslant t])\}[T_{n+1} = \infty],\ A_k \in \mathscr{G}_k.$$

故$A[T_{n+1} = \infty] \in \mathscr{G}_n \cap [T_{n+1} = \infty]$,即$\mathscr{F}_t \cap [T_{n+1} = \infty] \subset \mathscr{G}_n \cap [T_{n+1} = \infty]$,从而

$$\mathscr{G}_{\infty} \cap [T_{n+1} = \infty] = \mathscr{F}_{\infty} \cap [T_{n+1} = \infty]$$
$$\subset \mathscr{G}_n \cap [T_{n+1} = \infty],$$

这表明(53.1)成立. □

该定理表明,为了保证$\mathscr{F}_{\infty} = \mathscr{G}_{\infty}$,$\mathscr{G}_n$的增长不能落后于$T_n$的增长. 为了使(53.1)得到满足,只需将$\mathscr{G}_n$代之以$(\mathscr{G}_n \cap [T_{n+1} < \infty]) \cup (\mathscr{G}_{\infty} \cap [T_{n+1} = \infty])$,即适当地扩大$\mathscr{G}_n$. 另一方面,我们希望能有$\mathscr{G}_n = \mathscr{F}_{T_n}$对一切$n$成立. 以后将会看到,为此目的,(53.2)是必要的. 因此,在本节往后我们总假设$\mathscr{F}_{\infty} = \mathscr{G}_{\infty}$成立.

5.54 定理 为要$T \geqslant 0$为一停时,必须且只需对每个$n \geqslant 0$,存在$R_n \in \mathscr{G}_n$,使得

$$T_{[T < T_{n+1}]} = (R_n)_{[R_n < T_{n+1}]}. \qquad (54.1)$$

或等价地,下列任一条件成立:

$$T < T_{n+1} \Rightarrow R_n = T \text{ 和 } T \geqslant T_{n+1} \Rightarrow R_n \geqslant T_{n+1}, \qquad (54.2)$$

$$R_n < T_{n+1} \Rightarrow T = R_n \text{ 和 } R_n \geqslant T_{n+1} \Rightarrow T \geqslant T_{n+1}, \qquad (54.3)$$

$$T < T_{n+1} \Leftrightarrow R_n < T_{n+1} \Rightarrow T = R_n, \qquad (54.4)$$

$$T \wedge T_{n+1} = R_n \wedge T_{n+1}. \tag{54.5}$$

证明 容易直接验证(54.1)—(54.5)之间的等价性.

充分性. 对一切 $t \geqslant 0$,有

$$[T \leqslant t] = \bigcup_{n=0}^{\infty}([T \leqslant t][T_n \leqslant t < T_{n+1}])$$

$$= \bigcup_{n=0}^{\infty}([R_n \leqslant t][T_n \leqslant t < T_{n+1}]),$$

因为在$[T_n \leqslant t < T_{n+1}]$上,$T \leqslant t \Rightarrow T < T_{n+1} \Rightarrow T = R_n$,以及 $R_n \leqslant t \Rightarrow R_n < T_{n+1} \Rightarrow R_n = T$. 由于 $R_n \in \mathscr{G}_n$,我们有$[T \leqslant t] \in \mathscr{F}_t$,故 T 为停时.

必要性. 对一切 $n \geqslant 0, t \geqslant 0$ 及 $A \in \mathscr{F}_t$,有

$$A[t < T_{n+1}] = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k [T_k \leqslant t < T_{k+1}]$$

$$\in \mathscr{G}_n \cap [t < T_{n+1}], \tag{54.6}$$

其中 $A_k \in \mathscr{G}_k$, $k = 0, \cdots, n$. 令 $F_r = [r < T_{n+1}], r \in Q_+$. 由(54.6),存在 $G_r \in \mathscr{G}_n$,使得

$$[T < r]F_r = G_r F_r. \tag{54.7}$$

无妨设$(G_r, r \in Q_+)$单调增. 事实上,当 $r' < r$ 时,有 $F_{r'} \supset F_r$,且

$$\begin{aligned} G_{r'} F_r &= G_{r'} F_{r'} F_r \\ &= [T < r'] F_{r'} F_r \\ &= [T < r'] F_r \subset [T < r] F_r \\ &= G_r F_r. \end{aligned}$$

故

$$[T < r] F_r = (\bigcup_{r' \leqslant r} G_{r'}) F_r.$$

如必要,可用$\bigcup_{r' \leqslant r} G_{r'}$代替 G_r. 现在定义

$$R_n(\omega) = \inf\{r \in Q_+ : \omega \in G_r\}.$$

显然,$R_n \geqslant 0$,对 $t > 0$,$[R_n < t] = \bigcup_{r < t} G_r \in \mathscr{G}_n$,从而 $R_n \in \mathscr{G}_n$. 往证(54.4)成立. 若(54.4)不成立,$T(\omega)$与 $R_n(\omega)$中必有一个小于 $T_{n+1}(\omega)$且 $T(\omega) \neq R_n(\omega)$. 这时我们可取 $t < T_{n+1}(\omega)$,使得 $T(\omega) > t > R_n(\omega)$或 $R_n(\omega) > t > T(\omega)$. 在前一情形,取 $r \in Q_+$,使得 $r < t$

及 $\omega\in G_r$，则 $\omega\notin[T<r]F_r$，但 $\omega\in G_rF_r$．这与(54.7)矛盾．在后一情形，取 $r\in \boldsymbol{Q}_+$，使得 $T(\omega)<r<t$ 及 $\omega\notin G_r$，则 $\omega\notin G_rF_r$，但 $\omega\in[T<r]F_r$．这也与(54.7)矛盾．总之，(54.4)必须成立． □

5.55 定理 1）为要 $X=(X_t)$ 为可选过程，必须且只需对每个 $n\geqslant 0$，存在过程 $X^{(n)}\in\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，使得

$$X=\sum_{n=0}^{\infty}X^{(n)}I_{[\![T_n,T_{n+1}[\![}.\tag{55.1}$$

2）为要 $X=(X_t)$ 为可料过程，必须且只需对每个 $n\geqslant 0$，存在过程 $X^{(n)}\in\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，使得

$$X=X_0I_{[\![0]\!]}+\sum_{n=0}^{\infty}X^{(n)}I_{]\!]T_n,T_{n+1}]\!]}.\tag{55.2}$$

证明 由于 $\mathscr{G}_n\subset\mathscr{F}_{T_n}$，充分性显然．往证必要性．

1）由单调类定理，只需对 $X=I_{[\![T,\infty[\![}$ 证明(55.1)，其中 T 为一停时．设 $R_n\in\mathscr{G}_n$，$n\geqslant 0$，满足(54.2)．令

$$X^{(n)}=I_{[\![R_n,\infty[\![}，$$

则 $X^{(n)}\in\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，且在 $[T_n\leqslant t<T_{n+1}]$ 上，$T\leqslant t\Leftrightarrow R_n\leqslant t$，即

$$XI_{[\![T_n,T_{n+1}[\![}=X^{(n)}I_{[\![T_n,T_{n+1}[\![}.$$

故得(55.1)

2）由单调类定理，只需对 $X=I_{[\![0,T]\!]}$ 证明(55.2)，其中 T 为一停时．现在令

$$X^{(n)}=I_{[\![0,R_n]\!]}.$$

同样地，我们有 $X^{(n)}\in\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，且在 $[T_n<t\leqslant T_{n+1}]$ 上，$T<t\Leftrightarrow R_n<t$（例如 $T<t\Rightarrow T<t\leqslant T_{n+1}\Rightarrow T=R_n<t$），即

$$XI_{]\!]T_n,T_{n+1}]\!]}=X^{(n)}I_{]\!]T_n,T_{n+1}]\!]}.$$

故得(55.2)． □

5.56 定理 设 T 为一停时，则对每个 $n\geqslant 0$，有

$$\mathscr{F}_T\cap[T_n\leqslant T<T_{n+1}]=\mathscr{G}_n\cap[T_n\leqslant T<T_{n+1}].\tag{56.1}$$

证明 由于 $\mathscr{G}_n\subset\mathscr{F}_{T_n}$，我们有 $\mathscr{G}_n\cap[T_n\leqslant T]\subset\mathscr{F}_T$，且

$$\mathscr{G}_n \cap [T_n \leqslant T < T_{n+1}] \subset \mathscr{F}_T \cap [T_n \leqslant T < T_{n+1}].$$

另一方面，若 $A \in \mathscr{F}_T$，则有可选过程 $X = \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)} I_{[T_n, T_{n+1}[}$，使得 $I_{A[T<\infty]} = X_T I_{[T<\infty]}$，$X^{(n)} \in \mathscr{G}_n \times \mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$. 在$[T_n \leqslant T < T_{n+1}]$上，有 $I_A = X_T^{(n)} = X_{R_n}^{(n)}$，于是

$$A[T_n \leqslant T < T_{n+1}] = [X_{R_n}^{(n)} = 1][T_n \leqslant T < T_{n+1}], \tag{56.2}$$

其中 $R_n \in \mathscr{G}_n$ 如定理 5.54 中所确定. 由于$[X_{R_n}^{(n)} = 1] \in \mathscr{G}_n$，由(56.2)知

$$\mathscr{F}_T \cap [T_n \leqslant T < T_{n+1}] \subset \mathscr{G}_n \cap [T_n \leqslant T < T_{n+1}].$$

因此(56.1)成立. □

5.57 系

$$\mathscr{F}_{T_n} = \mathscr{G}_n,\ n \geqslant 0,$$

$$\mathscr{F}_{T_n-} = \mathscr{G}_{n-1} \vee \sigma\{T_n\},\ n \geqslant 1.$$

证明 对每个 $n \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_n \cap [T_n < \infty] &= \mathscr{F}_{T_n} \cap [T_n \leqslant T_n < T_{n+1}] \\ &= \mathscr{G}_n \cap [T_n \leqslant T_n < T_{n+1}] \\ &= \mathscr{G}_n \cap [T_n < \infty].\end{aligned}$$

由(53.1)，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{T_n} \cap [T_n = \infty] &= \mathscr{F}_\infty \cap [T_n = \infty] \\ &= \mathscr{G}_\infty \cap [T_n = \infty] \\ &= \mathscr{G}_n \cap [T_n = \infty]\end{aligned}$$

(这里我们用到假设 $\mathscr{F}_\infty = \mathscr{G}_\infty$). 由于$[T_n < \infty] \in \mathscr{F}_{T_n} \cap \mathscr{G}_n$，故得 $\mathscr{F}_{T_n} = \mathscr{G}_n$.

对每个 $n \geqslant 1$，$T_{n-1} < \infty \Rightarrow T_{n-1} < T_n$，故 $\mathscr{F}_{T_{n-1}} \subset \mathscr{F}_{T_n-}$，且 $\mathscr{G}_{n-1} \vee \sigma\{T_n\} \subset \mathscr{F}_{T_n-}$. 另一方面，设 $A \in \mathscr{F}_t$，则

$$A[t < T_n] = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k [T_k \leqslant t < T_{k+1}],$$

$$A_k \in \mathscr{G}_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

所以，$A[t<T_n]\in\mathscr{G}_{n-1}\vee\sigma\{T_n\}$，从而 $\mathscr{F}_{T_n-}\subset\mathscr{G}_{n-1}\vee\sigma\{T_n\}$．□

5.58 定理 设 $\mathscr{G}_0$ 完备，即 $\boldsymbol{F}$ 满足通常条件．为要停时 T 为可料时，必须且只需对每个 $n\geqslant0$，存在 $R_n\in\mathscr{G}_n$，使得

$$T_{[T\leqslant T_{n+1}]}=(R_n)_{[R_n\leqslant T_{n+1}]},\tag{58.1}$$

或等价地，下列条件中的任一个成立：

$$T\leqslant T_{n+1}\Rightarrow R_n=T \text{ 和 } T>T_{n+1}\Rightarrow R_n>T_{n+1},\tag{58.2}$$

$$R_n\leqslant T_{n+1}\Rightarrow R_n=T \text{ 和 } R_n>T_{n+1}\Rightarrow T>T_{n+1},\tag{58.3}$$

$$R_n\leqslant T_{n+1}\Leftrightarrow T\leqslant T_{n+1}\Rightarrow T=R_n.\tag{58.4}$$

证明 不难直接验证(58.1)—(58.4)之间的等价性．

充分性． 令 $X=I_{[T,\infty[}$，$X^{(n)}=I_{[R_n,\infty[}$，$n\geqslant1$，则(55.2)成立，其中 $X_0=I_{[T=0]}$，因为在$[T_n<t\leqslant T_{n+1}]$上，$T\leqslant t\Leftrightarrow R_n\leqslant t$．由定理 5.55.2)，$X$ 为可料过程，故 T 为可料时．

必要性．设 T 为一可料时．令(S_k)为预报 T 的停时列，即 $S_k\uparrow T$，且在$[T>0]$上，对一切 k，$S_k<T$．令 $U_{k,n}\in\mathscr{G}_n$，使得 $U_{k,n}\wedge T_{n+1}=S_k\wedge T_{n+1}$．令

$$U'_{k,n}=\max_{1\leqslant j\leqslant k}U_{j,n},\ U_n=\lim_{k\to\infty}U'_{k,n},$$

$$F_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}[U_n=U'_{k,n}],$$

$$R_n=U_n+I_{F_n[T>0]}.$$

易见 $R_n\in\mathscr{G}_n$．往证(58.2)成立．

设 $T\leqslant T_{n+1}$，$n\geqslant0$．若 $T=0$，则对一切 k，$S_k=0$，从而 $U_{k,n}=0$，$U'_{k,n}=0$，$U_n=0$，$R_n=0$，且 $R_n=T$．若 $T>0$，则对一切 k，$S_k<T_{n+1}$．这时必有 $S_k=U_{k,n}$．由于 $S_k\uparrow T$，故有 $U'_{k,n}=S_k$，$U_n=T$．注意到 $S_k<T$，$I_F=0$，故得 $R_n=V_n=T$．

设 $T>T_{n+1}$（故 $T>0$），对充分大的 k，有 $S_k>T_{n+1}$，故 $U_{k,n}\geqslant T_{n+1}$，$U'_{k,n}\geqslant T_{n+1}$．若 $I_F=0$，则 $U_n>U'_{k,n}\geqslant T_{n+1}$，$R_n=U_n>T_{n+1}$．若 $I_F=1$，则 $U_n\geqslant U'_{k,n}\geqslant T_{n+1}$，$R_n=U_n+1>T_{n+1}$． □

注 定理的充分性证明未用到流为完备的假设，必要性对任一可预报停时成立．

5.59 系 设对某个 $k\geq 0$，$T\in\mathscr{F}_{T_k}$，$T\geq T_k$，且 $T_k<\infty\Rightarrow T_k<T$，则 T 为可料时.

证明 令

$$R_n=\begin{cases}\infty, n<k,\\ T, n\geq k.\end{cases}$$

显然，$R_n\in\mathscr{G}_n$，只需证明(58.2)成立. 当 $n\geq k$ 时，(58.2)显然成立，因为 $R_n=T$. 当 $n<k$ 时，有 $R_k=\infty$，$T\geq T_{n+1}\Rightarrow T_{n+1}<\infty\Rightarrow R_n>T_{n+1}$. 余下只要证明 $T\leqslant T_{n+1}\Rightarrow T=R_n$. $T=\infty$ 时这是显然的. 但是 $[T<\infty, T\leqslant T_{n+1}]=\varnothing$. 事实上，若 $n+1<k$，则 $T<\infty$，故 $T\leqslant T_{n+1}$ 是不可能的，因为 $T\geq T_k$. 若 $n+1=k$，则 $T\leqslant T_{n+1}\Rightarrow T=T_k$，但 $T_k<\infty\Rightarrow T_k<T$. □

5.60 系 设 $\mathscr{G}_0$ 完备. 对任一 $n\geq 1$，T_n 为可料时当且仅当 $T_n\in\mathscr{G}_{n-1}$.

证明 对 T_n 应用定理 5.58 得必要性：存在 $R_{n-1}\in\mathscr{G}_{n-1}$，使得 $T_n=R_{n-1}$. 充分性由系 5.59 可得，只需取 $T=T_n$，$k=n-1$. □

5.61 定理 设 T 为一可预报的停时，则对每个 $n\geq 0$，有

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}_{T-}\cap[T_n<T\leqslant T_{n+1}, T<\infty]\\ &=\mathscr{G}_n\cap[T_n<T\leqslant T_{n+1}, T<\infty].\end{aligned}\tag{61.1}$$

证明 由于 $\mathscr{G}_n=\mathscr{F}_{T_n}$，$\mathscr{G}_n\cap[T_n<T]\in\mathscr{F}_{T-}$，故

$$\mathscr{G}_n\cap[T_n<T\leqslant T_{n+1}]\subset\mathscr{F}_{T-}\cap[T_n<T\leqslant T_{n+1}].$$

设 $A\in\mathscr{F}_{T-}$，则有可料过程 $X=\sum_{n=0}^{\infty}X^{(n)}I_{]\!]T_n,T_{n+1}]\!]}+X_0I_{[\![0]\!]}$，使得 $X_TI_{[T<\infty]}=I_AI_{[T<\infty]}$，$X^{(n)}\in\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$，从而

$$\begin{aligned}&A[T_n<T\leqslant T_{n+1}, T<\infty]\\ &=[X^{(n)}_{R_n}I_{[R_n<\infty]}=1][T_n<T\leqslant T_{n+1}, T<\infty],\\ &\mathscr{F}_{T-}\cap[T_n<T\leqslant T_{n+1}, T<\infty]\\ &\subset\mathscr{G}_n\cap[T_n<T\leqslant T_{n+1}, T<\infty],\end{aligned}$$

其中 $R_n\in\mathscr{G}_n$ 如定理 5.58 中所确定，故得(61.1). □

5.62 定理 为要停时 T 为绝不可及时，必须且只需

$$[\![T]\!] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [\![T_n^i]\!], \tag{62.1}$$

其中 T_n^i 为 T_n 的绝不可及部分．

证明 充分性是容易的：对任何可料时 S，有

$$P(T = S < \infty) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n^i = S < \infty) = 0.$$

往证必要性．首先，对每个 $n \geqslant 0$，在 $[T_n < T < T_{n+1}]$ 上，T 是可预报的．事实上，存在 $R_n \in \mathscr{F}_{T_n}$ 满足(54.2)．令 $S_k = T_n \vee \left(R_n - \frac{1}{k} \right)$，$k \geqslant 1$，则 $S_k \geqslant T_n$ 且 $S_k \in \mathscr{F}_{T_n}$，故 S_k 为停时．在 $[T_n < T < T_{n+1}]$ 上，$S_k < T = R_n$，$k \geqslant 1$，且 $S_k \uparrow T$．因此，若 T 为绝不可及时，必有 $P(T_n < T < T_{n+1}) = 0$，$n \geqslant 0$．另一方面，$P(T = T_n^a < \infty) = 0$，$n \geqslant 1$，故得(62.1)． □

5.63 定理 为要停时 T 为绝不可及时，必须且只需

i) 对一切 $n \geqslant 0$，$P(T_n < T < T_{n+1}) = 0$，

ii) 对一切 $n \geqslant 0$ 及随机变量 $R \in \mathscr{F}_{T_n}$，$P(T = T_{n+1} = R < \infty) = 0$.

证明 必要性．条件 i) 已在上一定理中证过．同样地，可证在 $[T = T_{n+1} = R < \infty]$ 上 T 可预报．为此只要取 $S_k = T_n \vee \left(R - \frac{1}{k} \right)$，则 $(S_k)_{k \geqslant 1}$，在 $[T = T_{n+1} = R < \infty]$ 上预报 T，故 $P(T = T_{n+1} = R < \infty) = 0$.

充分性．假设存在停时列 $(S_k)_{k \geqslant 1}$，使得 $P(A) > 0$，其中 $A = (\bigcap_{k \geqslant 1} [S_k < T]) \cap [S_k \uparrow T < \infty]$．由 i)，$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A[T = T_{n+1} < \infty])$，故有某个 $n \geqslant 0$，使得 $P(A[T = T_{n+1} < \infty]) > 0$．对每个 $k \geqslant 1$，存在 $R_k \in \mathscr{F}_{T_n}$，使得 $S_k < T_{n+1} \Rightarrow S_k = R_k$．令 $R = \limsup_{k \to \infty} R_k \in \mathscr{F}_{T_n}$，则在 $A[T = T_{n+1} < \infty]$ 上，有 $R = \limsup_{k \to \infty} R_k = \lim_{k \to \infty} S_k = T$，即 $A[T = T_{n+1} < \infty] \subset A[T = T_{n+1} = R < \infty]$．因此 $P(A[T = T_{n+1} = R < \infty]) > 0$，与 ii) 矛盾．所以 T 为绝不可及时． □

5.64 定理 设 $\mathscr{G}_0$ 完备．为要 $(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续，必须且只需

i）对一切 $n\geqslant 1$，T_n^a 为可料时（T_n^a 为 T_n 的可及部分），

ii）对一切 $n\geqslant 1$，$\mathscr{F}_{T_n^a}=\mathscr{F}_{T_n^a-}$.

证明 必要性显然，往证充分性．设 T 为一可料时，$A\in\mathscr{F}_T$，则

$$A=(A[T=\infty])\cup(\bigcup_{n=0}^{\infty}A[T_n^a=T<\infty])$$

$$\cup(\bigcup_{n=0}^{\infty}A[T_n<T<T_{n+1}])\ \text{a.s.}.$$

显然，$A[T=\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$，$A[T=0]\in\mathscr{F}_{T-}$．对 $n\geqslant 1$，有

$$\begin{aligned}A[T_n^a=T<\infty]&\in\mathscr{F}_T\cap[T_n^a=T<\infty]\\&=\mathscr{F}_{T_n^a}\cap[T_n^a=T<\infty]\\&=\mathscr{F}_{T_n^a-}\cap[T_n^a=T<\infty]\\&=\mathscr{F}_{T-}\cap[T_n^a=T<\infty].\end{aligned}$$

注意到$[T_n^a=T<\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$，故有 $A[T_n^a=T<\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$.

由定理 5.56，有 $A[T_n<T<T_{n+1}]=A'[T_n<T<T_{n+1}]$，其中 $A'\in\mathscr{F}_{T_n}$，故 $A'[T_n<T]\in\mathscr{F}_{T-}$．为证 $A\in\mathscr{F}_{T-}$，只需验证$[T<T_{n+1}]\in\mathscr{F}_{T-}$：

$$[T<T_{n+1}]=[T<\infty]\backslash[T_{n+1}\leqslant T<\infty],$$

$$\begin{aligned}[T_{n+1}\leqslant T<\infty]&=[T_{n+1}^i\leqslant T<\infty]\cup[T_{n+1}^a\leqslant T<\infty]\\&=[T_{n+1}^i<T<\infty]\cup[T_{n+1}^a\leqslant T<\infty]\quad\text{a.s.}\\&\in\mathscr{F}_{T-}.\quad\square\end{aligned}$$

5.65 定理 设 $\mathscr{G}_0$ 完备．为要$(\mathscr{F}_t)$全连续，必须且只需

i）对一切 $n\geqslant 1$，T_n^a 为可料时，

ii）对一切 $n\geqslant 1$，$\mathscr{G}_n=\mathscr{G}_0\vee\sigma\{T_1,\cdots,T_n\}$.

证明 必要性．1）显然，由系 5.57，对每个 $n\geqslant 1$，有

$$\mathscr{G}_n=\mathscr{F}_{T_n}=\mathscr{F}_{T_n-}=\mathscr{G}_{n-1}\vee\sigma\{T_n\}.$$

用归纳法可证得 ii）.

充分性． 由 ii）及系 5.57 即得 $\mathscr{F}_{T_n}=\mathscr{F}_{T_n-}$．于是有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{T_n^a}\cap[T_n^a<\infty]&=\mathscr{F}_{T_n^a}\cap[T_n^a=T_n<\infty]\\&=\mathscr{F}_{T_n}\cap[T_n^a=T_n<\infty]\end{aligned}$$

$$= \mathscr{F}_{T_n^a-} \cap [T_n^a = T_n < \infty]$$
$$= \mathscr{F}_{T_n^a-} \cap [T_n^a < \infty].$$

显然，$\mathscr{F}_{T_n^a} \cap [T_n^a = \infty] = \mathscr{F}_{T_n^a-} \cap [T_n^a = \infty]$及$[T_n^a < \infty] \in \mathscr{F}_{T_n^a-}$，故得$\mathscr{F}_{T_n^a} = \mathscr{F}_{T_n^a-}$. 同理可证得$\mathscr{F}_{T_n^i} = \mathscr{F}_{T_n^i-}$.

设T为一绝不可及时，$A \in \mathscr{F}_T \cap [T < \infty]$. 由定理5.62，有$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A[T = T_n^i < \infty])$ a.s.. 对$n \geqslant 1$，$A[T = T_n^i < \infty] \in \mathscr{F}_{T_n^i} \cap [T_n^i < \infty] = \mathscr{F}_{T_n^i-} \cap [T = T_n^i < \infty] \subset \mathscr{F}_{T-} \cap [T = T_n^i < \infty]$. 为证$A \in \mathscr{F}_{T-}$，只需验证$[T = T_n^i < \infty] \in \mathscr{F}_{T-}$：

$$[T = T_n^i < \infty] = [T_{n-1}^i < T \leqslant T_n^i][T < \infty] \in \mathscr{F}_{T-}.$$

故得$\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_{T-}$.

由前一定理知，$(\mathscr{F}_t)$拟左连续. 对任一停时T，T^a可料，且

$$\mathscr{F}_T \cap [T^a < \infty] = \mathscr{F}_{T^a-} \cap [T^a < \infty].$$

从而

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_T \cap [T < \infty] &= (\mathscr{F}_{T^a} \cap [T^a < \infty]) \cup (\mathscr{F}_{T^i} \cap [T^i < \infty]) \\ &= (\mathscr{F}_{T^a-} \cap [T^a < \infty]) \cap (\mathscr{F}_{T^i-} \cap [T^i < \infty]) \\ &= \mathscr{F}_{T-} \cap [T < \infty]).\end{aligned}$$

最终得$\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_{T-}$. □

5.66 引理 设$\mathscr{H}$为一子σ-域，ξ为一可积随机变量，则对一切$A \in \mathscr{F}$及$H \in \mathscr{H}$，有

$$\int_{AH} \xi dP = \int_{AH} \frac{E[\xi I_A | \mathscr{H}]}{E[I_A | \mathscr{H}]} dP. \qquad (66.1)$$

证明 令$G = [E[I_A | \mathscr{H}] \neq 0]$，则$G \in \mathscr{H}$，且

$$P(AG^c) = \int_{G^c} E[I_A | \mathscr{H}] dP = 0.$$

因此(66.1)右边的被积项有意义. 我们有

$$\begin{aligned}\int_{AH} \frac{E[\xi I_A | \mathscr{H}]}{E[I_A | \mathscr{H}]} dP &= \int_{AHG} \frac{E[\xi I_A | \mathscr{H}]}{E[I_A | \mathscr{H}]} dP \\ &= \int_{HG} \frac{E[\xi I_A | \mathscr{H}]}{E[I_A | \mathscr{H}]} I_A \, dP\end{aligned}$$

$$= \int_{HG} E[\xi I_A | \mathscr{H}] dP$$

$$= \int_{HG} \xi I_A dP = \int_{AH} \xi dP. \quad \square$$

5.67 定理 设 $W=(W_t)$ 为一有界可测过程，则

$$^0W_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E[W_t I_{[T_{n+1}>t]} | \mathscr{G}_n]}{E[I_{[T_{n+1}>t]} | \mathscr{G}_n]} I_{[T_n \leqslant t < T_{n+1}]}. \tag{67.1}$$

若 $\mathscr{G}_0$ 完备，则有

$$^pW_t = E[W_0 | \mathscr{F}_0] I_{[t=0]} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E[W_t I_{[T_{n+1}\geqslant t]} | \mathscr{G}_n]}{E[I_{[T_{n+1}\geqslant t]} | \mathscr{G}_n]} I_{[T_n < t \leqslant T_{n+1}]}. \tag{67.2}$$

证明 对每个 $n \geqslant 0$，不难取到 $(E[W_t I_{[T_{n+1}>t]} | \mathscr{G}_n])$ 及 $(E[I_{[T_{n+1}>t]} | \mathscr{G}_n])$ 的 $\mathscr{G}_n \times \mathscr{B}(R_+)$-可测修正．由定理 5.55，由 (67.1) 定义的 ^0W 为可选过程．只需证明对任一停时 T，有

$$E[W_T I_{[T<\infty]}] = E[^0W_T I_{[T<\infty]}].$$

设 $R_n \in \mathscr{G}_n$，使得 $T<T_{n+1} \Leftrightarrow R_n < T_{n+1} \Rightarrow T = R_n$．由引理 5.66，有

$$\begin{aligned}
E[W_T I_{[T<\infty]}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[W_T I_{[T_n \leqslant T < T_{n+1}]}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[W_{R_n} I_{[T_n \leqslant R_n < T_{n+1}]}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left\{ \frac{E[W_{R_n} I_{[T_{n+1}>R_n]} | \mathscr{G}_n]}{E[I_{[T_{n-1}>R_n]} | \mathscr{G}_n]} I_{[T_n \leqslant R_n < T_{n+1}]} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left\{ \frac{E[W_t I_{[T_{n+1}>t]} | \mathscr{G}_n]}{E[I_{[T_{n+1}>t]} | \mathscr{G}_n]} \Big|_{t=R_n} I_{[T_n \leqslant R_n < T_{n+1}]} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[^0W_{R_n} I_{[T_n \leqslant R_n < T_{n+1}]}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[^0W_T I_{[T_n \leqslant T < T_{n+1}]}] \\
&= E[^0W_T I_{[T<\infty]}].
\end{aligned}$$

(67.2)可同样地证明． $\square$

5.68 系 设 ξ 为一可积随机变量，T 为一停时，则

$$E[\xi|\mathscr{F}_T]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E[\xi I_{[T_{n+1}>T]}|\mathscr{G}_n]}{E[I_{[T_{n+1}>T]}|\mathscr{G}_n]}I_{[T_n\leqslant T<T_{n+1}]}$$
$$+E[\xi|\mathscr{F}_\infty]I_{[T=\infty]}\quad \text{a.s.}.$$

若 T 为可料时，$\mathscr{G}_0$ 完备，则在 $[T<\infty]$ 上有

$$E[\xi|\mathscr{F}_{T-}]=E[\xi|\mathscr{F}_0]I_{[T=0]}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E[\xi I_{[T_{n+1}\geqslant T]}|\mathscr{G}_n]}{E[I_{[T_{n+1}\geqslant T]}|\mathscr{G}_n]}I_{[T_n<T\leqslant T_{n+1}]}\quad \text{a.s.}.$$

5.69 定理 设 A 为一可积增过程，则对每个 $n\geqslant 0$，存在 $(E[A_t^{T_{n+1}-}|\mathscr{G}_n])$ 的修正 $B^{(n)}$ 及 $(E[A_t^{T_{n+1}}|\mathscr{G}_n])$ 的修正 $C^{(n)}$，使得 $B^{(n)}$ 及 $C^{(n)}$ 均为可积增过程，且

$$A_t^o=\int_{[0,t]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dB_s^{(n)}}{P[T_{n+1}>s|\mathscr{G}_n]}I_{[T_n\leqslant s<T_{n+1}[},\quad t\geqslant 0.\tag{69.1}$$

$$A_t^p=E[A_0|\mathscr{G}_0]+\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dC_s^{(n)}}{P[T_{n+1}\geqslant s|\mathscr{G}_n]}I_{]T_n<s\leqslant T_{n+1}]},\quad t\geqslant 0.\tag{69.2}$$

证明 只证明可料情形．取 $(E[A_r^{T_{n+1}}|\mathscr{G}_n])_{r\in Q_+}$ 的修正 $(\tilde{C}_r)_{r\in Q_+}$，使得 $(\tilde{C}_r)_{r\in Q_+}$ 为单调增的．令 $C_t^{(n)}=\inf\{\tilde{C}_r; r>t, r\in Q_+\}$，$t\geqslant 0$．易见 $C^{(n)}$ 为满足要求的修正，且对任一非负 $\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$-可测过程 H，有

$$E\left[\int_{[0,\infty[}H_s dA_s^{T_{n+1}}\right]=E\left[\int_{[0,\infty[}H_s dC_s^{(n)}\right].\tag{69.3}$$

同时，对任一非负可测过程 H，可取到 $(E[H_t|\mathscr{G}_n])$ 的 $\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$-可测修正 $\tilde{H}=(\tilde{H}_t)$，且有

$$E\left[\int_{[0,\infty[}H_s dC_s^{(n)}\right]=E\left[\int_{[0,\infty[}\tilde{H}_s dC_s^{(n)}\right].\tag{69.4}$$

（事实上，取一个流为 $\mathbf{F}^{(n)}=(\mathscr{F}_t^{(n)})$，$\mathscr{F}_t^{(n)}\equiv\mathscr{G}_n$，$t\geqslant 0$，则 $\mathbf{F}^{(n)}$ 的可料 σ-域就是 $\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$，$C^{(n)}$ 是 $A^{T_{n+1}}$ 关于 $\mathbf{F}^{(n)}$ 的可料对偶投影．）

以 $G_n(ds)$ 记 T_{n+1} 关于 $\mathscr{G}_n$ 的条件分布：$G_n([s,\infty])=$

$E[I_{[T_{n+1}\geq t]}|\mathscr{G}_n]$. 令$S_n=\inf\{t\geq 0;G_n([t,\infty])=0\}$，则$S_n\in\mathscr{G}_n$，且

$$P(T_{n+1}>S_n)=E[G_n(]S_n,\infty])]=0,$$

即$T_{n+1}\leqslant S_n$ a.s.. 由于$G_n([S_n,\infty])=G_n([S_n])=E[I_{[T_{n+1}=S_n]}|\mathscr{G}_n]$，在$[T_{n+1}=S_n]$上$G_n([S_n,\infty])>0$ a.s.. 因此，按(69.2)定义的A^p有意义，且为可料增过程.

设H为一非负可料过程：

$$H=H_0I_{[0]}+\sum_{n=0}^{\infty}H^{(n)}I_{]T_n,T_{n+1}]},H^{(n)}\in\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+),$$

则有

$$\begin{aligned}E\Big[\int_{[0,\infty[}H_sdA_s\Big]&=E[H_0A_0]+\sum_{n=0}^{\infty}E\int_{]T_n,T_{n+1}]}H_s^{(n)}dA_s^{T_{n+1}}\\&=E[H_0E[A_0|\mathscr{F}_0]]\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}E\Big[\int_{]0,\infty[}H_s^{(n)}I_{[T_n<s]}dC_s^{(n)}\Big]\\&=E[H_0A_0^p]+\sum_{n=0}^{\infty}E\Big[\int_{]0,\infty[}\frac{H_s^{(n)}I_{[T_n<s\leqslant T_{n+1}]}}{G_n([s,\infty])}dC_s^{(n)}\Big]\end{aligned}$$

(由(69.3))(69.4))及$\int_{\{s:G_n([s,\infty])=0\}}dC_s^{(n)}=0$)

$$=E\Big[\int_{[0,\infty[}H_sdA_s^p\Big].$$

因此，A^p为A的可料对偶投影. □

5.70 例 设$T>0$为一随机变量，$\mathscr{G}=\sigma\{T\}\vee\mathscr{N}$. 令

$$\mathscr{F}_t=(\mathscr{N}\cap[t<T])\cup(\mathscr{G}\cap[T\leqslant t]),\ t\geqslant 0,$$

则$(\mathscr{F}_t)$为一个最简单的完备离散型流的例子，成立下列结论：

1) 为要$S\geqslant 0$为停时，必须且只需存在一常数C(可以是$+\infty$)，使得$S_{[S<T]}=C_{[C<T]}$ a.s.，

2) 为要停时S为可料时，必须且只需存在一常数C(可以是$+\infty$)，使得$S_{[S\leqslant T]}=C_{[C\leqslant T]}$a.s.. 特别，$T$为可料时当且仅当$T$ a.s.为一常数，

3) $T^i=T_{[T\in B^c]}$，$T^a=T_{[T\in B]}$，其中$B=\{b\geqslant 0:P(T=b)>0\}$.

4) 为要停时S为绝不可及时，必须且只需$S=T_{[T\in A]}$a.s.，其

中 $A\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，且 $A\subset B^c$. 特别，T 为绝不可及时当且仅当 T 的分布在$]0,\infty[$上连续.

5) 为要$(\mathscr{F}_t)$拟左连续，必须且只需存在一常数 C（可以是 $+\infty$），使得 $\boldsymbol{P}(T>C)=0$，且 T 的分布在$]0,C[$上连续. 这时$(\mathscr{F}_t)$亦为全连续的.

1)及 2)分别可直接由定理 5.54 及 5.58 得到. T^i 的绝不可及性由定理 5.63 可得，T^a 的可及性是显然的. 然后由定理 5.62 及 3)可得 4). 为了从定理 5.64 及 5.65 推出 5)，只需证明，T^a 是可料时当且仅当 $B=\varnothing$ 或 $B=\{C\}$ 且 $\boldsymbol{P}(T>C)=0$. 若 $B=\varnothing$，$T^a=\infty$ 显然可料. 若 $B=\{C\}$ 且 $\boldsymbol{P}(T>C)=0$，则 $T^a=T_{[T=C]}$满足 2)的要求，从而为可料时. 反之，若 T^a 为可料时，存在一常数 C 满足 2)的要求. 若 $C=\infty$，则 $T<\infty\Rightarrow T<T^a$ a.s.，故必有 $B=\varnothing$. 若 $C<\infty$ 及 $b\in B$，则 $\boldsymbol{P}(T=b)>0$，$T=b\Rightarrow T^a=T\geqslant C$（因为 $T<C\Rightarrow T<T^a$），从而 $T^a=C$. 因此 $b=C$，即 $B=\{C\}$. 另一方面，若 $T>C$，则 $T^a=T_{[T=C]}=\infty\neq C$，故 $\boldsymbol{P}(T>C)=0$.

问题与补充

5.1 设 T 为一停时，ξ 为一可积随机变量. 令 $X=\xi I_{[T]}$，$Y=\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_T]I_{[T]}$，则 X 与 Y 有相同的可选投影.

5.2 设 T 为一停时，ξ 为一可积随机变量. 令 $X=\xi I_{]0,T]}$，$Y=\xi I_{[0,T]}$，则

1) ${}^pX=0\Leftrightarrow\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]I_{[T>0]}=0$，

2) ${}^pY=0\Leftrightarrow\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]=0$.

5.3 设 T 为一停时，$\xi\in\mathscr{F}_T$ 为一可积随机变量. 为要 $X=\xi I_{[T,\infty[}$ 为鞅，必须且只需

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]I_{[0<T<\infty]}=0.$$

5.4 设 X 为一致可积右连左极鞅，则对任一可料时 T，$\Delta X_T I_{[T,\infty[}$ 为一致可积鞅.

5.5 设 $N=(N_t)$是参数为 λ 的 Poisson 过程，则

$$N_t^p = \lambda t,\ {}^pN_t = N_{t-},\ t \geqslant 0.$$

5.6 设 X 为一有界可测过程，且 X 与${}^oX$ 均右连左极，则

$$^p(X_-) = ({}^oX)_-.$$

5.7 设 X 为一有界可测过程，$\alpha>0$. 令 $Y_t = \int_t^\infty {}^oX_s e^{-\alpha(s-t)} ds$, $t \geqslant 0$，则 $M_t = {}^oY_t - \int_0^t (\alpha {}^oY_s - {}^oX_s) ds$, $t \geqslant 0$，为鞅.

5.8 设 X 为一非负可及过程．若 X 的可料投影为不足道过程，则 X 也为不足道过程．

5.9 设 A 为一适应有限变差过程，H 为关于 A 可积的循序过程，则${}^oH$ 关于 A 可积，且$({}^oH).A = H.A$.

5.10 设 H 为一适应可测过程，则 H 有可选修正．

5.11 设 T 为一绝不可及时，$0<T<\infty$，$A = I_{[\![T,\infty[\![}$，则 A_T^p 服从参数为 1 的指数分布．

5.12 设 X 为一右连左极上鞅，则存在一列停时(T_n)，使得$(T_n) \uparrow +\infty$，且对每个 n，X^{T_n}为类(D)过程．

5.13 设 X 为一非负右连左极上鞅，且

$$R_n = \inf\{t \geqslant 0: X_t \geqslant n\},\ n \geqslant 1,$$

则 X 为类(D)过程当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}[X_{R_n} I_{[R_n<\infty]}] = 0.$$

5.14 设 A 为一零初值可料可积增过程，Z 为由 A 产生的位势，则

$$\boldsymbol{E}[A_\infty^2] = \boldsymbol{E}\left[\int_0^\infty (Z_s + Z_{s-}) dA_s\right].$$

($\frac{1}{2}\boldsymbol{E}[A_\infty^2]$称为 A 或 Z 的**能量**.)

5.15 设 A,B 为两个零初值可料可积增过程，Y,Z 分别为由 A,B 产生的位势．若 $Y \leqslant Z$，则

$$\boldsymbol{E}[A_\infty^2] \leqslant 4\boldsymbol{E}[B_\infty^2].$$

5.16 设 X 为一位势，T 为一停时，则$(\boldsymbol{E}[X_{T+t} | \mathscr{F}_t])$为一类$(D)$位势．

5.17 设 $T>0$ 为一随机变量，其分布为 F，$A=I_{[T,\infty[}$. 令 $\mathscr{F}_t=(\mathscr{N}\cap[t<T])\cup((\mathscr{N}\vee\sigma\{T\})\cap[T\leqslant t])$，$t\geqslant 0$，则 A 的可料对偶投影为

$$\int_{]0,t\wedge T]}\frac{F(ds)}{F([s,\infty])}.$$

5.18 设 φ 为一 $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ 上的非负 Borel 函数，则下列命题等价：

1) 对定义在任何带流概率空间上的停时 T，$\varphi(T)$ 仍为停时，

2) 存在 $C\in\overline{\boldsymbol{R}}_+$，使得

$$\varphi(t)\begin{cases}=C, & \text{若 } t>C,\\ \geqslant t, & \text{若 } t\leqslant C.\end{cases}$$

5.19 设 T_n 为一 Poisson 过程 X 的第 n 个跳时，则对 $n\geqslant 1$，$T_{n-1}=\text{ess sup}\{S:S$ 为 $\boldsymbol{F}(X)$-停时且 $S<T_n\}$，特别，若 S 为 $\boldsymbol{F}(X)$-停时且 $S<T_1$，则 $S=0$ a.s..

5.20 设 T 为一可及时，D 为 $[\![T]\!]$ 的可料支集的初遇．令 $\mathscr{A}=\{S:S$ 为停时，$S\leqslant T$，且在$[T>0]$上 $S<T\}$，则 $D=\text{ess sup}\mathscr{A}$.

第六章　可积变差鞅与平方可积鞅

从本章起，我们进入现代鞅论与随机积分的领域．除非另作说明，我们的出发点总是一个带流概率空间$(\boldsymbol{\Omega},\mathscr{F},\boldsymbol{F},\boldsymbol{P})$，即$(\boldsymbol{\Omega},\mathscr{F},\boldsymbol{P})$为一完备概率空间，$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$为满足通常条件的流，今后，我们使用下列记号：

$\mathscr{A}$——适应可积变差过程全体，

$\mathscr{A}^+$——适应可积增过程全体，

$\mathscr{V}$——适应有限变差过程全体，

$\mathscr{V}^+$——适应增过程全体，

$\mathscr{M}$——一致可积鞅全体．

我们强调指出，$\mathscr{M}$中的元素总假设为右连左极的．此外，鞅总是指右连左极鞅．

对任一过程类$\mathscr{D}$，以$\mathscr{D}_0$记$\mathscr{D}$中具零初值的过程全体．例如，$\mathscr{M}_0$为零初值一致可积鞅全体．

对任一适应局部可积变差过程A，它的可料对偶投影（或补偿子）也记为$\widetilde{A}$，$A-\widetilde{A}$则称为A的补偿．

§1.　可积变差鞅

6.1 定义　$X=(X_t)$称为**可积变差鞅**，如果它既是鞅，又是可积变差过程．

显然，可积变差鞅是一致可积鞅，以$\mathscr{W}$记可积变差鞅全体，故$\mathscr{W}=\mathscr{M}\cap\mathscr{A}$．

由系5.31知，对任一$A\in\mathscr{A}$，$A-\widetilde{A}\in\mathscr{W}_0$．下一定理表明，这正是$\mathscr{W}_0$中元素的一般形式．

6.2 定理　设M为一可积变差鞅．令

$$A_t = \sum_{0<s\leqslant t} \Delta M_s, \quad t \geqslant 0$$

则 A 为适应可积变差过程，其补偿子 $\widetilde{A}$ 连续，且

$$M = M_0 + A - \widetilde{A}. \tag{2.1}$$

此外，对任一可料过程 $H=(H_t)$，有

$$\boldsymbol{E}\Big[\int_{]0,\infty[} |H_s|\,|dM_s|\Big] \leqslant 2\boldsymbol{E}\Big[\sum_{s>0} |H_s|\,|\Delta M_s|\Big]. \tag{2.2}$$

证明 令 $D_t = M_t - M_0, t\geqslant 0$，则 $D=(D_t)\in \mathscr{W}_0$，且

$$D = D^c + D^d = D^c + A.$$

由于 $D\in\mathscr{W}_0$，由系 5.31 知，$\widetilde{A} = -D^c$，故 $\widetilde{A}$ 连续，且(2.1)成立．(2.2)易由定理 5.22.2)推得．□

6.3 定理 1) 可料一致可积鞅为连续鞅．

2) 设 M 为一可料可积变差鞅，则 $M_t \equiv M_0$．

证明 1) 设 $M\in\mathscr{M}$．若 M 可料，则对任一可料时 T，有 $M_T \in \mathscr{F}_{T-}$，且由定理 4.41 有

$$M_T = \boldsymbol{E}[M_T | \mathscr{F}_{T-}] = M_{T-}.$$

即 M 与 M_- 无区别，故 M 连续．

2) 设 M 为一可料可积变差鞅，则由系 5.31 知，$M=\widetilde{M}$，$\widetilde{M}_t \equiv M_0$．□

下一定理是有关可积变差鞅的最主要的结果．

6.4 定理 设 M 为一可积变差鞅，则对任一有界鞅 N，有

$$\boldsymbol{E}[M_\infty N_\infty] = \boldsymbol{E}[M_0 N_0] + \boldsymbol{E}\Big[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s\Big]. \tag{4.1}$$

此外，$(L_t) = (M_t N_t - \sum_{s\leqslant t} \Delta M_s \Delta N_s)$ 为一致可积鞅．

证明 由于 N 是 N_∞ 的可选投影，故

$$\boldsymbol{E}[M_\infty N_\infty] = \boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty[} N_\infty dM_s\Big] = \boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty[} N_s dM_s\Big].$$

另一方面，$\widetilde{M}_t \equiv M_0$，所以

$$\boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty[} N_{s-} dM_s\Big] = \boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty[} N_{s-} d\widetilde{M}_s\Big] = \boldsymbol{E}[M_0 N_0].$$

因此

$$E[M_\infty N_\infty] - E[M_0 N_0] = E\left[\int_{[0,\infty[} \Delta N_s dM_s\right]$$
$$= E\left[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s\right].$$

设 T 为一停时，对 N^T 应用(4.1)得

$$E[M_T N_T] = E[M_\infty N_T] = E[M_0 N_0] + E\left[\sum_{0<s\leqslant T} \Delta M_s \Delta N_s\right],$$

即 $E[L_T]=E[L_0]$. 由定理 4.40 知，$L\in\mathscr{M}$. □

下一定理说明可料过程在随机积分中的特殊地位.

6.5 定理 设 M 为一可积变差鞅，H 为一可料过程，使得

$$E\left[\int_{[0,\infty[} |H_s\|dM_s|\right]<\infty,$$

则 $H.M$ 为可积变差鞅.

证明 由定理 5.23.2)，有

$$(\widetilde{H.M}) = H.\widetilde{M} = H_0 M_0.$$

因此，$H.M-(\widetilde{H.M})=H.M-H_0M_0\in\mathscr{W}_0$，$H.M\in\mathscr{W}$. □

§2. 平方可积鞅

6.6 定义 设 M 为一鞅，称 M 为**平方可积鞅**，若 $\sup_t E[M_t^2]<\infty$. 以 $\mathscr{M}^2$ 记平方可积鞅全体. 由定理 1.7.2)知 $\mathscr{M}^2\subset\mathscr{M}$.

6.7 定理 设 M 为一平方可积鞅，则对任一 $\lambda>0$，有

$$P(\sup_t |M_t| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\sup_t E[M_t^2]. \tag{7.1}$$

证明 设$\{t_1,t_2,\cdots\}$为 R_+的一可数稠子集. 由系 2.13，有

$$P\left(\sup_{j\leqslant n}|M_{t_j}| > \lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\sup_t E[M_t^2].$$

由于 $[\sup_t|M_t|>\lambda]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\sup_{j\leqslant n}|M_{t_j}|>\lambda\right]$，$\left(\left[\sup_{j\leqslant n}|M_{t_j}|>\lambda\right]\right)_{n\geqslant 1}$关于 n 单调增，故

$$P(\sup_t |M_t| > \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\sup_t E[M_t^2]. \tag{7.2}$$

在(7.2)中以λ-ε代入，再令$\varepsilon \downarrow 0$得(7.1). □

(7.1)通常称为 **Kolmogorov 不等式**.

6.8 定理 1)设$M \in \mathscr{M}$，则$M \in \mathscr{M}^2$当且仅当$E[M_\infty^2] < \infty$. 这时我们有

$$E[M_\infty^2] = \sup_t E[M_t^2]. \tag{8.1}$$

2) $\mathscr{M}^2$按内积$(M,N) = E[M_\infty N_\infty]$构成一 Hilbert 空间，且与$L^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P)$同构，$M \mapsto M_\infty$为其同构映射.

证明 1) 设$M \in \mathscr{M}^2$，由 Fatou 引理有

$$E[M_\infty^2] \leqslant \sup_t E[M_t^2]. \tag{8.2}$$

反之，设$M \in \mathscr{M}$，且$E[M_\infty^2] < \infty$. 由于$M_t = E[M_\infty | \mathscr{F}_t]$，由 Jensen 不等式，有$M_t^2 \leqslant E[M_\infty^2 | \mathscr{F}_t]$. 故

$$\sup_t E[M_t^2] \leqslant E[M_\infty^2]. \tag{8.3}$$

这表明$M \in \mathscr{M}^2$. (8.1)由(8.2)及(8.3)推得.

2) 显然. □

6.9 定理 设$(M^n)_{n \geqslant 1} \subset \mathscr{M}^2$，$M \in \mathscr{M}^2$. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \| M_\infty^n - M_\infty \|_2 = \lim_{n\to\infty} \{E[(M_\infty^n - M_\infty)^2]\}^{1/2} = 0,$$

则存在一子列$(M^{n_k}, k \geqslant 1)$，使得对几乎所有ω，$M_t^{n_k}(\omega)$对$t \in \mathbf{R}_+$一致收敛于$M_t(\omega)$.

证明 取子列$(M^{n_k}, k \geqslant 1)$，使得$\sum_{k=1}^\infty \| M_\infty^{n_k} - M_\infty \|_2 < \infty$. 由 Doob 不等式，有

$$\begin{aligned} E\Big[\sum_{k=1}^\infty \sup_t |M_t^{n_k} - M_t|\Big] &= \sum_{k=1}^\infty E[\sup_t |M_t^{n_k} - M_t|] \\ &\leqslant \sum_{k=1}^\infty \{E[\sup_t (M_t^{n_k} - M_t)^2]\}^{1/2} \\ &\leqslant 2\sum_{k=1}^\infty \{E[(M_\infty^{n_k} - M_\infty)^2]\}^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

特别，$\sum_{k=1}^\infty \sup_t |M_t^{n_k} - M_t| < \infty$ a.s.. 这表明，对几乎所有ω，

$M_t^{n_k}(\omega)$对$t\in \boldsymbol{R}_+$一致收敛于$M_t(\omega)$. □

6.10 系 以$\mathscr{M}^{2,c}$记连续平方可积鞅全体，则$\mathscr{M}^{2,c}$为$\mathscr{M}^2$的闭子空间.

6.11 定理 1) 设$M\in\mathscr{M}^2$，则对任一停时T，$M^T\in\mathscr{M}^2$. 此外设(T_n)为一列停时，且$T_n\uparrow\infty$ a.s.，则$M_{T_n}\xrightarrow{L^2}M_\infty$.

2) 设$(M^n)_{n\geq1}\subset\mathscr{M}^2$，$M\in\mathscr{M}^2$. 如果$\|M_\infty^n-M_\infty\|_2\to0$，则对一切停时$T$，$\|M_T^n-M_T\|_2\to0$.

证明 1) 首先，由定理4.39知，$M^T\in\mathscr{M}$. 另一方面，

$$\boldsymbol{E}[M_T^2]\leqslant\boldsymbol{E}[(\sup_t|M_t|)^2]\leqslant4\sup_t\boldsymbol{E}[M_t^2]<\infty.$$

由定理6.8.1)得$M^T\in\mathscr{M}^2$.

设(T_n)为一列停时，且$T_n\uparrow\infty$ a.s.. 由Doob停止定理，$(M_{T_n})_{n\geq1}$关于$(\mathscr{F}_{T_n})_{n\geq1}$为平方可积鞅. 由系2.20，有$M_{T_n}\xrightarrow{L^2}M_\infty$.

2) 由于$(M^n-M)^2$为下鞅，有

$$\boldsymbol{E}[(M_T^n-M_T)^2]\leqslant\boldsymbol{E}[(M_\infty^n-M_\infty)^2].$$

由此即得2). □

6.12 定义 设M,N为两个平方可积鞅. 称M与N相互**正交**，如果$M_0N_0=0$ a.s.，且对任何停时T，$\boldsymbol{E}[M_TN_T]=0$. 我们用$M\perp\!\!\!\perp N$表示M与N正交. 我们用$M\perp N$表示$\boldsymbol{E}[M_\infty N_\infty]=0$，即$M,N$作为Hilbert空间$\mathscr{M}^2$中的两个元素相互正交. 为了区别两种正交概念，有时称后者为**弱正交**.

6.13 定理 设$M,N\in\mathscr{M}^2$，且$M_0N_0=0$，则M与N相互正交当且仅当MN为鞅.

证明 必要性由定理4.40即得，往证充分性. 设MN为鞅. 由于$\sup_t|M_t|\in L^2$，$\sup_t|N_t|\in L^2$，故$\sup_t|M_tN_t|\in L^1$. 因此MN为一致可积鞅. 对任一停时T，有$\boldsymbol{E}[M_TN_T]=\boldsymbol{E}[M_0N_0]=0$，即$M\perp\!\!\!\perp N$. □

6.14 定理 设$\mathscr{X}\subset\mathscr{M}^2$，且$\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$为$\mathscr{X}$产生的闭线性子空间. 设$N\in\mathscr{M}^2$. 若$N\perp\!\!\!\perp\mathscr{X}$，则$N\perp\!\!\!\perp\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$.

证明 令$\mathscr{L}(\mathscr{X})$为$\mathscr{X}$产生的线性子空间，则显然有$N\perp\!\!\!\perp\mathscr{L}$

$(\mathscr{K})$. 设 $M\in\overline{\mathscr{L}(\mathscr{K})}$. 取 $(M^n)\subset\mathscr{L}(\mathscr{K})$，使得 $\|M^n_\infty-M_\infty\|_2\to 0$. 由定理 6.11，对任一停时 T，有 $M^n_T\xrightarrow{L^2}M_T$ 及 $M^n_TN_T\xrightarrow{L^1}M_TN_T$. 因此，$M_0N_0=0$ a.s.，$\boldsymbol{E}[M_TN_T]=0$，即 $M\perp\!\!\!\perp N$，所以，$N\perp\!\!\!\perp\overline{\mathscr{L}(\mathscr{K})}$. □

6.15 定义 一族可测过程 $\mathscr{K}$ 称为**稳定的**，如果

i) 对任一停时 T，$M\in\mathscr{K}\Rightarrow M^T\in\mathscr{K}$，

ii) 对任一 $A\in\mathscr{F}_0$，$M\in\mathscr{K}\Rightarrow I_AM\in\mathscr{K}$.

$\mathscr{M}^2$ 的稳定闭线性子空间简称为 $\mathscr{M}^2$ 的**稳定子空间**.

6.16 定理 设 $\mathscr{K}\subset\mathscr{M}^2$. 若 $\mathscr{K}$ 稳定，则 $\mathscr{K}^\perp$ 及 $\overline{\mathscr{L}(\mathscr{K})}$ 为相互正交的稳定子空间，其中

$$\mathscr{K}^\perp=\{M\in\mathscr{M}^2;\forall N\in\mathscr{K},M\perp N\}.$$

证明 设 $N\in\mathscr{K}^\perp$，$M\in\mathscr{K}$. 对任一停时 T，有 $M^T\in\mathscr{K}$，故

$$\boldsymbol{E}[M_\infty N^T_\infty]=\boldsymbol{E}[M_\infty N_T]=\boldsymbol{E}[M_TN_T]=\boldsymbol{E}[M^T_\infty N_\infty]=0.$$

这表明 $N^T\in\mathscr{K}^\perp$. 另一方面，若 $A\in\mathscr{F}_0$，则 $I_AM\in\mathscr{K}$，且 $\boldsymbol{E}[I_AN_\infty M_\infty]=0$，从而 $I_AN^T\in\mathscr{K}^\perp$. 所以 $\mathscr{K}^\perp$ 为稳定子空间. 进而 $\overline{\mathscr{L}(\mathscr{K})}=(\mathscr{K}^\perp)^\perp$ 也为稳定子空间.

现设 $M\in\overline{\mathscr{L}(\mathscr{K})}$ 及 $N\in\mathscr{K}^\perp$. 对任一停时 T，有 $M^T\in\overline{\mathscr{L}(\mathscr{K})}$ 及 $N^T\in\mathscr{K}^\perp$，故 $\boldsymbol{E}[M_TN_T]=\boldsymbol{E}[M^T_\infty N^T_\infty]=0$. 此外，若 $A\in\mathscr{F}_0$，则 $I_AM^T\in\overline{\mathscr{L}(\mathscr{K})}$，$\boldsymbol{E}[I_AM_TN_T]=0$. 特别取 $T=0$，得 $M_0N_0=0$ a.s.，这表明 $M\perp\!\!\!\perp N$. □

6.17 系 令 $\mathscr{M}^{2,d}=(\mathscr{M}^{2,c})^\perp$，则 $\mathscr{M}^{2,c}$ 及 $\mathscr{M}^{2,d}$ 为稳定子空间，且 $\mathscr{M}^{2,c}\perp\!\!\!\perp\mathscr{M}^{2,d}$.

6.18 定义 $\mathscr{M}^{2,d}$ 中的元素称为**纯断平方可积鞅**.

设 $M\in\mathscr{M}^{2,d}$，则显然有 $M_0=0$ a.s.[1]

设 $M\in\mathscr{M}^2$. 由系 6.17，M 有如下唯一分解

$$M=M_0+M^c+M^d,$$

---

1) 这里需要特别指出：在有些文献中，$\mathscr{M}^{2,c}$ 表示零初值连续平方可积鞅空间，从而纯断平方可积鞅的初值不必为零.

其中 $M^c \in \mathscr{M}_0^{2,c}$，$M^d \in \mathscr{M}^{2,d}$. M^c 称为 M 的**连续鞅部分**，M^d 称为 M 的**纯断鞅部分**.

设 $M \in \mathscr{M}^2$，T 为一停时，易见

$$(M^T)^c = (M^c)^T, (M^T)^d = (M^d)^T.$$

§3. 纯断平方可积鞅的结构

6.19 引理 设 $A \in \mathscr{A}^+$，则

$$E[\widetilde{A}_\infty^2] \leqslant 4E[A_\infty^2].$$

证明 令 $N=(N_t)$ 为鞅 $(E[A_\infty|\mathscr{F}_t])$ 的右连左极修正，$N_\infty^* = \sup_t |N_t|$. 由 Doob 不等式，有

$$E[(N_\infty^*)^2] \leqslant 4E[N_\infty^2] = 4E[A_\infty^2].$$

由于 $A-\widetilde{A} \in \mathscr{M}$，有

$$A_s - \widetilde{A}_s = E[A_\infty - \widetilde{A}_\infty|\mathscr{F}_s] = N_s - E[\widetilde{A}_\infty|\mathscr{F}_s].$$

由定理 5.13 得

$$\begin{aligned}
E[\widetilde{A}_\infty^2] &= E\left[\int_{[0,\infty[} \widetilde{A}_\infty d\widetilde{A}_s\right] \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} E[\widetilde{A}_\infty|\mathscr{F}_{s-}] d\widetilde{A}_s\right] \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} (\widetilde{A}_{s-} - A_{s-} + N_{s-}) d\widetilde{A}_s\right] \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} (\widetilde{A}_{s-} - A_{s-} + N_{s-}) dA_s\right] \\
&\leqslant E[\widetilde{A}_\infty A_\infty + N_\infty^* A_\infty].
\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}
E[\widetilde{A}_\infty A_\infty] &= E\left[\int_{[0,\infty[} A_\infty d\widetilde{A}_s\right] \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} N_{s-} dA_s\right] \\
&\leqslant E[N_\infty^* A_\infty].
\end{aligned}$$

故有

$$E[\tilde{A}_\infty^2] \leqslant 2E[N_\infty A_\infty]$$
$$\leqslant 2\{E[(N_\infty)^2]E[A_\infty^2]\}^{1/2}$$
$$\leqslant 4E[A_\infty^2]. \quad \Box$$

6.20 引理 设 $M\in\mathcal{M}^2$，则对任一停时 T，有

$$E[(\Delta M_T)^2] \leqslant 16E[M_\infty^2].$$

证明 令 $M_\infty^* = \sup_t |M_t|$. 由 Doob 不等式有

$$E[(M_\infty^*)^2] \leqslant 4E[M_\infty^2] < \infty.$$

由于 $|\Delta M_T| \leqslant 2M_\infty^*$，故 $E[(\Delta M_T)^2] \leqslant 16E[M_\infty^2]$. $\Box$

现在我们开始研究纯断平方可积鞅的结构.

设 T 为一停时且 $T>0$. 令

$$\mathcal{M}^2[T] = \{M \in \mathcal{M}^{2,d}: [\Delta M \neq 0] \subset [T]\}.$$

显然，$\mathcal{M}^2[T]$为稳定子空间.

6.21 定理 设 T 为一绝不可及时或可料时.

1) $M\in\mathcal{M}^2[T] \Leftrightarrow M = A-\tilde{A}$，其中 $A=\xi I_{[T,\infty[}$，$\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$.

2) 设 $M\in\mathcal{M}^2[T]$，则对任一 $N\in\mathcal{M}^2$，有

$$E[M_\infty N_\infty] = E[\Delta M_T \Delta N_T]. \tag{21.1}$$

3) 设 $M\in\mathcal{M}^2$，则 M 在 $\mathcal{M}^2[T]$ 上的(正交)投影为 $N=A-\tilde{A}$，其中 $A=\Delta M_T I_{[T,\infty[}$.

证明 1) 充分性. 令 $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$，$A=\xi I_{[T,\infty[}$. 由引理6.19，$A-\tilde{A}\in\mathcal{M}^2$. 若$T$为绝不可及时，则$\tilde{A}$连续(系5.28.3). 若$T$为可料时，则$\tilde{A}=E[\xi|\mathcal{F}_{T-}]I_{[T,\infty[}$(定理5.29.2). 在两种情形下，$A-\tilde{A}$在$[T]$之外都连续. 剩下只要证明$A-\tilde{A}\in\mathcal{M}^{2,d}$. 令$N\in\mathcal{M}^{2,c}$，置

$$T_n = \inf\{t\geqslant 0: |N_t| \geqslant n\}.$$

则$T_n, n\geqslant 1$，为停时，且$T_n\uparrow+\infty$. 对每个n，N^{T_n}为有界连续鞅. 由定理6.4得

$$E[(A-\tilde{A})_\infty N_{T_n}] = E[(A-\tilde{A})_\infty N^{T_n}_\infty] = 0.$$

由定理6.11.1)得 $E[(A-\tilde{A})_\infty N_\infty]=0$. 这表明 $A-\tilde{A}\in\mathcal{M}^{2,d}$. 因此 $A-\tilde{A}\in\mathcal{M}^2[T]$.

必要性． 设 $M\in\mathscr{M}^2[T]$. 令 $A=\Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![}$. 如上所证，$A-\widetilde{A}\in\mathscr{M}^2[T]$，故 $M-(A-\widetilde{A})\in\mathscr{M}^2[T]$. 另一方面，若 T 为绝不可及时，$\widetilde{A}$ 连续，$\Delta(A-\widetilde{A})_T=\Delta A_T=\Delta M_T$. 若 T 为可料时，$\widetilde{A}=E[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}]I_{[\![T,\infty[\![}=0$（定理 4.41）. $\Delta(A-\widetilde{A})_T=\Delta M_T$. 这表明 $M-(A-\widetilde{A})\in\mathscr{M}^{2,c}$，故 $M-(A-\widetilde{A})=0$，即 $M=A-\widetilde{A}$.

2）设 $N^{(n)}$ 为有界鞅（$E[N_\infty I_{[|N_\infty|\leqslant n]}|\mathscr{F}_t]$）的右连左极修正．由定理 6.4 有

$$E[M_\infty N_\infty^{(n)}]=E[\Delta M_T\Delta N_T^{(n)}].\tag{21.2}$$

由于 $n\to\infty$ 时，$N_\infty^{(n)}=N_\infty I_{[|N_\infty|\leqslant n]}\xrightarrow{L^2}N_\infty$，由引理 6.20 有 $\Delta N_T^{(n)}\xrightarrow{L^2}\Delta N_T$，$n\to\infty$. 在(21.2)中令 $n\to\infty$ 得(21.1).

3）由 1)知，$N=A-\widetilde{A}\in\mathscr{M}^2[T]$，且 $M-N$ 在 $[\![T]\!]$ 上无跳．由 2)，$M-N\perp\mathscr{M}^2[T]$. 这表明 N 是 M 在 $\mathscr{M}^2[T]$ 上的投影．□

下一定理描述了纯断平方可积鞅的结构．

6.22 定理 1）设 $M\in\mathscr{M}^2$，则

$$E[M_0^2]+E[\sum_s(\Delta M_s)^2]\leqslant E[M_\infty^2].\tag{22.1}$$

为要(22.1)中等号成立，当且仅当 $M-M_0\in\mathscr{M}^{2,d}$.

2）设 $M\in\mathscr{M}^{2,d}$，$(T_n)_{n\geqslant1}$ 为一穷举 M 跳的标准停时列（见定理 4.21），M^n 为 M 在 $\mathscr{M}^2[T_n]$上的投影（即 M^n 为 $\Delta M_{T_n}I_{[\![T_n,\infty[\![}$ 的补偿），则正交级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M^n$ 在 $\mathscr{M}^2$ 中收敛于 M.

3）设 $M\in\mathscr{M}^{2,d}$，则 M 有如下唯一分解：

$$M=M^{da}+M^{di},$$

其中 $M^{da}\in\mathscr{M}^{2,d}$只有可及跳，$M^{di}\in\mathscr{M}^{2,d}$只有绝不可及跳．

证明 1）设$(T_n)_{n\geqslant1}$为穷举 M 跳的标准停时列．令

$$A^n=\Delta M_{T_n}I_{[\![T_n,\infty[\![},\quad M^n=A^n-\widetilde{A}^n,\quad H^k=\sum_{n=1}^{k}M^n.$$

则 $M-M_0-H^k$ 在 $[\![T_1]\!]\cup\cdots\cup[\![T_k]\!]$ 上无跳．由(21.1)，$M-M_0-H^k$ 弱正交于 H^k. 但 $M^1,\cdots,M^k$ 相互弱正交，故

$$E[M_\infty^2]=E[M_0^2]+E[(H_\infty^k)^2]+E[(M_\infty-M_0-H_\infty^k)^2]$$

$$= \boldsymbol{E}[M_0^2] + \sum_{n=1}^{k} \boldsymbol{E}[(M_\infty^n)^2] + \boldsymbol{E}[(M_\infty - M_0 - H_\infty^k)^2].$$

由(21.1)得 $\boldsymbol{E}[(M_\infty^n)^2] = \boldsymbol{E}[(\Delta M_{T_n})^2]$，故

$$\boldsymbol{E}[M_\infty^2] = \boldsymbol{E}[M_0^2] + \sum_{n=1}^{k} \boldsymbol{E}[(\Delta M_{T_n})^2] + \boldsymbol{E}[(M_\infty - M_0 - H_\infty^k)^2]. \qquad (22.2)$$

特别，正交级数 $\sum_1^\infty M^n$ 收敛于 $\mathscr{M}^2$ 中一元素 H，且 $H \in \mathscr{M}^{2,d}$. 此外，由定理 6.9 知，H 与 M 有相同的跳．因此，$M - H$ 为连续平方可积鞅，且 $M^d = H$，$M^c = M - M_0 - H$. 由(22.2)有

$$\boldsymbol{E}[M_\infty^2] = \boldsymbol{E}[M_0^2] + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{E}[(\Delta M_{T_n})^2] + \boldsymbol{E}[(M_\infty^c)^2]$$

$$= \boldsymbol{E}[M_0^2] + \boldsymbol{E}\sum_s [(\Delta M_s)^2 + \boldsymbol{E}[(M_\infty^c)^2].$$

所以，(22.1)成立．为要(22.1)中等号成立当且仅当 $M^c = 0$，即 $M - M^0 = M^d \in \mathscr{M}^{2,d}$.

2）的证明已包含在 1)的证明中．

3）设 $(T_n)_{n\geq 1}$ 为穷举 M 跳的标准停时列．令 $N_1 = \{n; T_n$ 为可料时$\}$，$N_2 = \{n; T_n$ 为绝不可及时$\}$．

$$M^{da} = \sum_{n \in N_1} M^n, \quad M^{di} = \sum_{n \in N_2} M^n,$$

其中 M^n 为 $\Delta M_{T_n} I_{[T_n, \infty[}$ 的补偿．由定理 6.9 知，M^{da} 只有可及跳，M^{di} 只有绝不可及跳．由 2)得 $M = M^{da} + M^{di}$. 分解的唯一性不难证明(参见定理 4.25 的证明)． □

6.23 定理 1）设 $M, N \in \mathscr{M}^2$，则

$$\boldsymbol{E}|M_0 N_0| + \boldsymbol{E}\Big[\sum_s |\Delta M_s \Delta N_s|\Big] \leqslant \sqrt{\boldsymbol{E}[M_\infty^2]}\sqrt{\boldsymbol{E}[N_\infty^2]}. \qquad (23.1)$$

2）设 $M \in \mathscr{M}^{2,d}$，则对一切 $N \in \mathscr{M}^2$ 有

$$\boldsymbol{E}[M_\infty N_\infty] = \boldsymbol{E}\Big[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s\Big]. \qquad (23.2)$$

此外，$(L_t)=\{M_tN_t-\sum_{s\le t}\Delta M_s\Delta N_s\}$ 为一致可积鞅.

3) $\mathscr{M}_0^2\cap\mathscr{W}\subset\mathscr{M}^{2,d}$.

证明 1) 由 Schwarz 不等式有

$$E[|M_0N_0|]+E\Big[\sum_s|\Delta M_s\Delta N_s|\Big]\leqslant\{E[M_0^2]$$

$$+E\sum_s(\Delta M_s)^2\}^{1/2}\{E[N_0^2]+E\sum_s(\Delta N_s)^2\}^{1/2}. \quad (23.3)$$

(23.1)由(23.3)及(22.1)推得.

2) 首先设 $N\in\mathscr{M}^{2,d}$，由定理 6.22.1)有

$$E[M_\infty N_\infty]=\frac{1}{2}\{E[(M_\infty+N_\infty)^2]-E[M_\infty^2]-E[N_\infty^2]\}$$

$$=\frac{1}{2}E\Big[\sum_s(\Delta M_s+\Delta N_s)^2-\sum_s(\Delta M_s)^2-\sum_s(\Delta N_s)^2\Big]$$

$$=E\Big[\sum_s\Delta M_s\Delta N_s\Big].$$

故(23.2)对 $N\in\mathscr{M}^{2,d}$成立. 现设 $N\in\mathscr{M}^2$，N^d 为 N 的纯断鞅部分，则 $N-N^d\in\mathscr{M}^{2,c}$，$M\perp\!\!\!\perp N-N^d$，$E[M_\infty(N_\infty-N_\infty^d)]=0$，故

$$E[M_\infty N_\infty]=E[M_\infty N_\infty^d]=E\Big[\sum_s\Delta M_s\Delta N_s\Big].$$

(23.2)成立.

设 T 为一停时. 对 M^T 及 N^T 应用(23.2)得 $E[L_T]=0$. 由定理 4.40 知，(L_t)为一致可积鞅.

3) 设 $M\in\mathscr{M}_0^2\cap\mathscr{W}$. 由定理 6.4 知，对任一有界鞅 N 有

$$E[M_\infty N_\infty]=E\Big[\sum_s\Delta M_s\Delta N_s\Big]. \quad (23.4)$$

由于有界鞅在 $\mathscr{M}^2$ 中对于范数 $\|M\|=\sqrt{E[M_\infty^2]}$稠密，故由(23.1)知，(23.4)对一切 $N\in\mathscr{M}^2$ 成立. 特别取 $N=M$，有

$$E[M_\infty^2]=E\Big[\sum_s(\Delta M_s)^2\Big].$$

注意到 $M_0=0$，由定理 6.22.1)知，$M\in\mathscr{M}^{2,d}$. □

§4. 二次变差过程

6.24 定义 设 $M\in\mathcal{M}^2$. 由Doob不等式知, $M^*=\sup_t|M_t|\in L^2$. 因此, M^2 为类(D)下鞅. 按Doob-Meyer分解定理, 存在唯一的可料可积增过程, 记作 $\langle M,M\rangle$ 或简记为 $\langle M\rangle$, 使得 $M^2-\langle M\rangle\in\mathcal{M}_0$. $\langle M\rangle$ 称为 M 的**可料二次变差过程, 或尖括号过程**.

设 $M,N\in\mathcal{M}^2$. 令

$$\langle M,N\rangle=\frac{1}{2}[\langle M+N\rangle-\langle M\rangle-\langle N\rangle].$$

$\langle M,N\rangle$ 称为 M 与 N 的**可料二次协变差过程**.

注 令 $M\in\mathcal{M}^2_0$. 为要 $\langle M\rangle=0$, 当且仅当 $M=0$. 由定理5.50知, 若 M 拟左连续, 则 $\langle M\rangle$ 连续.

6.25 例 设 $M=(M_t)$ 为一右连左极独立增量过程, $E[M_t]=a$ 为常数, 则 M 为鞅. 进一步, 设 M 为平方可积鞅, 则由定理2.69知, $M_t^2-(M_0^2+E[M_t^2]-E[M_0^2])\in\mathcal{M}_0$. 因此, $\langle M\rangle_t=M_0^2+E[M_t^2]-E[M_0^2]$. 特别, 若 $M_0=a$, 则 $\langle M\rangle_t=E[M_t^2]$ 非随机.

注 若 $M\in\mathcal{M}^2$, 则 M 有正交增量: 对 $t_1<t_2<t_3$ 有

$$E[(M_{t_3}-M_{t_2})(M_{t_2}-M_{t_1})|\mathcal{F}_{t_2}]$$

$$=(M_{t_2}-M_{t_1})E[M_{t_3}-M_{t_2}|\mathcal{F}_{t_2}]=0\quad \text{a.s.},$$

$$E[(M_{t_3}-M_{t_2})(M_{t_2}-M_{t_1})]=0.$$

下一定理给出 $\langle M,N\rangle$ 的一个刻画.

6.26 定理 设 $M,N\in\mathcal{M}^2$, 则 $\langle M,N\rangle$ 是唯一的可料可积变差过程, 使得 $MN-\langle M,N\rangle\in\mathcal{M}_0$.

证明 我们有

$$MN-\langle M,N\rangle=\frac{1}{2}[(M+N)^2-\langle M+N\rangle$$

$$-M^2+\langle M\rangle-N^2+\langle N\rangle].$$

于是 $MN-\langle M,N\rangle\in\mathcal{M}_0$. 唯一性容易由定理6.3.2)看出. □

作为该定理的一个直接推论, $\langle M,N\rangle$ 是 M,N 的对称双线性

形式.

6.27 定义 设$M,N\in\mathscr{M}^2$. 令

$$[M,N]_t = M_0N_0 + \langle M^c,N^c\rangle_t + \sum_{s\leqslant t}\Delta M_s\Delta N_s,\quad t\geqslant 0, \tag{27.1}$$

其中M^c,N^c分别为M,N的连续鞅部分.$[M,N]$为适应可积变差过程(定理6.23.1)).$[M,M]$也简记为$[M]$,是适应可积增过程.$[M]$称为M的**二次变差过程或方括号过程**.$[M,N]$称为M与N的**二次协变差过程**.

6.28 定理 设$M,N\in\mathscr{M}^2$.

1) $[M,N]$为唯一的适应可积变差过程,使得$MN-[M,N]\in\mathscr{M}_0$及$\Delta[M,N]=\Delta M\Delta N$.

2) $\langle M,N\rangle$为$[M,N]$的可料对偶投影.

证明 1)令$M=M_0+M^c+M^d$. 我们有$M^dN-[M^d,N]\in\mathscr{M}_0$(定理6.23.2)),$M^cN^d\in\mathscr{M}_0(M^c\perp\!\!\!\perp N^d)$,且

$$M^cN-[M^c,N]=N_0M^c+M^cN^c+M^cN^d-\langle M^c,N^c\rangle\in\mathscr{M}_0.$$

因此

$$MN-[M,N]=M_0N+M^cN+M^dN-(M_0N_0+[M^c,N]+[M^d,N])\in\mathscr{M}_0.$$

$\Delta[M,N]=\Delta M\Delta N$是显然的. 唯一性得自定理6.3.2).

2) 得自1)及定理6.26. □

从定理6.28.1)也容易看出,$[M,N]$是M及N的对称双线性形式.

6.29 系 设$M,N\in\mathscr{M}^2$,则下列命题等价:

1) $M\perp\!\!\!\perp N$,

2) $[M,N]\in\mathscr{M}_0$,

3) $\langle M,N\rangle=0$.

6.30 系 设$M,N\in\mathscr{M}^2$,则下列命题等价:

1) $[M,N]=0$

2) $M\perp\!\!\!\perp N$,且$\Delta M\Delta N=0$,(即M与N无公共跳).

证明 1)⇒2). 设$[M,N]=0$. 由系 6.29 知,$M \perp\!\!\perp N$. 同时有$\Delta M \Delta N=\Delta[M,N]=0$.

2)⇒1). 设 $M \perp\!\!\perp N$ 及 $\Delta M \Delta N=0$. 由系 6.29 知,$[M,N]=\langle M^c,N^c\rangle$为可料零初值可积变差鞅. 因此,$[M,N]=0$(定理 6.3.2)). □

6.31 定理 设$M,N\in\mathscr{M}^2$,T为一停时,则

$$\langle M,N^T\rangle=\langle M,N\rangle^T, \tag{31.1}$$

$$[M,N^T]=[M,N]^T. \tag{31.2}$$

证明 由于$(MN)^T-\langle M,N\rangle^T$为鞅(定理 4.39),故由定理 6.3.2),为证(31.1),只需证$(MN)^T-\langle M,N^T\rangle$为鞅. 但$MN^T-\langle M,N^T\rangle$为鞅. 于是只需证$(MN^T)-MN^T$为鞅:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[(M_T-M_{t\wedge T})N_T|\mathscr{F}_t]&=\boldsymbol{E}[(M_T-M_{t\wedge T})N_T|\mathscr{F}_{t\vee T}|\mathscr{F}_t]\\
&=\boldsymbol{E}[(M_T-M_{t\vee T})N_T|\mathscr{F}_t]\\
&=\boldsymbol{E}[(M_T-M_t)N_TI_{[T\leqslant t]}|\mathscr{F}_t]\\
&=(M_T-M_t)N_TI_{[T\leqslant t]}\\
&=(M_{t\wedge T}-M_t)N_{t\wedge T}.
\end{aligned}$$

因为$\langle M^c,(N^T)^c\rangle=\langle M^c,(N^c)^T\rangle=\langle M^c,N^c\rangle^T$,故由(31.1)及$[M,N]$的定义得到(31.2). □

6.32 引理 设$M,N\in\mathscr{M}^2$,则对几乎所有ω,对一切$0\leqslant s<t<\infty$,有

$$\begin{aligned}
&|\langle M,N\rangle_t(\omega)-\langle M,N\rangle_s(\omega)|\\
&\leqslant[\langle M\rangle_t(\omega)-\langle M\rangle_s(\omega)]^{1/2}[\langle N\rangle_t(\omega)-\langle N\rangle_s(\omega)]^{1/2},
\end{aligned} \tag{32.1}$$

$$\begin{aligned}
&|[M,N]_t(\omega)-[M,N]_s(\omega)|\\
&\leqslant\{[M]_t(\omega)-[M]_s(\omega)\}^{1/2}\{[N]_t(\omega)-[N]_s(\omega)\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{32.2}$$

证明 我们只证(32.1),(32.2)的证明完全相同. 给定$0\leqslant s<t<\infty$,对一切有理数

$$\langle M+\lambda N\rangle_t-\langle M+\lambda N\rangle_s\geqslant0,\quad\text{a.s.},$$

我们用$\langle M,N\rangle_s^t$表示$\langle M,N\rangle_t-\langle M,N\rangle_s$,则有

$$\langle M\rangle_s^t+2\lambda\langle M,N\rangle_s^t+\lambda^2\langle N\rangle_s^t\geqslant 0,\quad \text{a.s.},$$

$$|\langle M,N\rangle_s^t|\leqslant(\langle M\rangle_s^t)^{1/2}(\langle N\rangle_s^t)^{1/2},\quad \text{a.s.}.$$

但$\langle M\rangle$、$\langle N\rangle$、$\langle M,N\rangle$均为右连续过程,故对几乎所有ω,(32.1)对一切$0\leqslant s<t<\infty$成立. □

由引理 6.32 及定理 1.45,我们立即推得如下的 **Kunita-Watanabe** 不等式.

6.33 定理 设$M,N\in\mathscr{M}^2$,H,K为两个可测过程,则有

$$\int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d\langle M,N\rangle_s|$$
$$\leqslant\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d\langle M\rangle_s\right)^{1/2}\left(\int_{[0,\infty[}K_s^2d\langle N\rangle_s\right)^{1/2}\quad \text{a.s.},\tag{33.1}$$

$$\int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d[M,N]_s|$$
$$\leqslant\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{1/2}\left(\int_{[0,\infty[}K_s^2d[N]_s\right)^{1/2}\text{a.s.}.\tag{33.2}$$

6.34 系 令p,q为一对共轭指数,即$1<p<\infty,1<q<\infty$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则在定理 6.33 的假设下,我们有

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d\langle M,N\rangle_s|\right]$$
$$\leqslant\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}H_s^2d\langle M\rangle_s}\right\|_p\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}K_s^2d\langle N\rangle_s}\right\|_q,\tag{34.1}$$

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d[M,N]_s|\right]$$
$$\leqslant\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s}\right\|_p\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}K_s^2d[N]_s}\right\|_q.\tag{34.2}$$

证明 由定理 6.33 及 Hölder 不等式($\boldsymbol{E}[|\xi\eta|]\leqslant\|\xi\|_p\cdot\|\eta\|_q$)推得. □

问题与补充

6.1 设M为一连续一致可积鞅,S,T为两个停时,$S\leqslant T$.

如果对几乎所有的ω，对每个$t>0$，在$[S(\omega),T(\omega)\wedge(t\vee S(\omega))]$上，$M.(\omega)$有有限变差，则对几乎所有的$\omega$，$M.(\omega)$在$[S(\omega),T(\omega)]$上为常数．

6.2 $\mathcal{M}_0^2$与$L^2(\mathcal{F}_0)$为$\mathcal{M}^2$的两个相互正交的稳定子空间，且

$$\mathcal{M}^2=\mathcal{M}_0^2\oplus L^2(\mathcal{F}_0),$$

其中$\oplus$表示直接和．

6.3 设$M\in\mathcal{M}^{2,d}$．若$E[\sum_s|\Delta M_s|]<\infty$，则$M\in\mathcal{W}_0$．

6.4 设$M\in\mathcal{W}_0$．若$E[\sum_s(\Delta M_s)^2]<\infty$，则$M\in\mathcal{M}^{2,d}$．

6.5 设$M\in\mathcal{W}_0$或$M\in\mathcal{M}^{2,d}$，$T>0$为一停时．如果$[\Delta M\neq 0]\subset[\![T]\!]$，则$M=A-\widetilde{A}$，其中$A=\Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![}$．

6.6 令

$$\mathcal{N}=\left\{\xi I_{[\![T,\infty[\![}:\begin{array}{l}T\text{ 为停时},\ \xi\in L^2(\mathcal{F}_T),\\ \xi I_{[T=\infty]}=0,\ E[\xi I_{[T<\infty]}\mid\mathcal{F}_{T-}]=0\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{M}^{2,\sigma}=\mathcal{S}(\mathcal{N}),\quad \mathcal{M}^{2,p}=\mathcal{N}^{\perp}.$$

1) $\mathcal{M}^{2,\sigma}$及$\mathcal{M}^{2,p}$为$\mathcal{M}^2$的两个相互正交的稳定子空间，$\mathcal{M}^2=\mathcal{M}^{2,\sigma}\oplus\mathcal{M}^{2,p}$．

2) $\mathcal{M}^{2,da}\subset\mathcal{M}^{2,\sigma}\subset\mathcal{M}^{2,d}$，其中$\mathcal{M}^{2,da}$为只有可及跳的纯断平方可积鞅全体构成的子空间．

3) 设$M\in\mathcal{M}^2$．为要$M\in\mathcal{M}^{2,p}$，当且仅当对一切停时S，$M_S\in\mathcal{F}_{S-}$．

4) 下列命题等价：

i) 对一切停时T及S，$[T\leqslant S]\in\mathcal{F}_{S-}$．

ii) $\mathcal{M}^2=\mathcal{M}^{2,p}$．

iii) $(\mathcal{F}_t)$左连续，即对一切停时S，$\mathcal{F}_S=\mathcal{F}_{S-}$．

6.7 设$M\in\mathcal{M}^2$，S,T为两个停时，$S\leqslant T$．为要$M^S=M^T$，当且仅当$\langle M\rangle_S=\langle M\rangle_T$．

6.8 设$M,N\in\mathcal{M}^2$，则

$$(\langle M+N\rangle+[M+N])^{1/2}\leqslant(\langle M\rangle+[M])^{1/2}$$

$$+ (\langle N\rangle + [N])^{1/2}.$$

6.9 设 $M, N \in \mathscr{M}^2$，则

$$|\sqrt{[M]} - \sqrt{[N]}| \leqslant \sqrt{[M-N]},$$

$$|\sqrt{\langle M\rangle} - \sqrt{\langle N\rangle}| \leqslant \sqrt{\langle M-N\rangle}.$$

6.10 设 $G=(\mathscr{G}_t)$ 为一满足通常条件的流，且对每个 $t \geqslant 0$，$\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t$，则下列命题等价：

1）每个平方可积 G-鞅为 F-鞅，

2）对每个 $t \geqslant 0$，$\mathscr{F}_t$ 及 $\mathscr{G}_\infty$ 关于 $\mathscr{G}_t$ 条件独立，

3）对每个 $\mathscr{G}_\infty \times \mathscr{B}(R_+)$-可测的零初值可积变差过程 A，A 关于 G 及 F 的可料对偶投影无区别．

这时，对每个 G-停时 T，有 $\mathscr{G}_T = \mathscr{F}_T \cap \mathscr{G}_\infty$.

第七章　局部鞅

§1.　过程类的局部化

7.1 定义　设 $\mathscr{D}$ 为一随机过程类．$\mathscr{D}$ 的**局部化类**（记作 $\mathscr{D}_{\text{loc}}$）定义如下：一过程 $X=(X_t)$ 属于 $\mathscr{D}_{\text{loc}}$，当且仅当 $X_0\in\mathscr{F}_0$，并存在一列停时 (T_n)，使得 $T_n\uparrow\infty$，及对每个 n，$X^{T_n}-X_0\in\mathscr{D}$．$(T_n)$ 称为 X（关于 $\mathscr{D}$）的**局部化序列**．易见，为要 $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}_{\text{loc}}$，当且仅当对每个 $X\in\mathscr{D}$，有 $X_0\in\mathscr{F}_0$．

7.2 定理　设 $\mathscr{D}^1,\mathscr{D}^2$ 为两个稳定的过程类，则

$$(\mathscr{D}^1\cap\mathscr{D}^2)_{\text{loc}}=\mathscr{D}^1_{\text{loc}}\cap\mathscr{D}^2_{\text{loc}}.$$

证明　令 $X\in\mathscr{D}^1_{\text{loc}}\cap\mathscr{D}^2_{\text{loc}}$，$(T_n)$ 为 X 关于 $\mathscr{D}^1$ 的局部化序列，(S_n) 为 X 关于 $\mathscr{D}^2$ 的局部化序列，则由 $\mathscr{D}^1$ 及 $\mathscr{D}^2$ 的稳定性，$(T_n\wedge S_n)$ 为 X 关于 $\mathscr{D}^1\cap\mathscr{D}^2$ 的局部化序列．因此，$\mathscr{D}^1_{\text{loc}}\cap\mathscr{D}^2_{\text{loc}}\subset(\mathscr{D}^1\cap\mathscr{D}^2)_{\text{loc}}$．反包含关系是明显的．　□

7.3 定理　设 $\mathscr{D}$ 为一由随机过程组成的稳定线性空间，则 $\mathscr{D}_{\text{loc}}$ 也是稳定线性空间，且

$$(\mathscr{D}_{\text{loc}})_{\text{loc}}=\mathscr{D}_{\text{loc}}.\tag{3.1}$$

证明　只需证明(3.1)．设 $X\in(\mathscr{D}_{\text{loc}})_{\text{loc}}$．为简单起见，不妨设 $X_0=0$．令 (T_n) 为 X 关于 $\mathscr{D}_{\text{loc}}$ 的局部化序列，即对每个 n，$X^{T_n}\in\mathscr{D}_{\text{loc}}$．对每个 n，令 $(S_{n,k})_{k\geq1}$ 为 X^{T_n} 关于 $\mathscr{D}$ 的局部化序列，将 $(S_{n,k}\wedge T_n)_{n,k\geq1}$ 重新排列为停时序列 (S_n)，则 $\sup\limits_n S_n=\infty$，且对每个 n，$X^{S_n}\in\mathscr{D}$．对任何一对停时 (S,T)，我们有

$$X^{S\vee T}=X^S+X^T-(X^{S\wedge T}).$$

因而由归纳法有 $X^{S_1\vee\cdots\vee S_n}\in\mathscr{D}$，所以，$(S_1\vee\cdots\vee S_n)$ 是 X 关于 $\mathscr{D}$

的局部化序列，即 $X\in\mathscr{C}_{loc}$. □

注 为使(3.1)成立，实际上只需假设 $\mathscr{C}$ 在停止运算下稳定，即对任一 $X\in\mathscr{C}$ 及停时 T，有 $X^T\in\mathscr{C}$. 但这需要一个略为更长的证明. 定理 7.3 对我们已够用了.

下一引理提供了一个十分有用的得到局部化序列的方法，它的证明是不难的，留给读者作练习.

7.4 引理 设 $X=(X_t)$ 为一适应右连左极过程. 令

$$T_n=\inf\{t\geqslant 0: |X_t|\geqslant n\}, n\geqslant 1. \qquad (4.1)$$

则 (T_n) 为一列停时，且 $T_n\uparrow\infty$.

7.5 定义 设 $\mathscr{C}$ 为有界过程全体，则 $\mathscr{C}_{loc}$ 中的每个过程称为**局部有界过程**.

7.6 定理 设 X 为一随机过程，且 $X_0\in\mathscr{F}_0$. 为要 X 为局部有界过程，必须且只需存在一列停时 (T_n)，使得 $T_n\uparrow\infty$，且对每个 n，$XI_{]0,T_n]}$ 为有界过程.

证明 令 $S_n=0_{\{|X_0|>n\}}$，则 (S_n) 为一列停时，$S_n\uparrow\infty$，且对每个 n，$X_0I_{[0,S_n]}=X_0I_{\{|X_0|\leqslant n\}}I_{[0,\infty[}$ 为有界过程. 若 X 为局部有界过程，(R_n) 为 X 的局部化序列，则对每个 n，$XI_{]0,R_n\wedge S_n]}$ 为有界过程. 反之，若 (T_n) 为一列停时，$T_n\uparrow\infty$，且对每个 n，$XI_{]0,T_n]}$ 为有界过程，则 $(T_n\wedge S_n)$ 为 X 的局部化序列. □

注 定理 7.6 实际上提出了局部有界过程的更合理些的定义. 问题在于在局部有界过程的定义中要求 $X_0\in\mathscr{F}_0$ 是不自然的. 然而局部化手续一般总是对适应过程类实施的，仅仅有界过程类是个例外. 为了叙述的统一起见，我们才保留了 $X_0\in\mathscr{F}_0$ 的要求.

下一定理给出了一些今后常用的局部有界过程.

7.7 定理 设 X 为一适应右连左极过程.

1) $X_- =(X_{t-})$ 为局部有界可料过程.

2) 为要 X 局部有界，当且仅当 ΔX 局部有界.

3) 若 X 可料，则 X 局部有界.

证明 1) 令 (T_n) 如(4.1)所定义. 显然有 $|X_-I_{]0,T_n]}|\leqslant n$. 于

是由定理 7.6，X_- 局部有界.

2)是 1)及定理 7.6 的直接推论.

3)的证明与定理 5.19 中第二个结论的证明完全相同. □

7.8 定义 记得 $\mathscr{A}$($\mathscr{A}^+$)是适应可积变差(可积增)过程全体.则 $\mathscr{A}_{loc}$($\mathscr{A}^+_{loc}$)是适应局部可积变差(局部可积增)过程全体.这与定义 5.18 相符.只是这里只涉及适应过程.

对每个适应右连左极过程 $X=(X_t)$,以 $X^*=(X_t^*)$记 X 的上确界过程:

$$X_t^* = \sup_{s\leqslant t}|X_s|, \quad t \geqslant 0.$$

显然,X^* 为适应增过程,且 $\Delta(X^*)\leqslant|\Delta X|$.

7.9 定理 设 $A=(A_t)$为一适应有限变差过程. 如果 A 局部有界(或等价地,ΔA 局部有界),则 $A\in\mathscr{A}_{loc}$.

证明 设(S_n)为一列停时,使得 $S_n\uparrow\infty$,且对每个 n,$AI_{[0,S_n]}$ 为有界过程. 令

$$T_n = \inf\left\{t\geqslant 0: \int_0^t |dA_s|\geqslant n\right\}\wedge S_n, \ n\geqslant 1,$$

则 $T_n\uparrow\infty$,且对每个 n

$$\int_0^{T_n}|dA_s| = \int_{[0,T_n[}|dA_s| + |\Delta A_{T_n}|I_{[T_n>0]}\leqslant n + |\Delta A_{T_n}|I_{[T_n>0]}$$

有界.故 $A\in\mathscr{A}_{loc}$. □

7.10 定理 设 $A=(A_t)$为一适应有限变差过程,则下列命题等价:

1) $A\in\mathscr{A}_{loc}$,

2) $B=\sum_{s\leqslant\cdot}\Delta A_s\in\mathscr{A}_{loc}$,

3) $C=\sqrt{\sum_{s\leqslant\cdot}\Delta A_s^2}\in\mathscr{A}^+_{loc}$,

4) $A^*\in\mathscr{A}^+_{loc}$.

证明 1)⇒2)⇒3) 显然.

3)⇒4). 由于$|\Delta A|\leqslant C$,有 $A^*\leqslant A_-^*+|\Delta A|\leqslant A_-^*+C$. A_-^* 局部有界(定理 7.7.1),$C\in\mathscr{A}^+_{loc}$,故 $A^*\in\mathscr{A}^+_{loc}$.

4)⇒1). 设(S_n)为一列停时，使得$S_n\uparrow\infty$，且对每个n，$A^*_{S_n}-A^*_0$可积. 令

$$T_n=\inf\left\{t\geqslant 0;\int_0^t|dA_s|\geqslant n\right\}\wedge S_n,\ n\geqslant 1,$$

则$T_n\uparrow\infty$，且对每个n

$$\int_0^{T_n}|dA_s|=\int_{]0,T_n[}|dA_s|+|\Delta A_{T_n}|\leqslant n+2(A^*_{S_n}-A^*_0)$$

可积，故$A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$. □

7.11 定义 记得$\mathscr{M}$为一致可积鞅全体. 若$M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，称$M$为**局部鞅**. 显然，局部鞅为适应右连左极过程. 同样地，$\mathscr{W}_{\mathrm{loc}}$中的过程称为**局部可积变差鞅**，$\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}(\mathscr{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}},\mathscr{M}^{2,d}_{\mathrm{loc}})$中的过程称为(**连续，纯断)局部平方可积鞅**. 显然，$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，$\mathscr{W}_{\mathrm{loc}}$，$\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$都是稳定线性空间.

注 由定义不难直接看出以下事实：

1) 右连左极鞅为局部鞅(取$(n)_{n\geqslant 1}$为局部化序列)；

2) 可料局部鞅为连续过程(见定理6.3.1))；

3) 若M为可料局部可积变差鞅，则对每个$t>0$，$M_t=M_0$ a.s.(见定理6.3.2))；

4) 若$A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$，则其可料对偶投影$\tilde{A}$是唯一的可料有限变差过程，使得$A-\tilde{A}\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$(见系5.31)；

5) 若$M_t\equiv M_0\in\mathscr{F}_0$，则$M=(M_t)$为局部鞅(取$(0_{[|M_0|\geqslant n]})$为局部化序列).

7.12 定理 设M为一局部鞅，则$M\in\mathscr{M}$当且仅当M为类(D)过程.

证明 只需证充分性，设M为类(D)过程，则M_0可积. 设(T_n)为M的局部化序列，则对每个n，$M^{T_n}\in\mathscr{M}$. 对$0\leqslant s<t<\infty$，有

$$\boldsymbol{E}[M_{t\wedge T_n}|\mathscr{F}_s]=M_{s\wedge T_n}\quad\text{a.s.}\tag{12.1}$$

由于$(M_{t\wedge T_n})_{n\geqslant 1}$一致可积，且$\lim\limits_{n\to\infty}M_{t\wedge T_n}=M_t$，于是$n\to\infty$时

$$\boldsymbol{E}[M_{t\wedge T_n}|\mathscr{F}_s]\xrightarrow{L^1}\boldsymbol{E}[M_t|\mathscr{F}_s].$$

在(13.1)中令$n\to\infty$得

$$E[M_t | \mathscr{F}_s] = M_s \quad \text{a.s.}$$

这表明 M 为鞅，从而 $M \in \mathscr{M}$. □

7.13 定理 设 M 为一局部鞅，则 ΔM 有可料投影，且 $^p(\Delta M) = 0$.

证明 由定理 4.41 及定理 5.8.2)即得. □

7.14 定理 设 $A \in \mathscr{A}_{loc}$,

$$A = A^c + A^{da} + A^{di},$$

其中 A^c 为 A 的连续部分，A^{da} 为 A 的可及跳部分，A^{di} 为 A 的绝不可及跳部分（见定理 4.25），则

1) $\widetilde{A^{da}}$ 为纯断的，A^{di} 为连续的，

2) 为要 $\tilde{A}$ 连续，当且仅当 $\widetilde{A^{da}}$ 为局部鞅，

3) 为要 $\tilde{A}$ 纯断，当且仅当 $A_0 = 0$ 及 $A^c + A^{di}$ 为局部鞅.

证明 2)及 3)容易由 1)推得，只需证 1). 令 (T_n) 为穷举 A^{da} 跳的可料时列. 记 $H = \bigcup_n [\![T_n]\!]$. 由定理 5.22 有

$$E\left[\int_{[0,\infty[} I_{H^c}(\cdot, s) |d\, \widetilde{A_s^{da}}(\cdot)|\right]$$

$$\leqslant E\left[\int_{[0,\infty[} I_{H^c}(\cdot, s) |d\, A_s^{da}(\cdot)|\right] = 0,$$

即对几乎所有的 ω，测度 $dA^{da}_\cdot(\omega)$ 在 $\bigcup_n [T_n(\omega)]$ 之外无负荷，故 A^{da} 为纯断的.

由于 A^{di} 拟左连续，故由系 5.28.3)，$\widetilde{A^{di}}$ 为连续的. □

7.15 定理 设 $M \in \mathscr{W}_{loc}$. 令

$$A = \sum_{s \leqslant \cdot} \Delta M_s,$$

由 $A \in \mathscr{A}_{loc}$, $\tilde{A}$ 连续，且

$$M = M_0 + A - \tilde{A}.$$

（故 M 也称为**跳的补偿和**.）

若 M 只有可及跳，则

$$M = M_0 + \sum_{s \leqslant \cdot} \Delta M_s.$$

证明 定理的前半部分由定理6.2推得．若 M 只有可及跳，A 也只有可及跳．由于 $\tilde{A}$ 连续，由定理7.14.2)知，$A=A^{da}$ 为局部鞅，故 $\tilde{A}=0$，从而 $M=M_0+A$． □

§2. 局部鞅的分解

7.16 引理 设 M 为一局部鞅，$\varepsilon>0$．令

$$A = \sum_{s\leqslant \cdot}\Delta M_s I_{[|\Delta M_s|>\varepsilon]},$$

则 $A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$．

证明 熟知 A 为适应有限变差过程．令 (S_n) 为 M 的局部化序列．令

$$T_n = \inf\Big\{t\geqslant 0: |M_t - M_0| \geqslant n \text{ 或} \sum_{s\leqslant t}|\Delta A_s|\geqslant n\Big\}\wedge S_n,$$

则 $T_n\uparrow\infty$，且

$$|\Delta A_{T_n}| \leqslant |\Delta M_{T_n}| \leqslant n + |M_{T_n} - M_0|,$$

$$\sum_{s\leqslant T_n}|\Delta A_s| \leqslant \sum_{s<T_n}|\Delta A_s| + |\Delta A_{T_n}|$$
$$\leqslant n + |\Delta A_{T_n}| \leqslant 2n + |M_{T_n} - M_0|.$$

由于 $T_n\leqslant S_n$，有 $\boldsymbol{E}[|M_{T_n}-M_0|]<\infty$，故 $A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$． □

下一定理称为**局部鞅基本定理**．它在局部鞅理论中起核心作用．

7.17 定理 设 M 为一局部鞅，则对任给 $\varepsilon>0$，M 可作如下分解：

$$M = M_0 + U + V, \tag{17.1}$$

其中 U 为零初值局部有界鞅[1]且 $|\Delta U|\leqslant\varepsilon$，$V$ 为零初值局部可积变差鞅．如果 M 拟左连续，则可要求 U 及 V 也拟左连续，且 U 与 V 无公共跳．

---

1) 局部有界鞅全体是有界鞅全体的局部化类．一局部有界鞅既是局部鞅又是局部有界的．

证明 无妨假定 $M_0=0$. 令

$$A=\sum_{s\le\cdot}\Delta M_s I_{[|\Delta M_s|>\frac{\varepsilon}{2}]},$$

则由引理 7.16 知，$A\in\mathscr{A}_{loc}$，$V=A-\widetilde{A}\in\mathscr{W}_{loc,0}$，$U=M-V\in\mathscr{M}_{loc,0}$. 对任一可料时 T，有

$$E[\Delta M_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]=0,$$

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{A}_T I_{[T<\infty]} &= E[\Delta A_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]\\ &= E[(\Delta A_T-\Delta M_T)I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}].\end{aligned}$$

但是

$$|(\Delta A_T-\Delta M_T)I_{[T<\infty]}| = |\Delta M_T I_{[|\Delta M_T|\le\frac{\varepsilon}{2},T<\infty]}|\le\frac{\varepsilon}{2},$$

故在 $[T<\infty]$ 上有

$$|\Delta\widetilde{A}_T|\le\frac{\varepsilon}{2},\quad |\Delta U_T|\le|\Delta M_T-\Delta A_T|+|\Delta\widetilde{A}_T|\le\varepsilon\quad \text{a.s.}.$$

对任一绝不可及时 T，在 $[T<\infty]$ 上有 $\Delta\widetilde{A}_T=0$ a.s.，及 $|\Delta U_T|=|\Delta M_T-\Delta A_T|\le\frac{\varepsilon}{2}$. 总之，对任一停时 T

$$|\Delta U_T I_{[T<\infty]}|\le\varepsilon\quad \text{a.s.},$$

即 $|\Delta U|\le\varepsilon$，故 U 为局部有界鞅.

若 M 拟左连续，则 A 也拟左连续，$\widetilde{A}$ 连续，故 U 及 V 也拟左连续. 此外，$\Delta V=\Delta M I_{[|\Delta M|>\frac{\varepsilon}{2}]}$，$\Delta U=\Delta M I_{[|\Delta M|\le\frac{\varepsilon}{2}]}$，$U$ 及 V 无公共跳. ∎

7.18 系 设 M 为一局部鞅，则它的上确界过程 $M^*\in\mathscr{A}^+_{loc}$.

7.19 定理 若 M 既为局部鞅，又是有限变差过程，则 $M\in\mathscr{W}_{loc}$，即

$$\mathscr{M}_{loc}\cap\mathscr{V}=\mathscr{W}_{loc}.$$

证明 设 $M\in\mathscr{M}_{loc}\cap\mathscr{V}$，并按(17.1)分解为：

$$M=M_0+U+V,$$

其中 $V\in\mathscr{W}_{loc,0}$，U 为零初值局部有界鞅. 由于 $U\in\mathscr{V}$ 局部有界，由定理 7.9 知，$U\in\mathscr{W}_{loc,0}$. 最终得 $M\in\mathscr{W}_{loc}$. □

7.20 系 设 $A\in\mathscr{V}$. 为要 $A\in\mathscr{A}_{loc}$，必须且只需存在一可料

过程 $B\in\mathscr{V}$，使得 $A-B$ 为局部鞅.

7.21 定义 设 M 为一局部鞅，称 M 为**纯断局部鞅**，若 $M_0=0$，且 M 可作如下分解：

$$M=U+V,$$

其中 $U\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2,d}$，$V\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc}}$. 我们以 $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{d}$ 记纯断局部鞅全体，而以 $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{c}$ 记连续局部鞅全体. 若以 $\mathscr{M}^{c}$ 记连续一致可积鞅全体，则 $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{c}$ 正是 $\mathscr{M}^{c}$ 的局部化类. 显然，我们有 $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{c}=\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$. 自然地，我们定义 $\mathscr{M}^{d}=\mathscr{M}\cap\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{d}$.

7.22 引理 设 M 为一局部鞅. 若 M 既是连续局部鞅，又是纯断局部鞅，则 $M=0$.

证明 由于 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{d}$，则 $M=U+V$，其中 $U\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2,d}$，$V\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$. 另一方面，$M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{c}=\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$，故 $V\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2}$. 由定理 6.23.3) 知，$V\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2,d}$. 因此，存在 M 的一个局部化序列 (T_n)，使得对每个 n，M^{T_n} 既是连续又是纯断平方可积鞅，从而对每个 n，$M^{T_n}=0$. 于是 $M=0$. □

7.23 系 设 M,N 为两个纯断局部鞅，且 $\Delta M=\Delta N$，则 $M=N$.

7.24 引理 设 $V\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$，且 $V=V^{c}+V^{da}+V^{di}$（见定理 4.25），则 V^{da} 为局部鞅，且 $V^{c}=-\widetilde{V^{di}}$.

证明 我们有

$$0=\widetilde{V}=V^{c}+\widetilde{V^{da}}+\widetilde{V^{di}}.$$

由定理 7.14 知，$\widetilde{V^{da}}$ 为纯断的，$\widetilde{V^{di}}$ 为连续的，故必有 $\widetilde{V^{da}}=0$，即 $V^{da}\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$，从而 $V^{c}=-\widetilde{V^{di}}$. □

7.25 定理 设 M 为一局部鞅，则 M 有如下唯一分解：

$$M=M_0+M^{c}+M^{da}+M^{di},$$

其中 $M^{c}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}^{c}$，$M^{da}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{d}$ 只有可及跳，$M^{di}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{d}$ 只有绝不可及跳.

M^{c} 及 $M^{d}=M^{da}+M^{di}$ 分别称为局部鞅 M 的**连续鞅部分**及**纯断鞅部分**. 对任一停时 T，有

$$(M^T)^c = (M^c)^T,\ (M^T)^d = (M^d)^T.$$

证明 存在性．令

$$M = M_0 + U + V,$$

其中 $U \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc},0}$，$V \in \mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$．由定理 6.22.3)，$U$ 有下列分解：

$$U = U^c + U^{da} + U^{di},$$

其中 $U^c \in \mathscr{M}^{2,c}_{\mathrm{loc},0}$，$U^{da} \in \mathscr{M}^{2,d}_{\mathrm{loc},0}$ 只有可及跳，$U^{di} \in \mathscr{M}^{2,d}_{\mathrm{loc},0}$ 只有绝不可及跳．由引理 7.24，V 有下列分解：

$$V = V^c + V^{da} + V^{di},$$

其中 $V^{da} \in \mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$ 只有可及跳，$V^c + V^{di} \in \mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$ 只有绝不可及跳．令

$$M^c = U^c,\ M^{da} = U^{da} + V^{da},\ M^{di} = U^{di} + V^c + V^{di},$$

则 $M = M_0 + M^c + M^{da} + M^{di}$ 为所需分解．

唯一性．设 $M = M_0 + \overline{M}^c + \overline{M}^{da} + \overline{M}^{di}$ 为另一满足要求的分解，则由引理 7.22，有 $M^c = \overline{M}^c$，而 $M^{da} - \overline{M}^{da} = \overline{M}^{di} - M^{di}$ 既无可及跳，也无绝不可及跳，即 $M^{da} - \overline{M}^{da}$ 为连续的．仍由引理 7.22 知，$M^{da} = \overline{M}^{da}$，从而 $M^{di} = \overline{M}^{di}$．

最后的结论易由唯一性推得． □

下一定理是定理 7.19 的补充．

7.26 定理 设 M 为一纯断局部鞅．若对一切 $t > 0$，$\sum_{s \leqslant t} |\Delta M_s| < \infty$ a.s.，则 $M \in \mathscr{W}_{\mathrm{loc}}$．

证明 令

$$A = \sum_{s \leqslant \cdot} \Delta M_s.$$

由定理 7.17 知，$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$．令 $N = A - \widetilde{A}$，则 $N \in \mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$．由定理 5.27.2) 及 7.14，有

$$\Delta \widetilde{A} = {}^p(\Delta A) = {}^p(\Delta M) = 0.$$

因此 $\Delta M = \Delta N$．由系 7.23 知，$M = N$，从而 $M \in \mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$． □

下面我们着手定义局部鞅的二次变差过程．

7.27 引理 设 M 为一局部鞅，则对一切 $t \geqslant 0$，有

$$\sum_{s \leqslant t} (\Delta M_s)^2 < \infty \quad \text{a.s.}.$$

证明 令 $M=M_0+U+V$，其中 $U\in\mathscr{M}^2_{\text{loc},0}$，$V\in\mathscr{W}_{\text{loc},0}$．令 (T_n) 为 M 的局部化序列，使得对每个 n，$U^{T_n}\in\mathscr{M}^2$，$V^{T_n}\in\mathscr{W}$，于是

$$\sum_{0<s\leqslant T_n}(\Delta M_s)^2\leqslant 2\Big\{\sum_{s\leqslant T_n}(\Delta U_s)^2+\sum_{s\leqslant T_n}(\Delta V_s)^2\Big\}$$

$$\leqslant 2\Big\{\sum_{s\leqslant T_n}(\Delta U_s)^2+\Big[\sum_{s\leqslant T_n}|\Delta V_s|\Big]^2\Big\}<\infty\quad \text{a.s.}.\ \square$$

7.28 引理 1) 对每个 $M\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$ 存在唯一的可料局部可积增过程，记作 $\langle M,M\rangle$ 或简记为 $\langle M\rangle$，使得 $M^2-\langle M\rangle\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$.

2) 对任意的 $M,N\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$，存在唯一的可料局部可积变差过程，记作 $\langle M,N\rangle$，使得 $MN-\langle M,N\rangle\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$.

证明 1)是2)的特殊情形，往证2)．设 $M,N\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$，$(T_n)$ 为 M 及 N 的公共局部化序列，对每个 n，$\langle(M-M_0)^{T_n},(N-N_0)^{T_n}\rangle$ 早已有定义．现在将它们接起来，成为一个过程：

$$\langle M,N\rangle=M_0N_0+\sum_{n=1}^{\infty}\langle(M-M_0)^{T_n},(N-N_0)^{T_n}\rangle I_{]T_{n-1},T_n]},$$

其中 $T_0=0$．不难验证 $\langle M,N\rangle$ 满足要求． $\square$

注 类似于定义 6.24 之后的注，若 $M\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$ 为拟左连续的，则 $\langle M\rangle$ 连续．

7.29 定义 设 M,N 为两个局部鞅，M^c,N^c 分别为它们的连续鞅部分，定义

$$[M,N]=M_0N_0+\langle M^c,N^c\rangle+\sum_{s\leqslant\cdot}(\Delta M_s\Delta N_s).\qquad(29.1)$$

$[M,N]$ 为适应有限变差过程．特别，$[M,M]$ 为适应增过程，它也简记为 $[M]$.

$[M]$ 称为 M 的**二次变差过程**．易见，$M=0$ 当且仅当 $[M]=0$；$M\in\mathscr{M}^c_{\text{loc}}$ 当且仅当 $[M]$ 连续；$M\in\mathscr{M}^d_{\text{loc}}$ 当且仅当 $[M]$ 纯断．

$[M,N]$ 称为 M 及 N 的**二次协变差过程**．若 $M,N\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$，由局部化知，$[M,N]\in\mathscr{A}_{\text{loc}}$．$\langle M,N\rangle$ 为 $[M,N]$ 的可料对偶投影．特别，$[M]\in\mathscr{A}^+_{\text{loc}}$，$\langle M\rangle$ 为 $[M]$ 的可料对偶投影．$\langle M,N\rangle$ 也称为 M 及 N 的**可料二次协变差过程**，$\langle M\rangle$（若 $M\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$）称为 M 的**可料二次**

变差过程.

易见,$[M,N]$(或$\langle M,N\rangle$,若它存在)是 M 及 N 的对称双线性形式,且对任一停时 T,有

$$[M^T,N]=[M,N]^T(\langle M^T,N\rangle=\langle M,N\rangle^T).$$

7.30 定理 设 M 为一局部鞅,则$\sqrt{[M]}$为局部可积增过程.

证明 由于

$$\sqrt{[M]}-|M_0|\leqslant\sqrt{[M]-M_0^2}\leqslant\sqrt{[M-M_0]},$$

不妨设 $M_0=0$. 令

$$M=U+V,$$

其中$U\in\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc},0}$,$V\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$. 由于 Kunita-Watanabe 不等式对局部鞅的二次变差过程仍成立,我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{[M]}&\leqslant\sqrt{[U]+[V]+2\sqrt{[U][V]}}\leqslant\sqrt{[U]}+\sqrt{[V]}\\&\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[U]+\sqrt{\sum_{s\leqslant\cdot}(\Delta V_s)^2}\\&\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[U]+\sum_{s\leqslant\cdot}|\Delta V_s|.\end{aligned}$$

又由于$[U]\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$及$\sum\limits_{s\leqslant\cdot}|\Delta V_s|\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$,故$\sqrt{[M]}\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$. □

7.31 定理 设 M、N 为两个局部鞅,则$[M,N]$为唯一的适应有限变差过程,使得 $MN-[M,N]\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$及 $\Delta[M,N]=\Delta M\Delta N$.

证明 首先证明 $MN-[M,N]$为局部鞅. 为此只需对 $M=N$ 的情形证明这一事实,因为一般情形容易归结为此种情形. 不妨设 $M_0=0$. 令 $M=U+V$,其中 U 为零初值局部有界鞅,$V\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$. 我们有

$$M^2-[M]=U^2-[U]+V^2-[V]+2(UV-[U,V]).\tag{31.1}$$

由引理 7.28.1)知,$U^2-[U]\in\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc},0}$;由局部化的定理 6.4 知,$UV-[U,V]\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 又由分部积分公式,我们有

$$V_t^2-[V]_t=V_t^2-\sum_{s\leqslant t}(\Delta V_s)^2=2\int_{]0,t]}V_{s-}dV_s.$$

但 V_- 为局部有界可料过程，故由局部化的定理 6.5 知，$V^2-[V]\in\mathscr{M}_{loc,0}$. 因此由(31.1)得 $M^2-[M]\in\mathscr{M}_{loc,0}$.

由定义 $\Delta[M,N]=\Delta M\Delta N$ 是显然的.

现设 A 为另一个适应有限变差过程，使得 $MN-A\in\mathscr{M}_{loc,0}$ 及 $\Delta A=\Delta M\Delta N$，则 $A-[M,N]$ 连续，且 $A-[M,N]\in\mathscr{W}_{loc,0}$. 由引理 7.22 知，$A=[M,N]$. □

7.32 定理 设 M 为一局部鞅. 为要 $M\in\mathscr{M}^2$，当且仅当 $E[M]_\infty<\infty$.

证明 只需证充分性. 设(T_n)为 $M^2-[M]$的局部化序列，则对任一停时 T，有

$$E[M^2_{T\wedge T_n}]=E[M]_{T\wedge T_n}\leqslant E[M]_\infty.$$

由 Fatou 引理，我们有

$$E[M_T^2 I_{[T<\infty]}]\leqslant E[M]_\infty<\infty. \tag{32.1}$$

这表明 M 为类(D)过程，故由定理 7.12 知，$M\in\mathscr{M}$. 再由(32.1)，我们有$\sup\limits_t E[M_t^2]<\infty$，即 $M\in\mathscr{M}^2$. □

7.33 定义 设 M,N 为两个局部鞅，若 $MN\in\mathscr{M}_{loc,0}$，即 $[M,N]\in\mathscr{M}_{loc,0}$，称 M 与 N **相互正交**，记作 $M\perp N$.

若 $M\in\mathscr{M}^d_{loc}$，$N\in\mathscr{M}^c_{loc}$，则按定义有$[M,N]=0$，即任一纯断局部鞅与任一连续局部鞅正交. 下面将证明，这一性质可用来刻画纯断局部鞅或连续局部鞅.

7.34 定理 设 M 为一零初值局部鞅. 如果 M 与任一连续有界鞅正交，则 M 为纯断局部鞅.

证明 设 $M=M^c+M^d$，其中 $M^c\in\mathscr{M}^c_{loc,0}$，$M^d\in\mathscr{M}^d_{loc}$. 令

$$T_n=\inf\{t\geqslant 0:|M^c|\geqslant n\},$$

则 $T_n\uparrow\infty$，且对每个 n，$(M^c)^{T_n}$为连续有界鞅. 按假设，我们有 $\langle(M^c)^{T_n}\rangle=\langle M^c\rangle^{T_n}=[M,(M^c)^T]\in\mathscr{M}_{loc,0}$. 由于$\langle(M^c)^{T_n}\rangle$非负，必有$\langle(M^c)^{T_n}\rangle=0$(参见问题 7.6)，即$(M^c)^{T_n}=0$. 因此 $M^c=0$，从而 $M=M^d$ 为纯断局部鞅. □

7.35 定理 设 M 为一局部鞅. 如果 M 与任一纯断局部鞅正

交，则 M 为连续局部鞅.

证明 令 $M=M_0+M^c+M^d$，则 $MM^d=(M_0+M^c)M^d+(M^d)^2$. 按假设，$MM^d\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 但 $(M_0+M^c)M^d\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 因此，$(M^d)^2\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，从而必有 $M^d=0$，故 $M=M_0+M^c$ 为连续局部鞅. □

7.36 定理 设 M 为一局部鞅. 如果 M 与任一有界鞅正交，则 $M=0$.

证明 显然有 $M_0=0$. 设 (T_n) 为 M 的局部化序列，N 为一有界鞅，则按假设，我们有

$$[M^{T_n},N]=[M,N^{T_n}]\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0},$$

即 $M^{T_n}N\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 但 $M^{T_n}N$ 为类 (D) 过程，故 $M^{T_n}N\in\mathscr{M}_0$，且

$$\boldsymbol{E}[M_{T_n}N_\infty]=\boldsymbol{E}[M_0N_0]=0.,$$

由于 $M_{T_n}\in\mathscr{F}_\infty$，而 N_∞ 可以取为任意的 $\mathscr{F}_\infty$-可测有界随机变量，故 $M_{T_n}=0$ a.s.. 所以对每个 n，$M^{T_n}=0$. 令 $n\to\infty$ 得 $M=0$. □

7.37 例 1) 设 $W=(W_t)$ 为一标准 Wiener 过程，则 W 为连续局部鞅. 由定理 2.69 知，(W_t^2-t) 为鞅. 所以

$$[W]_t=\langle W\rangle_t=t,\ t\geqslant 0.$$

2) 设 $P=(P_t)$ 为一(时齐)Poisson 过程，参数为 1. 由于 (P_t-t) 为鞅，P 的可料对偶投影为

$$\widetilde{P}_t=t,\quad t\geqslant 0.$$

令

$$N_t=P_t-t,\quad t\geqslant 0,$$

则 $N=(N_t)$ 为局部可积变差鞅：$N\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$ (N 也称为补偿 **Poisson** 过程)，且

$$\begin{aligned}[N]_t&\doteq\sum_{s\leqslant t}(\Delta N_s)^2\\&=\sum_{s\leqslant t}(\Delta P_s)^2\\&=\sum_{s\leqslant t}\Delta P_s=P_t,\quad t\geqslant 0.\end{aligned}$$

$$\langle N\rangle_t=[\widetilde{N}]_t=\widetilde{P}_t=t,\quad t\geqslant 0.$$

3) 令 $L=W+N$, $M=W-N$，则 $L,M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，且

$$[L,M]_t=[W]_t-[N]_t=t-P_t,\quad t\geqslant 0,$$

即 $[L,M]\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，$L\perp M$. 但是

$$L^c=M^c=W,\ L^d=N=-M^d.$$

这表明，即使 L 与 M 相互正交，L^c 与 M^c 不必正交，L^d 与 M^d 也不必正交.

7.38 定理 设 M 为一局部鞅，T 为一停时，$\xi\in\mathscr{F}_T$ 为一实值随机变量，则

$$N=\xi(M-M^T)$$

为局部鞅，且对任一局部鞅 L，有

$$[N,L]=\xi([M,L]-[M,L]^T).$$

证明 首先假设 M 为一致可积鞅，且 ξ 有界，则对 $t\geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[N_\infty|\mathscr{F}_t]&=\boldsymbol{E}[\xi(M_\infty-M_T)|\mathscr{F}_t]\\
&=\boldsymbol{E}[\xi(M_\infty-M_T)|\mathscr{F}_{t\vee T}|\mathscr{F}_t]\\
&=\boldsymbol{E}[\xi(M_{t\vee T}-M_T)|\mathscr{F}_t]\\
&=\xi I_{[T\leqslant t]}(M_t-M_{t\wedge T})=N_t,
\end{aligned}$$

即 N 为一致可积鞅.

对一般情形，不妨设 $M_0=0$. 令 (T_n) 为 M 的局部化序列. 置

$$S_n=T_n\wedge T_{[|\xi|>n]},\quad n\geqslant 1,$$

则 $S_n\uparrow\infty$，且 (S_n) 为 N 的局部化序列：对每个 n

$$\begin{aligned}
N^{S_n}&=[\xi(M-M^T)]^{S_n}\\
&=\xi I_{[|\xi|\leqslant n]}(M-M^T)^{T_n}\\
&=\xi I_{[|\xi|\leqslant n]}(M^{T_n}-M^{T_n\wedge T})\in\mathscr{M}_0.
\end{aligned}$$

最后，对任一局部鞅 L，令

$$A=\xi([M,L]-[M,L]^T).$$

我们有 $\Delta A=\xi\Delta([M,L]-[M,L]^T)=\xi\Delta(M-M^T)\Delta L=\Delta N\Delta L$，且由定理 7.31，

$$NL-A=\xi(M-M^T)L-\xi([M,L]-[M,L]^T)$$

$$=\xi\{(ML-[M,L])-(ML-[M,L])^T\}$$
$$-\xi M_T I_{[T<\infty]}(L-L^T)$$

为局部鞅. 再由定理 7.31,有 $A=[N,L]$. □

§3. 局部鞅的跳过程的刻画

7.39 定义 设 $X=(X_t)$ 为一可选过程,称 X 为**稀疏过程**,如果$[X\neq 0]$为稀疏集. 任一适应右连左极过程 X 的跳过程 ΔX 是稀疏过程的典型例子.

对任一稀疏过程 $X=(X_t)$,若对每个 $t>0$

$$\sum_{s\leqslant t}|X_s|<\infty \qquad \text{a.s.},$$

我们定义 X 的和过程 ΣX 如下:

$$\Sigma X=\sum_{s\leqslant \cdot}X_s \quad 或 \quad (\Sigma X)_t=\sum_{s\leqslant t}X_s,\quad t\geqslant 0.$$

易见,ΣX 为适应有限变差过程. 事实上,若$[X\neq 0]=\bigcup_n [\![T_n]\!]$,其中$(T_n)$为一列图互不相交的停时,则

$$\Sigma X=\sum_n X_{T_n}I_{[\![T_n,\infty[\![}.$$

其实在前面我们已多次遇到过稀疏过程的和过程了.

7.40 定理 设 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^d$.

1) 为要 $M\in\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}^{2,d}$,当且仅当 $\Sigma(\Delta M)^2\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

2) 为要 $M\in\mathscr{W}_0$,当且仅当 $\Sigma|\Delta M|\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

证明 1)由局部化的定理 6.22 及定理 7.32 推得. 2)由定理 7.15 及 7.26 推得. □

7.41 引理 设 H 为一稀疏过程且 $H_0=0$,则下列命题等价:

1) $A=\sqrt{\Sigma H^2}\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$.

2) $B=\Sigma(H^2I_{[|H|\leqslant b]}+|H|I_{[|H|>b]})\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$, $\forall b>0$.

3) $C=\Sigma\dfrac{H^2}{1+|H|}\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$,

4) $D=\Sigma(1-\sqrt{1+H})^2\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$,若 $H\geqslant -1$.

证明 由于

$$C \leqslant B \leqslant (1+b)\Sigma \frac{H^2}{1+|H|} I_{[|H| \leqslant b]}$$

$$+ \frac{1+b}{b} \Sigma \frac{H^2}{1+|H|} I_{[|H|>b]}$$

$$\leqslant (1+b+\frac{1}{b})C,$$

即得 2)⇔3). 注意到, $y \geqslant -1$ 时

$$(1-\sqrt{1+y})^2 = \frac{y^2}{(1+\sqrt{1+y})^2},$$

$$(1-\sqrt{1+y})^2 / \frac{y^2}{1+|y|} \to \begin{cases} 1, & y \to \infty \\ 1/4, & y \to 0, \\ 2, & y \to -1, \end{cases}$$

存在两个常数 $K_1 > 0$ 及 $K_2 > 0$, 使得

$$K_1 \frac{y^2}{1+|y|} \leqslant (1-\sqrt{1+y})^2 \leqslant K_2 \frac{y^2}{1+|y|}, \quad y \geqslant -1.$$

所以, 若 $H \geqslant -1$, 则 3)⇔4).

2)⇒1). 设 (S_n) 为一列停时, 使得 $S_n \uparrow \infty$ 及 $\boldsymbol{E}[B_{S_n}] < \infty$. 我们有 $A \in \mathscr{V}^+$. 事实上, 对一切 $t > 0$, $\sum_{s \leqslant t} |H_s|^2 I_{[|H_s|>b]}$ 只是有限项的和. 令 $T_n = \inf\{t \geqslant 0 : A_t \geqslant n\}$. 我们有 $T_n \uparrow \infty$, 且

$$A_{T_n \wedge S_n} \leqslant n + \Delta A_{T_n \wedge S_n} \leqslant n + |H_{T_n \wedge S_n}| \leqslant n + b + B_{S_n}.$$

因此, $\boldsymbol{E}[A_{T_n \wedge S_n}] < \infty$, 从而 $A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

1)⇒2). 设 (S_n) 为一列停时, 使得 $S_n \uparrow \infty$ 及 $\boldsymbol{E}[A_{S_n}] < \infty$. 我们有 $B \in \mathscr{V}^+$. 事实上, 对一切 $t > 0$, $\sum_{s \leqslant t} |H_s| I_{[|H_s|>b]}$ 只是有限项的和. 令 $T_n = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \geqslant n\}$. 我们有 $T_n \uparrow \infty$, 且

$$B_{T_n \wedge S_n} \leqslant n + \Delta B_{T_n \wedge S_n} \leqslant n + b^2 + A_{S_n}.$$

因此, $\boldsymbol{E}[B_{T_n \wedge S_n}] < \infty$, 从而 $B \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$. □

下一定理给出局部鞅的跳过程的刻画. 它是局部鞅理论的基本结果之一, 将在随机积分理论中起重要作用. 当涉及这一刻画时, 引理 7.41 是十分有用的.

7.42 定理 为要一稀疏过程 H 为一局部鞅 M 的跳 ΔM，必须且只需满足下列条件：

i) ${}^pH = 0$，

ii) $\sqrt{\Sigma H^2} \in \mathscr{A}^+_{loc}$.

证明 必要性由定理 7.13 及 7.30 推得.

充分性．首先假设 $\Sigma H^2 \in \mathscr{A}^+$. 令$[H \neq 0] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$，其中$(T_n)$为一列图互不相交的严格正停时，每个 T_n 或为可料时，或为绝不可及时. 令

$$A^n = H_{T_n} I_{[\![T_n, \infty [\![}, \quad M^n = A^n - \widetilde{A}^n.$$

如同定理 6.22 的证明，可知正交级数 ΣM^n 在 $\mathscr{M}^{2,d}_{loc}$中收敛于 $M \in \mathscr{M}^{2,d}$，且 $H = \Delta M$.

现设 $\Sigma H^2 \in \mathscr{A}^+_{loc}$. 令$(T_n)$为一列停时，使得 $T_n \uparrow \infty$ 及$(\Sigma H^2)^{T_n} \in \mathscr{A}^+$，则对每个 n，存在 $M^n \in \mathscr{M}^{2,d}$，使得 $\Delta M^n = HI_{[\![0, T_n]\!]}$. 由系 7.23，我们有

$$(M^{n+1})^{T_n} = M^n, \ n \geqslant 1.$$

因此$(M^n)_{n \geqslant 1}$ 可衔接成一个过程：

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M^n I_{]\!] T_{n-1}, T_n]\!]} \quad (T_0 = 0).$$

显然，$M \in (\mathscr{M}^d_{loc})_{loc} = \mathscr{M}^d_{loc}$，且 $\Delta M = H$.

如果 $\Sigma|H| \in \mathscr{A}^+_{loc}$，则 $M = \Sigma H - \widetilde{(\Sigma H)} \in \mathscr{W}_{loc,0}$，且

$$\Delta M = H - {}^pH = H.$$

现在我们能处理一般情形了. 令

$$A = \Sigma H^2, \quad K = HI_{[|H|>1]}, \quad H'' = K - {}^pK,$$
$$H' = H - H'', \quad B = \Sigma|K|.$$

不难看出，H''及 H' 为稀疏过程，且${}^p(H'') = {}^p(H') = 0$. 由于$\sqrt{\Sigma K^2} \leqslant A$，由定理 7.10，有 $B \in \mathscr{A}^+_{loc}$. 另一方面，

$$\Sigma|{}^pK| \leqslant \Sigma\, {}^p(|K|) \leqslant \widetilde{B} \in \mathscr{A}^+_{loc}.$$

所以，$\Sigma|H''| \in \mathscr{A}^+_{loc}$，存在 $M'' \in \mathscr{M}^d_{loc}$，使得 $\Delta M'' = H''$.

由于$|H'|^2 \leqslant 2(|H|^2 + |H''|^2)$，有 $\Sigma(H')^2 \in \mathscr{V}^+$. 又因${}^pH =$

0，有

$$H' = H - K + {}^{p}K$$
$$= HI_{[|H|\leqslant 1]} - {}^{p}(HI_{[|H|\leqslant 1]}),\quad |H'|\leqslant 2.$$

所以 $\Sigma(H')^2\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$，存在 $M'\in\mathscr{M}^{2,d}_{\mathrm{loc}}$，使得 $\Delta M'=H'$. 因此 $M=M'+M''$ 是所需的局部鞅. □

7.43 系 设 H 为一稀疏过程，使得 ${}^{p}H=0$.

1）为有 $M\in\mathscr{M}^{2,d}(\mathscr{M}^{2,d}_{\mathrm{loc}})$，使得 $H=\Delta M$，必须且只需 $\Sigma H^2\in\mathscr{A}^+(\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}})$.

2）为有 $M\in\mathscr{W}_0(\mathscr{W}_{\mathrm{loc},0})$，使得 $H=\Delta M$，必须且只需 $\Sigma|H|\in\mathscr{A}^+(\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}})$.

问题与补充

7.1 设 $\mathscr{C}$ 为一由适应过程组成的稳定线性空间，且具有下列性质：若随机变量 $\xi\in b\mathscr{F}_0$ 及 $X_t\equiv\xi$，则 $X=(X_t)\in\mathscr{C}$. 为要 $X\in\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$，必须且只需存在一列停时 (T_n)，使得 $T_n\uparrow\infty$，且对每个 n，$X^{T_n}I_{[T_n>0]}\in\mathscr{C}$.

7.2 设 A 为一可料有限变差过程，$a\neq 0$. 若 $[\Delta A=-a]$ 为不足道集，则 $\frac{1}{a+\Delta A}$ 为局部有界过程.

7.3 设 M 为一局部鞅. 若 $M\geqslant 0$ 及 $E[M_0]<\infty$，则 M 为上鞅.

7.4 设 M 为一局部鞅. 若 $\Delta M\geqslant 0$，则 M 拟左连续.

7.5 设 M 为一连续局部鞅，T 为一停时，则对几乎所有的 $\omega\in[T<\infty]$，或者有 $\varepsilon>0$，使得 $M.(\omega)$ 在 $[T(\omega),T(\omega)+\varepsilon]$ 上为常数，或者有两个数列 (t_n) 及 (s_n)，使得 $t_n\downarrow T(\omega)$，$s_n\downarrow T(\omega)$，且对一切 n，$s_{n+1}<t_{n+1}<s_n<t_n$，$M_{t_n}(\omega)>M_{T(\omega)}(\omega)>M_{s_n}(\omega)$.

7.6 若 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 及 $M\geqslant 0$，则 $M=0$.

7.7 每个右连左极上鞅 X 可唯一地分解为：

$$X = M - A.$$

其中 M 为局部鞅，A 为零初值可料增过程. 若还有 $X\geq 0$，则 A 为可积增过程.

7.8 设 $M\in\mathscr{M}_{loc}$，$M\geq 0$，$\lim\limits_{t\to\infty} M_t=0$，则对任一 $a>0$

$$P[\sup_t |M_t|\geq a\,|\,\mathscr{F}_0]=1\wedge \frac{M_0}{a}.$$

7.9 设 W 为标准 Wiener 过程，P 为 Poisson 过程，参数为 1. 令

$$M_t=W_t+P_t-t,\ t\geq 0,$$

$$L=M^S,\ S=\inf\{t\geq 0:|M_t|\geq 2\}.$$

则 L 为有界鞅，但 L^c 不是有界鞅.

7.10 设 M 为一局部有界鞅，则对任一局部鞅 N，$\langle M,N\rangle$ 存在.

7.11 设 M 为一局部鞅，T 为一停时. 令

$$\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{T+t},\quad \overline{M}_t=M_{T+t}I_{[T<\infty]},\quad t\geq 0.$$

则

1) $\overline{M}=(\overline{M}_t)$ 为 $(\mathscr{G}_t)$-局部鞅.

2) $[\overline{M}]_t=([M]_{T+t}-[M]_T+M_T^2)I_{[T<\infty]}$.

3) $\overline{M}^c_t=(M^c_{T+t}-M^c_T)I_{[T<\infty]}$，$\overline{M}^d_t=(M^d_{T+t}-M^d_T)I_{[T<\infty]}$.

其中 $[\overline{M}]$，$\overline{M}^c$ 及 $\overline{M}^d$ 都是关于 $(\mathscr{G}_t)$ 定义的.

7.12 设 $M,N\in\mathscr{M}_{loc}$，$S=\inf\{t\geq 0:[M]_t>0\}$，$T=\inf\{t\geq 0:[N]_t>0\}$，则为要 $[M,N]^2=[M][N]$，必须且只需存在两个随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_S$ 及 $\eta\in\mathscr{F}_T$，使得 $[S\vee T<\infty]=[S=T<\infty]$，且在 $[S\vee T<\infty]$ 上

$$\xi\neq 0,\ \eta\neq 0,\ \xi M-\eta N=0.$$

7.13 设 $M,N\in\mathscr{M}^2_{loc}$，$S=\inf\{t\geq 0:\langle M\rangle_t>0\}$，$T=\inf\{t\geq 0:\langle N\rangle_t>0\}$.

1) 若 $\langle M,N\rangle^2=\langle M\rangle\langle N\rangle$，则存在随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_S(\eta\in\mathscr{F}_T)$，使得 $[\xi\neq 0]([\eta\neq 0])=[S\vee T<\infty]=[S=T<\infty]$，且在 $[S\vee T<\infty]$ 上

$$\xi M-N=0\ (M-\eta N=0).$$

2) 若存在随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_{S-}$ ($\eta\in\mathscr{F}_{T-}$)，使得 $[\xi\neq 0]$ ($[\eta\neq 0]$) $=[S\vee T<\infty]=[S=T<\infty]$，且在 $[S\vee T<\infty]$ 上

$$\xi M-N=0\ (M-\eta N=0),$$

则 $\langle M,N\rangle^2=\langle M\rangle\langle N\rangle$.

7.14 设 M 为一局部鞅，F 为一可选集，则下列命题等价：

1) $M=M^1+M^2$，其中 $M^1,M^2\in\mathscr{M}_{loc}$，且 $\Delta M^1 I_{F^C}=0$，$\Delta M^2 I_F=0$，

2) ${}^p(\Delta M I_F)=0$.

第八章　半鞅与拟鞅

§1.　半鞅与特殊半鞅

8.1 定义　设 $X=(X_t)$ 为一右连左极适应过程，称 X 为半鞅，如果 X 可作如下分解：

$$X = M + A, \tag{1.1}$$

其中 M 为局部鞅，A 为适应有限变差过程．半鞅全体记作 $\mathscr{S}$．显然，$\mathscr{S}$ 为稳定线性空间．此外，若 X 为一半鞅，T 为一停时，则

$$\begin{aligned} X^{T-} &= XI_{[0,T[} + X_{T-}I_{[T,\infty[} \\ &= X^T - \Delta X_T I_{[T,\infty[} \end{aligned}$$

也为半鞅．

由局部鞅基本定理（定理 7.17）知，在半鞅 X 的分解式（1.1）中可假设 M 为局部有界鞅（甚至 M 的跳 ΔM 有界）．但 M 的连续鞅部分 M^c 被半鞅 X 唯一决定（引理 7.22），称它为半鞅 X 的**连续鞅部分**，记作 X^c．容易看出，对任一停时 T，有

$$(X^T)^c = (X^c)^T, (X^{T-})^c = (X^c)^T.$$

8.2 定义　设 X,Y 为两个半鞅．令

$$[X,Y]_t = X_0Y_0 + \langle X^c,Y^c\rangle_t + \sum_{s\leqslant t}(\Delta X_s\Delta Y_s), \ t \geqslant 0.$$

$[X,Y]$ 为适应有限变差过程，称为 X 与 Y 的**二次协变差过程**．实际上，由引理及（1.1）知，对任一半鞅 X 及 $t>0$

$$\sum_{s\leqslant t}(\Delta X_s)^2 < \infty \text{ a.s.}.$$

$[X,X]$，也简记为 $[X]$，为适应增过程，称为 X 的**二次变差过程**．不难看出，对任一停时 T，有

$$[X,Y^T] = [X,Y]^T, \ [X,Y^{T-}] = [X,Y]^{T-}.$$

若$[X,Y]\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$，它的可料对偶投影记作$\langle X,Y\rangle$，称为$X$与$Y$的**可料二次协变差过程**．这时我们说$\langle X,Y\rangle$存在．特别，若$[X]\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$，它的可料对偶投影记作$\langle X\rangle$，称为$X$的**可料二次变差过程**．

容易看出，Kunita-Watanabe 不等式对半鞅也成立．

8.3 定理 设X,Y为两个半鞅，H,K为两个可测过程，p,q为一对共轭指数，则

$$\int_{[0,\infty[}|H_sK_s\|d[X,Y]_s|\leqslant\left\{\int_{[0,\infty[}H_s^2d[X]_s\int_{[0,\infty[}K_s^2d[Y]_s\right\}^{\frac{1}{2}}\text{ a.s.},\tag{3.1}$$

$$E\left[\int_{[0,\infty[}|H_sK_s\|d[X,Y]_s|\right]\leqslant\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}H_s^2d[X]_s}\right\|_p\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}K_s^2d[Y]_s}\right\|_q\tag{3.2}$$

注 若$\langle X\rangle$，$\langle Y\rangle$，$\langle X,Y\rangle$存在，我们也有相应的 Kunita-Watanabe 不等式．

8.4 定义 设X为一半鞅，称X为**特殊半鞅**．如果X可作如下分解：

$$X=M+A,$$

其中M为局部鞅，A为适应局部可积变差过程．若特殊半鞅X有另一分解：$X=N+B$，其中N为局部鞅，B为适应有限变差过程，则B必为适应局部可积变差过程．事实上，$B-A=M-N$为局部鞅，也为有限变差过程．由定理 7.19，有$B-A\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$，从而$B\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$．特殊半鞅全体记作$\mathscr{S}_p$．显然，$\mathscr{S}_p$为稳定线性空间．

8.5 定理 设X为一特殊半鞅，则X有如下唯一分解：

$$X=M+A,\tag{5.1}$$

其中M为局部鞅，A为零初值可料有限变差过程．今后，称这一分解为特殊半鞅X的**典则分解**．

证明 令$X=N+B$，其中$N\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，$B\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc},0}$．令$A=\widetilde{B}$，$M=N+B-\widetilde{B}$，即得所需之分解式(5.1)．唯一性由定义 7.11 后的注 3)推得． □

下一定理给出了特殊半鞅的几个有用的刻画．

8.6 定理 设 X 为一半鞅，则下列命题等价：

1) X 为特殊半鞅，

2) $\sqrt{[X]}$ 为局部可积增过程，

3) $X^* = (X_t^*)$ 为局部可积增过程.

证明 1)⇒2). 设 X 为特殊半鞅，$X=M+A$ 为其典则分解. 由 Kunita-Watanabe 不等式

$$\sqrt{[X]} \leqslant \sqrt{[M]+[A]+2\sqrt{[M][A]}} = \sqrt{[M]}+\sqrt{[A]}.$$

由于 $\sqrt{[M]} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$（定理 7.30）及 $\sqrt{[A]} = \sqrt{\Sigma(\Delta A)^2} \leqslant \Sigma|\Delta A| \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$，故有 $\sqrt{[X]} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$.

2)⇒3). 设 $\sqrt{[X]} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$. 由于 $(\Delta X)^* \leqslant \sqrt{\Sigma(\Delta X^2)} \leqslant \sqrt{[X]}$，$X^* \leqslant (\Delta X)^* + (X_-)^*$，$X_-$ 局部有界（定理 7.7.1），故 $X^* \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$.

3)⇒1). 设 $X^* \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$ 及 $X=M+A$，其中 $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，$A \in \mathscr{V}_0$. 由于 $M^* \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$（系 7.18），故 $A^* \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$. 进而由定理 7.10 知，$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$. 所以 $X \in \mathscr{S}_p$. □

8.7 系 局部有界半鞅为特殊半鞅. 特别，跳有界的半鞅或可料半鞅为特殊半鞅.

8.8 定理 设 X 为一特殊半鞅，$X=M+A$ 为其典则分解. 若存在常数 $C>0$，使得对任一可料时 $T>0$，有 $|\Delta X_T| \leqslant C$ a.s.，则 $|\Delta A| \leqslant C$.

证明 设 $T>0$ 为一可料时，由定理 7.13 有

$$\begin{aligned}\Delta A_T &= E[\Delta A_T | \mathscr{F}_{T-}] \\ &= E[\Delta X_T - \Delta M_T | \mathscr{F}_{T-}] \\ &= E[\Delta X_T | \mathscr{F}_{T-}] \quad \text{a.s.}.\end{aligned}$$

因此 $|\Delta A_T| \leqslant C$ a.s.. 但 ΔA 可料，故 $|\Delta A| \leqslant C$. □

8.9 系 设 X 为拟左连续（连续）特殊半鞅，$X=M+A$ 为其典则分解，则 A 连续，M 拟左连续（连续）.

8.10 定理 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{S}_p$ 在局部化之下稳定，即 $\mathscr{S}_{\mathrm{loc}} = \mathscr{S}$，$(\mathscr{S}_p)_{\mathrm{loc}} = \mathscr{S}_p$.

证明 设 $X \in (\mathscr{S}_p)_{\mathrm{loc}}$，$(T_n)$ 为 X 的局部化序列. 不妨设 $X_0 =$

0，则每个 X^{T_n} 为特殊半鞅，设它的典则分解为

$$X^{T_n}=M^n+A^n.$$

由典则分解的唯一性，我们有

$$(M^{n+1})^{T_n}=M^n,\ (A^{n+1})^{T_n}=A^n.$$

令

$$M=\sum_{n=1}^{\infty}M^nI_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]},\quad A=\sum_{n=1}^{\infty}A^nI_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]}\quad (T_0=0).$$

则 M 为局部鞅，A 为可料有限变差过程，$X=M+A$，即 X 为特殊半鞅．所以 $(\mathscr{S}_p)_{\rm loc}=\mathscr{S}_p$．

现在设 $X\in\mathscr{S}_{\rm loc}$，$(T_n)$ 为 X 的局部化序列．由于每个 $X^{T_n}\in\mathscr{S}$，X 为适应右连左极过程．令

$$V_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta X_sI_{[|\Delta X_s|>1]},\quad t\geqslant 0.$$

则 $V=(V_t)$ 为适应有限变差过程，每个 $(X-V)^{T_n}=X^{T_n}-V^{T_n}$ 为半鞅，且跳有界（以 1 为界）．因此每个 $(X-V)^{T_n}$ 是特殊半鞅（系 8.7），从而 $X-V$ 为特殊半鞅．最后，$X=(X-V)+V$ 为半鞅．所以 $\mathscr{S}_{\rm loc}=\mathscr{S}$． □

最后，我们证明，在时间变换之下，半鞅性质仍保持．

8.11 定理 设 X 为一半鞅，$\tau=(\tau_t)$ 为一时间变换，且对每个 $t\geqslant 0$，有 $\tau_t<\infty$．令

$$Y_t=X_{\tau_t},\ \mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{\tau_t},\ t\geqslant 0,$$

则 $Y=(Y_t)$ 关于 $\boldsymbol{G}=(\mathscr{G}_t)$ 为半鞅．

证明 令 $X=M+A$，其中 M 为零初值 $(\mathscr{F}_t)$-局部鞅，A 为 $(\mathscr{F}_t)$-适应有限变差过程，则

$$Y=N+B,\quad N_t=M_{\tau_t},\quad B_t=A_{\tau_t},\quad t\geqslant 0.$$

显然，$B=(B_t)$ 为 $(\mathscr{G}_t)$-适应有限变差过程，剩下只要证明 $N=(N_t)$ 为 $(\mathscr{G}_t)$-半鞅．设 (T_n) 为 M 的局部化序列，即每个 M^{T_n} 为一致可积 $(\mathscr{F}_t)$-鞅．令

$$\overline{T}_n=\inf\{t\geqslant 0:\ \tau_t\geqslant T_n\},\ n\geqslant 1.$$

由于对每个 $t\geqslant 0$，$[\overline{T}_n\leqslant t]=[\tau_t\geqslant T_n]\in\mathscr{F}_{\tau_t}=\mathscr{G}_t$，每个 $\overline{T}_n$ 是 $(\mathscr{G}_t)$-

停时，$\bar{T}_n \uparrow \infty$. 令

$$N_t^n = M_{\tau_t}^{T_n} = M_{\tau_t \wedge T_n}, \ t \geqslant 0.$$

由 Doob 停止定理知，每个 N^n 为一致可积$(\mathscr{G}_t)$-鞅. 此外还有$[\bar{T}_n > t] = [\tau_t < T_n]$，

$$N_t^n I_{[\![0,\bar{T}_n[\![} = M_{\tau_t \wedge T_n} I_{[\![0,\bar{T}_n[\![} = M_{\tau_t} I_{[\![0,\bar{T}_n[\![} = N_t I_{[\![0,\bar{T}_n[\![},$$

及

$$\begin{aligned} N^{\bar{T}_n} &= N I_{[\![0,\bar{T}_n[\![} + N_{\bar{T}_n} I_{[\![\bar{T}_n,\infty[\![} \\ &= N^n I_{[\![0,\bar{T}_n[\![} + N_{\bar{T}_n} I_{[\![\bar{T}_n,\infty[\![} \\ &= N^n + (N_{\bar{T}_n} - N_{\bar{T}_n}^n) I_{[\![\bar{T}_n,\infty[\![}. \end{aligned}$$

这表明 $N^{\bar{T}_n}$是$(\mathscr{G}_t)$-半鞅. 由定理 8.10 知，N 是$(\mathscr{G}_t)$-半鞅. □

§2. 拟鞅及其 Rao 分解

8.12 定义 设 X 为一适应右连左极过程，X 称为**拟鞅**，若对每个 $t \geqslant 0$，X_t 可积，且

$$\mathrm{Var}(X) = \sup_{\tau} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{E}[|X_{t_i} - \boldsymbol{E}[X_{t_{i+1}} | \mathscr{F}_{t_i}]|] + \boldsymbol{E}[|X_{t_n}|] \right\} < +\infty,$$

(12.1)

其中 $\tau: 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < +\infty$ 为$[0,\infty[$的有限分割，上确界是在$[0,\infty[$的有限分割全体所成集合上取的.

如果适应右连左极过程 X 不是拟鞅，则令 $\mathrm{Var}(X) = +\infty$.

若 X 为一致可积鞅，则

$$\mathrm{Var}(X) = \sup_t \boldsymbol{E}[|X_t|] = \boldsymbol{E}[|X_\infty|] < \infty,$$

从而 X 为拟鞅.

若 X 为非负右连左极上鞅，则

$$\mathrm{Var}(X) = \boldsymbol{E}[X_0] < \infty,$$

从而 X 也为拟鞅.

显然，若 X,Y 为两个拟鞅，则 $X+Y$ 也为拟鞅. 此外有

$$\mathrm{Var}(X+Y) \leqslant \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y). \tag{12.2}$$

下一定理称为拟鞅的 **Rao 分解定理**.

8.13 定理 设 X 为一适应右连左极过程，则为要 X 是拟鞅，必须且只需 X 为两个非负右连左极上鞅之差. 这时 X 有如下唯一分解(称为拟鞅 X 的 **Rao 分解**)：

$$X = X' - X'', \tag{13.1}$$

其中 X', X'' 为两个非负右连左极上鞅，使得

$$\mathrm{Var}(X) = \boldsymbol{E}[X_0' + X_0'']. \tag{13.2}$$

证明 充分性显然，往证必要性. 设 X 为拟鞅，$\tau: t=t_0<t_1<\cdots<t_n<\infty$ 为 $[t,\infty[$ 的一有限分割. 令

$$U'_t(\tau) = \boldsymbol{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i} - \boldsymbol{E}[X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i}])^+ + X_{t_n}^+ |\mathscr{F}_t\Big],$$

$$U_t''(\tau) = \boldsymbol{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i} - \boldsymbol{E}[X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i}])^- + X_{t_n}^- |\mathscr{F}_t\Big].$$

对 $t \leqslant s < u < v$，有

$$\begin{aligned}
&(X_s - \boldsymbol{E}[X_v|\mathscr{F}_s])^+ \\
&= (X_s - \boldsymbol{E}[X_u|\mathscr{F}_s] + \boldsymbol{E}[X_u|\mathscr{F}_s] - \boldsymbol{E}[X_v|\mathscr{F}_s])^+ \\
&\leqslant (X_s - \boldsymbol{E}[X_u|\mathscr{F}_s])^+ + (\boldsymbol{E}[X_u - \boldsymbol{E}[X_v|\mathscr{F}_u]|\mathscr{F}_s])^+ \\
&\leqslant (X_s - \boldsymbol{E}[X_u|\mathscr{F}_s])^+ + (\boldsymbol{E}[X_u - \boldsymbol{E}[X_v|\mathscr{F}_u])^+ |\mathscr{F}_s].
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}[(X_s - \boldsymbol{E}[X_v|\mathscr{F}_s])^+ |\mathscr{F}_t] \\
&\leqslant \boldsymbol{E}[(X_s - \boldsymbol{E}[X_u|\mathscr{F}_s])^- |\mathscr{F}_t] \\
&\quad + \boldsymbol{E}[(X_u - \boldsymbol{E}[X_v|\mathscr{F}_u])^+ |\mathscr{F}_t].
\end{aligned}$$

同样地，我们有

$$\boldsymbol{E}[X_u^+ |\mathscr{F}_t] \leqslant \boldsymbol{E}[(X_u - \boldsymbol{E}[X_v|\mathscr{F}_u])^+ |\mathscr{F}_t] + \boldsymbol{E}[X_v^+ |\mathscr{F}_t].$$

因此，当分割 τ' 为分割 τ 的加细时，有

$$U_t'(\tau) \leqslant U_t'(\tau'), \quad U_t''(\tau) \leqslant U_t''(\tau').$$

但对 $[t,\infty[$ 的任一有限分割 τ

$$\boldsymbol{E}[U_t'(\tau)] \leqslant \mathrm{Var}(X), \ \boldsymbol{E}[U_t''(\tau)] \leqslant \mathrm{Var}(X).$$

从而 $U_t'(\tau), U_t''(\tau)$ 沿着 $[t,\infty[$ 的有限分割的半序集合在 L^1 中收敛，记其极限为 U_t', U_t''.（事实上，$U_t' = \operatorname{ess\,sup}_\tau U_t'(\tau)$，$U_t''=$

$\operatorname{ess\,sup}_{\tau} U_t''(\tau)$.）对 $s<t$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[U_t'(\tau)\mid\mathscr{F}_s] &= \boldsymbol{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i}-\boldsymbol{E}[X_{t_{i+1}}\mid\mathscr{F}_{t_i}])^{+}+X_{t_n}^{-}\mid\mathscr{F}_s\Big] \\
&\leqslant \boldsymbol{E}[(X_s-\boldsymbol{E}[X_t\mid\mathscr{F}_s])^{+} \\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i}-\boldsymbol{E}[(X_{t_{i+1}}\mid\mathscr{F}_{t_i}])^{+}+X_{t_n}^{+}\mid\mathscr{F}_s] \\
&= U_s'(\bar{\tau})\leqslant U_s', \quad \text{a.s.},
\end{aligned}$$

其中 $\bar{\tau}$ 为$[s,\infty[$的一个有限分割. 于是有

$$\boldsymbol{E}[U_t'\mid\mathscr{F}_s]\leqslant U_s', \quad \text{a.s.},$$

即(U_t')为非负上鞅. 同理,(U_t'')也为非负上鞅. 由 Föllmer 引理,存在两个非负右连左极上鞅(X_t'),(X_t''),使得对几乎所有的 ω,对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$X_t'(\omega)=\lim_{s\in Q_+,s\downarrow\downarrow t}U_s'(\omega),$$

$$X_t''(\omega)=\lim_{s\in Q_+,s\downarrow\downarrow t}U_s''(\omega).$$

由于对$[t,\infty[$的任一有限分割 τ,

$$X_t=U_t'(\tau)-U_t''(\tau) \quad \text{a.s.},$$

我们有 $X_t=U_t'-U_t''$ a.s.. 由 X 的右连续性,$X_t=X_t'-X_t''$ a.s.. 再由 X,X'及 X''的右连续性可知,X 与 $X'-X''$无区别. 此外,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X) &= \sup_{\tau}\boldsymbol{E}[U'_0(\tau)+U''_0(\tau)] \\
&= \boldsymbol{E}[U'_0+U''_0] \\
&\geqslant \lim_{s\in Q_+,s\downarrow\downarrow 0}\boldsymbol{E}[U'_s+U''_s] \\
&\geqslant \boldsymbol{E}[X'_0+X''_0] \qquad \text{(由 Fatou 引理)} \\
&= \operatorname{Var}(X')+\operatorname{Var}(X'').
\end{aligned}$$

由(12.2),(13.2)成立.

剩下只要证唯一性. 设 $X=X^1-X^2$,其中 X^1,X^2 为两个非负右连左极上鞅,使得

$$\operatorname{Var}(X)=\boldsymbol{E}[X_0^1+X_0^2].$$

对 $s<t$,

$$(E[X_s - X_t|\mathscr{F}_s])^+ = (E[X_s^1 - X_t^1|\mathscr{F}_s] - E[X_s^2 - X_t^2|\mathscr{F}_s])^+$$
$$\leqslant E[X_s^1 - X_t^1|\mathscr{F}_s].$$

由此不难推得

$$U_t' \leqslant X_t^1, \quad E[U_s' - U_t'|\mathscr{F}_s] \leqslant E[X_s^1 - X_t^1|\mathscr{F}_s].$$

因此 $X^1 - U'$ 为非负上鞅，$X^1 - X'$ 为非负右连左极上鞅. 同理，$X^2 - X''$ 也为非负右连左极上鞅. 依假设，$E[X_0' + X_0''] = \mathrm{Var}(X) = E[X_0^1 + X_0^2]$，故 $X_0^1 - X_0' = X_0^2 - X_0'' = 0$ a.s.. 于是对一切 $t > 0$，$X_t^1 - X_t' = X_t^2 - X_t'' = 0$ a.s.，从而 $X^1 = X'$，$X^2 = X''$. □

8.14 定理 设 X 为一拟鞅，$\tau = (\tau_t)$ 为一时间变换，且对每个 $t \geqslant 0$，$\tau_t < \infty$. 令

$$Y_t = X_{\tau_t}, \ \mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{\tau_t}, \ t \geqslant 0.$$

则 $Y = (Y_t)$ 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 为拟鞅.

证明 由定理 8.13，不妨设 X 为非负右连左极上鞅(关于 $(\mathscr{F}_t)$). 这时，由 Doob 停止定理即知，Y 为非负右连左极 $(\mathscr{G}_t)$-上鞅. 因此 Y 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 为拟鞅. □

拟鞅性质不仅在时间变换下保持，在流缩小时也保持.

8.15 定理 设流 $(\mathscr{G}_t)$ 满足通常条件，且对每个 $t \geqslant 0$，$\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t$. 设 X 为一 $(\mathscr{F}_t)$-拟鞅，且 $(\mathscr{G}_t)$-适应，则 X 为 $(\mathscr{G}_t)$-拟鞅.

证明 对 $0 \leqslant s < t < \infty$，

$$E[|X_s - E[X_t|\mathscr{G}_s]|] = E[|E[X_s - X_t|\mathscr{F}_s|\mathscr{G}_s]|]$$
$$\leqslant E[|E[X_s - X_t|\mathscr{F}_s]|]$$
$$= E[|X_s - E[X_t|\mathscr{F}_s]|].$$

由(12.1)，有

$$\mathrm{Var}(X)(\mathscr{G}_t) \leqslant \mathrm{Var}(X)(\mathscr{F}_t) < \infty,$$

即 X 为 $(\mathscr{G}_t)$-拟鞅. □

§3. 区间型随机集上的半鞅

8.16 定义 $B \subset \Omega \times \boldsymbol{R}_+$ 称为区间型集，如果存在非负随机变

量 T，使得对每个 ω，截口 B_ω 或是 $[0,T(\omega)[$，或是 $[0,T(\omega)]$，且 $B_\omega\neq\emptyset$。

8.17 定理 为要 B 为区间型可选集，当且仅当

$$I_B=I_F I_{[0,T]}+I_{F^c}I_{[0,T[},\tag{17.1}$$

其中 T 为一停时，$F\in\mathscr{F}_T$，且 $T_F>0$。

证明 充分性显然，往证必要性。令

$$T(\omega)=\inf\{t:(\omega,t)\in B^c\},\tag{17.2}$$

$$F=\{\omega:T(\omega)<\infty,(\omega,T(\omega))\in B^c\}.\tag{17.3}$$

则 T 为停时。由于 $I_F=1\Leftrightarrow I_{B^c}(T)I_{[T<\infty]}=1$，故有 $F\in\mathscr{F}_T$。现在不难验证(17.1)成立。 □

8.18 定理 下列命题等价：

1) B 为区间型可料集，

2) $I_B=I_F I_{[0,T[}+I_{F^c}I_{[0,T]}$，其中 T 为停时，$F\in\mathscr{F}_{T-}$，且 $T_F>0$ 为可料时，

3) $B=\bigcup_n[\![0,T_n]\!]$，其中 (T_n) 为停时的上升列(称为 B 的**基本序列**)。

证明 1)⇒2)。令 T 及 F 如(17.2)及(17.3)所定义。由于 B 可料，故有 $F\in\mathscr{F}_{T-}$。由于 $[\![T_F]\!]=[\![0,T]\!]\cap B^c$ 可料，故 T_F 为可料时。

2)⇒3)。不妨设 $F\subset[T<\infty]$。不然的话，可以 $F[T<\infty]$ 代替 F，而(17.1)仍然成立。令 (S_n) 为预报 T_F 的停时列，$T_n=S_n\wedge T$，则容易直接验证 $B=\bigcup_n[\![0,T_n]\!]$。

3)⇒1) 显然。 □

8.19 定义 设 B 为一区间型可选集，X 为定义在 B 上的一随机过程(即 XI_B 为一普通的过程)。如果存在停时 $T_n\uparrow T$(T 为 B^c 的初遇)，及一列半鞅 X^n，使得 $\bigcup_n[\![0,T_n]\!]\supset B$ 及

$$(XI_B)^{T_n}=(X^nI_B)^{T_n},\tag{19.1}$$

称 X 为 **B 上的半鞅**，(T_n,X^n) 为 X 的**基本偶列**。B 上的半鞅全体记作 $\mathscr{S}^B$。同样地，我们能定义 $(\mathscr{S}_p)^B$，$(\mathscr{M}_{\rm loc})^B$，$(\mathscr{M}^c_{\rm loc})^B$，

$(\mathcal{A}^d_{loc})^B$, $(\mathcal{A}_{loc})^B$, $\mathcal{S}^B$, ……

8.20 定理 设 B 为一区间型可选集，$X\in\mathcal{S}^B$. 设 S 为一停时，使得 $[\![0,S]\!]\subset B$，则 $X^S\in\mathcal{S}$.

证明 令 (T_n,X^n) 为 X 的基本偶列. 置

$$S_n=(T_n)_{[T_n<S]}.$$

由于 $\bigcup_n[T_n\geqslant S]=\Omega$，有 $S_n\uparrow\Omega$. 由(19.1)容易看出

$$(X^S)^{S_n}=X^{S\wedge T_n}=(X^n)^{S\wedge T_n}\in S.$$

因此 $X^S\in\mathcal{S}_{loc}=\mathcal{S}$. □

注 该定理对任何过程类 $\mathcal{D}^B$ 成立(如 $(\mathcal{M}_{loc})^B$, $(\mathcal{S}_p)^B$, $(\mathcal{A}_{loc})^B$, ……)，只要 $\mathcal{D}$ 对局部化稳定：$\mathcal{D}_{loc}=\mathcal{D}$.

8.21 定理 设 B 为一区间型可料集，X 为一定义在 B 上的过程，则下列命题等价：

1) $X\in\mathcal{S}^B$.

2) 对每个满足 $[\![0,S]\!]\subset B$ 的停时 S，有 $X^S\in\mathcal{S}$，

3) 存在 B 的一基本序列 (T_n)，使得对每个 n，$X^{T_n}\in\mathcal{S}$.

证明 1)⇒2)由定理 8.20 推得. 2)⇒3)是显然的. 3)⇒1)也是容易的. 因为这时 (T_n,X^{T_n}) 是 X 的基本偶列. □

8.22 定理 设 B 为一区间型可选集，X 为一定义在 B 上的过程. 若 $X\in\mathcal{S}^B$，则存在一区间型可料集 $\tilde{B}\supset B$ 及 $\tilde{X}\in\mathcal{S}^{\tilde{B}}$，使得 $XI_B=\tilde{X}I_B$，即 X 是 $\tilde{X}$ 在 B 上的限制.

证明 令 (T_n,X^n) 为 X 的基本偶列，T 为 B^C 的初遇. 令

$$A_1=[T_1=T<\infty],$$

$$A_k=[T_k=T<\infty,\ T_{k-1}<T],\qquad k\geqslant 2,$$

则 $(A_k)_{k\geqslant 1}$ 为一列互不相交的集合. 定义

$$\tilde{X}=XI_{[\![0,T[\![}+\sum_{k=1}^{\infty}X^k_TI_{A_k}I_{[\![T,\infty[\![}.$$

不难看出，$\tilde{X}$ 在 B 上与 X 一致，且由归纳法

$$\tilde{X}^{T_1}=(X^1I_{[\![0,T[\![})^{T_1}+X^1_TI_{[T_1=T<\infty]}I_{[\![T,\infty[\![}=(X^1)^{T_1},$$

$$\tilde{X}^{T_{n+1}}=(X^{n+1}I_{[\![0,T[\![})^{T_{n+1}}+\sum_{k=1}^{n+1}X^k_TI_{A_k}I_{[\![T,\infty[\![}$$

$$= (X^{n+1}I_{[0,T[})^{T_{n+1}} + \widetilde{X}^{T_n} - (XI_{[0,T[})^{T_n}$$
$$+ X_T^{n+1}I_{A_{n+1}}I_{[T,\infty[}$$
$$= \widetilde{X}^{T_n} + (X^{n+1}I_{[0,T[})^{T_{n+1}} - (X^{n+1}I_{[0,T[})^{T_n}$$
$$+ X_T^{n+1}(I_{[T_{n+1}=T<\infty]} - I_{[T_n=T<\infty]})I_{[T,\infty[}$$
$$= \widetilde{X}^{T_n} + (X^{n+1})^{T_{n+1}} - (X^{n+1})^{T_n}.$$

因此，对每个 n，$\widetilde{X}^{T_n}\in\mathscr{S}$，从而 $\widetilde{X}\in\mathscr{S}^{\widetilde{B}}$，其中 $\widetilde{B}=\bigcup_n [\![0,T_n]\!]\supset B$. □

注 该定理对任何过程类 $\mathscr{D}^B$ 成立，只要 $\mathscr{D}$ 关于停止运算封闭：对任何 $X\in\mathscr{D}$ 及停时 T 有 $X^T\in\mathscr{D}$.

定理 8.22 及 8.21 开辟了一条研究区间型可选集上的半鞅、局部鞅等等的途径. 作为一个例子，下面讨论局部鞅的分解.

8.23 定理 设 B 为一区间型可选集，$M\in(\mathscr{M}_{\text{loc}})^B$，则 M 有如下唯一分解：

$$M = M_0 + M^c + M^d,$$

其中 $M^c\in(\mathscr{M}_{\text{loc}}^c)^B$，$M^d\in(\mathscr{M}_{\text{loc}}^d)^B$.

证明 为证存在性，根据定理 8.22，不妨设 B 为区间型可料集. 令 (T_n) 为 B 的基本序列. 对每个 n，有

$$M^{T_n} = M_0 + L^n + N^n,$$

其中 $L^n\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}^c$，$N^n\in\mathscr{M}_{\text{loc}}^d$. 由分解的唯一性，

$$(L^{n+1})^{T_n} = L^n,\quad (N^{n+1})^{T_n} = N^n.$$

容易看出

$$M^c = \sum_{n=1}^{\infty} L^n I_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]} \text{ 及 } M^d = \sum_{n=1}^{\infty} N^n I_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]} \quad (T_0 = 0)$$

满足全部要求.

往证唯一性. 设 M 有另一个同样类型的分解：

$$M = M_0 + \widetilde{M}^c + \widetilde{M}^d.$$

由定理 8.22，可认为 $M^c,\widetilde{M}^c(M^d,\widetilde{M}^d)$ 为一区间型可料集 $\widetilde{B}\supset B$ 上的连续（纯断）局部鞅. 故 $N=(M^c+M^d)-(\widetilde{M}^c+\widetilde{M}^d)\in(\mathscr{M}_{\text{loc},0})^{\widetilde{B}}$，且 $NI_B=0$. 令 (T_n) 为 $\widetilde{B}$ 的基本序列，T 为 B^c 的初遇，则对每个 n

$$N^{T_n} = N_T I_{[T_n = T < \infty]} I_{[\![T, \infty [\![} \in \mathscr{M}^d_{\text{loc}}.$$

因此 $0 = (N^{T_n})^c = (M^c)^{T_n} - (\widetilde{M}^c)^{T_n}$. 所以 $M^c I_B = \widetilde{M}^c I_B$，从而唯一性得证. □

8.24 注 相当奇怪的是定义在一区间型可选集 B 上的局部鞅，即使其轨道在 B 上连续，并非必定是 B 上的连续局部鞅. 例如，设 $T>0$ 为一绝不可及时，$P(T<\infty)>0$，$B = [\![0, T [\![$. 令 $A = I_{[\![T, \infty [\![}$，$M = \widetilde{A} I_{[\![0, T [\![}$，则 $M \in (\mathscr{M}_{\text{loc}})^B$，且 M 的全部轨道在 B 上连续，但是 M 不是 B 上的连续局部鞅.

利用定理 8.23 的证明方法，同样地可证下列定理，证明细节留给读者作为练习.

8.25 定理 设 B 为一区间型可选集，$M, N \in (\mathscr{M}_{\text{loc}})^B$，则存在唯一的过程 $[M, N] \in \mathscr{V}^B$，使得 $MN - [M, N] \in (\mathscr{M}_{\text{loc},0})^B$，且在 B 上 $\Delta[M, N] = \Delta M \Delta N$.

8.26 定理 设 B 为一区间型可选集，$X \in (\mathscr{S}_p)^B$，则 X 有如下唯一典则分解：

$$X = M + A,$$

其中 $M \in (\mathscr{M}_{\text{loc}})^B$，$A \in (\mathscr{A}_{\text{loc},0})^B$ 为可料过程（即 A 是一可料过程在 B 上的限制）.

特别，对每个 $A \in (\mathscr{A}_{\text{loc}})^B$ 存在唯一的可料过程 $\widetilde{A} \in (\mathscr{A}_{\text{loc}})^B$，使得 $A - \widetilde{A} \in (\mathscr{M}_{\text{loc},0})^B$. $\widetilde{A}$ 也称为 A 的可料对偶投影或补偿子.

§4. 半鞅的收敛定理

8.27 定义 设 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 为一适应过程. 记

$$[X \rightarrow] = \{\omega : \lim_{t \to \infty} X_t(\omega) \text{ 存在且有限}\}.$$

在 $[X \rightarrow]$ 上自然定义 $X_\infty = \lim_{t \to \infty} X_t$.

8.28 定理 设 $X = M + B$，其中 $M \in \mathscr{M}_{\text{loc},0}$，$B \in \mathscr{A}^+_{\text{loc},0}$. 如果对每一停时 T，有 $E[X_T^+ \wedge (\Delta X_T)^+ I_{[T<\infty]}] < \infty$，则

$$[M \rightarrow][B \rightarrow] = [X \rightarrow] = [\sup_t |X_t| < \infty]$$

$$= [\sup_t X_t < \infty] \text{ a.s.}. \qquad (28.1)$$

证明 显然有

$$[M \to][B \to] \subset [X \to] \subset [\sup_t |X_t| < \infty] \subset [\sup_t X_t < \infty].$$

令 $S_n = \inf\{t \geqslant 0: X_t \geqslant n\}$，则 $S_n > 0$，且

$$X^{S_n} \leqslant n + [X_{S_n}^+ \wedge (\Delta X_{S_n})^+] I_{[S_n < \infty]} = U_n,$$

其中 $U_n \geqslant 0$，$E[U_n] < \infty$. 令 $Y^{(n)}$ 为一致可积鞅，使得 $Y_t^{(n)} = E[U_n | \mathscr{F}_t]$ a.s.，则

$$Z^{(n)} = Y^{(n)} - X^{S_n} \geqslant 0.$$

依假设，存在 M 及 B 的局部化序列(T_k)，即对每个 k，$M^{T_k} \in \mathscr{M}$，$B^{T_k} \in \mathscr{A}^+$. 因此$(Z^{(n)})^{T_k}$为上鞅. 但 $E[Z_0^{(n)}] < \infty$，由 Fatou 引理可知，$Z^{(n)}$ 为非负上鞅，从而

$$P([Z^{(n)} \to]) = 1.$$

由于 $P([Y^{(n)} \to]) = 1$，故得 $P([X^{S_n} \to]) = 1$. 显然，我们有

$$[\sup_t X_t < \infty] \subset \bigcup_n [S_n = \infty] \subset [X \to] \quad \text{a.s.}. \qquad (28.2)$$

由于 $B \geqslant 0$，

$$M^{S_n} = X^{S_n} - B^{S_n} \leqslant X^{S_n} \leqslant U_n.$$

将上述论证应用于 $W^{(n)} = Y^{(n)} - M^{S_n} \geqslant 0$ 得

$$[\sup_t X_t < \infty] \subset \bigcup_n [S_n = \infty] \subset [M \to] \quad \text{a.s.}. \qquad (28.3)$$

由(28.3)及(28.2)得

$$[\sup_t X_t < \infty] \subset [X \to][M \to] = [M \to][B \to] \quad \text{a.s.}.$$

所以(28.1)成立. □

8.29 定理 设 $X = M + B$，其中 M 为局部鞅，B 为零初值可料增过程. 若 $X \geqslant 0$，且 $E[X_0] < \infty$，则

$$[B \to] = [X \to][M \to] \quad \text{a.s.}. \qquad (29.1)$$

证明 令 $T_n = \inf\{t \geqslant 0: B_t \geqslant n\}$，则 $T_n > 0$ 为可料时，且

$$Y^{(n)} = -M^{T_n -} + X_0 = B^{T_n -} - X^{T_n -} + X_0 \leqslant n + X_0.$$

由于 $Y^{(n)}$ 为局部鞅，对每个停时 T，有 $E[(Y_T^{(n)})^+ I_{[T < \infty]}] < \infty$，对 $Y^{(n)}$ 应用定理 8.28 得

$$P([M^{T_n^-}\to])=P(\sup_t(-M_t^{T_n^-})<\infty)=1.$$

显然,我们有

$$[B\to]\subset\bigcup_n[T_n=\infty]\subset[M\to],\quad \text{a.s.},$$

$$[B\to]\subset[M\to][X\to]\quad \text{a.s.}.$$

反包含关系显然,故(29.1)成立. □

8.30 系 设 B 为一适应局部可积增过程,则

1) $[\widetilde{B}_\infty<\infty]\subset[B_\infty<\infty]$,

2) 若对每个停时 T,$\boldsymbol{E}[\Delta B_T I_{[T<\infty]}]<\infty$,则

$$[\widetilde{B}_\infty<\infty]=[B_\infty<\infty].$$

证明 不妨设 $B_0=\widetilde{B}_0=0$. 由于 $B=M+\widetilde{B}$,$M=B-\widetilde{B}\in\mathcal{M}_{\text{loc},0}$,对 B 应用定理 8.29 得 1),再应用定理 8.28 得 2). □

8.31 系 设 M 为一局部鞅. 如果对每个停时 T,$\boldsymbol{E}[(|M_T|\wedge|\Delta M_T|)I_{[T<\infty]}]<\infty$,则

$$[M\to]=[\sup_t M_t<\infty]=[\inf_t M_t>-\infty]\quad \text{a.s.},$$

即对几乎所有的 ω,或$\lim\limits_{t\to\infty}M_t(\omega)$存在且有限,或同时有$\limsup\limits_{t\to\infty}M_t(\omega)=+\infty$及$\liminf\limits_{t\to\infty}M_t(\omega)=-\infty$.

证明 不妨设 $M_0=0$. 分别对 M 及 $-M$ 应用定理 8.28($B=0$)即可. □

8.32 定理 设 M 为一局部平方可积鞅,则

$$[\langle M\rangle\to]\subset[M\to]\quad \text{a.s.}.$$

如果对每个停时 T,$\boldsymbol{E}[(\Delta M_T)^2 I_{[T<\infty]}]<\infty$,则

$$[\langle M\rangle\to]=[[M]\to]=[M\to]\quad \text{a.s.}.$$

证明 不妨设 $M_0=0$. 令 $T_n=\inf\{t\geqslant 0:\langle M\rangle_t\geqslant n\}$,则 T_n 为可料时,$M^{T_n^-}$ 为局部鞅. 因为

$$\langle M^{T_n^-}\rangle=\langle M\rangle^{T_n^-}\leqslant n,$$

故 $M^{T_n^-}$ 为平方可积鞅,$P([M^{T_n^-}\to])=1$. 因此

$$[\langle M\rangle\to]\subset\bigcup_n[T_n=\infty]\subset[M\to]\quad \text{a.s.}.$$

若对每个停时 T,$\boldsymbol{E}[(\Delta M_T)^2 I_{[T<\infty]}]<\infty$,则由系 8.30,有

$[\langle M\rangle\to]=[[M]\to]$ a.s.. 令 $S_n=\inf\{t\geq 0; |M_t|\geq n\}$，则

$$M^{S_n}\leq n+|\Delta M_{S_n}|I_{[S_n<\infty]}.$$

故 M^{S_n} 为平方可积鞅，$\langle M\rangle_{S_n}=\langle M^{S_n}\rangle_\infty<\infty$ a.s.，所以

$$[M\to]\subset\bigcup_n[S_n=\infty]\subset[\langle M\rangle\to]\quad\text{a.s.}.\quad\square$$

8.33 定理 设 $X=M+B$，其中 M 为局部鞅，B 为可料增过程. 如果 ΔX 有界，则

$$[X\to]=[M\to][B\to]=[\langle M\rangle+B\to]=[\langle X\rangle+B\to]\quad\text{a.s.}.$$

证明 不妨设 $M_0=B_0=0$. 由定理 8.8 知，ΔB 有界，从而 ΔM 有界. 因此 M 为局部平方可积鞅. 由定理 8.28 及 8.32 有

$$[X\to]=[M\to][B\to]=[\langle M\rangle+B\to]\quad\text{a.s.}.$$

另一方面，$[X]=[M]+2[M,B]+[B]$，$[B]$ 可料，$[M,B]=(\Delta M).B$ 为局部鞅($[M,B]\in\mathscr{A}_{loc}$，$\widetilde{[M,B]}={}^p(\Delta M).B=0$)，故我们有

$$\langle X\rangle=\langle M\rangle+[B].$$

显然，在$[B\to]$上，$\sum_{s>0}\Delta B_s\leq B_\infty<\infty$，$[B]_\infty=\sum_{s>0}(\Delta B_s)^2<\infty$. 因此

$$[\langle M\rangle+B\to]=[\langle X\rangle+B\to]\quad\text{a.s.}.\quad\square$$

上述收敛性结果也适应于前一节讨论的区间型随机集合上的局部鞅与半鞅.

问题与补充

8.1 设 X 为一适应右连左极过程. 如果存在一列停时(T_n)，使得 $T_n\uparrow\infty$，一列半鞅$(X^{(n)})$，使得对每个 n

$$X^{T_n-}=(X^{(n)})^{T_n},$$

则 X 为半鞅.

8.2 设 X 为一特殊半鞅，T 为一停时，则 $\Delta X_T I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{T-}$ σ-可积.

8.3 以 $\mathscr{D}$ 记类(D)可选过程全体，则 $\mathscr{S}_p=\mathscr{S}\cap\mathscr{D}_{loc}$.

8.4 为要 X 为可料半鞅，必须且只需 $X=M+A$，其中 M 为连续局部鞅，A 为可料有限变差过程.

8.5 设 $X\in\mathscr{S}$. 若 $E[[X]_\infty^{\frac{1}{2}}]<\infty$，则 $X\in\mathscr{S}_p$. 若 $X=M+A$ 为其典则分解，则 $M\in\mathscr{M}^2$.

8.6 令

$\mathscr{S}^* = \{X \in \mathscr{S}: X = M + A, M \in \mathscr{M}_{loc}^c, A \in \mathscr{V}_0\}$.

1) 设 $X\in\mathscr{S}$，则 $X\in\mathscr{S}^*$ 当且仅当对每个 $t>0$，$\sum\limits_{s\leq t}|\Delta X_s|<\infty$ a.s..

2) 如果存在停时 $T_n\uparrow\infty$ 及序列 $(X^{(n)})\subset\mathscr{S}^*$，使得对每个 n，$X^{T_n-}=(X^{(n)})^{T_n-}$，则 $X\in\mathscr{S}^*$ 特别，$(\mathscr{S}^*)_{loc}=\mathscr{S}^*$.

8.7 设 X 为一适应可积增过程，则 X 为拟鞅. 求其 Rao 分解.

8.8 设 X 为一右连左极上鞅. X 为拟鞅当且仅当 $\sup\limits_t E[X_t^-]<\infty$，且这时

$$\mathrm{Var}(X) = E[X_0] + 2\sup_t E[X_t^-].$$

8.9 设 X 为一适应右连左极过程.

1) 若 $S\geq T$ 为两个停时，则 $\mathrm{Var}(X^S)\geq\mathrm{Var}(X^T)$.

2) 若 (T_n) 为一列停时，使得 $T_n\uparrow\infty$，则 $\mathrm{Var}(X)=\sup_n\mathrm{Var}(X^{T_n})$.

8.10 令 $\mathscr{T}_b$ 为有界停时全体，M 为一可选过程. 定义

$$\|M\|_1 = \sup\{E[|M_T|]: T \in \mathscr{T}_b\}$$

若 $\|M\|_1<\infty$，我们称 **M 在 $\mathbf{L}^1$ 中有界**.

设 M 为一局部鞅. M 为拟鞅当且仅当 M 在 L^1 中有界，且这时 $\mathrm{Var}(M)=\|M\|_1$.

8.11 设 X 为一适应右连左极过程. 为要 X 为拟鞅，必须且只需 $X=M+A$，其中 M 为在 L^1 中有界的局部鞅，A 为零初值可料可积变差过程. 此外，拟鞅的这种分解式是唯一的.

8.12 令 $\mathscr{Q}$ 为拟鞅全体，则

$$\mathscr{S}_p = \mathscr{Q}_{loc}$$

8.13 设 M 为一在 L^1 中有界的局部鞅，则 M 有如下唯一分解：

$$M = M' - M'',$$

其中 M' 及 M'' 为非负局部鞅，且

$$\| M \|_1 = \| M' \|_1 + \| M'' \|_1$$

（这一分解称为 **Krickeberg-Kazamaki 分解**.）

8.14 设 M 为一在 L^1 中有界的局部鞅，$(\mathscr{G}_t)$ 为一满足通常条件的流，且对每个 $t \geqslant 0$，$\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t$. 如果 M 为 $(\mathscr{G}_t)$-适应，则 M 也为在 L^1 中有界的 $(\mathscr{G}_t)$-局部鞅.

8.15 设 X 为一局部鞅，(τ_t) 为一连续时间变换，且对每个 $t \geqslant 0$，$\tau_t < \infty$. 令

$$Y_t = X_{\tau_t}, \quad \mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{\tau_t}, \quad t \geqslant 0,$$

则 $Y = (Y_t)$ 为 $(\mathscr{G}_t)$-局部鞅.

8.16 设 B 为一区间型可料集，M 为一 B 上的局部鞅，则存在 B 的基本序列 (T_n)，使得对每个 n，M^{T_n} 为一致可积鞅.

8.17 设 (T_n) 为一列停时，$T = \sup\limits_n T_n$，M 为一定义在 $[\![0, T [\![$ 上的过程. 若对每个 n，M 为 $[\![0, T_n [\![$ 上的局部鞅，则 M 为 $[\![0, T [\![$ 上的局部鞅.

8.18 设 $X = M + B$，其中 M 为局部鞅，B 为零初值可料有限变差过程. 如果 $X \geqslant 0$ 及 $\boldsymbol{E}[X_0] < \infty$，则

$$[B^+ \to] = [X \to][M \to][B^- \to].$$

8.19 设 $X = M + B$，其中 M 为局部鞅，B 为零初值可料有限变差过程. 如果 ΔX 有界，则

$$[M \to, B^+ + B^- \to] = [\inf_t X_t > -\infty][B^+ \to]$$

$$= [\sup_t X_t < \infty][B^- \to].$$

8.20 设 $X \in \mathscr{S}$，$X = M + A$ 为 X 的一个分解，其中 $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$，$A \in \mathscr{V}$. 令

$$j_n(M, A) = \boldsymbol{E}\left[1 \wedge \left(\sqrt{[M]_n} + \int_{[0,n]} |dA|\right)\right]$$

$$+\sup_T \boldsymbol{E}[1\wedge|\Delta M_{T\wedge n}|],$$

其中 T 跑遍一切停时，

$$\|X\|_{\mathscr{S},n}=\inf_{X=M+A} j_n(M,A),$$

其中下确界是对 X 的一切分解取的，

$$\|X\|_{\mathscr{S}}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\|X\|_{\mathscr{S},n}.$$

1）$(\mathscr{S},d)$ $(d(X,Y)=\|X-Y\|_{\mathscr{S}})$为完备距离空间（由此距离导出的拓扑称为 **Emery** 拓扑）.

2）设 $X^n,X\in\mathscr{S}$. 若存在一列停时(T_k)，使得 $T_k\uparrow\infty$ 且对每个 k，$(X^n-X)^*_{T_k}\xrightarrow{P}0$，则 $\|X^n-X\|_{\mathscr{S}}\to0$.

3）设 $X^n,X\in\mathscr{S}$. 若 $\|X^n-X\|_{\mathscr{S}}\to0$，则存在一子列$(X^{n'})$及一列停时$(T_k)$，使得 $T_k\uparrow\infty$，且对每个 k，$(X^{n'}-X)^*_{T_k-}\xrightarrow{P}0$.

第九章　随机积分

我们将讨论的随机积分是形如$\int_{[0,t]} H_s dX_s$或$\int_0^t H_s dX_s$的积分，其中(H_t)及(X_t)都是随机过程. 1944年，K. Itô最早定义了适应可测过程对Brown运动的随机积分. 这一积分的一个重要特点是积分得到的过程为鞅(或更一般地，局部鞅). 1967年，H. Kunita和S. Watanabe定义了适应可测过程对一般平方可积鞅的随机积分，迈出了现代随机积分理论的关键性的一步. 1970年，C. Doléans-Dade和P. A. Meyer研究了局部有界可料过程对局部鞅及半鞅的随机积分. 1976年，P. A. Meyer研究了可选过程对局部鞅的随机积分. 1979年，J. Jacod研究了非有界可料过程对半鞅的随机积分. 本章介绍随机积分的定义与基本性质(§1—§3). 在§4中给出非常有用的Lenglart不等式，并利用它讨论随机积分关于被积过程的连续性. 在§5中给出半鞅的变量变换公式(*Itô*公式)及Doléans-Dade指数公式. 在§6中介绍半鞅的局部时及*Itô*公式的一种推广. 在§7中，采用Métivier-Pellaumail的方法，对随机微分方程作一简短的讨论.

§1.　可料过程对局部鞅的随机积分

在本节中我们将定义可料过程对局部鞅的(不定)随机积分，积分所得过程仍为局部鞅. 首先，对初等可料过程，可用自然的方式定义随机积分，且不难找到这类随机积分的刻画. 然后，在此刻画的基础上给出一般可料过程对局部鞅的随机积分的定义.

设S,T为两个停时，且$S\leqslant T$. 令$\xi\in\mathscr{F}_S$为一实值随机变量. 令$H=\xi I_{]S,T]}$，则H为可料过程. 设M为一局部鞅. H对M的

随机积分，记作 $H.M$，自然应定义为

$$(H.M)_t = \xi(M_{t\wedge T} - M_{t\wedge S}),\ t \geqslant 0.$$

由定理 7.38 知，$H.M$ 为局部鞅，且对任一局部鞅 N，有

$$[H.M,N] = \xi([M,N]^T - [M,N]^S) = H.[M,N],$$

其中 $H.[M,N]$ 为不定 Stieltjes 积分. 此外，由定理 7.31 知，如上定义的 $H.M$ 是唯一的局部鞅 L，使得对任一局部鞅 N，有

$$[L,N] = H.[M,N]. \tag{1.1}$$

这个例子启发我们引进下列随机积分的定义.

9.1 定义 设 M 为一局部鞅，H 为一可料过程. 如果存在(唯一的)局部鞅 L，使得(1.1)对一切局部鞅 N 成立(这包含了 H 对 $[M,N]$ 可积的假设)，则称 H 对 M 在局部鞅积分意义下**可积**(或简称可积)，称 L 为 H 对 M 的**随机积分**，记作 $H.M$. 对 M 可积的可料过程全体记作 $L_m(M)$.

下一定理给出 $L_m(M)$ 中过程的刻画.

9.2 定理 设 M 为一局部鞅，H 为一可料过程，则 $H \in L_m(M)$ 当且仅当 $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$.

证明 必要性. 在(1.1)中令 $N = H.M$ 得

$$[H.M] = H.[M,H.M] = H^2.[M].$$

由于 $H.M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$，由定理 7.30，有 $\sqrt{H^2.[M]} = \sqrt{[H.M]} \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$.

充分性. 只要证明存在 $L' \in \mathscr{M}^c_{\text{loc},0}$ 及 $L'' \in \mathscr{M}^d_{\text{loc}}$，使得对每个 $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$，有

$$[L',N] = H.[M^c,N], \tag{2.1}$$

$$[L'',N] = H.[M^d,N], \tag{2.2}$$

那么 $L = H_0M_0 + L' + L''$ 即为所要找的局部鞅.

由定理 7.42 及系 7.23，存在唯一的 $L'' \in \mathscr{M}^d_{\text{loc}}$，使得 $\Delta L'' = H\Delta M$. 因此(2.2)成立.

往证 L' 的存在性. 首先假设

$$\boldsymbol{E}[(H^2.[M^c])_\infty] < \infty.$$

由 Kunita-Watanabe 不等式(定理 6.33)，对每个 $N \in \mathscr{M}^{2,c}_0$，有

$$E\left[\int_0^\infty |H_s|\,|d[M^c,N]_s|\right]\leqslant (E\int_0^\infty H_s^2 d[M^c]_s)^{\frac{1}{2}}(E[N]_\infty)^{\frac{1}{2}}.$$

因此，$\varphi(N)=E\left[\int_0^\infty H_s d[M^c,N]_s\right]$是 Hilbert 空间 $\mathscr{M}_0^{2,c}$ 上的有界线性泛函．由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $L'\in\mathscr{M}_0^{2,c}$，使得对一切 $N\in\mathscr{M}_0^{2,c}$，有

$$E[L',N]_\infty = E[L_\infty' N_\infty] = E\left[\int_0^\infty H_s d[M^c,N]_s\right]. \quad (2.3)$$

设 T 为一停时，在(2.3)中以 N^T 代 N 得

$$E[L',N]_T = E\left[\int_0^T H_s d[M^c,N]_s\right].$$

由定理 4.40 知，$A=[L',N]-H.[M^c,N]\in\mathscr{M}$．但 A 是零初值适应连续有限变差过程，由定理 6.3.2）知，$A=0$，即

$$[L',N] = H.[M^c,N].$$

容易看出，(2.1)对一切 $N\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$成立．

在一般情形，存在一列停时 $T_n\uparrow\infty$，使得对每个 n，$E[(H^2.[M^c])_{T_n}]<\infty$．对每个局部鞅$(M^c)^{T_n}$应用已证结果，我们有 $L^{(n)}\in\mathscr{M}_0^{2,c}$，使得对一切 $N\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，有

$$[L^{(n)},N] = H.[M^c,N]^{T_n}.$$

由唯一性，对每个 n，$(L^{(n+1)})^{T_n}=L^{(n)}$．用粘贴的方法，我们有 $L'\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}^{2,c}$，使得(2.1)对一切 $N\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$成立． □

下一定理综述了随机积分的基本性质．

9.3 定理 设 M 为一局部鞅，$H,K\in L_m(M)$．

1）$L_m(M)=L_m(M^c)\cap L_m(M^d)$，$(H.M)_0=H_0M_0$，$(H.M)^c=H.M^c$，$(H.M)^d=H.M^d$．

2）$\Delta(H.M)=H\Delta M$．

3）$H+K\in L_m(M)$，且$(H+K).M=H.M+K.M$．

4）设 H' 为一可料过程，则 $H'\in L_m(H.M)$当且仅当$(HH')\in L_m(M)$，且这时

$$H'.(H.M) = (H'H).M.$$

5）设 T 为一停时，则

$$(H.M)^T = H.M^T = (HI_{[\![0,T]\!]}).M.$$

证明 1)及2)已在定理9.2中证过,3)—5)显然. □

通常,我们也使用下列随机积分的记号:对 $t\geqslant 0$

$$\int_{[0,t]} H_s dM_s = (H.M)_t,$$

$$\int_0^t H_s dM_s = \int_{]0,t]} H_s dM_s = ((HI_{]\!]0,\infty[\![}).M)_t.$$

随机积分的概念今后将被推广,但随机积分的记号并不改变.

9.4 例 1) 设 M 为一局部鞅,A 为一可料有限变差过程,则 $\Delta A\in L_m(M)$,且

$$(\Delta A).M = [M,A] - M_0A_0. \tag{4.1}$$

事实上,ΔA 局部有界(定理7.7),对一切 $N\in\mathscr{M}_{\text{loc}}$,$\Delta A$ 对 $[M,N]$ 可积. 另一方面,我们早已知道 $[M,A]-M_0A_0$ 为局部鞅(参见定理8.33的证明). 容易看出,对一切 $N\in\mathscr{M}_{\text{loc}}$,有

$$[[M,A]-M_0A_0,N] = \Sigma(\Delta M\Delta A\Delta N) = (\Delta A).[M,N].$$

由定义9.1,(4.1)成立.

这一结果称为 **Yœurp 引理**.

2) 设 M 为一局部鞅,$T>0$ 为一可料时,则

$$I_{[\![T]\!]}.M = \Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![}.$$

事实上,熟知 $\Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![}$ 为局部鞅,且对一切 $N\in\mathscr{M}_{\text{loc}}$,有 $[\Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![},N]=\Delta M_T\Delta N_T I_{[\![T,\infty[\![}=I_{[\![T]\!]}.[M,N]$.

9.5 定理 设 M 为一局部可积变差鞅,H 为一可料过程.

1) 若 $\Sigma|H\Delta M|\in\mathscr{A}^+_{\text{loc}}$,则 $H\in L_m(M)$,且

$$(H.M)_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega)dM_s(\omega),\ t\geqslant 0, \tag{5.1}$$

这里(5.1)的右边是 Stieltjes 积分. 为明确起见,有时将它记作 $H{}_{\text{S}}M$.

2) 若 $\Sigma|H\Delta M|\in\mathscr{V}^+$ 且 $H\in L_m(M)$,则(5.1)也成立.

证明 1) 由于 $\Sigma|H\Delta M|\in\mathscr{A}^+_{\text{loc}}$,由定理6.2知,Stieltjes 积分 $H{}_{\text{S}}M$ 存在. 又由定理6.5知,$H{}_{\text{S}}M\in\mathscr{M}_{\text{loc}}$. 另一方面,

$$\sqrt{H^2.[M]} \leqslant \Sigma|H\Delta M| \in \mathscr{A}_{loc},$$

故 $H.M$ 存在，且 $\Delta(H.M)=H\Delta M-\Delta(H_sM)$. 由于 $H.M-(H.M)_0$ 及 $H_sM-(H_sM)_0$ 都是纯断局部鞅，且 $(H.M)_0=H_0M_0=(H_sM)_0$，故有 $H.M=H_sM$.

2）设 (T_n) 为一列停时，使得 $T_n\uparrow\infty$ 且对每个 n，$E\left[\sqrt{\sum_{s\leqslant T_n}H_s^2\Delta M_s^2}\right]<\infty$. 令

$$S_n=\inf\left\{t\geqslant 0;\sum_{s\leqslant t}|H_s\Delta M_s|>n\right\}\wedge T_n.$$

则 $S_n\uparrow\infty$，且对每个 n，$E\left[\sum_{s\leqslant S_n}|H_s\Delta M_s|\right]<\infty$. 因此 $\Sigma|H\Delta M|\in\mathscr{A}_{loc}^+$，再由 1）推得 2）. □

定理 9.5 表明，我们的可料随机积分（即可料过程的随机积分）如果是对局部可积变差鞅的积分，只要相应的 Stieltjes 积分存在，两者相一致. 这也说明了这里给出的随机积分定义的合理性.

§2. 循序过程对局部鞅的补偿随机积分

我们要将被积过程推广到循序过程.

9.6 引理 设 M 为一连续局部鞅，H 为一循序过程. 为要存在 $L\in\mathscr{M}_{loc}$，使得（1.1）对一切 $N\in\mathscr{M}_{loc}$ 成立，必须且只需 $H^2.[M]\in\mathscr{V}^+$. 这时存在可料过程 $K\in L_m(M)$，使得 $K.M=L$. 我们称 H 对 M **可积**，称 L 为 H 对 M 的**随机积分**，记作 $H.M$.

证明 必要性是容易的（在（1.1）中令 $N=L$），往证充分性. 设 $H^2.[M]\in\mathscr{V}^+$. 令 ^0H 为 H 的可选投影. 我们有 $(^0H)^2.[M]=H^2.[M]$（参见问题 5.9）. 由定理 3.20，存在可料过程 K，使得 $[K\neq {^0H}]$ 为一稀疏集. 因此 $K^2.[M]=(^0H)^2.M=H^2.[M]$. 令 $L=K.M$，则对一切 $N\in\mathscr{M}_{loc}$，有

$$[L,N]=K.[M,N]={^0H}.[M,N]=H.[M,N]. \quad \square$$

9.7 定义 设 M 为一纯断局部鞅，H 为一循序过程. 如果 $H\Delta M$ 有可料投影，且存在纯断局部鞅 L，使得 $\Delta L=H\Delta M-$

${}^p(H\Delta M)$，我们称 L 为 H 对 M 的补偿随机积分，记作 $H_c M$.

容易看出，若 H 可料，则定义 9.7 与定义 9.1 相符. 一般地，$H\Delta M$ 的可料投影（如存在）不是零，我们不再有 $\Delta(H_c M) = H\Delta M$，而是 $\Delta(H_c M) = H\Delta M - {}^p(H\Delta M)$. 下面是补偿随机积分的一个典型例子.

9.8 引理 设 M 为一纯断局部鞅. 令 $H = I_{[\Delta M \neq 0]}$，则 H 对 M 的补偿随机积分存在，且 $H_c M = M$.

证明 我们有 $H\Delta M = \Delta M$，且 ${}^p(H\Delta M) = 0$，故由定义有 $M = H_c M$. □

9.9 定义 设 M 为一局部鞅，H 为一循序过程. 如果 $H^2 . [M^c] \in \mathscr{V}^+$，${}^p(H\Delta M)$ 存在，且

$$\sqrt{\Sigma(H\Delta M - {}^p(H\Delta M))^2} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}},$$

定义

$$H_c M = H_0 M_0 + H . M^c + H_c M^d.$$

$H_c M$ 称为 H 对 M 的**补偿随机积分**.

显然，补偿随机积分是定义 9.1 中的可料随机积分的推广. 上面给出的补偿随机积分存在的条件已是最一般的，但它们是难以验证的. 此外，也没有补偿随机积分的刻画. 下一定理在某种程度上弥补了这两个缺点. 事实上，它就是首先由 P. A. Meyer 给出的补偿随机积分的定义.

9.10 定理 设 M 为一局部鞅，H 为一循序过程. 如果 $\sqrt{H^2 . [M]} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$，则 $H_c M$ 存在，且它是唯一的局部鞅 L，使得对一切有界鞅 N，有 $[L,N] - H . [M,N] \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$.

证明 不妨设 $M_0 = 0$. 令

$$W = H\Delta M I_{[|H\Delta M| > 1]}, \quad U = H\Delta M I_{[|H\Delta M| \leqslant 1]},$$

则 $A = \Sigma W \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$. 我们有 ${}^p W = {}^p(\Delta A) = \Delta(A^p)$. 由于 $H\Delta M = W + U$，${}^p(H\Delta M)$ 存在. 同时，$B = \Sigma(U^2) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$，$\Delta(B^p) = {}^p(U^2)$，

$$\Sigma({}^p U)^2 \leqslant \Sigma\, {}^p(U^2) = \Sigma\Delta(B^p) \leqslant B^p.$$

令 $Z = H\Delta M - {}^p(H\Delta M)$，则

$$\Sigma(Z^2)\leqslant 2\{H^2.[M]+\Sigma({}^p(H\Delta M))^2\}$$
$$\leqslant 2\{H^2.[M]+2\Sigma({}^pW)^2+2\Sigma({}^pU)^2\},$$

$\sqrt{\Sigma(Z^2)}\in\mathscr{A}^+_{loc}$. 另一方面,$H^2.[M^c]\leqslant H^2.[M]\in\mathscr{V}^+$. 因此 H_cM 存在.

现设 N 为一有界鞅. 由 Kunita-Watanabe 不等式

$$V=[H_cM,N]-H.[M,N]\in\mathscr{A}_{loc}.$$

显然,$\Delta V=-{}^p(H\Delta M)\Delta N$,故 $\Delta(V^p)={}^p(\Delta V)=0$,即 V^p 为连续有限变差过程. 由于 $V^c=[H.M^c,N^c]-H.[M^c,N^c]=0$,故 $V=\Sigma(\Delta V)$ 为纯断有限变差过程,且只有可及跳(注意 ${}^p(H\Delta M)$ 为可料稀疏过程). 由定理 7.14.1),V^p 应为纯断有限变差过程. 因此,必有 $V^p=0$,即 $V\in\mathscr{M}_{loc,0}$. 最后,由定理 7.36,满足这要求的局部鞅是唯一的. □

注 1)在定理中,若 H^2 对$[M]$可积,则为要 H_cM 存在,条件 $\sqrt{H^2.[M]}\in\mathscr{A}^+_{loc}$ 也是必要的. 细节留给读者完成.

2) 今后,补偿随机积分也简称为随机积分,记号 H_cM 也用 $H.M$ 代替.

最后,我们阐明如何定义适应可测过程对一类连续局部鞅的随机积分,它们推广了对 Brown 运动的 Itô 随机积分.

9.11 定理 设 M 为一零初值连续局部鞅,$a=(a_t)$为一连续单调增(非随机)函数,使得对几乎所有的 ω,$d[M](\omega)\ll da$. 设 H 为一适应可测过程,则为要存在 $L\in\mathscr{M}_{loc}$,使得(1.1)对一切 $N\in\mathscr{M}_{loc}$成立,必须且只需 $H^2.[M]\in\mathscr{V}^+$. 这时,存在可料过程 K,使得 $K\in L_m(M)$且 $K.M=L$. L 称为 H 对 M 的**随机积分**,并记作 $H.M$.

证明 只需证明充分性. 设 $\overline{H}$ 为 H 的可选修正(即 $\overline{H}$ 可选,且$\forall\ t\in\boldsymbol{R}_+$,$\overline{H}_t=H_t$ a.s.,参见问题 5.10). 由于 $d[M]$对 da 绝对连续,由 Fubini 定理知

$$\overline{H}^2.[M]=H^2.[M].$$

事实上,令(T_n) 为一列停时,使得 $T_n\uparrow\infty$ 且

$$E\left[\int_0^{T_n} H_s^2 d[M]_s\right] < \infty, \quad \forall\, n \geqslant 1,$$

则对任一停时 T，有

$$E\left[\int_0^{T\wedge T_n} H_s^2 d[M]_s\right] = \int_0^\infty E\left[H_s^2 I_{]\!]0,T\wedge T_n]\!]} \frac{d[M]}{da}\right] da_s$$

$$= \int_0^\infty E\left[\overline{H}_s^2 I_{]\!]0,T\wedge T_n]\!]} \frac{d[M]}{da}\right] da_s$$

$$= E\left[\int_0^{T\wedge T_n} \overline{H}_s^2 d[M]_s\right].$$

由引理 9.6，$\overline{H}.M$ 存在，且对一切 $N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，有

$$[\overline{H}.M, N] = \overline{H}.[M,N] = H.[M,N],$$

其中第二个等式由 Kunita-Watanabe 不等式及 $(\overline{H}-H)^2.[M]=0$ 推得(再一次用 Fubini 定理). 其余的结论直接由引理 9.6 可推得. □

§3. 可料过程对半鞅的随机积分

由于每个半鞅可分解为一局部鞅与一适应有限变差过程之和. 自然会想到对半鞅的随机积分可考虑为对这两部分的随机积分之和，但关键在于这两个随机积分的和应不依赖于半鞅的具体分解. 下一引理保证了这一点.

9.12 引理 设 X 为一半鞅，H 为一可料过程. 令 $X=M+A$，$X=N+B$ 为 X 的两个分解，其中 $M, N\in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，$A,B\in \mathscr{V}_0$. 若 $H \in L_m(M)\cap L_m(N)$，H_sA 及 H_sB 存在，则

$$H.M + H_sA = H.N + H_sB \tag{12.1}$$

证明 由于 $M-N=B-A\in \mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$，由定理 9.5.2)得

$H.(M-N) = H_s(B-A)$，即(12.1) 成立. □

9.13 定义 设 X 为一半鞅，H 为一可料过程. 如果存在 X 的一个分解：$X=M+A$，其中 $M\in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，$A\in \mathscr{V}_0$，使得 $H\in L_m(M)$，H_sA 存在，我们称 H 对 X 在半鞅积分意义下**可积**(或简称 H 为 X-可积的)，$X=M+A$ 为 X 的一个 **H-分解**. 这时，令

$$H.X = H.M + H_sA. \tag{13.1}$$

$H.X$ 不依赖于 X 的 H-分解，称为 **H 对 X 的随机积分**.

9.14 注 1）设 X 为一半鞅，$X=M+A$ 为 X 的一个分解，其中 $M\in\mathscr{M}_{loc}$，$A\in\mathscr{V}_0$，则对任一局部有界可料过程 H，H 为 X-可积的，且 $X=M+A$ 是 X 的一个 H-分解.

2）可料过程对半鞅的随机积分的定义 9.13 是可料过程对局部鞅的随机积分的定义 9.1 的自然推广. 事实上，若 M 是一局部鞅，H 是一可料过程，且 H 对 M 在局部鞅积分意义下可积，则 H 对 M 在半鞅积分意义下也可积，且两种意义下的随机积分相符. 但是，若 H 对 M 在半鞅积分意义下可积，一般说来我们不能断言，$H.M$ 仍是局部鞅，即 H 对 M 在局部鞅积分意义下不必可积. 例如，设 $M\in\mathscr{W}_{loc,0}$，H 为一可料过程，使得 Stieltjes 积分 H_sM 存在，但 $H_sM\notin\mathscr{A}_{loc}$，则 $H\notin L_m(M)$.

下一定理综述了可料过程对半鞅的随机积分的基本性质，其证明是容易的. 今后，我们以 $L(X)$ 记对半鞅 X 可积的可料过程全体.

9.15 定理 设 X 为一半鞅，$H\in L(X)$.

1）$(H.X)^c=H.X^c$，$\Delta(H.X)=H\Delta X$，$(H.X)_0=H_0X_0$.

2）对任一停时 T，有

$$(H.X)^T = H.X^T = (HI_{[0,T]}).X,(H.X)^{T-} = H.X^{T-}.$$

3）对任一半鞅 Y，有

$$[H.X,Y] = H.[X,Y].$$

4）若 Y 为一半鞅，$H\in L(Y)$，则 $H\in L(X+Y)$，且 $H.(X+Y)=H.X+H.Y$.

5）若 K 为一可料过程且 $|K|\leqslant|H|$，则 $K\in L(X)$.

9.16 定理 设 X 为一特殊半鞅，$X=M+A$ 为其典则分解. 设 $H\in L(X)$，则为要 $H.X$ 是特殊半鞅，必须且只需 $X=M+A$ 为 X 的一个 H-分解.

证明 充分性是显然的，往证必要性. 设 $X=N+B$ 为 X 的 H-分解，其中 $N\in\mathscr{M}_{loc}$，$B\in\mathscr{V}_0$，则 $H.X=H.N+H.B\in\mathscr{S}_p$，

$H.B\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$. 由于 $A=\widetilde{B}$，由定理5.23.2)知，H 对 A 可积且 $H.A=\widetilde{H.B}$. 我们有

$$\sqrt{H^2.[M]}\leqslant\sqrt{H^2.[X]}+\sqrt{H^2.[A]}$$
$$\leqslant\sqrt{[H.X]}+\Sigma|H\Delta A|.$$

由于 $\sqrt{[H.X]}\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$（定理 8.6），故 $\sqrt{H^2.[M]}\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$，即 $H\in L_m(M)$. 总之，$X=M+A$ 为 X 的 H-分解. □

下一定理是上述定理的一个重要推论.

9.17 定理 设 X 为一半鞅，$H\in L(X)$. 令 U 为一可选集，使得 $U\supset[|H\Delta X|>1$ 或 $|\Delta X|>1]$，且对几乎所有 ω，对一切 $t>0$，$\{s:(\omega,s)\in U\}\cap[0,t]$ 至多有有穷多个点. 置

$$A_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta X_s I_{\{(\cdot,s)\in U\}},\quad Z_t=X_t-A_t,\quad t\geqslant 0,$$

则 $H\in L(Z)$，且特殊半鞅 Z 的典则分解 $Z=N+B$ 为一 H-分解.

证明 在定理条件下，显然 $A=(A_t)$ 有定义，且 A 为一阶梯有限变差过程，故 H 对 A 可积，从而 H 对 Z 可积. 此外，我们有 $|\Delta Z|\leqslant 1$，$|\Delta(H.Z)|=|H\Delta Z|\leqslant 1$，从而 Z、$H.Z$ 为特殊半鞅. 于是由定理 9.16，Z 的典则分解 $Z=N+B$ 为 Z 的一 H-分解. □

注 在定理中，如果令 $U=[|H\Delta X|>1$ 或 $|\Delta X|>1]$，则 $X=N+(B+A)$ 为 X 的一个 H-分解，其中 $N\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$. 但 $|\Delta N|\leqslant 2$（因为 $|\Delta B|\leqslant 1$），故 N 为局部有界鞅.

下面我们应用定理 9.17 进一步研究随机积分的性质.

9.18 定理 设 X 为一半鞅.

1) $H,K\in L(X)\Rightarrow H+K\in L(X)$.

2) 设 $H\in L(X)$，K 为一可料过程. 为要 $K\in L(H.X)$，必须且只需 $KH\in L(X)$. 这时有 $K.(H.X)=(KH).X$.

证明 1) 在定理 9.17 中，令 $U=[|H\Delta X|>1$ 或 $|K\Delta X|>1$ 或 $|\Delta X|>1]$，则 $X=N+(A+B)$ 既是 H-分解，又是 K-分解，所以是 $(H+K)$-分解，即 $H+K\in L(X)$.

2) 必要性显然，往证充分性. 设 $KH\in L(X)$. 在定理 9.17 中，令 $U=[|H\Delta X|>1$ 或 $|KH\Delta X|>1$ 或 $|\Delta X|>1]$，则 $X=N+$

$(A+B)$既是 H-分解，又是 HK-分解. 这表明 $H.X=H.N+H.(A+B)$是 $H.X$ 的 K-分解. 因此 $K\in L(H.X)$且

$$K.(H.X)=K.(H.N)+K.(H.(A+B))$$
$$=(KH).N+(KH).(A+B)$$
$$=(KH).X.\quad \square$$

9.19 定理 设X 为一半鞅，H 为一可料过程. 如果存在停时 $T_n\uparrow\infty$，使得对每个 n，有 $H\in L(X^{T_n})$，则 $H\in L(X)$.

证明 由于 $H^2.[X]^{T_n}=[H.X^{T_n}]$，故 $H^2.[X]$为增过程. 令

$$A=\Sigma(\Delta X I_{[|H\Delta X|>1或|\Delta X|>1]}),\quad Z=X-A,$$

则A为一阶梯有限变差过程，故$H.A$存在. 因此只需证$H\in L(Z)$. 设 $Z=N+B$ 为特殊半鞅 Z 的典则分解. 对每个 n，$Z^{T_n}=N^{T_n}+B^{T_n}$是 Z^{T_n}的典则分解. 由于$|\Delta(H.Z^{T_n})|=|H\Delta Z^{T_n}|\leqslant 1$，故 $H.Z^{T_n}\in\mathscr{S}_p$. 由定理 9.16，$H.N^{T_n}$及 $H.B^{T_n}$存在. 所以 $H.N$ 及 $H.B$ 存在，即 $H\in L(Z)$. $\square$

§4. Lenglart 不等式与随机积分的收敛定理

在本节中首先介绍 Lenglart 不等式，然后利用它讨论随机积分关于被积过程的连续性.

9.20 定义 设 X 为一可选过程，A 为一适应增过程. 我们称 **A 控制 X**(或 **X 被 A 控制**)，如果对一切有界停时 T，有

$$\boldsymbol{E}[|X_T|]\leqslant \boldsymbol{E}[A_T].\tag{20.1}$$

这时，(20.1)对一切有穷停时 T 也成立.

9.21 例 1) 设 M 为一局部平方可积鞅，则 M^2 被$[M]$或$\langle M\rangle$控制. 事实上，令(T_n)为 M 的局部化序列，则对任一有界停时 T，有

$$\boldsymbol{E}[M^2_{T\wedge T_n}]=\boldsymbol{E}[[M]_{T\wedge T_n}]=\boldsymbol{E}[\langle M\rangle_{T\wedge T_n}].\tag{21.1}$$

在(21.1) 中令 $n\to\infty$，由 Fatou 引理得

$$\boldsymbol{E}[M^2_T]\leqslant \boldsymbol{E}[[M]_T]=\boldsymbol{E}[\langle M\rangle_T].$$

2）设 A 为一适应局部可积增过程，则 A 及其可料对偶投影 $\tilde{A}$ 相互控制.

9.22 引理 设 X 为一适应右连左极过程，被一适应增过程 A 控制，则对任一常数 $c>0$ 及停时 S，有

$$P(X_S^* \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c} E[A_S]. \tag{22.1}$$

若 S 为可料时，则有

$$P(X_{S-}^* \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c} E[A_{S-}]. \tag{22.2}$$

证明 令 $T=\inf\{t\geqslant 0: |X_t|\geqslant c\}\wedge S\wedge n$，则

$$E[A_S]\geqslant E[A_T]\geqslant E[|X_T|]\geqslant \int_{[X^*_{S\wedge n}>c]}|X_T|dP\geqslant cP(X^*_{S\wedge n}>c).$$

令 $n\to\infty$ 得

$$P(X_S^* > c) \leqslant \frac{1}{c} E[A_S].$$

(22.3)在(22.3)中以 $c-\varepsilon$ 代 c，再令 $\varepsilon\downarrow 0$ 得(22.1).

若 S 为可料时，取 (S_n) 为预报 S 的停时列. 由于

$$P(X_{S_n}^* > c) \leqslant \frac{1}{c} E[A_{S_n}],$$

令 $n\to\infty$ 得

$$P(X_{S-}^* > c) \leqslant \frac{1}{c} E[A_{S-}].$$

由此类似可证(22.2). □

9.23 定理 设 X 为一适应右连左极过程，被一适应增过程 A 控制，则对任意常数 $c>0$, $d>0$，停时 T 及可测集 H，有

$$P(H\cap[X_T^*\geqslant c])$$
$$\leqslant \frac{1}{c} E[A_T\wedge(d+(\Delta A)_T^*)] + P(H\cap[A_T\geqslant d]) \tag{23.1}$$

若 A 为可料增过程，则有

$$P(H\cap[X_T^*\geqslant c]) \leqslant \frac{1}{c} E[A_T\wedge d] + P(H\cap[A_T\geqslant d]). \tag{23.2}$$

(23.1)或(23.2)称为 **Lenglart 不等式**.

证明 令 $S=\inf\{t\geqslant 0: A_t\geqslant d\}$，则 $A_S\leqslant d+\Delta A_S$，$A_S\leqslant A_\infty\wedge(d+(\Delta A)^*_\infty)$，且

$$H\cap[X^*_\infty\geqslant c]\subset[X^*_S\geqslant c]\cup(H\cap[S<\infty])$$
$$\subset[X^*_S\geqslant c]\cup(H\cap[A_\infty\geqslant d]).$$

由引理 9.22，有

$$\begin{aligned}P(H\cap[X^*_\infty\geqslant c])&\leqslant P(X^*_S\geqslant c)+P(H\cap[A_\infty\geqslant d])\\&\leqslant\frac{1}{c}E[A_S]+P(H\cap[A_\infty\geqslant d])\\&\leqslant\frac{1}{c}E[A_\infty\wedge(d+(\Delta A)^*_\infty)]\\&\quad+P(H\cap[A_\infty\geqslant d]).\end{aligned}$$

分别以 X^T 及 A^T 代替 X 及 A 得(23.1).

若 A 可料，则 S 为可料时，类似地有

$$H\cap[X^*_\infty\geqslant c]\subset[X^*_{S-}\geqslant c]\cup(H\cap[A_\infty\geqslant d]).$$

$$\begin{aligned}P(H\cap[X^*_\infty\geqslant c])&\leqslant P[X^*_{S-}\geqslant c]+P(H\cap[A_\infty\geqslant d])\\&\leqslant\frac{1}{c}P[A_{S-}]+P(H\cap[A_\infty\geqslant d])\\&\leqslant\frac{1}{c}E[A_\infty\wedge d]+P(H\cap[A_\infty\geqslant d]).\end{aligned}$$

分别以 X^T 及 A^T 代替 X 及 A 得(23.2). □

9.24 系 设 X 为一适应右连左极过程，被一适应增过程 A 控制. 如果 $|\Delta A|\leqslant a$(常数)(或 A 可料)，则对任意常数 $c>0$、$d>0$，停时 T 及可测集 H，有

$$P(H\cap[X^*_T\geqslant c])\leqslant\frac{a+d}{c}+P(H\cap[A_T\geqslant d])$$

(或 $\quad P(H\cap[X^*_T\geqslant c])\leqslant\frac{d}{c}+P(H\cap[A_T\geqslant d])$).

9.25 系 设对每个 n，$X^{(n)}$ 为适应右连左极过程，被可料增过程 $A^{(n)}$ 控制. 设 T 为一停时，H 为一可测集. 若 $I_H A^{(n)}_T\xrightarrow{P}0$，则 $I_H\sup\limits_{t\leqslant T}|X^{(n)}_t|\xrightarrow{P}0$.

证明 由系 9.24，对任给 $\varepsilon>0,\delta>0$，有

$$P(H\cap[(X^{(n)})_T^*\geqslant\varepsilon]\leqslant\frac{\delta}{\varepsilon}+P(H\cap[A_T^{(n)}\geqslant\delta]).\qquad(25.1)$$

在(25.1)中先后令 $n\to\infty,\delta\downarrow 0$ 即得欲证之结论. □

现在研究随机积分关于被积过程的连续性. 设 M 为一局部平方可积鞅，H 为一可料过程，使得 $H.M$ 为一局部平方可积鞅. 由于 $[H.M]=H^2.M$，故 $\langle H.M\rangle=H^2.\langle M\rangle$. 因此 $(H.M)^2$ 被 $H^2.\langle M\rangle$ 控制. 由系 9.25 即得下列定理.

9.26 定理 设 M 为一局部平方可积鞅，T 为一停时，B 为一可测集. 设 $H,H^{(n)}\in L_m(M)$，$(H-H^{(n)}).M\in\mathscr{M}^2_{loc}$，$n\geqslant 1$. 若

$$I_B\int_{[0,T]}(H_s-H_s^{(n)})^2d\langle M\rangle_s\xrightarrow{P}0,$$

则

$$I_B\sup_{s\leqslant T}|(H.M)_s-(H^{(n)}.M)_s|\xrightarrow{P}0.$$

下一定理是可料过程对半鞅的随机积分的收敛定理.

9.27 定理 设 X 为一半鞅，T 为一有穷停时，B 为一可测集，$H,H^{(n)},n\geqslant 1$，为局部有界可料过程. 如果对几乎所有 $\omega\in B$，在 $[0,T(\omega)]$ 上 $(H^{(n)}.(\omega))_{n\geqslant 1}$ 一致有界且收敛于 $H.(\omega)$，则

$$I_B\sup_{t\leqslant T}|(H^{(n)}.X)_t-(H.X)_t|\xrightarrow{P}0.\qquad(27.1)$$

证明 令 $X=M+A$，其中 M 为局部有界鞅，A 为适应有限变差过程. 在定理条件下，由 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$I_B\int_{[0,T]}(H_t^{(n)}-H_t)^2d\langle M\rangle_t\to 0\quad\text{a.s.}.$$

由定理 9.26，

$$I_B\sup_{t\leqslant T}|(H^{(n)}.M)_t-(H.M)_t|\xrightarrow{P}0.$$

再由 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$I_B\sup_{t\leqslant T}|(H^{(n)}.A)_t-(H.A)_t|$$

$$\leqslant I_B\int_0^T|H_t^{(n)}-H_t||dA_t|\to 0\quad\text{a.s.}.$$

故得(27.1). □

作为定理9.27的一个应用,我们得到一类随机积分的Riemann-Stieltjes逼近.

9.28 定义 设T为一有穷停时,$(T_n)_{n\geq 0}$为一单调增停时列,使得$T_0=0$, $\sup\limits_n T_n=T$. 称$\tau: 0=T_0\leqslant T_1\leqslant\cdots$为区间$[0,T]$的一个**随机分割**. 如果对几乎所有$\omega$,序列$(T_n(\omega))$是尾定的(即存在自然数$n(\omega)$,使得当$n\geqslant n(\omega)$时,有$T_n(\omega)=T(\omega)$),也就是说,对几乎所有$\omega$, $(T_n(\omega))$构成区间$[0,T(\omega)]$的一个有限分割. 令

$$\delta(\tau)=\sup_i |T_{i+1}-T_i|.$$

$\delta(\tau)$为一有穷的随机变量,称为分割τ的**步长**.

9.29 定理 设X为一半鞅,H为一有连左极或左连续适应过程,T为一有穷停时. 令

$$\tau^{(n)}: 0=T_0^{(n)}\leqslant T_1^{(n)}\leqslant\cdots, \quad n\geqslant 1,$$

为一列$[0,T]$的随机分割,使得$\lim\limits_n \delta(\tau^n)=0$ a.s.,则

$$\sup_{t\leqslant T}\left|\sum_i H_{T_i^{(n)}}(X_{T_{i+1}^{(n)}\wedge t}-X_{T_i^{(n)}\wedge t})-\int_0^t H_{s-}dX_s\right|\xrightarrow{P}0, \quad n\to\infty.$$

(29.1)

证明 令$H^{(n)}=H_0I_{[0]}+\sum\limits_i H_{T_i^{(n)}}I_{]T_i^{(n)},T_{i+1}^{(n)}]}$,则$H^n$为局部有界可料过程,且

$$(H^{(n)}.X)_t=\sum_i H_{T_i^{(n)}}(X_{T_{i+1}^{(n)}\wedge t}-X_{T_i^{(n)}\wedge t})+H_0X_0.$$

由于$H.(\omega)$在有穷区间$[0,T(\omega)]$上有界,从而$(H^{(n)}.(\omega))_{n\geq 1}$在$[0,T(\omega)]$上一致有界. 此外,对几乎所有$\omega$,对一切$t\in[0,T(\omega)]$有

$$\lim_{n\to\infty}H_t^{(n)}(\omega)=H_{t-}(\omega).$$

故由定理9.27推得(29.1). □

下一定理是随机积分的控制收敛定理.

9.30 定理 设X为一半鞅,$H\in L(X)$, $K^{(n)}$及K为可料过程,使得$|K^{(n)}|\leqslant|H|$, $|K|\leqslant|H|$. 令$B\in\mathscr{B}$, T为一有穷停时. 如

果对几乎所有$\omega\in B$，对一切$t\in[0,T(\omega)]$，有$\lim\limits_{n\to\infty}K_t^{(n)}(\omega)=K_t(\omega)$，则

$$I_B\sup_{t\leqslant T}|(K^{(n)}.X)_t-(K.X)_t|\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty. \tag{30.1}$$

证明 无妨设$X_0=0$. 令

$$A=\Sigma(\Delta XI_{[|H\Delta X|>1或|\Delta X|>1]}),Z=X-A.$$

设$Z=N+B$为特殊半鞅Z的典则分解，则由定理9.17，$X=N+(B+A)$为X的一个H-分解. 此外，我们有$|\Delta Z|\leqslant 1$，$|\Delta(H.Z)|=|H\Delta Z|\leqslant 1$. 由定理8.8知，$|\Delta N|\leqslant 2$，$|\Delta(H.N)|\leqslant 2$. 特别，$N$，$H.N\in\mathscr{M}^2_{loc,0}$. 但由假定，$|K^{(n)}|\leqslant|H|$，$|K|\leqslant|H|$，从而$K^{(n)}.N$，$K.N\in\mathscr{M}^2_{loc,0}$. 其余的证明与定理9.27的证明类似.
□

注 设X为一半鞅，$H\in L(X)$. 令$H^{(n)}=HI_{[|H|\leqslant n]}$，则由定理知，对一切$t\geqslant 0$，

$$\sup_{s\leqslant t}|(H^{(n)}.X)_s-(H.X)_s|\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty.$$

最后，应该指出：在半鞅积分意义下，可料过程对适应有限变差过程的积分，不一定是Stieltjes积分. 但我们有如下的定理.

9.31 定理 设A为一可料有限变差过程，H为一可料过程. 如果在半鞅积分意义下，H对A可积，则在Stieltjes积分意义下，H对A也可积，且两种积分一致.

证明 令$H^{(n)}=HI_{[|H|\leqslant n]}$. 显然，定理结论对每个$H^{(n)}$成立. 特别，每个$H^{(n)}.A$为可料半鞅. 于是由定理9.30，$H.A$为可料半鞅，从而为特殊半鞅(系8.7). 于是由定理9.16推得定理结论.
□

§5. Itô公式与Doléans-Dade指数公式

在这一节中，我们将证明半鞅的变量替换公式，即著名的Itô公式. 它是随机分析中最有力的工具. 作为它的应用，我们证明半

鞅的强大数定律与 Doléans-Dade 指数公式.

9.32 引理 设 M 为一局部有界鞅,A 为一可料有限变差过程,则 $MA-(M_-).A$ 为一局部鞅.

证明 利用局部化方法,不妨设 M 为有界鞅,A 为可料可积变差过程. 令 $L=MA-(M_-).A$,则由定理 5.32 及 5.33 知,对任一停时 T,有 $\boldsymbol{E}[L_T]=0$. 于是由定理 4.40 知,$L\in\mathscr{M}$. □

9.33 定理 设 X,Y 为两个半鞅,则

$$X_tY_t=\int_0^t X_{s-}dY_s+\int_0^t Y_{s-}dX_s+[X,Y]_t,\ t\geqslant 0. \quad (33.1)$$

(33.1)称为**分部积分公式**.

证明 只需在 $X=Y$ 的情形证明(33.1),即证明

$$X^2=2(X_-).X-2X_0^2+[X]. \quad (33.2)$$

为此令 $A=X^2-2(X_-).X+2X_0^2$. 首先证明 A 为增过程,且 $\Delta A=(\Delta X)^2$. 令 $t>0$. 设

$$\tau_n:\ 0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_{m(n)}^n=t$$

为$[0,t]$的一列有限分割,且 $\delta(\tau^n)\to 0$,则

$$X_t^2-X_0^2=\sum_i(X_{t_{i+1}^n}^2-X_{t_i^n}^2)$$

$$=2\sum_i X_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n})+\sum_i(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n})^2.$$

由定理 9.29 知,

$$A_t=X_0^2+\boldsymbol{P}\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_i(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n})^2,\ \text{a.s.}, \quad (33.3)$$

特别,由(33.3)知,A 为增过程. 由 A 的定义有

$$\Delta A=\Delta(X^2)-2X_-\Delta X$$

$$=(X_-+\Delta X)^2-X_-^2-2X_-\Delta X=(\Delta X)^2.$$

为证(33.2),先设 X 有界. 这时 X 为特殊半鞅. 令 $X=M+A'$ 为其典则分解,其中 M 为局部有界局部鞅,A' 为零初值可料有限变差过程. 令

$$B=X^2-2(X_-).X+2X_0^2-[X]=A-[X].$$

上面已证 B 为零初值连续有限变差过程. 另一方面,注意到 $X_0=$

M_0，我们有

$$B = (M + A')^2 - 2(M_- + A'_-).(M + A') + 2M_0^2 - [M + A']$$
$$= (M^2 - [M]) - 2(M_-.M - M_0^2) + 2(MA' - M_-.A')$$
$$- 2A'_-.M - 2[M, A'], \tag{33.4}$$

这里我们利用了 Stieltjes 积分的分部积分公式(引理 1.39)．由引理 9.4 及 9.32 知，(33.4)中的每一项是局部鞅．于是 B 为局部鞅．从而必有 $B=0$．即(33.2)成立．

对一般情形，令 $T_n=\inf\{t\geqslant 0:|X_t|\geqslant n\}$，则 $X^{T_n-}I_{[T_n>0]}$ 为有界半鞅．且

$$(X^2)^{T_n-} = (X^{T_n-})^2$$
$$= 2X^{T_n-}_-.X^{T_n-} - 2X_0^2 + [X^{T_n-}]$$
$$= (2X_-.X - 2X_0^2 + [X])^{T_n-}.$$

由于 $T_n\uparrow\infty$，(33.2)仍然成立．□

注 在上面的证明中，我们证明了，对 $t\geqslant 0$，有

$$X_0^2 + \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \xrightarrow{P} [X]_t.$$

这正是我们称$[X]$为 X 的二次变差过程的理由．

9.34 系 设 X 为一半鞅，A 为一可料有限变差过程，则

$$XA = A.X + (X_-).A - X_0A_0. \tag{34.1}$$

证明 令 $X=X_0+M+B$，$M\in\mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$，$B\in\mathcal{V}_0$．由 Yoeurp 引理(例 9.4.1))，我们有

$$[X, A] = X_0A_0 + [M, A] + [B, A]$$
$$= X_0A_0 + (\Delta A).M + (\Delta A).B$$
$$= X_0A_0 + (\Delta A).X. \tag{34.2}$$

于是(34.1)由(33.1)及(34.2)推得．□

9.35 定理 设 $X^1,\cdots,X^d$ 为半鞅，F 为 $\boldsymbol{R}^d$ 上的 C^2-函数(即 F 有连续的一阶与二阶偏导数)．令 $X_t=(X_t^1,\cdots,X_t^d)$ ((X_t) 也称为一个 **d 维半鞅**)，则

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{i=1}^d \int_0^t D_iF(X_{s-})dX_s^i + \sum_{0<s\leqslant t}\eta_s(F) + \frac{1}{2}A_t(F), \tag{35.1}$$

其中

$$\eta_s(F) = F(X_s) - F(X_{s-}) - \sum_{j=1}^{d} D_j F(X_{s-}) \Delta X_s^j, \quad (35.2)$$

$$A_t(F) = \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t D_{ij} F(X_{s-}) d\langle (X^i)^c, (X^j)^c \rangle_s, \quad (35.3)$$

$D_j F = \frac{\partial F}{\partial x_j}$, $D_{ij} F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$，级数 $\sum_{0<s\leq t} \eta_s(F)$ 绝对收敛.

(35.1)就是著名的 **Itô 公式**[1].

证明 我们采用 C. Dellacherie 与 P. A. Meyer[2]中的证明路线，从分部积分公式出发证明 Itô 公式.

不妨设 $X^1, \cdots, X^d$ 均有界：$|X^j| \leq C$，$j=1,\cdots,d$，其中 C 为一常数. 不然的话，令 $T_n = \inf\{t \geq 0: |X_t^1| > n, |X_t^2| > n, \cdots, |X_t^d| > n\}$. 如同定理 9.33 的证明，我们可讨论 $X^{T_n} I_{[T_n > 0]}$. 如果(35.1)对 $X^{T_n} I_{[T_n>0]}$ 成立，由于 $T_n \uparrow \infty$，那么(35.1)对 X 成立. 在有界条件下，可取一列 $\boldsymbol{R}^d$ 上的多项式 (F_n)，使得 F_n、$D_i F_n$、$D_{ij} F_n$ 在 $[-C, C]^d$ 上都分别一致收敛于 F、$D_i F$、$D_{ij} F$，$i,j=1,\cdots,d$. 如果(35.1)对每个 F_n 成立，则由定理 9.30，(35.1)对 F 也成立. 因此，不妨设 F 为一个 $\boldsymbol{R}^d$ 上的多项式.

若 $F(x^1,\cdots,x^d) = x^i x^j$，(35.1)即归结为(33.1). 由归纳法，只需证明：若(35.1)对多项式 F 成立，则(35.1)对 $G(x^1,\cdots,x^d) = x^i F(x^1,\cdots,x^d)$ 也成立. 由于

$$\eta_s(G) = G(X_s) - G(X_{s-}) - \sum_{j=1}^{d} D_j G(X_{s-}) \Delta X_s^j$$
$$= X_{s-}^i \eta_s(F) + \Delta[X^i, F(X)]_s,$$

且 (X_{s-}^i) 局部有界，故级数 $\sum_{0<s\leq t} \eta_s(G)$ 绝对收敛. 此外还有

$$\frac{1}{2} A_t(G) = \frac{1}{2} \int_0^t X_{s-}^i dA_s(F) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t D_j F(X_{s-}) d\langle (X^i)^c, (X^j)^c \rangle_s$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^t X_{s-}^i dA_s(F) + \langle (X^i)^c, (F(X))^c \rangle_t - X_0^i F(X_0), \quad (35.4)$$

---

1) 容易看出，在 Itô 公式中，F 可以是复值函数.

$$\sum_{j=1}^{d}\int_0^t D_jG(X_{s-})dX_s^j$$

$$= \int_0^t F(X_{s-})dX_s^i + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t X_{s-}^i D_jF(X_{s-})dX_s^j. \qquad (35.5)$$

于是由(33.1)、(35.4) 及(35.5) 得

$$G(X_t) - G(X_0) = X_t^i(X_t) - X_0^iF(X_0)$$

$$= \int_0^t X_{s-}^i dF(X_s) + \int_0^t F(X_{s-})dX_s^i$$

$$+ [X^i, F(X)]_t - X_0^iF(X_0)$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\int_0^t D_jG(X_{s-})dX_s^j + \sum_{0<s\leqslant t}\eta_s(G) + \frac{1}{2}A_t(G),$$

即(35.1)对 G 成立. □

下一定理是定理 9.35 的一个精细化，其证明完全类似，故略去.

9.36 定理 设 $X^1,\cdots,X^n$ 为半鞅，$X^{n+1},\cdots,X^{n+m}$ 为适应有限变差过程. 设 F 为 $\boldsymbol{R}^{n+m}$ 上的一连续函数，对前 n 个变元为 C^2-函数，对后 m 个变元为 C^1-函数(可以是 $n=0$ 或 $m=0$). 令 $X_t=(X_t^1,\cdots,X_t^{n+m})$，则

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{j=1}^{n+m}\int_0^t D_jF(X_{s-})dX_s^j + \sum_{0<s\leqslant t}\eta_s(F)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t D_{ij}F(X_{s-})d\langle (X^i)^c, (X^j)^c\rangle_s.$$

9.37 定理 设 X 为一半鞅，A 为一可料增过程，$A_\infty=\infty$ a.s.. 若 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+A}.X\right)_t$ a.s. 存在且有限，则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{A_t} = 0 \quad \text{a.s.}.$$

证明 令 $Y=\frac{1}{1+A}.X$，则$(1+A).Y=X$(定理 9.18.2))，且由系 9.34，有

$$(1+A)Y = (1+A).Y + (Y_-).A - A_0Y_0$$

$$= X + (Y_-).A - A_0Y_0.$$

于是

$$\frac{X_t}{1+A_t} = \frac{Y_t + A_0 Y_0}{1+A_t} + \frac{\int_{[0,t]}(Y_t - Y_{s-})dA_s}{1+A_t}$$

右边的第二项是一个 Stieltjes 积分.

对几乎所有 ω 及任给 $\varepsilon>0$, 存在 $t_\varepsilon(\omega)$, 使得

$$|Y_t(\omega) - Y_\infty| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_\varepsilon(\omega).$$

于是对 $t \geqslant t_\varepsilon$ 有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{1+A_t}\int_{[0,t]}(Y_t - Y_{s-})dA_s\right| \\
&\leqslant \frac{1}{1+A_t}\left\{\int_{[0,t_\varepsilon]}|Y_t - Y_{s-}|dA_s \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_\varepsilon}^{t}(|Y_t - Y_\infty| + |Y_s - Y_\infty|)dA_s\right\} \\
&\leqslant \frac{2Y_\infty^* A_{t_\varepsilon}}{1+A_t} + \frac{2\varepsilon A_t}{1+A_t}.
\end{aligned}$$

先后令 $t\to\infty$ 及 $\varepsilon\downarrow 0$ 得

$$\frac{1}{1+A_t}\int_{[0,t]}(Y_t - Y_{s-})dA_s \to 0, \quad t\to\infty.$$

显然有

$$\left|\frac{Y_t + A_0 Y_0}{1+A_t}\right| \leqslant \frac{Y_\infty^*(1+A_0)}{1+A_t} \to 0, \quad t\to\infty.$$

于是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{A_t} = \lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{1+A_t} = 0 \quad \text{a.s.}. \quad \square$$

9.38 系 设 M 为一局部平方可积鞅, $\langle M\rangle_\infty = \infty$ a.s., 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_t}{\langle M\rangle_t} = 0 \quad \text{a.s.}.$$

证明 由于

$$\left(\frac{1}{1+\langle M\rangle}\right)^2 \cdot \langle M\rangle \leqslant \frac{1}{(1+\langle M\rangle)(1+\langle M\rangle_-)} \cdot \langle M\rangle \leqslant 1.$$

由定理 8.32 知, $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+\langle M\rangle}\cdot M\right)_t$ a.s. 存在且有限. 对 M 及 $\langle M\rangle$ 应用定理 9.37 即得欲证之结论. $\square$

定理 9.37 就是半鞅的强大数定律的一般形式. 证明它只用到分部积分公式——Itô 公式的一个特例. 下面给出 Itô 公式的另一个重要应用——**Doléans-Dade 指数公式**.

9.39 定理 设 X 为一半鞅. 令

$$V_t = \prod_{0<s\leqslant t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s} \quad (V_0 = 1), \tag{39.1}$$

则对几乎所有 ω,(39.1)右边的无穷乘积对一切 t 绝对收敛, 且 $V=(V_t)$ 为适应纯断有限变差过程. 令

$$Z_t = \exp\left\{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c\rangle_t\right\}\prod_{0<s\leqslant t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}. \tag{39.2}$$

则 $Z=(Z_t)$ 为满足以下随机积分方程的唯一的半鞅:

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}dX_s. \tag{39.3}$$

证明 令

$$V_t' = \prod_{0<s\leqslant t}(1+\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|>\frac{1}{2}]})\exp\{-\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|>\frac{1}{2}]}\},$$

$$V_t'' = \prod_{0<s\leqslant t}(1+\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|\leqslant\frac{1}{2}]})\exp\{-\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|\leqslant\frac{1}{2}]}\}.$$

显然, 定义 V_t' 的乘积只是有限项的积. 由于

$$e^{-x^2}\leqslant(1+x)e^{-x}\leqslant e^{-\frac{1}{3}x^2},\quad |x|\leqslant\frac{1}{2},$$

定义 V_t''的无穷乘积绝对收敛. 因此(39.1)中的无穷乘积绝对收敛. 显然,(V_t')及$(\log V_t'')$为适应纯断有限变差过程, 故由 Itô 公式,(V_t'')亦然. 由于 $V_t=V_t'V_t''$, 仍由 Itô 公式知,V 为适应纯断有限变差过程.

令 $F(x,y)=e^xy$, $K=X-X_0-\frac{1}{2}\langle X^c\rangle$, 则 $Z=F(K,V)$, $K^c=X^c$, $\Delta K=\Delta X$. 注意到, $Z_s=Z_{s-}(1+\Delta X_s)$, 由 Itô 公式, 有

$$\begin{aligned}Z_t &= 1+\int_0^t Z_{s-}dK_s+\int_0^t e^{K_{s-}}dV_s+\frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}d\langle K^c\rangle_s\\&\quad+\sum_{0<s\leqslant t}(\Delta Z_s - Z_{s-}\Delta K_s - e^{K_{s-}}\Delta V_s)\\&= 1+\int_0^t Z_{s-}dX_s,\end{aligned}$$

即 Z 满足(39.3).

设 $Y=(Y_t)$ 是满足(39.3)的另一个半鞅，则 $\Delta Y = Y_-\Delta X$，$\langle X^c, Y^c\rangle = (Y_-)\cdot\langle X^c\rangle$. 令

$$W = e^{-K}Y \tag{39.4}$$

由 Itô 公式，有 $W_0=1$ 及

$$\begin{aligned} W_t &= 1 - \int_0^t W_{s-}\, dK_s + \int_0^t e^{-K_{s-}}\, dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t W_{s-}\, d\langle X^c\rangle_s \\ &\quad - \int_0^t e^{-K_{s-}}\, d\langle X^c, Y^c\rangle_s \\ &\quad + \sum_{0<s\le t}(\Delta W_s + W_{s-}\Delta X_s - e^{-K_{s-}}\Delta Y_s) \\ &= 1 + \sum_{0<s\le t}\Delta W_s. \end{aligned}$$

另一方面，由(39.4)，有 $W_t = W_{t-}e^{-\Delta X_t}(1+\Delta X_t)$，

$$\Delta W_t = W_{t-}[e^{-\Delta X_t}(1+\Delta X_t)-1].$$

令 $A_t=\sum_{0<s\le t}[e^{-\Delta X_s}(1+\Delta X_s)-1]$，则 A 为适应纯断有限变差过程，且 W 满足下列方程：

$$W_t = 1 + \int_0^t W_{s-}\, dA_s.$$

这表明 W 为适应纯断有限变差过程. 当然，$V=e^{-K}X$ 也满足同一方程. 令 $U=V-W$，则 U 满足齐次方程：

$$U_t = \int_0^t U_{s-}\, dA_s \tag{39.5}$$

令 $B_t=\int_0^t |dA_s|$，利用分部积分公式，用归纳法易知

$$\int_0^t (B_{s-})^n dB_s \leqslant \frac{1}{n+1}(B_t)^{n+1}. \tag{39.6}$$

将(39.5)迭代，用归纳法，从(39.6)可得

$$|U_t| \leqslant \frac{1}{n!}U_t^*(B_t)^n;\quad |U_{s-}| \leqslant \frac{1}{n!}U_t^*(B_t)^n,\quad s\in[0,t].$$

因此对每个 $t\geqslant 0$，$U_t=0$ a.s.，从而 $U=0$，$W=0$，$Y=e^KW=e^KV=Z$. □

(39.2)称为 **Doléans-Dade 指数公式**，Z 称为半鞅 X 的**指数**.

记作$\mathscr{E}(X)$. 由(39.3)知,若X为局部鞅(或特殊半鞅,或适应有限变差过程),则$\mathscr{E}(X)$亦然. 此外,$\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(X-X_0)$,且对任一停时$T$,有$\mathscr{E}(X)^T=\mathscr{E}(X^T)$.

容易验证:若X为一标准Brown运动,则$\mathscr{E}(X)_t=\exp\{X_t-\frac{1}{2}t\}$;若$X$为一Poisson过程,则$\mathscr{E}(X)_t=2^{X_t}$. 半鞅$Z$称为**指数半鞅**,如果存在半鞅$X$,使得$Z=Z_0\mathscr{E}(X)$,即$Z$是满足下列方程的唯一半鞅:

$$Z_t=Z_0+\int_0^t Z_{s-}dX_s.$$

(唯一性可同上类似地证明.)我们要给出指数半鞅的刻画.

9.40 引理 设X为一半鞅. 令

$$T=\inf\{t>0:\Delta X_t=-1\},$$
$$S=\inf\{t>0:\mathscr{E}(X)_t=0\},$$

则$T=S$ a.s..

证明 若$T<\infty$,则$\Delta X_T=-1$. 由指数公式,有

$$\mathscr{E}(X)I_{[\![T,\infty[\![}=0.$$

因此$S\leqslant T$ a.s.. 另一方面,若$t<T$,由定理9.39的证明可看出$V_t'\neq 0$. 但V_t''永远是正的,故$\mathscr{E}(X_t)=V_t'V_t''e^{K_t}\neq 0$. 于是$T\leqslant S$ a.s.,从而$S=T$ a.s.. □

9.41 定理 设Z为一半鞅,$T=\inf\{t>0:Z_t=0$或$Z_{t-}=0\}$. 则为要Z为指数半鞅,必须且只需满足下列条件:

1) $Z=ZI_{[\![0,T[\![}$,

2) $H=\frac{1}{Z_-}I_{[Z_-\neq 0]}$对$Z$可积.

证明 必要性. 设$Z=Z_0\mathscr{E}(X)$,$X\in\mathscr{S}$. 在$[Z_0=0]$上有$Z=0=ZI_{[\![0,T[\![}$. 在$[Z_0>0]$上有$T=\inf\{t>0:\Delta X_t=-1\}$,且由引理9.40,有$\mathscr{E}(X)I_{[\![T,\infty[\![}=0$,因此仍有$Z=ZI_{[\![0,T[\![}$.

显然,$|HZ_-|\leqslant 1$,$HZ_-\in L(X)$,$Z_-\in L(X)$. 由定理9.18.2)知,$H\in L((Z_-).X)$. 但有$Z=Z_0+(Z_-).X-Z_0X_0$,故$H\in L(Z)$.

充分性. 令 $X=H.Z$，则 $Z_0X_0=Z_0I_{[Z_0\neq 0]}=Z_0$，且

$$(Z_-).X=(HZ_-).Z=I_{[Z_-\neq 0]}.Z.$$

令 $R=T_{\{Z_t=0,\ 0<t<T\}}$，则 R 为可料时，因为它为 $R_n=\inf\{t>0:t<T,|Z_t|\leqslant\frac{1}{n}\}\wedge n$ 所预报. 于是

$$\begin{aligned}I_{[Z_-=0]}.Z&=(I_{[0_{[Z_0=0]}]}+I_{[R]}+I_{]T,\infty[}).Z\\&=Z_0I_{[T=0]}+I_{[R]}.Z\\&=\Delta Z_RI_{[R,\infty[}=0.\quad(\text{由 } 9.4.2)\end{aligned}$$

因此 $Z=(Z_-).X=Z_0+(Z_-).X-Z_0X_0=Z_0\mathscr{E}(X)$. □

§6. 半鞅的局部时

9.42 引理 设 X 为一半鞅，f 为一 $\boldsymbol{R}$ 上的连续凸函数，f' 为其左导数，则 $f(X)$ 为半鞅，且有

$$\begin{aligned}f(X_t)=f(X_0)&+\int_0^t f'(X_{s-})dX_s\\&+\sum_{0<s\leqslant t}[f(X_s)-f(X_{s-})\\&-f'(X_{s-})\Delta X_s]+C_t,\end{aligned}\qquad(42.1)$$

其中 $C=(C_t)$ 为零初值适应连续增过程.

证明 取一非负函数 $\varphi\in C^\infty(\boldsymbol{R})$，使得它的支撑为 $[-a,0]$ $(a>0)$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)ds=1$. 令

$$\begin{aligned}f_n(t)&=n\int_{-\infty}^{\infty}f(t+s)\varphi(ns)ds\\&=\int_{-a}^{0}f\left(t+\frac{s}{n}\right)\varphi(s)ds,\end{aligned}$$

则 $f_n(t)$ 为凸函数，$f_n\in C^\infty(\boldsymbol{R})$，且当 $n\to\infty$ 时有

$$f_n(t)\to f(t),$$

$$f_n'(t)=\int_{-a}^{0}f'\left(t+\frac{s}{n}\right)\varphi(s)ds\uparrow f'(t),$$

($f'(t)$ 为左连续单调增函数).

对 f_n 及 X 应用 Itô 公式得

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_0^t f_n'(X_{s-})dX_s + B_t^{(n)} \qquad (42.2)$$

其中

$$B_t^{(n)} = \sum_{0<s\leqslant t}[f_n(X_s) - f_n(X_{s-}) - f_n'(X_{s-})\Delta X_s] + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_{s-})d\langle X^c\rangle_s$$

为适应增过程，因为 f_n 为凸函数.

不妨设 $X_- I_{]0,\infty[}$ 有界，不然可讨论 X^{T_n}，其中 $T_n=\inf\{t\geqslant 0: |X_t|>n\}$. 由于 f' 在任一有穷区间上有界，在(42.2)中令 $n\to\infty$ 得

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + B_t$$

(对一切 $t\geqslant 0$，$B_t=\boldsymbol{P}\text{-}\lim_n B_t^{(n)}$)，其中 $B=(B_t)$ 为零初值适应增过程，且

$$\begin{aligned}\Delta B_t &= \Delta f(X_t) - f'(X_{t-})\Delta X_t \\ &= f(X_t) - f(X_{t-}) - f'(X_{t-})\Delta X_t \geqslant 0.\end{aligned}$$

令 C 为 B 的连续部分，则得(42.1). □

9.43 定理 设 X 为一半鞅，$a>0$，则

$$\begin{aligned}(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t I_{[X_{s-}>a]}dX_s \\ + \sum_{0<s\leqslant t}[I_{[X_{s-}>a]}(X_s - a)^- \\ + I_{[X_{s-}\leqslant a]}(X_s - a)^+] + \frac{1}{2}L_t^a(X), \quad (43.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t I_{[X_{s-}\leqslant a]}dX_s \\ + \sum_{0<s\leqslant t}[I_{[X_{s-}>a]}(X_s - a)^- \\ + I_{[X_{s-}\leqslant a]}(X_s - a)^+] + \frac{1}{2}L_t^a(X). \quad (43.2)\end{aligned}$$

其中 $L_t^a(X)$ 为零初值适应连续增过程，称为 X 为 a 点的**局部时**. (43.1)或(43.2)称为 **Tanaka-Meyer 公式**.

证明　令 $f(x)=(x-a)^+$，则 f 为凸函数，$f'(x)=I_{]a,\infty[}(x)$，且

$$f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)=\begin{cases}(y-a)^-, & 若\ x>a,\\ (y-a)^+, & 若\ x\leqslant a.\end{cases}$$

对 $(x-a)^+$ 应用(42.1)得

$$\begin{aligned}(X_t-a)^+=(X_0-a)^+ &+\int_0^t I_{[X_{s-}>a]}dX_s\\ &+\sum_{0<s\leqslant t}\left[I_{[X_{s-}>a]}(X_s-a)^-\right.\\ &\left.+I_{[X_{s-}\leqslant a]}(X_s-a)^+\right]+C_t,\end{aligned}\qquad(43.3)$$

其中 (C_t) 为零初值适应连续增过程，记作 $(\frac{1}{2}L_t^a(X))$。(43.3)即为(43.1)。

由于 $(X_t-a)^-=(X_t-a)^+-(X_t-a)=(X_t-a)^+-(X_0-a)-\int_0^t dX_s$，(43.2)由(43.3)推得。　□

9.44 定理　设 X 为一半鞅，$a\in\boldsymbol{R}$，则对几乎所有 ω，测度 $dL_\cdot^a(X)(\omega)$ 在 $\{t:X_{t-}(\omega)\neq a\}$ 上及在 $\{t:X_{t-}(\omega)=a\}$ 的内部上无负荷。

证明　设 S,T 为两个停时，$0<S\leqslant T$。若 $]S,T[\subset[X_-<a]$，则 $]S,T[\subset[X\leqslant a]$ 及 $]S,T]\subset[X_-\leqslant a]$。由(43.1)知，在 $[T<\infty]$ 上

$$\begin{aligned}&(X_T-a)^+-(X_S-a)^+\\ &=(X_T-a)^+ +\frac{1}{2}L_T^a(X)-\frac{1}{2}L_S^a(X)\quad \text{a.s.},\end{aligned}\qquad(44.1)$$

$$L_T^a(X)=L_S^a(X)\quad \text{a.s.}.\qquad(44.2)$$

类似地，若 $]S,T[\subset[X_-=a]$，则 $]S,T[\subset[X=a]$ 及 $]S,T]\subset[X_-=a]$。于是(44.1)及(44.2)仍然成立。

令 $r>0$ 为有理数。置

$$S(r)=\begin{cases}r, & 若\ X_{r-}<a,\\ \infty, & 若\ X_{r-}\geqslant a.\end{cases}$$

$$T(r)=\inf\{t>S(r):X_{t-}\geqslant a\},$$

则

$$\bigcup_{r>0}]\!]S(r),T(r)[\![\subset[X_-<a]\subset\bigcup_{r>0}]\!]S(r),T(r)]\!].$$

由(44.2)知，对几乎所有 ω，$dL^a_\cdot(X)(\omega)$ 在 $\{t:X_{t-}(\omega)<a\}$ 上无负荷. 类似地可证，对几乎所有 ω，$dL^a_\cdot(X)(\omega)$ 在 $\{t:X_{t-}(\omega)>a\}$ 上无负荷. 现在令

$$U(r)=\begin{cases}r, & 若 X_{r-}=a,\\ \infty, & 若 X_{r-}\neq a,\end{cases}$$

$$V(r)=\inf\{t>U(r):X_{t-}\neq a\},$$

$$W=\bigcup_{r>0}]\!]U(r),V(r)[\![.$$

对每个 ω，截口 W_ω 是 $\{t:X_{t-}(\omega)=a\}$ 的内部. 同理可证，对几乎所有 ω，$dL^a_\cdot(X)(\omega)$ 在 W_ω 上无负荷. □.

将 $I_{[X_-=a]}$ 及 $I_{[X_-\leqslant a]}$ 对(43.1)的两边积分即得下列两个局部时的公式.

9.45 系 设 X 为一半鞅，$a\in\boldsymbol{R}$，则

$$L_t^a(X)=2\left[\int_0^t I_{[X_{s-}=a]}d(X_s-a)^+-\sum_{0<s\leqslant t}I_{[X_{s-}=a]}(X_s-a)^+\right],$$

$$L_t^a(X)=2\left[\int_0^t I_{[X_{s-}\leqslant a]}d(X_s-a)^+-\sum_{0<s\leqslant t}I_{[X_{s-}\leqslant a]}(X_s-a)^+\right].$$

下面我们用局部时给出(42.1)中(C_t)的另一个表达式，从而得到 Itō 公式的一个推广.

9.46 定理 设 X 为一半鞅，f 为一 $\boldsymbol{R}$ 上的连续凸函数，f' 为其左导数，则

$$\begin{aligned}f(X_t)=f(X_0)&+\int_0^t f'(X_{s-})dX_s\\&+\sum_{0<s\leqslant t}[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s]\\&+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}L_t^a(X)\rho(da),\end{aligned}\tag{46.1}$$

其中 ρ 为广义函数意义下 f 的二阶导数(ρ 为一 Radon 测度).

证明 首先假设测度 ρ 有限且有紧支撑. 令 $g(x)=$

$\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^+\rho(da)$，则 f 与 g 有相同的二阶导数，从而 $f(x)=a+bx+g(x)$，$a,b\in\boldsymbol{R}$．显然，(46.1)对 $f(x)=a+bx$ 成立．因此，不妨设 $f(x)=g(x)$．于是 $f'(x)=\int_{-\infty}^{\infty}I_{[x>a]}\rho(da)$．由于 $I_{[X_{s-}>a]}(X_s-a)^-+I_{[X_{s-}\leqslant a]}(X_s-a)^+=(X_s-a)^+-(X_{s-}-a)^+-I_{[X_{s-}>a]}\Delta X_s$，将(43.1)的两边对 $\rho(da)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上积分得(46.1)．

对任意的凸函数 f，令

$$
f_n(x)=\begin{cases}f(n)+f'(n)(x-n), & x\geqslant n,\\ f(x), & -n<x<n,\\ f(-n)+f'(-n)(x+n), & x\leqslant -n,\end{cases}
$$

$$
T_n=\inf\{t\geqslant 0:\ |X_t|\geqslant n \text{ 或 } |X_{t-}|\geqslant n\}.
$$

则 $\rho_n(da)=I_{(-n,n)}(a)\rho(da)$，且在 $[\![0,T_n[\![$ 上 $f_n(X)=f(X)$．此外，$|a|\geqslant n$ 时有 $L^a_{T_n}(X)=0$．于是

$$
\int_{-\infty}^{\infty}L_t^a(X)\rho_n(da)=\int_{-\infty}^{\infty}L_t^a(X)\rho(da),\ t<T_n.
$$

将已证得结果应用于 f_n 知，(46.1)在 $[\![0,T_n[\![$ 上成立．再令 $n\to\infty$ 即得(46.1)． □

注　在定理 9.46 的证明中，我们需要用到带参数的随机积分以及类似于 Fubini 定理的结论．这类处理是常规的，故略去细节（参见 Stricker，Yor[1]）．

9.47 系　设 X 为一半鞅，g 为一非负或有界的 Borel 函数，则

$$
\int_0^t g(X_s)d\langle X^c\rangle_s=\int_{-\infty}^{\infty}L_t^a(X)g(a)da. \tag{47.1}
$$

证明　令 $f\in C^2(\boldsymbol{R})$．将(46.1)与 Itô 公式作比较得

$$
\begin{aligned}
\int_0^t f''(X_s)d\langle X^c\rangle_s &=\int_0^t f''(X_{s-})d\langle X^c\rangle_s\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}L_t^a(X)f''(a)da.
\end{aligned} \tag{47.2}
$$

然后，用单调类定理可从(47.2)推得(47.1)． □

9.48 注 令 A 为一 $\boldsymbol{R}$ 中的 Borel 集. 由(47.1)得

$$\int_0^t I_A(X_s)d\langle X^c\rangle_s = \int_A L_t^a(X)da. \tag{48.1}$$

由此我们得到局部时的下列直观解释:将 $d\langle X^c\rangle$ 看作 X 的"内蕴"时间的尺度,(48.1)意味着 $L_t^a(X)$ 是到时刻 t 为止,X 在 a 点的"内蕴"占据时间的密度.

§7. 随机微分方程:Métivier-Pellaumail 方法

在这一节中我们采用 Métivier-Pellaumail 的方法讨论随机微分方程. 这方法基于他们所证明的一个停止的 Doob 不等式(51.1).

9.49 引理 设$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$为一概率空间,$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域. 设 $A\in\mathscr{F}$,X 为一 $\mathscr{G}\vee\{A\}$-可测的平方可积随机变量,且 $\boldsymbol{E}[X|\mathscr{G}]=0$,则

$$\boldsymbol{E}[I_{A^c}X^2] = \boldsymbol{E}[I_A\boldsymbol{E}[X^2|\mathscr{G}]], \tag{49.1}$$

其中 $\mathscr{G}\vee\{A\}$表示由 $\mathscr{G}\cup\{A\}$产生的 σ-域.

证明 令

$$a = \boldsymbol{E}[I_A|\mathscr{G}], \quad b = \boldsymbol{E}[I_{A^c}|\mathscr{G}],$$

则 $a+b=1$. 由于 X 可表示为 $\xi I_A+\eta I_{A^c}$, $\xi,\eta\in L^2(\mathscr{G})$,我们有 $a\xi+b\eta=0$,且

$$\boldsymbol{E}[I_A\boldsymbol{E}[X^2|\mathscr{G}]] = \boldsymbol{E}[I_A(\xi^2a + \eta^2b)] \doteq \boldsymbol{E}[\xi^2a^2 + \eta^2ab],$$

$$\boldsymbol{E}[I_{A^c}X^2] = \boldsymbol{E}[\eta^2b] = \boldsymbol{E}[\eta^2b(a + b)] = \boldsymbol{E}[\eta^2b^2 + \eta^2ab].$$

由此得(49.1),因为 $\xi^2a^2-\eta^2b^2=(\xi a+\eta b)(\xi a-\eta b)=0$. □

9.50 引理 设 M 为一平方可积鞅,则对任一停时 T,有

$$\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{E}[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}])^2] \leqslant \boldsymbol{E}[\langle M\rangle_{T-}]. \tag{50.1}$$

证明 若 M 拟左连续,则

$$\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{E}[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}])^2] \leqslant \boldsymbol{E}[(\Delta M_T^2)] \leqslant \boldsymbol{E}[M]_T$$
$$= \boldsymbol{E}[\langle M\rangle_T] = \boldsymbol{E}[\langle M\rangle_{T-}].$$

若 M 可及,取一列图互不相交的可料时(S_n),使得$\cup[\![S_n]\!]\supset$

$[\![T^a]\!]$，其中 T^a 为 T 的可及部分. 不妨设在 $[S_n<\infty]$ 上有 $S_n\leqslant T$，否则可用 $(S_n)_{[S_n\leqslant T]}$ 代替 S_n. 在此假设下有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}])^2 &= (\boldsymbol{E}[\Delta M_T I_{[T=T^a]}|\mathscr{F}_{T-}])^2\\ &= \sum_n(\boldsymbol{E}[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}])^2 I_{[T=S_n]}\\ &= \sum_n(\boldsymbol{E}[\Delta M_{S_n}|\mathscr{F}_{T-}])^2 I_{[T=S_n]}.\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{F}_{T-}\cap[T=S_n]=\mathscr{F}_{S_n-}\cap[T=S_n]=(\mathscr{F}_{S_n-}\vee\{[T=S_n]\})\cap[T=S_n]$ 及 $\mathscr{F}_{S_n-}\vee\{[T=S_n]\}=\mathscr{F}_{S_n-}\vee\{[S_n<T]\}$，我们有

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{E}[\Delta M_{S_n}|\mathscr{F}_{T-}])^2 I_{[T=S_n]}\\ &= (\boldsymbol{E}[\Delta M_{S_n}|\mathscr{F}_{S_n-}\vee\{[S_n<T]\}])^2 I_{[T=S_n]}.\end{aligned}$$

令
$$X_n=\boldsymbol{E}[\Delta M_{S_n}|\mathscr{F}_{S_n-}\vee\{[S_n<T]\}].$$

由于 $\Delta M_{S_n}I_{[T<S_n]}=0$，故有 $X_n^2 I_{[T=S_n]}=X_n^2 I_{[T\leqslant S_n]}$. 于是由引理9.49，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[X_n^2 I_{[T=S_n]}] &= \boldsymbol{E}[X_n^2 I_{[T\leqslant S_n]}]\\ &= \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[X_n^2|\mathscr{F}_{S_n-}]I_{[S_n<T]}]\\ &\leqslant \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\Delta M_{S_n}^2|\mathscr{F}_{S_n-}]I_{[S_n<T]}]\\ &= \boldsymbol{E}[\Delta\langle M\rangle_{S_n}I_{[S_n<T]}],\end{aligned}$$

由此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{E}[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}])^2] &\leqslant \sum_n \boldsymbol{E}[\Delta\langle M\rangle_{S_n}I_{[S_n<T]}]\\ &\leqslant \boldsymbol{E}[\langle M\rangle_{T-}].\end{aligned}$$

因此，对拟左连续情形及可及情形，我们已证(50.1). 对一般情形，令 $M^i=M_0+M^c+M^{di}$，$M^a=M^{da}$（见定理6.22.3)），$T^i(T^a)$ 为 T 的绝不可及部分（可及部分），则 $\langle M\rangle=\langle M^i\rangle+\langle M^a\rangle$，(50.1)可如下推得

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{E}[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}])^2\\ &= (\boldsymbol{E}[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}])^2 I_{[T=T^i]}+(\boldsymbol{E}[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}])^2 I_{[T=T^a]}\\ &= (\boldsymbol{E}[\Delta M_T^i|\mathscr{F}_{T-}])^2+(\boldsymbol{E}[\Delta M_T^a|\mathscr{F}_{T-}])^2. \quad\square\end{aligned}$$

9.51 定理 设 M 为一平方可积鞅，则对任一停时 T，有

$$E[(M_T^{*})^2] \leqslant 4E[\langle M\rangle_{T-} + [M^{da}]_{T-}]. \qquad (51.1)$$

证明 令

$$\hat{M} = M - (\Delta M_T^a - E[\Delta M_T^a | \mathscr{F}_{T-}])I_{[T,\infty[}, \quad (M^a = M^{da}),$$

则 $\hat{M}$ 为一平方可积鞅(参见问题 5.3)，且在 $[\![0,T[\![$ 上 $\hat{M}$ 与 M 一致. 由 Doob 不等式有

$$E[M_{T-}^{*2}] = E[\hat{M}_{T-}^{*2}] \leqslant E[\hat{M}_T^{*2}] \leqslant 4E[\hat{M}_T^2] = 4E[[\hat{M}]_T]$$

$$= 4E[[M]_T - (\Delta M_T^a)^2 + (E[\Delta M_T^a | \mathscr{F}_{T-}])^2],$$

这连同(50.1) 推出(51.1)，因为有

$$E[[M]_T - (\Delta M_T^a)^2] = E[[M^a]_{T-} + [M^i]_T]$$

$(M^i = M_0 + M^c + M^{di})$ 及

$$E[[M^i]_T] = E[\langle M^i\rangle_T] = E[\langle M^i\rangle_{T-}]. \quad \square$$

下一定理对研究随机微分方程起本质作用，这定理也属于 Métivier 与 Pellaumail[1].

9.52 定理 设 X 为一半鞅，则存在一适应增过程 A 在下列意义下控制 X：对任意停时 T 及有界可料过程 H，有

$$E[(H.X)_{T-}^{*2}] \leqslant E[A_{T-}(H^2.A)_{T-}]. \qquad (52.1)$$

证明 若 X 为适应有限变差过程，则 X 被它的变差过程 $A=(A_t)$：$A_t = \int_{[0,t]} |dX_s|$ 控制. 事实上，由 Schwarz 不等式，有

$$(H.X)_{T-}^{*2} \leqslant (|H|.A)_{T-}^2 \leqslant A_{T-}(H^2.A)_{T-}.$$

若 X 为平方可积鞅，则由定理 9.51，有

$$E[(H.X)_{T-}^{*2}] \leqslant E[(H^2.B)_{T-}],$$

其中 $B = 4([X] + \langle X\rangle)$. 令 $A = \sqrt{2B}$，则 A 控制 X，因为 $dB \leqslant AdA$，且

$$E[(H.X)_{T-}^{*2}] \leqslant E[((H^2A).A)_{T-}] \leqslant E[A_{T-}(H^2.A)_{T-}].$$

最后，对半鞅 X，设 $X = M + V$，$M \in \mathscr{M}_{loc}^2$，$V \in \mathscr{V}_0$. 令 $A = \sqrt{2}\int_0^{\cdot} |dV_s| + 4([M] + \langle M\rangle)^{\frac{1}{2}}$，则容易看出，$A$ 控制 X. 实际上，若 A' 控制 X'，A'' 控制 X''，则 $\sqrt{2}(A' + A'')$ 控制 $X' + X''$. $\square$

注 Métivier-Pellaumail 不等式(52.1)实际上是半鞅的一个刻画(见问题 9.29).

现在我们可着手研究下列随机微分方程:

$$X = H + \sum_{i=1}^{n} (F_i X).Z^i, \tag{53.1}$$

其中 $Z=(Z^1,\cdots,Z^n)$ 为零初值 n 维半鞅,$H=(H^1,\cdots,H^m)$ 为 m 维适应右连左极过程(即每个分量 H^i 为适应右连左极过程),F_i,$1\leqslant i\leqslant n$,是一从 m 维适应右连左极过程全体到 n 维局部有界可料过程全体的映射,使得对任一停时 T,$F_i(X^{T-})$ 与 $F_i(X)$ 在 $[\![0,T]\!]$ 上一致. $X=(X^1,\cdots,X^m)$ 为未知过程. 例如,设 $f_i(\omega,s,x_1,\cdots,x_m)$ 为 $\Omega\times\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^m$ 上的 n 维函数,使得 1)对固定的 $x_1,\cdots,x_m$ 及 s,$f_i(\cdot,s,x_1,\cdots,x_m)\in\mathscr{F}_s$;2)对几乎所有 ω,对固定的 $x_1,\cdots,x_m$,$f_i(\omega,\cdot,x_1,\cdots,x_m)$ 左连右极;3)对几乎所有 ω,对一切 s,$f_i(\omega,s,\cdot)$ 连续. 令 $(F_iX)_t=f_i(\omega,t,X^1_{t-},\cdots,X^m_{t-})$,则 F_i 满足上述要求. 显然,指数方程(39.3)是(53.1)的一个特例.

9.53 定理 若 F_i 满足下列 Lipschitz 条件:

$$\boldsymbol{E}[(F_iX - F_iY)^{*2}_\infty] \leqslant C\boldsymbol{E}\Big[\sum_{i=1}^{m}(X^i - Y^i)^{*2}_\infty\Big], \tag{53.2}$$

其中 C 为一常数,则方程(53.1)有唯一适应右连左极解.

证明 为使符号简单起见,我们只讨论 $n=m=1$ 的情形. 设 A 为零初值适应增过程,A 控制半鞅 Z. 令 $T_0=0$,并定义停时列 (T_n) 如下:

$$T_{n+1} = \inf\Big\{t > T_n;\ A^2_t - A^2_{T_n} > \frac{1}{2C}\Big\},$$

则 $T_n\uparrow\infty$,且在 $[T_n<\infty]$ 上有 $A^2_{T_{n+1}-} - A^2_{T_n}\leqslant\frac{1}{2C}$. 只需证明,如果方程(53.1)在 $[\![0,T_n]\!]$ 上有唯一解,则在 $[\![0,T_{n+1}[\![$ 上也有唯一解. 为此,令 $\Phi(X)=H+(FX).Z$. 设 X 为(53.1)在 $[\![0,T_n]\!]$ 上的解,到 T_n 为止 X 为唯一决定的. 令 Y,W 为两个适应右连左极过程,使得 $Y^{T_n}=W^{T_n}=X^{T_n}$,则有

$$\boldsymbol{E}[((\Phi(Y) - \Phi(W))^*_{T_{n+1}-})^2]$$

$$= E[((FY - FW).Z)^*_{T_{n+1}-}]^2$$

$$\leqslant E\left[A_{T_{n+1}-}\int_{]0,T_{n+1}[}(FY - FW)^2_s dA_s\right]$$

$$= E\left[A_{T_{n+1}-}\int_{]T_n,T_{n+1}[}(FY - FW)^2_s dA_s\right]$$

$$\leqslant E[A_{T_{n+1}} - (A_{T_{n+1}-} - A_{T_n})(FY - FW)^{*2}_{T_{n+1}}]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}E[(Y - W)^*_{T_{n+1}-}]^2.$$

由不动点定理，存在适应右连左极过程 Y，使得 $Y^{T_n} = X^{T_n}$，$\Phi(Y)^{T_{n+1}-} = Y^{T_{n+1}-}$，且这样的 Y 在 $[\![0,T_{n+1}[\![$ 上唯一. 令

$$\overline{Y} = Y^{T_{n+1}-} + (\Delta H_{T_{n+1}} + (FY)_{T_{n+1}}\Delta Z_{T_{n+1}})I_{[\![T_{n+1},\infty[\![},$$

则 $\overline{Y}$ 为(53.1)在 $[\![0,T_{n+1}]\!]$ 上的一个解，且在 $[\![0,T_{n+1}]\!]$ 上唯一决定. □

9.54 系 设 $W=(W^1,\cdots,W^n)^\tau$ 为 n 维标准 Wiener 过程，即 $W^1,\cdots,W^n$ 为独立的标准 Wiener 过程，ξ 为一 $\mathscr{F}_0$-可测 n 维实值随机变量. 设 $b^j(t,x),\sigma^j_i(t,x),i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m$，为 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^m$ 上的可测函数，满足下列条件：

$$\sum_{j=1}^{m}|b^j(t,x) - b^j(t,y)| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|\sigma^j_i(t,x) - \sigma^j_i(t,y)|$$
$$\leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{m}|x^j - y^j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{54.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m}|b^j(t,x)|^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|\sigma^j_i(t,x)|^2 \leqslant C^2\Big(1 + \sum_{j=1}^{m}|x^j|^2\Big). \tag{54.2}$$

其中 $C > 0$ 为一常数，则下列方程

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s,\quad t \geqslant 0, \tag{54.3}$$

有唯一连续解，其中 $b(t,x)=(b^1(t,x),\cdots,b^m(t,x))^\tau$，$\sigma(t,x)=(\sigma^j_i(t,x))$.

通常，方程(54.3)称为 **Itô 方程**.

证明 只需讨论下列方程

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_{s-})ds + \int_0^t \sigma(s, X_{s-})dW_s, \quad t \geqslant 0, \tag{54.4}$$

条件(54.2)保证了 $b(t, X_{t-})$ 与 $\sigma(t, X_{t-})$ 为局部有界的. 由定理9.53,(54.4)有唯一解. 但此解是连续的,故(54.3)与(54.4)有同一个唯一的连续解. □

9.55 例 设 W 为-Wiener 过程,ξ 为一 $\mathscr{F}_0$ 可测实值随机变量,$a>0$. 则方程

$$X_t = \xi - a\int_0^t X_s ds + W_t, \quad t \geqslant 0, \tag{55.1}$$

有唯一解:

$$X_t = \xi e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \tag{55.2}$$

事实上,(55.1)就是著名的 Langevin 方程,它的解(55.2)称为 **Ornstein-Uhlenbeck 过程**,它也被用作 Brown 运动微粒的速度过程的模型.

问题与补充

9.1 设 M 为一局部鞅,H 为一循序过程.

1) 若 $H^2.[M]\in\mathscr{A}^+$,则 $H.M$ 为唯一的 $L\in\mathscr{M}^2$,使得对一切 $N\in\mathscr{M}^2$,$\boldsymbol{E}[(H.[M,N])_\infty]=\boldsymbol{E}[L_\infty N_\infty]$.

2) 若 $H^2.[M]\in\mathscr{A}^+_{loc}$,则 $H.M\in\mathscr{M}^2_{loc}$.

9.2 设 M 为一拟左连续局部鞅,H 为一循序过程,使得 $\sqrt{H^2.[M]}\in\mathscr{A}^+_{loc}$,则对一切 $N\in\mathscr{M}_{loc}$,有 $[H.M, N]=H.[M,N]$,$\Delta(H.M)=H\Delta M$.

9.3 设 X 为一半鞅,M 为一局部鞅. 为要 $(\Delta X).M$ 存在,必须且只需 $\langle X,M\rangle$ 存在. 这时有 $(\Delta X).M=[X,M]-\langle X,M\rangle$.

9.4 设 M 为一局部鞅,H 为一循序过程. 若 $H.M$ 存在且

$H^2 . [M] \in \mathscr{V}^+$，则 $\sqrt{H^2 . [M]} \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$.

9.5 设 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{M}^2$ 的一闭子空间．为要 $\mathscr{H}$ 为稳定的，必须且只需对任意 $M \in \mathscr{H}$ 及可料过程 H，若 $E[(H^2 . [M]_\infty] < \infty$，就有 $H . M \in \mathscr{H}$.

9.6 设 $M, N \in \mathscr{M}^2_{\text{loc}}$，则存在可料过程 H 及 $L \in \mathscr{M}^2_{\text{loc}}$，使得 $N = H . M + L, L \perp M$.

9.7 设 X 为一半鞅，H 为一可料过程，H 对 X 可积．设 $X = M + A, M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}, A \in \mathscr{V}_0$．为要这一分解是 X 的一个 H-分解，当且仅当 $H \in L_m(H)$，且对每个 $t > 0$，$\sum\limits_{s \leq t} |H_s \Delta A_s| < \infty$ a.s..

9.8 设 M 为一局部鞅，$H \in L(M)$．若 $H . M$ 为特殊半鞅，则 $H \in L_m(M)$.

9.9 设 X 为一半鞅，$H \in L(X)$，则 $H . X - HX$ 为可料过程.

9.10 设 X 为一适应右连左极过程，被一可料增过程 A 控制，则 $[A_\infty < \infty] \subset [X^*_\infty < \infty]$ a.s.，且对每个停时 T，有 $[A_T = 0] \subset [X^*_T = 0]$ a.s..

9.11 设 X, Y 为两个半鞅，T 为一有穷停时，$\tau_n: 0 = T^n_0 \leq T^n_1 \leq \cdots$ 为一列 $[0, T]$ 的随机分割，且 $\delta(\tau_n) \to 0$ a.s.，则

$$\sup_{t \leq T} \left| \sum_i (X_{T^n_{i+1} \wedge t} - X_{T^n_i \wedge t})(Y_{T^n_{i+1} \wedge t} - Y_{T^n_i \wedge t}) + X_0 Y_0 - [X, Y]_t \right| \xrightarrow{P} 0.$$

9.12 设 M, N 为两个零初值连续局部鞅．若 M 与 N 独立，则 $\langle M, N \rangle = 0$.

9.13 设 X, Y 为两个半鞅，$t > 0$，$\tau_n: 0 = t^n_0 < t^n_1 < \cdots < t^n_{m(n)} = t$ 为 $[0, t]$ 的一列有穷分割，$\delta(\tau_n) \to 0$，则

$$I_n(t) = \sum_i \frac{1}{2} (Y_{t^n_i} + Y_{t^n_{i+1}})(X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})$$

$$\xrightarrow{P} \int_0^t Y_{s-} dX_s - \frac{1}{2}([X, Y]_t - X_0 Y_0).$$

这极限记作 $\int_0^t Y_s \circ dX_s$，称为 Y 对 X 的 **Stratonovich 积分**．试求 Stratonovich 积分的变量替换公式.

9.14 设 $W=(W_t)$ 为一标准 Wiener 过程.

1) 对每个 $n\geqslant 1$，有

$$\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{1}{n+1}W_t^{n+1} - \frac{n}{2}\int_0^t W_s^{n-1}ds.$$

2) 若 $H=\frac{1}{2W}I_{[W\neq 0]}$，$M_t=W_t^2-t$，$t\geqslant 0$，则 $H.M=W$.

9.15 设 N 为一 Poisson 过程，T_n 为其第 n 个跳时. 设 H 为一有界可料过程. 为要 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t H_s ds$ a.s. 存在且有穷，必须且只需 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n H_{T_k}$ a.s. 存在且有穷. 这时，这两个极限 a.s. 相等. 这一性质在排队论中称为"Poisson 到达看到时间平均".

9.16 设 X,Y 为两个半鞅. 若 $[Y=0$ 或 $Y_-=0]$ 为不足道集，则 $\frac{X}{Y}$ 为半鞅.

9.17 设 $X,Y\in\mathscr{S}$，则 $\mathscr{E}(X)\mathscr{E}(Y)=\mathscr{E}(X+Y+[X,Y])$.

9.18 设 $X\in\mathscr{S}_0$. 若 $\mathscr{E}(X)=1$，则 $X=0$.

9.19 设 $X,Y\in\mathscr{S}$. 若 $\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(Y)$，且 $[\mathscr{E}(X)=0]$ 为不足道集，则 $X-X_0=Y-Y_0$.

9.20 设 $X\in\mathscr{S}_{p,0}$，$X=M+A$ 为其典则分解. 若 $[\Delta A=-1]$ 为不足道集，则存在 $N\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$，使得 $\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(N)\mathscr{E}(A)$.

9.21 设 $X,Y\in\mathscr{S}_0$. 若 $[\Delta Y=-1]$ 为不足道集，则存在 $Z\in\mathscr{S}_0$，使得 $\mathscr{E}(X+Y)=\mathscr{E}(Z)\mathscr{E}(Y)$；存在唯一的 $Y'\in\mathscr{S}_0$，使得 $\mathscr{E}(Y)\mathscr{E}(Y')=1$.

9.22 设 H 为半鞅，Z 为连续半鞅，则方程

$$X_t = H_t + \int_0^t X_s\, dZ_s,\quad t\geqslant 0,$$

有唯一解

$$X_t = \mathscr{E}(Z)_t\left\{H_0 + \int_0^t \mathscr{E}(Z)_s^{-1} d(H_s - [H,Z]_s)\right\}.$$

9.23 设 $X\in\mathscr{S}_0$，ΔX 有界，且存在 $\varepsilon>0$，使得对每个 $\lambda\in\,]0,\varepsilon[$，有 $\mathscr{E}(\lambda X)\in\mathscr{M}_{\text{loc}}$，则 $X\in\mathscr{M}_{\text{loc}}$.

9.24 设 X 为一复半鞅,即 $X=X'+iX''$,其中 X',X''为实半鞅,则

$$Z_t = \exp\left\{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c\rangle_t\right\}\prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}$$

是唯一的复半鞅,满足下列方程:

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}dX_s,$$

其中 $\langle X^c\rangle = \langle (X')^c\rangle - \langle (X'')^c\rangle + 2i\langle (X')^c, (X'')^c\rangle$.

9.25 设 $Z=X+iY$ 为一连续复半鞅,$[X,Y]=0$,f 为一解析函数,则

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s)d\langle Z\rangle_s.$$

特别,若 Z 为复 Brown 运动,即 X,Y 为独立标准 Brown 运动,则 $f(Z)$为局部鞅.

9.26 设 X 为一半鞅,则对一切 $t>0$,$\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dX_s^c = 0$ a.s..

9.27 设 X 为一零初值连续局部鞅,则 $|X|=M+L^0(X)$,其中 M 为零初值连续局部鞅,$L_t^0(X)=\sup_{s\leq t}(-M_s)$. 若 X 为标准 Wiener 过程,则 M 亦然.

9.28 设 X 为一半鞅. 定义

$$\hat{L}_t^a(X) = \frac{1}{2}[L_t^a(X) + L_t^{-a}(-X)], \quad a\in \mathbf{R}.$$

1) 对任一 $\mathbf{R}$ 上的连续凸函数 f,有

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + \sum_{0<s\leq t}[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s] + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{L}_t^a(X)\rho(da),$$

其中 ρ 为在广义函数意义下 f 的二阶导数.

2) 若 $L^0(X)\neq 0$,则对一切 $\beta\in]0,1[$,$|X|^\beta$ 不是半鞅.

3）设 f 为 $\boldsymbol{R}$ 上非负连续凸函数，且 $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. 令 $\tilde{f}'=\frac{1}{2}(f_r'+f_l')$，其中 f_r' 及 f_l' 分别是 f 的右及左导数，则

$$L_t^0(f(X))=\tilde{f}'(0)\left[\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dX_s-\sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}=0]}\Delta X_s\right]$$

$$+\frac{1}{2}\rho(\{0\})L_t(X).$$

9.29 设 X 为一适应右连左极过程. 如果存在一个适应增过程 A，使得(52.1)对一切有界初等可料过程 H（即 $H=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i I_{]T_i,T_{i+1}]}$，其中 $T_0\leqslant T_1\leqslant\cdots\leqslant T_n$ 为停时，$\xi_i\in b\mathscr{F}_{T_i}$，$i=0,\cdots,n-1$）成立，则 X 为半鞅.

9.30 设 $X,Y\in\mathscr{S}$. 我们有下列公式

$$L_t(X\vee Y)=L_t(X^+-Y^+)+\int_0^t I_{[X_{s-}\leq 0]}dL_s(Y)$$

$$-\int_0^t I_{[X_{s-}=Y_{s-}>0]}dL_s(X^+-Y^+),$$

$$L_t(X\vee Y)=\int_0^t I_{[Y_{s-}<0]}dL_s(X)+\int_0^t I_{[X_{s-}\leq 0]}dL_s(Y),$$

$$-\int_0^t I_{[X_{s-}=Y_{s-}>0]}dL_s(X^+-Y^+),$$

$$L_t(X\vee Y)+L_t(X\wedge Y)=L_t(X)+L_t(Y).$$

若 $L(X-Y)=0$，则

$$L_t(X\vee Y)=\int_0^t I_{[Y_{s-}<X_{s-}]}dL_s(X)+\int_0^t I_{[X_{s-}\leq 0]}dL_s(Y).$$

9.31 设 $X\in\mathscr{S}$，f 为两个 $\boldsymbol{R}$ 上连续凸函数之差. 对任一 $a\in\boldsymbol{R}$，令 $B(a)=\{x: f(x)=a, |f_r'(x)|+|f_l'(x)|>0\}$，其中 f_r' (f_l') 表示 f 的右(左)导数，则 $B(a)$ 至多为可数集，且

$$L_t^a(f(X))=\sum_{x\in B(a)}[f_r'(x)^+L_t^x(X)+f_l'(x)^-L_t^{-x}(-X)].$$

9.32 设 W 为一 Wiener 过程，$a>0$，则 $X_t=e^{-at}W_{e^{2at}}$，$t\geqslant 0$，为一 Ornstein-Uhlenbeck 过程.

第十章　鞅空间 $\mathscr{H}^1$ 和 $\mathscr{BMO}$

本章的内容是现代鞅论中较精细同时也是较困难的部分. 空间 $\mathscr{H}^1$ 和 $\mathscr{BMO}$ 这些术语都是从现代分析中借来的. $\mathscr{H}$ 意味着 Hardy, $\mathscr{BMO}$ 是"bounded mean oscillation"的缩写.

§1.　$\mathscr{H}^1$ 鞅和 $\mathscr{BMO}$ 鞅

10.1 定义　设 M 为一局部鞅, 置

$$\|M\|_{\mathscr{H}^1}=E[\sqrt{[M]_\infty}] \tag{1.1}$$

记 $\mathscr{H}^1=\{M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}:\|M\|_{\mathscr{H}^1}<\infty\}$. 我们称 $\mathscr{H}^1$ 中的元素为 $\mathscr{H}^1$-鞅, 显然, $\mathscr{H}^1$ 是一个线性空间.

10.2 注　1) 容易验证, $\|\cdot\|_{\mathscr{H}^1}$ 是 $\mathscr{H}^1$ 上的一个范数. 特别, 若 $\|M\|_{\mathscr{H}^1}=0$, 则 $M=0$.

2) 设 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ 且 $E[|M_0|]<\infty$, 则由定理 7.30 知存在停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得对每个 n, $M^{T_n}\in\mathscr{H}^1$.

3) 设 $M\in\mathscr{M}^2$, 则因 $E[\sqrt{[M]_\infty}]\leqslant\sqrt{E[M]_\infty}<\infty$, 故 $M\in\mathscr{H}^1$, 并有 $\|M\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|M\|_{\mathscr{M}^2}$.

4) 设 $M\in\mathscr{W}$, 则由于 $\sqrt{[M]_\infty}=\sqrt{M_0^2+\sum\limits_s(\Delta M_s)^2}\leqslant|M_0|+\sum\limits_s|\Delta M_s|$, 故 $M\in\mathscr{H}^1$, 并有 $\|M\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|M\|_{\mathscr{W}}=E[\int_{[0,\infty[}|dM_s|]$.

5) 设 $M\in\mathscr{H}^1$. 则对任何停时 T 有 $M^T\in\mathscr{H}^1$, 且 $\|M^T\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|M\|_{\mathscr{H}^1}$.

下一引理是局部鞅基本定理(定理 7.17)的精细化. 借助这一引理, 我们可以把许多有关局部鞅的问题, 归结为研究有界鞅及单跳可积变差过程补偿这两种特殊情形, 从而使问题大大简化.

10.3 引理 设 M 为零初值局部鞅. 令

$$A=\Sigma(\Delta M I_{[|\Delta M|>1]}),$$
$$V=A-\widetilde{A},\quad U=M-V. \tag{3.1}$$

则存在 M 的局部化序列 (T_n), 使得对每个 n, U^{T_n} 为有界鞅, V^{T_n} 为有限多个单跳适应可积变差过程的补偿和. 在此, 我们称形如 $\xi 1_{[T,\infty[}$ 的过程为单跳过程.

证明 令 $S_1=\inf\{t>0: |\Delta A_t|\geqslant 1\}$, 并归纳地定义 $(S_k)_{k\geqslant 2}$ 如下:

$$S_{k+1}=\inf\{t>S_k: |\Delta A_t|>1\}.$$

则每个 S_k 为停时, $S_k\uparrow\infty$ 且对 $k\neq j$ 有 $[\![S_j]\!]\cap[\![S_k]\!]=\varnothing$. 此外, 我们有

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta M_{S_k}I_{[\![S_k,\infty[\![}.$$

由定理 7.17, 存在 M 的局部化序列 (R_n), 使对每个 n, U^{R_n} 为有界鞅, A^{R_n} 为可积变差过程. 令 $T_n=S_n\wedge R_n$. 则 $T_n\uparrow\infty$, 且有

$$A^{T_n}=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_{S_k}I_{[S_k\leqslant T_n]}I_{[\![S_k,\infty[\![},$$
$$V^{T_n}=A^{T_n}-\widetilde{A}^{T_n}.$$

但是

$$\sum_{s\leqslant T_n}|\Delta A_s|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\Delta M_{S_k}|I_{[S_k\leqslant T_n]},$$

$\Delta M_{S_k}I_{[S_k\leqslant T_k]}$ 是可积且 $\mathscr{F}_{S_k}$-可测的, 即 $\Delta M_{S_k}I_{[S_k\leqslant T_k]}I_{[\![S_k,\infty[\![}$ 为单跳适应可积变差过程, $1\leqslant k\leqslant n$. 由此引理得证. □

10.4 引理 设 $M\in\mathscr{H}^1$, (T_n) 为停时序列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\infty$. 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|M-M^{T_n}\|_{\mathscr{H}^1}=0$.

证明 因 $\xi_n=\sqrt{[M-M^{T_n}]_\infty}=\sqrt{[M]_\infty-[M]_{T_n}}\to 0$ 且 $\xi_n\leqslant\sqrt{[M]_\infty}$, 故有 $E[\xi_n]\to 0$, 即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|M-M^{T_n}\|_{\mathscr{H}^1}=0$. □

10.5 定理 有界鞅全体(表以 $\mathscr{M}^\infty$)在 $\mathscr{H}^1$ 中稠.

证明 由于 $\mathscr{M}^\infty$ 在 $\mathscr{M}^2$ 中稠, 且 $\mathscr{M}^2$ 的范数比 $\mathscr{H}^1$ 的范数

强，故只需证明 $\mathscr{M}^2$ 在 $\mathscr{H}^1$ 中稠.

设 $M\in\mathscr{H}^1$，往证存在 $(M^{(n)})\subset\mathscr{M}^2$，使得 $\|M^{(n)}-M\|_{\mathscr{H}^1}\to 0$. 不防假定 $M_0=0$. 由引理 10.3 及 10.4 看出，只需考虑 M 为单跳过程补偿的情形.

设 $T>0$ 为一停时，$\xi\in\mathscr{F}_T$ 为一可积随机变量. 令

$$A=\xi I_{[T,\infty[},\quad M=A-\widetilde{A},$$

$$A^{(n)}=\xi I_{[|\xi|\leq n]}I_{[T,\infty[},\quad M^{(n)}=A^{(n)}-\widetilde{A}^{(n)}.$$

则 $M^{(n)}\in\mathscr{M}^2$，且由注 10.2.4)有

$$\begin{aligned}\|M^{(n)}-M\|_{\mathscr{H}^1}&\leqslant\|M^{(n)}-M\|_{\mathscr{A}}\\&\leqslant 2\|A^{(n)}-A\|_{\mathscr{A}}\\&\leqslant 2\boldsymbol{E}[\xi I_{[|\xi|>n]}]\to 0,\end{aligned}$$

这里第二个不等号是由定理 5.22.2)得到的. □

10.6 定义 设 M 为一平方可积鞅，置

$$\|M\|_{\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}}=\sup_{T\in\mathscr{T}}\sqrt{\frac{E(M_\infty-M_{T-}I_{[T>0]})^2}{P(T<\infty)}}.\tag{6.1}$$

其中 $\mathscr{T}$ 为停时全体，并约定 $\frac{0}{0}=0$. 令

$$\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}=\{M\in\mathscr{M}^2:\|M\|_{\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}}<\infty\}.\tag{6.2}$$

我们称 $\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}$ 的元素为 $\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}$-**鞅**. 容易验证 $\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}$ 为线性空间，$\|\cdot\|_{\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}}$ 是 $\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}$ 上的范数，且对 $M\in\mathscr{M}^2$ 有 $\|M\|_{\mathscr{M}^2}\leqslant\|M\|_{\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}}$.

10.7 引理 设 $M\in\mathscr{M}^2$. 则对任何停时 T 有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}[(M_\infty-M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathscr{F}_T]\\&=\boldsymbol{E}[[M]_\infty|\mathscr{F}_T]-[M]_T+M_0^2I_{[T<\infty]}+(\Delta M_T)^2\quad\text{a.s.}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}[(M_\infty-M_T-I_{[T>0]})^2|\mathscr{F}_T]\\&=\boldsymbol{E}(M_\infty-M_{T-}+M_0I_{[T=0]})^2|\mathscr{F}_T]\\&=\boldsymbol{E}[M_\infty^2|\mathscr{F}_T]+(M_{T-})^2+M_0^2I_{[T=0]}-2M_TM_{T-}\\&=\boldsymbol{E}[M_\infty^2-M_T^2|\mathscr{F}_T]+M_0^2I_{[T=0]}+(\Delta M_T)^2\end{aligned}$$

$$= E[[M]_\infty - [M]_T|\mathscr{F}_T] + M_0^2I_{[T=0]}$$
$$+ (\Delta M_T)^2, \quad \text{a.s.}. \quad \square$$

10.8 引理 设 $M\in\mathscr{H}^2$. 则为要 $M\in\mathscr{BMO}$,必须且只需存在常数 $c>0$,使得对一切停时 T 有

$$E[(M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathscr{F}_T]\leqslant c^2 \quad \text{a.s.}. \tag{8.1}$$

证明 必要性. 设 $M\in\mathscr{BMO}$,$c=\|M\|_{\mathscr{BMO}}$,则对任一停时 T 有

$$E[(M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]})^2]\leqslant c^2P(T<\infty). \tag{8.2}$$

设 $A\in\mathscr{F}_T$,在(8.2)中以 T_A 代 T,我们有

$$E[(M_\infty - M_{T_A-}I_{[T_A>0]})^2]\leqslant c^2P(A\cap[T<\infty])\leqslant c^2P(A).$$

故得(8.1)

充分性. 设(8.1)对一切停时 T 成立,我们有

$$\begin{aligned} &E[(M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathscr{F}_T]\\ &= E[(M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathscr{F}_T]I_{[T<\infty]}\\ &\leqslant c^2I_{[T<\infty]} \quad \text{a.s.}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

在(8.3)两边取期望得(8.2),因此 $M\in\mathscr{BMO}$. $\square$

10.9 定理 设 M 为局部鞅,则下列断言等价:

1)$M\in\mathscr{BMO}$.

2)存在常数 $c_1,c_2>0$,使得 $|M_0|\leqslant c_1$ a.s.,对一切停时 T 有 $|\Delta M_T|\leqslant c_1$ 以及

$$E([M]_\infty - [M]_{T-})\leqslant c_2^2P(T<\infty). \tag{9.1}$$

3)存在常数 $c_1,c_2>0$,使得 $|M_0|\leqslant c_1$ a.s.,对一切停时 T 有 $|\Delta M_T|\leqslant c_1$ a.s. 以及

$$E[[M]_\infty|\mathscr{F}_T] - [M]_{T-}\leqslant c_2^2 \quad \text{a.s.}. \tag{9.2}$$

4)存在常数 $c_1,c_2>0$,使得 $|M_0|\leqslant c_1$ a.s.,$|\Delta M|\leqslant c_1$ 且对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$E[[M]_\infty|\mathscr{F}_t] - [M]_t\leqslant c_2^2 \quad \text{a.s.}. \tag{9.3}$$

特别,$\mathscr{BMO}$-鞅为局部有界鞅.

证明 1)$\Leftrightarrow$3)可由引理 10.7 及 10.8 看出. 2)$\Leftrightarrow$3)的证明类

似于引理 10.8 的证明. 3)⇒4) 是明显的. 只需证明 4)⇒3). 令 (X_t) 为鞅 $(E[[M]_\infty|\mathscr{F}_t])$ 的右连续修正，则由(9.1)及 $X-[M]$ 的右连续性，对几乎所有 ω 及所有 $t\geqslant 0$ 有

$$X_t(\omega)-[M]_t(\omega)\leqslant c_2^2$$

特别，对一切停时 T 有

$$X_T-[M]_T\leqslant c_2^2 \quad \text{a.s.},$$

即(9.2)成立. □

10.10 注 1) 设 $M\in\mathscr{BMO}$，则由定理 10.9.2) 可看出，$\|M^c\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\|M\|_{\mathscr{BMO}}$ 及 $\|M^d\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\|M\|_{\mathscr{BMO}}$.

2) 设 ξ 为一 a.s. 有界随机变量. 以 $\|\xi\|_{L^\infty}$ 表 ξ 的 a.s. 上确界. 由引理 10.7 及 10.8 的证明可看出，对 $M\in\mathscr{M}^2$

$$\|M\|_{\mathscr{BMO}}^2=\sup_{T\in\mathscr{T}}\|E[[M]_\infty-[M]_{T-}I_{[T>0]}|\mathscr{F}_T]\|_{L^\infty}$$

$$=\sup_{T\in\mathscr{T}}\|E[(M_\infty-M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathscr{F}_T]\|_{L^\infty}.$$

特别对 $M\in\mathscr{BMO}$，由引理 10.7，$|M_0|\leqslant\|M\|_{\mathscr{BMO}}$ a.s. 以及 $|\Delta M|\leqslant\|M\|_{\mathscr{BMO}}$ a.s.. 设 $M\in\mathscr{M}_{loc}$ 且 $M\notin\mathscr{BMO}$，我们规定 $\|M\|_{\mathscr{BMO}}=+\infty$.

下面我们给出 $\mathscr{BMO}$-鞅的几个有用的例子.

10.11 定理 设 M 为一有界鞅，则 $M\in\mathscr{BMO}$，且有

$$\|M\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant 2\|M_\infty\|_{L^\infty}.$$

证明 设 $\|M_\infty\|_{L^\infty}=c$. 则对一切停时 T

$$|M_T|=|E[M_\infty|\mathscr{F}_T]|\leqslant c \quad \text{a.s.},$$

$$E[(M_\infty-M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathscr{F}_T]\leqslant(2c)^2 \quad a.s..$$

因此 $\|M\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant 2c$. □

10.12 定理 设 $A=(A_t)$ 为一适应可积增过程. $M=(M_t)$ 为鞅 $(E[A_\infty|\mathscr{F}_t])$ 的右连左极修正. 若存在常数 $c>0$，使得 $0\leqslant M-A_-I_{[0,\infty[}\leqslant c$，则 $M\in\mathscr{BMO}$，且 $\|M\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\sqrt{3}\,c$.

证明 令 $X=M-A_-I_{[0,\infty[}$，则 $0\leqslant X\leqslant c$ 且对一切停时 T

$$E[(M_\infty-M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathscr{F}_T]$$

$$\leqslant E[(A_\infty-A_{T-}I_{[T>0]})^2+X_{T-}^2I_{[T>0]}|\mathscr{F}_T]$$

$$\leqslant [(A_\infty - A_{T-} I_{[T>0]})^2 | \mathscr{F}_T] + c^2 \quad \text{a.s.}. \qquad (12.1)$$

对任一增函数(a_t)及$t>0$有

$$a_\infty^2 - a_{t-}^2 = \int_{[t,\infty[} a_{s-} da_s + \int_{[t,\infty[} a_s da_s \geqslant 2\int_{[t,\infty[} a_{s-} da_s,$$

$$(a_\infty - a_{t-})^2 \leqslant 2\int_{[t,\infty[} (a_\infty - a_{s-}) da_s.$$

注意(X_t)是$(A_\infty - A_{t-} I_{[t>0]})$的可选投影，我们有

$$\begin{aligned}
&E[(A_\infty - A_{T-} I_{[T>0]})^2 | \mathscr{F}_T] \\
&\leqslant 2E\left[\int_{[T,\infty[} (A_\infty - A_{s-} I_{[s>0]}) dA_s | \mathscr{F}_T\right] \\
&= 2E\left[\int_{[T,\infty[} X_s dA_s | \mathscr{F}_T\right] \\
&\leqslant 2cE[A_\infty - A_{T-} I_{[T>0]} | \mathscr{F}_T] \\
&= 2c[M_T - A_{T-} I_{[T>0]}] \leqslant 2c^2 \quad \text{a.s.}.
\end{aligned}$$

因此，由(12.1)可得

$$E[(M_\infty - M_{T-} I_{[T>0]})^2 | \mathscr{F}_T] \leqslant 3c^2 \quad \text{a.s.}.$$

所以由注10.10.2)有$\|M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \sqrt{3}c$. □.

10.13 定理 设$A=(A_t)$为一可料可积增过程，$A_0=0$. 令$M=(M_t)$为鞅$(E[A_\infty|\mathscr{F}_t])$的右连左极修正. 若存在常数$c>0$，使得对一切$t\geqslant 0$有$M_t - A_t \leqslant c$ a.s.，则$M \in \mathscr{BMO}$且$\|M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2\sqrt{3}c$.

证明 令$Y=M-A$，则$0\leqslant Y \leqslant c$. Y为一特殊半鞅，且$Y=M+(-A)$为其典则分解. 由定理8.8，我们有$0\leqslant \Delta A \leqslant c$. 因此$M-A_- I_{]0,\infty[} = M - A_- = Y + \Delta A \leqslant 2c$.

由定理10.12可知$M \in \mathscr{BMO}$，且$\|M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2\sqrt{3}c$. □

10.14 定理 设$M \in \mathscr{M}^2$，B为一适应增过程，又$L=(B_-).M$. 若对一切$t\geqslant 0$，$|B_t M_t| \leqslant 1$ a.s.，则$L \in \mathscr{BMO}$，且$\|L\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2$.

证明 设T为一停时. 由于$[L]=B_-^2.[M]$，故由分部积分公式，我们有

$$[L]_\infty - [L]_{T-}I_{[T>0]} = \int_{[T,\infty[} B_{s-}^2 d[M]_s$$

$$= \int_{[T,\infty[} ([M]_\infty - [M]_s) dB_s^2$$

$$+ ([M]_\infty - [M]_{T-}) B_{T-}^2 I_{[T>0]}. \quad (14.1)$$

由于$[M]-M^2 \in \mathscr{M}$，$([M]_\infty - [M]_t)$和$(M_\infty^2 - M_t^2)$有相同的可选投影，故由定理5.16.1)得

$$E\left[\int_{[T,\infty[} ([M]_\infty - [M]_s) dB_s^2 | \mathscr{F}_T\right]$$

$$= E\left[\int_{[T,\infty[} (M_\infty^2 - M_s^2) dB_s^2 | \mathscr{F}_T\right]$$

$$\leqslant E[M_\infty^2 (B_\infty^2 - B_{T-}^2 I_{[T>0]}) | \mathscr{F}_T]$$

$$\leqslant 1 - E[M_\infty^2 | \mathscr{F}_T] B_{T-}^2 I_{[T>0]} \quad a.s.. \quad (14.2)$$

另一方面，

$$E[([M]_\infty - [M]_{T-}) B_{T-}^2 I_{[T>0]} | \mathscr{F}_T]$$

$$= E[([M]_\infty - [M]_T) | \mathscr{F}_T] B_{T-}^2 I_{[T>0]} + \Delta M_T^2 B_{T-}^2 I_{[T>0]}$$

$$= E[M_\infty^2 - M_T^2 | \mathscr{F}_T] B_{T-}^2 I_{[T>0]} + \Delta M_T^2 B_{T-}^2 I_{[T>0]}$$

$$\leqslant E[M_\infty^2 | \mathscr{F}_T] B_{T-}^2 I_{[T>0]} - M_T^2 B_{T-}^2 I_{[T>0]}$$

$$+ 2(M_T^2 + M_{T-}^2) B_{T-}^2 I_{[T>0]}$$

$$\leqslant E[M_\infty^2 | \mathscr{F}_T] B_{T-}^2 I_{[T>0]} + M_T^2 B_{T-}^2 + 2M_{T-}^2 B_{T-}^2$$

$$\leqslant E[M_\infty^2 | \mathscr{F}_T] B_{T-}^2 I_{[T>0]} + 3. \quad (14.3)$$

故由(14.1)—(14.3)得

$$E[[L]_\infty - [L]_{T-} I_{[T>0]} | \mathscr{F}_T] \leqslant 4 \quad a.s..$$

从而$L \in \mathscr{BMO}$且$\|L\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2$. □

10.15 系 设$M \in \mathscr{M}^2$，H为一可料过程，若存在一适应增过程B使得$|BM| \leqslant 1$，且$|H| \leqslant B_-$，则$H.M \in \mathscr{BMO}$且$\|H.M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2$.

证明 令$L = B_-.M$. 则对任一停时T，

$$[H.M]_\infty - [H.M]_{T-} I_{[T>0]} = \int_{[T,\infty[} H_s^2 d[M]_s$$

$$\leqslant \int_{[T,\infty[} B_s^2 \, d[M]_s$$

$$= [L]_\infty - [L]_{T-} I_{[T>0]}.$$

由于 $L \in \mathscr{BMO}$，故 $H \cdot M \in \mathscr{BMO}$，且 $\| H \cdot M \|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \| L \|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2$. □

最后，我们以 $\mathscr{BMO}$ 鞅的一个有趣性质结束本节。

10.16 定理 设 $M \in \mathscr{BMO}$，则对任一停时 T，M^T、$M - M^T \in \mathscr{BMO}$，且有

$$\| M^T \|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \| M \|_{\mathscr{BMO}}, \quad \| M - M^T \|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \| M \|_{\mathscr{BMO}}. \tag{16.1}$$

此外，若停时 $T_n \uparrow \infty$ a.s.，则有 $\| M^{T_n} \|_{\mathscr{BMO}} \uparrow \| M \|_{\mathscr{BMO}}$.

证明 设 S 为一停时，我们有

$$[M^T]_\infty - [M^T]_{S-} I_{[S>0]} = ([M]_T - [M]_{S-} I_{[S>0]}) I_{[S\leqslant T]}$$

$$\leqslant [M]_\infty - [M]_{S-} I_{[S>0]},$$

$$[M - M^T]_\infty - [M - M^T]_{S-} I_{[S>0]}$$

$$= [M]_\infty - [M]_{S-} I_{[S>0]} - [M]_T + ([M]^T)_{S-} I_{[S>0]}$$

$$\leqslant [M]_\infty - [M]_{S-} I_{[S>0]}.$$

故有(16.1).

若停时 $T_n \uparrow \infty$ a.s.，则对任一停时 S

$$[M^{T_n}]_\infty - [M^{T_n}]_{S-} I_{[S>0]} \uparrow [M]_\infty - [M]_{S-} I_{[S>0]}.$$

故由注 10.10.2)容易看出 $\| M^{T_n} \|_{\mathscr{BMO}} \uparrow \| M \|_{\mathscr{BMO}}$. □

注 我们有 $\| M - M^{T_n} \|_{\mathscr{BMO}} \downarrow$，但未必有 $\| M - M^{T_n} \|_{\mathscr{BMO}} \downarrow 0$. 事实上，Dellacherie，Meyer，Yor[1]证明了下列事实：若 $\mathscr{M}^\infty \neq \mathscr{BMO}$，则 $\mathscr{M}^\infty$ 在 $\mathscr{BMO}$ 中既不是闭集，也不是稠密集.

§ 2. Fefferman 不等式

下列定理给出的 Fefferman 不等式，是有关 $\mathscr{H}^1$ 和 $\mathscr{BMO}$ 鞅最重要的结果，它比 Kunita-Watanabe 不等式深刻得多.

10.17 定理 设 M、N 为两个局部鞅，U 为一循序可测过程，

则有

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}|U_s\|d[M,N]_s|\right]$$

$$\leqslant\sqrt{2}\,\boldsymbol{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}U_s^2d[M]_s\right)^{1/2}\right]\|N\|_{\mathscr{B}.\mathscr{MO}} \quad (17.1)$$

特别，取 $U=1$，我们有

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d[M,N]_s|\right]\leqslant\sqrt{2}\,\|M\|_{\mathscr{H}^1}\|N\|_{\mathscr{B}.\mathscr{MO}}. \quad (17.2)$$

证明 不妨假定(17.1)右边是有限的. 令

$$C_t=\int_{[0,t]}U_s^2d[M]_s.$$

我们定义两个非负可选过程 H,K 如下：

$$H_t^2=\frac{U_t^2}{\sqrt{C_t}+\sqrt{C_{t-}I_{[t>0]}}}I_{[C_t>0]},\quad K_t^2=\sqrt{C_t}\ ,$$

则有

$$H_t^2K_t^2\geqslant\frac{1}{2}U_t^2I_{[C_t>0]}.$$

此外，由分部积分公式，我们有

$$H_t^2d[M]_t=I_{[C_t>0]}\frac{dC_t}{\sqrt{C_t}+\sqrt{C_{t-}I_{[t>0]}}}$$

$$=I_{[C_t>0]}d\sqrt{C_t}.$$

因为(由 K-W 不等式)

$$\int_{[0,\infty[}|U_s|I_{[C_s=0]}|d[M,N]_s|$$

$$\leqslant\left(\int_{[0,\infty[}U_s^2I_{[C_s=0]}d[M]_s\right)^{1/2}([N]_\infty)^{1/2}$$

$$=\left(\int_{[0,\infty[}I_{[C_s=0]}dC_s\right)^{1/2}([N]_\infty)^{1/2}=0,\quad \text{a.s.},$$

故有

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}|U_s\|d[M,N]_s|\right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[} |I_{[C_s>0]} U_s| \, |d[M,N]_s|\right]$$

$$\leqslant \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[} |H_s K_s| \, |d[M,N]_s|\right]$$

$$\leqslant \sqrt{E_1}\sqrt{E_2}, \tag{17.3}$$

其中

$$E_1 = \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M]_s\right]$$

$$\leqslant \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[} d\sqrt{C_s}\right]$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\sqrt{C_\infty}\right]$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[} U_s^2 d[M]_s\right)^{1/2}\right],$$

$$E_2 = \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[} K_s^2 d[N]_s\right]$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[} ([N]_\infty - [N]_{s-}) dK_s^2\right]. \tag{17.4}$$

但由于$([N]_\infty - [N]_-)$的可选投影为$(\boldsymbol{E}([N]_\infty|\mathscr{F}_t) - [N]_{t-})$，而后者在$]\!]0,\infty[\![$上被$\|N\|^2_{\mathscr{BMO}}$所界住，故有

$$E_2 = \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[} (\boldsymbol{E}[[N]_\infty|\mathscr{F}_s] - [N]_{s-}) dK_s^2\right]$$

$$\leqslant \|N\|^2_{\mathscr{BMO}} \boldsymbol{E}\left[\sqrt{C_\infty}\right]. \tag{17.5}$$

于是(17.1)由(17.3)—(17.5)推出. □

下一定理给出了Fefferman不等式的加强形式.

10.18 定理 设M,N为两个局部鞅，U为一可选过程，T为一停时，则有

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{[T,\infty[} |U_s| \, |d[M,N]_s|\right]$$

$$\leqslant \sqrt{2}\, \boldsymbol{E}\left[\left(\int_{[T,\infty[} U_s^2 d[M]_s\right)^{1/2}\right] \|N\|_{\mathscr{BMO}}, \tag{18.1}$$

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{[T,\infty[} |U_s| \, |d[M,N]_s| \,\Big|\, \mathscr{F}_T\right]$$

$$\leqslant \sqrt{2}\, E\left[\left(\int_{[T,\infty[} U_s^2 d[M]_s\right)^{1/2} \middle| \mathscr{F}_T\right] \| N \|_{\mathscr{B}.MO}. \quad (18.2)$$

证明 在(17.1)中以 $UI_{[T,\infty[}$ 代替 U 可得(18.1),对 $A\in\mathscr{F}_T$,在(18.1)中以 T_A 代替 T 即得(18.2). □

作为 Fefferman 不等式的一个应用,我们将证明 $\mathscr{H}^1$-鞅为一致可积鞅.

10.19 定理 设 $M\in\mathscr{H}^1$,则 M 为一致可积鞅,且有

$$\| M_\infty \|_1 \leqslant 2\sqrt{2}\, \| M \|_{\mathscr{H}^1}. \quad (19.1)$$

证明 首先,设 M 为一有界鞅与一可积变差鞅之和.则对任一有界鞅 N,由定理 6.4,6.28.1)及 Fefferman 不等式,有

$$\begin{aligned} & |E[M_\infty N_\infty]| \\ & = |E[M,N]_\infty| \leqslant \sqrt{2}\, \| M \|_{\mathscr{H}^1} \| N \|_{\mathscr{B}.MO} \\ & \leqslant 2\sqrt{2}\, \| M \|_{\mathscr{H}^1} \| N_\infty \|_{L^\infty}, \end{aligned} \quad (19.2)$$

上述最后一个不等式是根据定理 10.11 得到的.在(19.2)中令 $N_\infty=\mathrm{sgn} M_\infty$ 可得

$$\| M_\infty \|_1 \leqslant 2\sqrt{2}\, \| M \|_{\mathscr{H}^1},$$

其中 $\mathrm{sgn}(x)=1,0$ 或 1 当 $x>0$, $x=0$ 或 $x<0$.

对一般的 $M\in\mathscr{H}^1$,存在停时序列(S_n)满足.$S_n\uparrow\infty$,且对每个 n,M^{S_n}是一有界鞅和一可积变差鞅之和,则有

$$\| M_{S_n} - M_{S_m} \|_1 \leqslant 2\sqrt{2}\, \| M^{S_n} - M^{S_m} \|_{\mathscr{H}^1}. \quad (19.3)$$

因为当 $n\to\infty$ 时 $\| M^{S_n} - M \| \xrightarrow[\mathscr{H}^1]{} 0$,(19.3)意味着$(M_{S_n})$是 L^1 中的基本列.因此 $M_{S_n}\xrightarrow{L^1}\xi\in L^1$.令$(\xi_t)$为鞅$(E[\xi|\mathscr{F}_t])$的右连左极修正,则对任何给定的 m 有

$$\begin{aligned} \xi_{t\wedge S_m} &= E[\xi|\mathscr{F}_{t\wedge S_m}] \\ &= L^1\text{-}\lim_{n\to\infty} E[M_{S_n}|\mathscr{F}_{t\wedge S_m}] \\ &= M_{t\wedge S_m} \quad \text{a.s.}, \end{aligned}$$

于是对一切 $t\geqslant 0$, $M_t=\xi_t$ a.s..特别,M 为一致可积鞅,且 $M_\infty=\xi$ a.s..此外,我们有

$$\|M_\infty\|_1 = \lim_{n\to\infty}\|M_{S_n}\|_1 \leqslant 2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\|M^{S_n}\|_{\mathscr{H}^1}$$

$$= 2\sqrt{2}\|M\|_{\mathscr{H}^1}. \quad \square$$

§ 3. $\mathscr{H}^1$ 的对偶空间

首先，我们给出 $\mathscr{BMO}$-鞅的一个有用的刻画.

10.20 定理 设 $N\in\mathscr{M}^2$，则为要 $N\in\mathscr{BMO}$，必须且只需存在常数 $c>0$，使得对一切 $M\in\mathscr{M}^2$ 有[1]

$$|E[M,N]_\infty|\leqslant c\|M\|_{\mathscr{H}^1}. \tag{20.1}$$

这时，$\|N\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\sqrt{5}c$.

证明 必要性由 Fefferman 不等式得到（取 $c=\sqrt{2}\|N\|_{\mathscr{BMO}}$）. 往证充分性.

首先证明 $|N_0|\leqslant c$ a.s.. 令 $B=[|N_0|>c]$. 假定 $P(B)>0$. 令 $\xi=\frac{\operatorname{sgn} N_0}{P(B)}I_B$，则 $|\xi|=\frac{1}{P(B)}I_B$，$E[|\xi|]=1$. 令 $M_t=\xi, t\geqslant 0$，则 $M\in\mathscr{M}^2$，$\|M\|_{\mathscr{H}^1}=E[|\xi|]=1$. 但我们有

$$\begin{aligned}|E[M,N]_\infty| &= E[M_0N_0]\\ &= E\left[\frac{|N_0|I_{[|N_0|>c]}}{P[|N_0|>c]}\right]>c\\ &= c\|M\|_{\mathscr{H}^1}.\end{aligned}$$

这与假设条件矛盾. 因此，必须有 $P(B)=0$，即有 $|N_0|\leqslant c$ a.s..

其次证明 $|\Delta N|\leqslant 2c$. 设 T 为一可料时或绝不可及时，且 $T>0$. 假定 $P([|\Delta N|>2c])>0$，令

$$\xi=\frac{\operatorname{sgn}(\Delta N_T)}{P([|\Delta N_T|>2c])}I_{[|\Delta N_T|>2c]},$$

则 $\xi\in b\mathscr{F}_T$ 且 $\xi I_{[T=\infty]}=0$. 令 $M=\xi I_{[T,\infty[}-(\xi I_{[T,\infty[})^p$，则 $M\in\mathscr{M}^2$ 且仅在 T 处 M 有跳：

1) 容易看出：这等价于对一切有界鞅 M(20.1)成立.

$$\Delta M_T = \begin{cases} \xi - E[\xi | \mathscr{F}_{T-}], & \text{若 } T \text{ 为可料时,} \\ \xi, & \text{若 } T \text{ 为绝不可及时.} \end{cases}$$

同时,我们有 $\| M \|_{\mathscr{H}^1} \leqslant \| M \|_{\mathscr{A}} \leqslant 2 \| \xi I_{[\![T,\infty[\![} \|_{\mathscr{A}} \leqslant 2E[|\xi|] = 2$. 由于当 T 为可料时,有 $E[\Delta N_T | \mathscr{F}_{T-}] = 0$,故在两种情况下,由定理 6.28 皆有

$$E[[M,N]_\infty] = E[\Delta M_T \Delta N_T] = E[\xi \Delta N_T]$$
$$= E\left[\frac{|\Delta N_T| I_{[|\Delta N_T|>2c]}}{P([|\Delta N_T| > 2c])}\right] > 2c \geqslant c \| M \|_{\mathscr{H}^1}.$$

这与假设条件矛盾. 因此,必须有 $P(|\Delta N_T| > 2c) = 0$,即有 $|\Delta N_T| \leqslant 2c$ a.s.. 于是对一切停时 T 也有 $|\Delta N_T| \leqslant 2c$ a.s..

最后,设 T 为一停时,$M = N - N^T$,$\xi = [N]_\infty - [N]_T$,则 $M \in \mathscr{M}^2$,且 $[M]_\infty = [M,N]_\infty = \xi$. 故由假定可得

$$E[\xi] = E[M,N]_\infty \leqslant c \| M \|_{\mathscr{H}^1} = cE[\sqrt{\xi}]$$
$$= cE[\sqrt{\xi} I_{[T<\infty]}] \leqslant c(E[\xi])^{1/2}[P(T < \infty)]^{1/2},$$
$$E[[N]_\infty - [N]_T] = E[\xi] \leqslant c^2 P(T < \infty).$$

综上所证,由定理 10.9 知,$N \in \mathscr{BMO}$,并且

$$\| N \|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \sqrt{c^2 + (2c)^2} = \sqrt{5} c. \quad \square$$

现在我们来证明 $\mathscr{H}^1$ 的对偶空间是 $\mathscr{BMO}$,更确切地说,我们有

10.21 定理 设 $(\mathscr{H}^1)^*$ 为 $\mathscr{H}^1$ 上有界线性泛函全体所成的 Banach 空间(即 $(\mathscr{H}^1)^*$ 为 $\mathscr{H}^1$ 的对偶空间). 设 $N \in \mathscr{BMO}$,令

$$\varphi_N(M) = E[[M,N]_\infty], \quad M \in \mathscr{H}^1. \tag{21.1}$$

则 $N \mapsto \varphi_N$ 是 $\mathscr{BMO}$ 到 $(\mathscr{H}^1)^*$ 上的一一线性映照,且有

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \| \varphi_N \| \leqslant \| N \|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \sqrt{5} \| \varphi_N \|, \tag{21.2}$$

其中 $\| \varphi \|$ 表示有界线性泛函 φ 的范数.

特别,$\mathscr{BMO}$ 按范数 $\| \cdot \|_{\mathscr{BMO}}$ 为 Banach 空间.

证明 设 $N \in \mathscr{BMO}$,由 Fefferman 不等式,

$$|\varphi_N(M)| = |E[M,N]_\infty|$$

$$\leqslant \sqrt{2}\ \|N\|_{\mathscr{B}\mathscr{MO}}\ \|M\|_{\mathscr{H}^1},\quad M\in\mathscr{H}^1$$

故 $\varphi_N\in(\mathscr{H}^1)^*$ 且 $\|N\|_{\mathscr{B}\mathscr{MO}}\leqslant\sqrt{5}\ \|\varphi_N\|$.

若 $\varphi_N\equiv 0$，由于 $\mathscr{B}\mathscr{MO}\subset\mathscr{M}^2\subset\mathscr{H}^1$，故有 $\boldsymbol{E}[[N]_\infty]=\varphi_N(N)=0$. 从而 $N=0$. 这表明 $N\to\varphi_N$ 是 $\mathscr{B}\mathscr{MO}$ 到 $(\mathscr{H}^1)^*$ 的一一线性映照(线性性是显然的). 剩下只要证明 φ 的象空间是整个空间 $(\mathscr{H}^1)^*$ 且有 $\|N\|_{\mathscr{B}\mathscr{MO}}\leqslant\sqrt{5}\ \|\varphi_N\|$.

令 $\varphi\in(\mathscr{H}^1)^*$. 因为 $\mathscr{M}^2\subset\mathscr{H}^1$ 且 $\|\cdot\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|\cdot\|_{\mathscr{M}^2}$，故对一切 $M\in\mathscr{M}^2$，有

$$|\varphi(M)|\leqslant\|\varphi\|\ \|M\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|\varphi\|\ \|M\|_{\mathscr{M}^2}.$$

这表明 φ 限于 $\mathscr{M}^2$ 为 Hillert 空间 $\mathscr{M}^2$ 上的有界线性泛函，因此存在唯一的 $N\in\mathscr{M}^2$，使对一切 $M\in\mathscr{M}^2$ 有

$$|\varphi(M)|=|\boldsymbol{E}[M_\infty N_\infty]|$$
$$=|\boldsymbol{E}[[M,N]_\infty]|\leqslant\|\varphi\|\ \|M\|_{\mathscr{H}^1}.$$

由定理 10.20 可知 $N\in\mathscr{B}\mathscr{MO}$，且 $\|N\|_{\mathscr{B}\mathscr{MO}}\leqslant\sqrt{5}\ \|\varphi\|$. 进而，在 $\mathscr{M}^2$ 上 φ_N 与 φ 一致. 但 $\mathscr{M}^2$ 在 $\mathscr{H}^1$ 中稠(定理 10.5)，故 φ_N 与 φ 是 $(\mathscr{H}^1)^*$ 中同一元素. 因而

$$(\mathscr{H}^1)^*=\{\varphi_N:\ N\in\mathscr{B}\mathscr{MO}\},$$

且按范数 $\|\varphi_N\|$ $\mathscr{B}\mathscr{MO}$ 与 $(\mathscr{H}^1)^*$ 同构. 又由(21.2)，范数 $\|\varphi_N\|$ 与范数 $\|N\|_{\mathscr{B}\mathscr{MO}}$ 是等价的. 故 $\mathscr{B}\mathscr{MO}$ 按范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{B}\mathscr{MO}}$ 是完备的. □

注 由定理知，$\mathscr{H}^1$ 上每个有界线性泛函具有(21.1)的形式.

在定理 10.21 的证明中将 $\mathscr{M}^2$ 代以 $\mathscr{M}^2_0$，我们立刻得到如下定理.

10.22 定理 设 $N\in\mathscr{B}\mathscr{MO}_0$，令

$$\varphi_N(M)=\boldsymbol{E}([M,N]_\infty),\quad M\in\mathscr{H}^1_0.$$

则 $N\mapsto\varphi_N$ 是 $\mathscr{B}\mathscr{MO}_0$ 到 $(\mathscr{H}^1_0)^*$ 上的一一线性映照，且

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|\varphi_N\|\leqslant\|N\|_{\mathscr{B}\mathscr{MO}}\leqslant\sqrt{5}\ \|\varphi_N\|.$$

§ 4. Davis 不等式

10.23 引理 设 M 为一局部鞅，H 为一循序可测过程，使得 $H.M\in\mathscr{H}^1$，且

$$E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{1/2}\right]<\infty.$$

则对任何 $N\in\mathscr{BMO}$，$[H.M,N]-H.[M,N]$为一可积变差鞅，特别有 $E[H.M,N]_\infty=E\left[\int_{[0,\infty[}H_sd[M,N]_s\right]$.

证明 由于 $N\in\mathscr{BMO}$，N 为局部有界鞅，由定理 9.10，$[H.M,N]-H.[M,N]$为一局部鞅. 由 Fefferman 不等式，我们有

$$E\left[\int_{[0,\infty[}|d[H.M,N]_s|\right]$$

$$\leqslant\sqrt{2}\,\|H.M\|_{\mathscr{H}^1}\|N\|_{\mathscr{BMO}}<\infty.$$

$$E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s\|d[M,N]_s|\right]$$

$$\leqslant\sqrt{2}\,E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2\,d[M]_s\right)^{1/2}\right]\|N\|_{\mathscr{BMO}}<\infty.$$

故$[H.M,N]-H.[M,N]\in\mathscr{W}_0$. □

下一定理是 **Davis 第一不等式**. 事实上，我们这里给出的是通常形式的推广.

10.24 定理 设 M 为一局部鞅，H 为一循序可测过程，使得 $\sqrt{H^2.[M]}$局部可积. 则有

$$E[(H.M)_\infty^*]\leqslant2\sqrt{6}\,E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2\,d[M]_s\right)^{1/2}\right].\quad(24.1)$$

特别，我们有

$$E[M_\infty^*]\leqslant2\sqrt{6}\,\|M\|_{\mathscr{H}^1}.\qquad(24.2)$$

证明 无妨假定 $E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{1/2}\right]<\infty$，这时$(H.M)_0$是可积的. 于是可进一步假定 $H.M\in\mathscr{H}^1$. 否则可取停时列(T_n)满足 $T_n\uparrow+\infty$且对每个 n，$H.M^{T_n}=(H.M)^{T_n}\in\mathscr{H}^1$. 同时，我们

有$(H.M^{T_n})^*_\infty \uparrow (H.M)^*_\infty$.

设 S 为非负有限随机变量, $B=\mathrm{sgn}(H.M)_S I_{[S,\infty[}$. 令 A 为 B 的可选对偶投影, 则对任一停时 T, 有

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{[T,\infty[}|dA_s|\,|\mathscr{F}_T\right]\leqslant \boldsymbol{E}\left[\int_{[T,\infty[}|dB_s|\,|\mathscr{F}_T\right]\leqslant 1 \quad \text{a.s.}.$$

于是有

$$\boldsymbol{E}[A^+_\infty - A^+_{T-}I_{[T>0]}|\mathscr{F}_T]\leqslant 1,$$
$$\boldsymbol{E}[A^-_\infty - A^-_{T-}I_{[T>0]}|\mathscr{F}_T]\leqslant 1, \quad \text{a.s.}.$$

其中 A^+, A^- 分别是 A 的正、负变差部分. 令 $N=(N_t)$ 为鞅 $(\boldsymbol{E}[A_\infty|\mathscr{F}_t])$ 的右连左极修正, 则由定理 10.12 可知 $N\in\mathscr{B}.\mathscr{M}\mathscr{O}$ 且 $\|N\|_{\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}}\leqslant 2\sqrt{3}$.

记 $L=H.M\in\mathscr{H}^1$. 令 (T_n) 为停时列满足 $T_n\uparrow+\infty$, 且对一切 n, N^{T_n} 是有界鞅, L^{T_n} 为一有界鞅和一可积变差鞅之和, 于是我们有

$$\boldsymbol{E}[N_{T_n}L_{T_n}]=\boldsymbol{E}[L,N]_{T_n}=\boldsymbol{E}[L,N^{T_n}]_\infty. \tag{24.3}$$

故由引理 10.23 及 Fefferman 不等式

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[L_{S\wedge T_n}\mathrm{sgn}(L_s)] &= \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}L_s^{T_n}\,dB_s\right] \\
&= \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}L_s^{T_n}\,dA_s\right]=\boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}L_{T_n}dA_s\right] \\
&= \boldsymbol{E}[L_{T_n}A_\infty]=\boldsymbol{E}[L_{T_n}N_\infty] \\
&= \boldsymbol{E}[L_{T_n}N_{T_n}]=\boldsymbol{E}[L,N^{T_n}]_\infty \\
&= \boldsymbol{E}\left[\int_{[0,\infty[}H_s d[M,N^{T_n}]_s\right] \\
&\leqslant \sqrt{2}\,\boldsymbol{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M]_s\right)^{1/2}\right]\|N^{T_n}\|_{\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}} \\
&\leqslant 2\sqrt{6}\,\boldsymbol{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M]_s\right)^{1/2}\right].
\end{aligned} \tag{24.4}$$

最后一个不等号是由于 $\|N^{T_n}\|_{\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}}\leqslant\|N\|_{\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}}\leqslant 2\sqrt{3}$ (定理 10.16). 另一方面,

$$L_{S\wedge T_n}\mathrm{sgn}(L_s)=|L_s|I_{[S\leqslant T_n]}+L_{T_n}\mathrm{sgn}(L_s)I_{[T_n<S]}.$$

由于$[T_n<S]\downarrow\varnothing$且$(L_{T_n})$为一致可积的(因为$L\in\mathscr{H}^1$，由定理10.19，$L\in\mathscr{M}$)，故当$n\to\infty$时$E[L_{T_n}\operatorname{sgn}(L_s)I_{[T_n<S]}]\to 0$，从而有

$$\lim_{n\to\infty}E(L_{S\wedge T_n}\operatorname{sgn}(L_s)]=\lim_{n\to\infty}E[|L_s|I_{[S\leqslant T_n]}]=E[|L_S|].$$

于是由(24.4)，我们有

$$E[|L_s|]\leqslant 2\sqrt{6}E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{1/2}\right]. \qquad (24.5)$$

现在，对$\varepsilon>0$令

$$S(\omega)=\inf\{t\geqslant 0: |L_t(\omega)|\geqslant L_\infty^*(\omega)-\varepsilon\}.$$

因为$L\in\mathscr{M}$且$L_\infty^*<\infty$ a. s.，从而S为有限随机变量，且有$|L_S|\geqslant L_\infty^*-\varepsilon$ a. s.. 对此S应用(24.5)有

$$\begin{aligned}E[L_\infty^*]-\varepsilon&\leqslant E[|L_S|]\\&\leqslant 2\sqrt{6}E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{1/2}\right] \qquad (24.6)\end{aligned}$$

在(24.6)中令$\varepsilon\downarrow 0$即得(24.1). □

下一定理给出了Davis第一不等式(24.2)的加强形式.

10.25 定理 设$M\in\mathscr{H}^1$，则对一切停时T，有

$$\begin{aligned}&E[M_\infty^*-M_{T-}^*I_{[T>0]}|\mathscr{F}_T]\\&\leqslant 4\sqrt{3}E\left[\sqrt{[M]_\infty-[M]_{T-}I_{[T>0]}}\,|\mathscr{F}_T\right]. \qquad (25.1)\end{aligned}$$

证明 令$\overline{M}_t=(M_{T+t}-M_{T-}I_{[T>0]})I_{[T<\infty]}$，$\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{T+t}$，$t\geqslant 0$，则$\overline{M}=(\overline{M}_t)$为$(\mathscr{G}_t)$局部鞅(参见问题7.14)，且$[\overline{M}]_t=[M]_{T+t}-[M]_{T-}I_{[T>0]}$. 于是$E\left[\sqrt{[\overline{M}]_\infty}\right]<\infty$，且$\overline{M}$关于$(\mathscr{G}_t)$为$\mathscr{H}^1$鞅. 由Davis不等式(24.2)有

$$E[\overline{M}_\infty^*]\leqslant 2\sqrt{6}E\left[\sqrt{[M]_\infty-[M]_{T-}I_{[T>0]}}\right].$$

但显然有$M_\infty^*\leqslant\overline{M}_\infty^*+M_{T-}^*I_{[T>0]}$，于是

$$E[M^*-M_{T-}^*I_{[T>0]}]\leqslant 2\sqrt{6}E\left[\sqrt{[M]_\infty-[M]_{T-}I_{[T>0]}}\right]. \qquad (25.2)$$

对一切$A\in\mathscr{F}_T$，以T_A代替(25.2)中的T即得(25.1). □

下一定理是定理10.24的进一步推广.

10.26 定理 设 M 为一局部鞅，H 为一循序可测过程，使得 $\sqrt{H^2.[M]}$ 为局部可积. 对任一停时 T，我们有

$$E[(H.M)_T^*]\leqslant 2\sqrt{6}\,E\left[\left(\int_{[0,T]}H_s^2d[M]_s\right)^{1/2}\right].\qquad(26.1)$$

证明 由于 $(H.M)_T^*=(H.M^T)_\infty^*=(HI_{[0,T]}.M)_\infty^*$，故 (26.1) 可由 (24.1) 推得. □

作为定理 10.26 的一个应用，我们得到随机积分如下的收敛定理.

10.27 定理 设 M 为局部鞅. 记

$$L^0(M)=\{H:H\text{ 为可选过程且}\sqrt{H^2.[M]}\in\mathscr{A}_{loc}^+\}.$$

令 $(H^{(n)})\subset L^0(M)$，$H\in L^0(M)$，T 为一停时.

1) 若 $E\left[\left(\int_{[0,T]}(H_s^{(n)}-H_s)^2d[M]_s\right)^{1/2}\right]\to 0$，则

$$E[\sup_{t\leqslant T}|(H^{(n)}.M)_t-(H.M)_t|]\to 0.$$

2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\left[\left(\int_{[0,T]}(H_s^{(n)}-H_s)^2d[M]_s\right)^{1/2}\right]<\infty$，则

$$\sup_{t\leqslant T}|(H^{(n)}.M)_t-(H.M)_t|\to 0.\quad\text{a.s.}.$$

下一定理是 **Davis 第二不等式**.

10.28 定理 设 M 为一局部鞅，我们有

$$\|M\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant(7+4\sqrt{2})E[M_\infty^*].\qquad(28.1)$$

此外，对任一停时 T 有

$$E\left[\sqrt{[M]_\infty-[M]_{T-}I_{[T>0]}}\,\middle|\,\mathscr{F}_T\right]\leqslant 2(7+4\sqrt{2})E[M_\infty^*|\mathscr{F}_T].$$

(28.2)

证明 不妨设 $E[M_\infty^*]<\infty$. 首先考虑 $M_0=0$ 的情况，对给定的 $\varepsilon>0$ 取 $\overline{M}=M+\varepsilon$. 则 $\overline{M}_\infty^*\geqslant\varepsilon$，$\frac{1}{\overline{M}_\infty^*}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$. 对有界鞅 $H_t=E\left[\frac{1}{\overline{M}_\infty^*}\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right]$ 及适应增过程 $B_t=\overline{M}_t^*$，应用系 10.15 可知 $L=(\overline{M}_-).H\in\mathscr{BMO}$ 且 $\|L\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant 2$. 由 Fefferman 不等式可得

$$E\left[\int_{[0,\infty[}|d[\overline{M},L]_s|\right]\leqslant\sqrt{2}\,\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}\|L\|_{\mathscr{BMO}}$$
$$\leqslant 2\sqrt{2}\,\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}.\qquad(28.3)$$

令 $K=\bar{M}^2-[\bar{M}]=2[\bar{M}_- I_{]0,\infty[}].\bar{M}$，则有

$$[K,H]=2(\bar{M}_- I_{]0,\infty[}).[\bar{M},H]$$
$$=2I_{]0,\infty[}.[\bar{M},(\bar{M}_-).H]$$
$$=2([\bar{M},L]-[\bar{M},L_{-0}]).$$

于是由(28.3)，我们有

$$E\left[\int_{[0,\infty[}|d[K,H]_t|\right]\leqslant 4\sqrt{2}\,\|\bar{M}\|_{\mathscr{H}^1}. \tag{28.4}$$

现在，我们先假定 $\bar{M}$，$K\in\mathscr{H}^1$. 令(S_n)为停时列使得 $S_n\uparrow\infty$及 $(KH)^{S_n}-[K,H]^{S_n}\in\mathscr{M}_0$，由(28.4)有

$$|E[K_{S_n}H_{S_n}]|=|E[K,H]_{S_n}|\leqslant 4\sqrt{2}\,\|\bar{M}\|_{\mathscr{H}^1}.$$

但因 H 有界，$K\in\mathscr{M}$，故 $K_{S_n}H_{S_n}\xrightarrow{L^1}K_\infty H_\infty$. 于是有

$$\left|E\left[\frac{\bar{M}_\infty^2-[\bar{M}]_\infty}{\bar{M}_\infty^*}\right]\right|=|E[K_\infty H_\infty]|\leqslant 4\sqrt{2}\,\|\bar{M}\|_{\mathscr{H}^1}.$$

由于$\dfrac{\bar{M}_\infty^2}{\bar{M}_\infty^*}\leqslant\bar{M}_\infty^*$，

$$E\left[\frac{[\bar{M}]_\infty}{\bar{M}_\infty^*}\right]\leqslant E[\bar{M}_\infty^*]+4\sqrt{2}\,\|\bar{M}\|_{\mathscr{H}^1}.$$

但由 Schwarz 不等式

$$\|\bar{M}\|_{\mathscr{H}^1}=E\left[\sqrt{[\bar{M}]_\infty}\right]$$
$$\leqslant(E[\bar{M}_\infty^*])^{1/2}\left(E\left[\frac{[\bar{M}]_\infty}{\bar{M}_\infty^*}\right]\right)^{1/2}$$
$$\leqslant(E[\bar{M}_\infty^*])^{1/2}(E[\bar{M}_\infty^*]+4\sqrt{2}\,\|\bar{M}\|_{\mathscr{H}^1})^{1/2}.$$

解出此不等可得

$$\|\bar{M}\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant(2\sqrt{2}+3)E[\bar{M}_\infty^*]. \tag{28.5}$$

为了放宽 $\bar{M}$，$K\in\mathscr{H}^1$ 的假定，取停时列(T_n)使得 $T_n\uparrow\infty$及 $\bar{M}^{T_n}$，$K^{T_n}\in\mathscr{H}^1$. 从而由(28.5)有

$$\|\bar{M}^{T_n}\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant(2\sqrt{2}+3)E[(\bar{M}^{T_n})_\infty^*]$$
$$\leqslant(2\sqrt{2}+3)E[\bar{M}_\infty^*].$$

于是令 $n\to\infty$，(28.5)仍然成立，注意到$[\bar{M}]_\infty=[M]_\infty+\varepsilon^2$，故由

(28.5)可得

$$\| M \|_{\mathscr{H}^1} \leqslant \| \tilde{M} \|_{\mathscr{H}^1} \leqslant (2\sqrt{2}+3)(E[M_\infty^*]+\varepsilon).$$

在上式中令 $\varepsilon \downarrow 0$ 可得

$$\| M \|_{\mathscr{H}^1} \leqslant (2\sqrt{2}+3)E[M_\infty^*] \tag{28.6}$$

最后，我们解除 $M_0=0$ 的假定. 取 $M'=M-M_0$，我们有 $(M')_\infty^* \leqslant M_\infty^* + |M_0| \leqslant 2M_\infty^*$，故由(28.6)有

$$\begin{aligned}
\| M \|_{\mathscr{H}^1} = E\left[\sqrt{[M]_\infty}\right] &= E\left[\sqrt{[M']_\infty + M_0^2}\right] \\
&\leqslant \| M' \|_{\mathscr{H}^1} + E[|M_0|] \\
&\leqslant (2\sqrt{2}+3)E[(M')_\infty^*] + E[M_\infty^*] \\
&\leqslant (7+4\sqrt{2})E[M_\infty^*].
\end{aligned}$$

(28.2)的证明与定理 10.25 的证明类似. □

作为 Davis 不等式的一个重要的推论，我们有

10.29 定理 设 M 为一局部鞅，则为要 $M \in \mathscr{H}^1$，必须且只需 $E[M_\infty^*]<\infty$. 此外 $\| M \|_{\mathscr{H}^1}$ 和 $\| M_\infty^* \|_1$ 是 $\mathscr{H}^1$ 上的两个等价范数. 特别，$\mathscr{H}^1$ 按范数 $\| \cdot \|_{\mathscr{H}^1}$ 是 *Banach* 空间.

§5. B-D-G 不等式

首先，我们给出两个纯分析的结果. 其一是经典的 Young 不等式，其二是有关缓增凸函数的一个结果.

10.30 定义 设 $\Phi(t)$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上的一个非负单调增凸函数，且 $\Phi(0)=0$. 易知：存在 $\boldsymbol{R}_+$ 上非负右连续增函数 φ 使得 $\Phi(t) = \int_{[0,t]} \varphi(s)ds$. 我们称 φ 为 Φ 的**右导数**. 令

$$\psi(t) = \inf\{s \geqslant 0 : \varphi(s) > t\}, \quad t \geqslant 0. \tag{30.1}$$

则 ψ 是 $\boldsymbol{R}_+$ 上非负右连续增函数(参见引理 1.37，ψ 为 φ 的右逆函数). 取

$$\Psi(t) = \int_{[0,t]} \psi(s)ds. \tag{30.2}$$

则 $\Psi(t)$ 为一 $\boldsymbol{R}_+$ 上非负单调增凸函数,[1] 称 Ψ 为 Φ 的**共轭凸函数**.

10.31 引理 设 $\Phi(t)$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上的一非负单调增凸函数,$\Phi(0)=0$,$\Psi(t)$ 为其共轭凸函数. 则对一切 $u, v>0$,有如下的 Young 不等式:

$$uv \leqslant \Phi(u) + \Psi(v). \tag{31.1}$$

证明 采用定义 10.30 的记号. 我们有

$$\Phi(u) + \Psi(v) = \int_{[0,u]} \varphi(s)ds + \int_{[0,v]} \psi(s)ds.$$

若 $\varphi(u)>v$, 则 $\psi(v)\leqslant u$. 由 Lebesgue 引理(引理 1.38), 我们有(注意 $\sup\{s: \psi(s)\leqslant u\}=\varphi(u)$)

$$\begin{aligned}\Phi(u) + \Psi(v) &= u\varphi(u) - \int_{[0,u]} s d\varphi(s) + \int_{[0,v]} \psi(s)ds \\ &= u\varphi(u) - \int_{\{s:\psi(s)\leqslant u\}\cap]v,\infty[} \psi(s)ds \\ &\geqslant u\varphi(u) - u(\varphi(u)-v) = uv.\end{aligned}$$

若 $\varphi(u)\leqslant v$, 则 $\psi(v)\geqslant u$. 同法可证(31.1). □

10.32 定义 设 $\Phi(t)$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上非负单调增凸函数,且 $\Phi(0)=0$. 称 $\Phi(t)$ 为**缓增凸函数**,如果存在常数 c, 使得对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$\Phi(2t) \leqslant c\Phi(t).$$

设 $\Phi(t)$ 为一缓增凸函数,φ 为其右导数,我们可以引进另一个常数 ρ:

$$\rho = \sup_{u\geqslant 0} \frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}. \tag{32.1}$$

下一引理概括了缓增凸函数的主要性质.

10.33 引理 设 $\Phi(t)$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上缓增凸函数,$\Psi(t)$ 为其共轭凸函数,φ,ψ 分别为 Φ,Ψ 的右导数. 则

1) $c\geqslant 2$, $1\leqslant\rho\leqslant c-1$,

2) 对一切 $t\geqslant 1$, $u\geqslant 0$, 有 $\Phi(tu)\leqslant t^\rho\Phi(u)$,

---

1) 若 $\varphi(\infty-)=t_0<\infty$, 则当 $t\geqslant t_0$ 时 $\Psi(t)=+\infty$. 从而当 $t>t_0$ 时 $\Psi(t)=+\infty$. 但有可能 $\Psi(t_0)<\infty$,这时,$\Psi(t)$ 在 t_0 只是左连续的.

3) 对一切 $u\geqslant 0$，$\Psi(\varphi(u))\leqslant(\rho-1)\Phi(u)$.

证明 1)我们有

$$\Phi(u)=\int_{[0,u]}\varphi(s)ds\leqslant u\varphi(u)\leqslant\int_u^{2u}\varphi(s)ds$$
$$=\Phi(2u)-\Phi(u)\leqslant(c-1)\Phi(u).$$

因此 $1\leqslant\rho\leqslant c-1$. 特别 $c\geqslant\rho+1\geqslant 2$.

2) 由 ρ 的定义知：对一切 $s>0$ 及 $u\geqslant 0$ 有

$$\frac{su\varphi(su)}{\Phi(su)}\leqslant\rho.$$

于是对一切 $t\geqslant 1$ 有

$$\log\frac{\Phi(tu)}{\Phi(u)}=\int_1^t\frac{u\varphi(su)}{\Phi(su)}ds\leqslant\int_1^t\frac{\rho}{s}ds=\rho\log t,$$

则 $\Phi(tu)\leqslant t^{\rho}\Phi(u)$.

3) 由 Lebesgue 引理，我们有(注意 $\sup\{s:\psi(s)\leqslant u\}=\varphi(u)$)

$$\int_{[0,u]}sd\varphi(s)=\int_{\{s:\psi(s)\leqslant u\}}\psi(s)ds=\int_{[0,\varphi(u)]}\psi(s)ds,$$

$$\Psi(\varphi(u))+\Phi(u)=\int_{[0,\varphi(u)]}\psi(s)ds+u\varphi(u)-\int_{[0,u]}sd\varphi(s)$$
$$=u\varphi(u)\leqslant\rho\Phi(u).$$

由此推得 3).

借助上述两个引理，我们能够证明如下的引理.

10.34 引理 设 Φ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上的缓增凸函数，φ 为其右导数，ξ,η 为两个非负随机变量. 若

$$\boldsymbol{E}[\Phi(\xi)]<\infty,\quad \boldsymbol{E}[\Phi(\xi)]\leqslant\boldsymbol{E}[\eta\varphi(\xi)],\qquad(34.1)$$

则

$$\boldsymbol{E}[\Phi(\xi)]\leqslant\rho^{\rho+1}\boldsymbol{E}[\Phi(\eta)].\qquad(34.2)$$

证明 令 Ψ 为 Φ 的共轭凸函数，ψ 为 Ψ 的右导数. 由 Ψ 的凸性及 $\rho\geqslant 1$，我们有

$$\Psi\left(\frac{\varphi(\xi)}{\rho}\right)\leqslant\frac{1}{\rho}\Psi(\varphi(\xi)).$$

故由引理 10.31 及 10.33 可得

$$\eta\varphi(\xi)=\rho\eta\frac{\varphi(\xi)}{\rho}\leqslant\Phi(\rho\eta)+\Psi\left(\frac{\varphi(\xi)}{\rho}\right)$$

$$\leqslant\rho^{\rho}\Phi(\eta)+\frac{1}{\rho}\Psi(\varphi(\xi))$$

$$\leqslant\rho^{\rho}\Phi(\eta)+\frac{\rho-1}{\rho}\Phi(\xi).$$

于是由(34.1)得

$$\boldsymbol{E}[\Phi(\xi)]\leqslant\rho^{\rho}\boldsymbol{E}[\Phi(\eta)]+\frac{\rho-1}{\rho}\boldsymbol{E}[\Phi(\xi)].$$

由此推出(34.2). □

注 若在引理中 $\Phi(t)=t^p(1<p<\infty)$，则直接由 Hölder 不等式可得到

$$\boldsymbol{E}[\eta\varphi(\xi)]=\boldsymbol{E}[\eta(p\xi^{p-1})]\leqslant p(\boldsymbol{E}[\xi^p])^{\frac{p-1}{p}}(\boldsymbol{E}[\eta^p])^{\frac{1}{p}}.$$

故由(34.1)有

$$\boldsymbol{E}[\xi^p]\leqslant p^p\boldsymbol{E}[\eta^p] \tag{34.3}$$

这比相应的(34.2)更精确(这时 $\rho=p$).

下一引理通常称为 **Garsia 引理**

10.35 引理 设 $A=(A_t)$ 为一适应增过程，ξ,η 为两个非负可积随机变量，若 $\xi\geqslant A_\infty$ a.s.，且下列两个条件之一成立：

a) $\xi\in\mathscr{F}_\infty$，且对任一停时 T

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_T]-A_{T-}I_{[T>0]}\leqslant\boldsymbol{E}[\eta|\mathscr{F}_T]\quad\text{a.s.}, \tag{35.1}$$

b) $\xi\in\mathscr{F}_\infty$，A 可料，$A_0=0$，且对任一可料时 T

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_T]-A_T\leqslant\boldsymbol{E}[\eta|\mathscr{F}_T]\quad\text{a.s.}, \tag{35.2}$$

则对一切 $\lambda>0$ 有

$$\int_{[\xi\geqslant\lambda]}(\xi-\lambda)dP\leqslant\int_{[\xi\geqslant\lambda]}\eta dP. \tag{35.3}$$

进而，若 Φ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上非负单调增凸函数，$\Phi(0)=0$，则

$$\boldsymbol{E}[\Phi(\xi)]\leqslant\boldsymbol{E}[\eta\varphi(\xi)], \tag{35.4}$$

其中 φ 是 Φ 的右导数.

证明 首先指出，(35.3)与(35.4)是等价的，事实上，在(35.4)中取 $\Phi(t)=(t-\lambda)^+$ 及 $\varphi(t)=I_{[\lambda,\infty[}(t)$，则得到(35.3). 反

之，在(35.3)两端关于 $d\varphi(\lambda)$ 积分可得(35.4).

现在来证明(35.3). 先设 $a)$ 成立，令

$$T=\inf\{t: A_t\geqslant\lambda\}.$$

则 $A_{T-}I_{[T>0]}\leqslant\lambda$，且因 $[\xi\geqslant\lambda]=[T<\infty]\cup[T=\infty,\ \xi\geqslant\lambda]\in\mathscr{F}_T$，由(35.1)有

$$\int_{[\xi\geqslant\lambda]}(\xi-\lambda)dP\leqslant\int_{[\xi\geqslant\lambda]}(\xi-A_{T-}I_{[T>0]})dP$$
$$\leqslant\int_{[\xi\geqslant\lambda]}\eta dP.$$

再设 $b)$ 成立. 这时 $T=\inf\{t: A_t\geqslant\lambda\}$ 为可料时，且 $T>0$. 设 (T_n) 为预报 T 的可料时序列，则由(35.2)

$$E[\xi|\mathscr{F}_{T_n}]-A_{T_n}\leqslant E[\eta|\mathscr{F}_{T_n}]\quad \text{a.s.}.$$

令 $n\to\infty$ 可得(系 2.19 及定理 3.4.11)

$$E[\xi|\mathscr{F}_{T}]-A_{T-}\leqslant E[\eta|\mathscr{F}_{T-}]\quad \text{a.s.},\qquad(35.5)$$

由于 $[\xi\geqslant\lambda]=[T<\infty]\cup[T=\infty,\xi\geqslant\lambda]\in\mathscr{F}_{T-}$ 且 $A_{T-}\leqslant\lambda$，故由(35.5)推得(35.3). □

应用 Garsia 引理及引理 10.34，我们立即得到 **Burkholder-Davis-Gundy 不等式(简称 B-D-G 不等式).**

10.36 定理 设 M 为一局部鞅，Φ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上一缓增凸函数，使得 $\Phi(M_\infty^*)$ 及 $\Phi(\sqrt{[M]_\infty})$ 可积，则有

$$\rho^{-(\rho+1)}(7+4\sqrt{2})^{-\rho}E\left[\Phi\left(\sqrt{[M]_\infty}\right)\right]$$
$$\leqslant E[\Phi(M_\infty^*)]\leqslant\rho^{\rho+1}(2\sqrt{6})^\rho E\left[\Phi\left(\sqrt{[M]_\infty}\right)\right],\qquad(36.1)$$

其中 ρ 由(32.1)所定义.

证明 令 $A=M^*$，$\xi=M_\infty^*$，$\eta=2\sqrt{6}\sqrt{[M]_\infty}$. 则由定理 10.25 及引理 10.35，我们有 $E[\Phi(\xi)]\leqslant E[\eta\varphi(\xi)]$. 再由引理 10.34，我们有

$$E[\Phi(\xi)]\leqslant\rho^{\rho+1}E[\Phi(\eta)].\qquad(36.2)$$

但由引理 10.33，$\Phi(\eta)\leqslant(2\sqrt{6})^\rho\Phi(\sqrt{[M]_\infty})$，故由(36.2)可得

(36.1)的第二个不等式.(36.1)的第一个不等式可同法推出. □

注 设 $\Phi(t)=t^p(p>1)$，相应于(36.1)的不等式通常称为 **Burkholder 不等式.**

§6. 鞅空间 $\mathscr{H}^p$，$p>1$

10.37 定义 设 M 为一局部鞅，$1<p<\infty$. 取

$$\|M\|_{\mathscr{H}^p}=\left(E\left[\left(\sqrt{[M]_\infty}\right)^p\right]\right)^{1/p}=\|\sqrt{[M]_\infty}\|_p,$$

$$\mathscr{H}^p=\{M\in\mathscr{M}_{loc}:\|M\|_{\mathscr{H}^p}<\infty\}. \qquad (37.1)$$

$\mathscr{H}^p$ 中每个元素称为 $\mathscr{H}^p$ 鞅. 显然 $\mathscr{H}^p$ 是线性空间.

10.38 定理 设 $1<p<\infty$. 令

$$\mathscr{M}^p=\{M\in\mathscr{M}:\|M_\infty\|_p<\infty\}.$$

则 $\mathscr{H}^p=\mathscr{M}^p$，$\|M\|_{\mathscr{H}^p}$，$\|M_\infty^*\|_{L^p}$ 及 $\|M_\infty\|_{L^p}$ 是彼此等价的范数.

证明 首先由Burkholder不等式知，$\|M\|_{\mathscr{H}^p}$ 和 $\|M_\infty^*\|_{L^p}$ 是 $\mathscr{H}^p$ 上两个等价范数. 其次由Doob不等式知，$\|M_\infty\|_{L^p}$ 和 $\|M_\infty^*\|_{L^p}$ 是 $\mathscr{M}^p$ 上两个等价范数. 因此 $\mathscr{H}^p=\mathscr{M}^p$，$\|M\|_{\mathscr{H}^p}$，$\|M_\infty^*\|_{L^p}$ 和 $\|M_\infty\|_{L^p}$ 彼此等价. □

10.39 定理 设 p，q 是一对共轭指数，则 $\mathscr{H}^p$ 的对偶空间是 $\mathscr{H}^q$. 此外，若 $M\in\mathscr{H}^p$，$N\in\mathscr{H}^q$，则 $K=MN-[M,N]\in\mathscr{H}^1$.

证明 由于 L^p 的对偶空间是 L^q 且 $\mathscr{M}^p$ 与 L^p 保范同构，故由定理 10.38 可知，$\mathscr{H}^p$ 的对偶空间为 $\mathscr{H}^q$. 设 $M\in\mathscr{H}^p$，$N\in\mathscr{H}^q$. 由 Kunita-Watanabe 不等式我们有

$$E\left[\int_{[0,\infty[}|d[M,N]_s|\right]\leqslant\|M\|_{\mathscr{H}^p}\|N\|_{\mathscr{H}^q}<\infty.$$

因为 $K_\infty^*\leqslant M_\infty^*N_\infty^*+\int_{[0,\infty[}|d[M,N]_s|\in L^1$，故 $K\in\mathscr{H}^1$. □

下一定理与定理 10.24 相类似，它给出 $H.M\in\mathscr{H}^p$ 的充分条件.

10.40 定理 设 M 为一局部鞅，$p>1$，H 为一可选过程，使

得

$$E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{\frac{p}{2}}\right]<\infty.$$

则有

$$\|H.M\|_{\mathscr{H}^p}\leqslant C_p\left(E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{1/p},\quad(40.1)$$

其中 C_p 是一只与 p 有关的常数.

证明 记 $L=H.M$. 对任一有界鞅 N. $K=LN-H.[M,N]$ 是一局部鞅. 由 Kunita-Watanabe 不等式有

$$E\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|\,|d[M,N]_s|\right]$$
$$\leqslant\left(E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{p/2}\right]\right)^{1/p}\|N\|_{\mathscr{H}^q}<\infty,$$

其中 q 是 p 的共轭指数(即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). 由定理 10.24, 我们有 $E[L_\infty^*]<\infty$, 于是 $K_\infty^*\leqslant L_\infty^*H_\infty^*+\int_{[0,\infty[}|H_s||d[M,N]_s|\in L^1$ 且 $K\in\mathscr{M}$. 特别,

$$E[L_\infty N_\infty]=E\left[\int_{[0,\infty[}H_sd[M,N]_s\right]$$
$$\leqslant\left(E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{p/2}\right]\right)^{1/p}\|N\|_{\mathscr{H}^q}$$
$$\leqslant\overline{C}_p\|N_\infty\|_q\left(E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{p/2}\right]\right)^{1/p},\quad(40.2)$$

其中 $\overline{C}_p$ 是一个仅依赖 p 的常数. 因为有界可测函数全体在 L^q 中稠, 由(40.2)可得

$$\|L_\infty\|_p\leqslant\overline{C}_p\left(E\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M]_s\right)^{p/2}\right]\right)^{1/p}.$$

从而推得(40.1). □

§7. John-Nirenberg 不等式

下一引理属于 Stroock[1].

10.41 引理 设 $X=(X_t)$ 为一右连左极适应过程，假定 $\lim\limits_{t\to\infty}X_t=X_\infty$ a.s. 存在且有限. 若存在非负可积随机变量 ξ，使得对任一停时 T，有

$$E[|X_\infty - X_{T-}I_{[T>0]}||\mathscr{F}_T] \leqslant E[\xi|\mathscr{F}_T] \quad \text{a.s.}, \tag{41.1}$$

则对所有 $\lambda\geqslant 0$，$\mu>0$，我们有

$$\mu P(X_\infty^* \geqslant \lambda+\mu) \leqslant 2\int_{[X_\infty^*\geqslant\lambda]} \xi dP. \tag{41.2}$$

证明 设 $0<\mu'<\mu$. 取

$$T=\inf\{t: |X_t|\geqslant\lambda\},\ S=\inf\{t: |X_t|\geqslant\lambda+\mu'\}.$$

则 $T\leqslant S$，$X_{T-}I_{[T>0]}\leqslant\lambda$，且

$$\begin{aligned}[X_\infty^*>\lambda+\mu'] &\subset [|X_s|\geqslant\lambda+\mu'] \\ &\subset [|X_T|\geqslant\lambda]\cap[|X_S - X_{T-}I_{[T>0]}|\geqslant\mu'].\end{aligned}$$

因为 $|X_S-X_{T-}I_{[T>0]}|\leqslant|X_\infty-X_{T-}I_{[T>0]}|+|X_\infty-X_S|$，故

$$\begin{aligned}P(X_\infty^*>\lambda+\mu') &\leqslant \frac{1}{\mu'}\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_S-X_{T-}I_{[T>0]}|dP \\ &\leqslant \frac{1}{\mu'}\Big[\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_\infty - X_{T-}I_{[T>0]}|dP \\ &\quad + \int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_\infty - X_S|dP\Big].\end{aligned} \tag{41.3}$$

由于 $[|X_T|\geqslant\lambda]\in\mathscr{F}_T$，故由(41.1)，我们有

$$\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_\infty - X_{T-}I_{[T>0]}|dP \leqslant \int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}\xi dP \leqslant \int_{[X_\infty^*\geqslant\lambda]}\xi dP.$$

此外，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}X_{(S+\frac{1}{n})-}=X_S$，由 Fatou 引理得

$$\begin{aligned}\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_\infty - X_S|dP &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_\infty - X_{(S+\frac{1}{n})-}|dP \\ &\leqslant \int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}\xi dP.\end{aligned}$$

于是由(41.3)可得

$$\mu' P(X_\infty^*>\lambda+\mu') \leqslant 2\int_{[X_\infty^*\geqslant\lambda]}\xi dP. \tag{41.4}$$

在(41.4)中令 $\mu'\uparrow\mu$ 推得(41.2). □

注 设 $A\in\mathscr{F}_0$. 仿照定理的证明,可知对一切 $\lambda\geqslant 0,\mu>0$

$$\mu P([X_\infty^*\geqslant\lambda+\mu]\cap A)\leqslant 2\int_{[X_\infty^*\geqslant\lambda]\cap A}\xi dP. \qquad (41.5)$$

下一定理中的不等式(42.2)通常称为 **John-Nirenberg 不等式**.

10.42 定理 设 $X=(X_t)$ 为一适应右连左极过程, $\lim\limits_{t\to\infty}X_t=X_\infty$ a.s. 存在且有限. 若存在常数 $c>0$, 使对任一停时 T, 有

$$E[|X_\infty-X_{T-}I_{[T>0]}|\,|\,\mathscr{F}_T]\leqslant c \quad \text{a.s.}, \qquad (42.1)$$

则当 $0\leqslant\lambda<\frac{1}{8c}$ 有

$$E[e^{\lambda X_\infty^*}]<\frac{6}{1-8c\lambda}, \qquad (42.2)$$

且对一切停时有

$$E[\exp(\lambda|X_\infty-X_{T-}I_{[T>0]}|)\,|\,\mathscr{F}_T]<\frac{6}{1-8c\lambda} \quad \text{a.s.}, \qquad (42.3)$$

证明 由定理10.41,我们有

$$4cP(X_\infty^*\geqslant 4nc)\leqslant 2cP(X_\infty^*\geqslant 4(n-1)c),\ n\geqslant 1.$$

于是有

$$P(X_\infty^*\geqslant 4nc)\leqslant 2^{-n}\leqslant e^{-\frac{n}{2}}.$$

当 $0\leqslant\lambda<\frac{1}{8c}$ 时,我们有

$$\begin{aligned}E[e^{\lambda X_\infty^*}]&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}e^{4c\lambda(n+1)}P(4cn\leqslant X_\infty^*<4c(n+1))\\&\leqslant e^{4c\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(\frac{1}{2}-4c\lambda)n}\\&=e^{4c\lambda}[1-e^{-(\frac{1}{2}-4c\lambda)}]^{-1}.\end{aligned} \qquad (42.4)$$

但当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时,有 $e^{-\alpha}\leqslant 1-\frac{\alpha}{\sqrt{e}}$, 故由(42.4)可得

$$E[e^{\lambda X_\infty^*}]\leqslant e^{\frac{1}{2}-4c\lambda}\Big[\frac{1}{2}-4c\lambda\Big]^{-1}$$

$$< \frac{2e}{1-8c\lambda} < \frac{6}{1-8c\lambda}.$$

设 $A\in\mathscr{F}_0$ 且 $P(A)>0$. 由(41.4)，运用同样的论证可得

$$E[e^{\lambda X_\infty^*}I_A] < \frac{6}{1-8c\lambda}P(A).$$

于是有

$$E[e^{\lambda X_\infty^*}|\mathscr{F}_0] < \frac{6}{1-8c\lambda} \quad \text{a. s.}. \tag{42.5}$$

设 T 为一停时，对 $(\mathscr{F}_{T+t})_{t\geq 0}$-适应过程 $(X_{T+t}-X_{T-}I_{[T>0]})_{t\geq 0}$ 应用(42.5)得

$$E[\exp(\lambda\sup_{t\geq T}|X_t - X_{T-}I_{[T>0]}|)|\mathscr{F}_T] \leqslant \frac{6}{1-8c\lambda} \quad \text{a. s.}.$$

特别，(42.3)成立. □

下一定理是 $\mathscr{BMO}$-鞅的 Nirenberg 型不等式.

10.43 定理 设 $M\in\mathscr{BMO}$ 且 $\|M\|_{\mathscr{BMO}}=m$.

1) 当 $\lambda<\frac{1}{8m}$，我们有

$$E[e^{\lambda M_\infty^*}] < \frac{6}{1-8m\lambda}. \tag{43.1}$$

2) 当 $\lambda<\frac{1}{m^2}$，对任一停时 T，有

$$E[\exp\{\lambda([M]_\infty - [M]_{T-}I_{[T>0]})\}|\mathscr{F}_T] \leqslant \frac{1}{1-\lambda m^2}. \tag{43.2}$$

证明 1) 设 T 为一停时，由 Jensen 不等式得

$$E[|M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]}||\mathscr{F}_T]$$
$$\leqslant (E[(M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathscr{F}_T])^{1/2} \leqslant m.$$

于是由定理 10.42 可推得(43.1)

2) 考虑增过程 $A=[M]$. 由于 $M\in\mathscr{BMO}$，对任一停时 T 有 $E[A_\infty - A_{T-}I_{[T>0]}|\mathscr{F}_T]\leqslant m^2$ a. s.. 由 Garsia 引理(引理 10.35)，我们有 $E[A_\infty^n]\leqslant E[m^2(nA_\infty^{n-1})]$，$n\geq 1$. 于是用归纳法可得

$$E[A_\infty^n] \leqslant m^{2n}n!, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

和

$$E[\exp(\lambda A_\infty)] \leqslant \frac{1}{1-\lambda m^2}.$$

于是(43.2)可与(42.3)一样证明. □

注 若我们不用 Garsia 引理而对$[M]$直接应用定理 10.42，可得到如下较弱的结果：当 $\lambda<\frac{1}{8m^2}$，对一切停时 T 我们有

$$E[\exp\{\lambda([M]_\infty-[M]_{T-}I_{[T>0]})\}|\mathscr{F}_T]<\frac{6}{1-8m^2\lambda}.$$

下一定理给出$\mathscr{BMO}$-鞅的另一个表征.

10.44 定理 设 M 为一致可积鞅，则 $M\in\mathscr{BMO}$ 当且仅当存在常数 $c>0$，使得对任一停时 T，有

$$E[|M_\infty-M_{T-}I_{[T>0]}||\mathscr{F}_T]\leqslant c \quad \text{a.s.}. \qquad (44.1)$$

证明 必要性由 Jensen 不等式推得，往证充分性. 由定理 10.42，当 $\lambda<\frac{1}{8c}$ 我们有

$$E[\exp(\lambda|M_\infty-M_{T-}I_{[T>0]}|)|\mathscr{F}_T]<\frac{6}{1-8c\lambda}.$$

因此

$$E[(M_\infty-M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathscr{F}_T]<\frac{12}{(1-8c\lambda)\lambda^2} \quad \text{a.s.}.$$

从而 $M\in\mathscr{BMO}$. □

问题与补充

10.1 设 M 为一局部鞅，H 为一可选过程，使得 $H.M\in\mathscr{M}^2$. 则对任一停时 T 有

$$E[((H.M)_\infty-(H.M)_T)^2|\mathscr{F}_T] \leqslant E\left[\int_{]T,\infty[}H_s^2d[M]_s|\mathscr{F}_T\right] \quad \text{a.s.}.$$

10.2 设 $M\in\mathscr{BMO}$，H 为一可选过程，$|H|\leqslant 1$. 则 $\|H.M\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\sqrt{5}\,\|M\|_{\mathscr{BMO}}$.

10.3 $\mathscr{H}^{1,c}=\mathscr{H}^1\cap\mathscr{M}_{loc}^c$ 和 $\mathscr{H}^{1,d}=\mathscr{H}^1\cap\mathscr{M}_{loc}^d$ 都是 $\mathscr{H}^1$ 的闭子空间.

10.4 设 $M\in\mathscr{BMO}$. 若 $\Delta M\geqslant -1+\varepsilon$, $\varepsilon\in]0,1]$, 则 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{M}$.

10.5 设 $M\in\mathscr{M}_{loc,0}^c$.

1) 若 $E\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty\right\}\right]<\infty$, 则 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{M}$.

2) 若 $E\left[\exp\left\{\frac{r}{2}\langle M\rangle_\infty\right\}\right]<\infty$, $r>1$, 则 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^p$, $p=\frac{r^2}{2r-1}$.

10.6 设 $M\in\mathscr{M}_{loc}$, 且对任一停时 T 有 $E[|\Delta M_T|I_{[T<\infty]}]<\infty$, 则

$$[M\to]=[[M]_\infty<\infty]\quad \text{a.s.}.$$

10.7 设 $A\in\mathscr{A}_{loc}^+$ 且 $\widetilde{A}_\infty=\infty$, 又若对任一停时 T, 有 $E[\Delta A_T I_{[T<\infty]}]<\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{A_t}{\widetilde{A}_t}=1$ a.s..

10.8 设 $M\in\mathscr{M}_{loc}$. 取

$$B=\langle M^c\rangle+\sum\frac{\Delta M^2}{1+|\Delta M|}.$$

又 A 为 B 的补偿元, 则

1) $[A_\infty<\infty]\subset[M\to]$ a.s..

2) 若对任一停时 T, $E[|\Delta M_T|I_{[T<\infty]}]<\infty$, 则

$$[A_\infty<\infty]=[M\to]\quad \text{a.s.}.$$

3) 若 $E[A_\infty]<\infty$, 则 $M\in\mathscr{M}$.

10.9 设 M 为一鞅, 且 $\sup\limits_{t\geqslant 0}E[|M_t|]<\infty$. 又 $N\in\mathscr{M}_{loc}$, $[N]\leqslant[M]$, 则 $P([N\to])=1$

10.10 设 $X\in\mathscr{S}$, $p>1$. 置

$$\|X\|_{\mathscr{S}^p}=\inf\{\|\sqrt{[M]_\infty}+\int_{[0,\infty[}|dA_s|\|_p : X=M+A,\ M\in\mathscr{M}_{loc},\ A\in\mathscr{V}\},$$

$$\mathcal{S}^p = \{X \in S : \|X\|_{\mathcal{S}^p} < \infty\}.$$

则 1) $\mathcal{S}^p$ 为一向量空间，且 $\mathcal{S}^p \subset \mathcal{S}_p$.

2) $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{S}^p$，且对 $M \in \mathcal{H}^p$，有 $\|M\|_{\mathcal{H}^p} = \|M\|_{\mathcal{S}^p}$.

3) 对每个 $X \in \mathcal{S}^p$，有

$$\|X_\infty^*\|_p \leqslant C_p \|X\|_{\mathcal{S}^p},$$

其中 C_p 是只依赖 p 的常数.

4) 设 $X \in \mathcal{S}^p$ 且 $X = M + A$ 为其典则分解，则

$$\left\| \sqrt{[M]_\infty} + \int_{[0,\infty[} |dA_s| \right\|_p \leqslant 2(1+p) \|X\|_{\mathcal{S}^p}.$$

同时 $\mathcal{S}^p$ 为一 Banach 空间.

10.11 设 $p \geqslant 1$，$q \geqslant 1$，$r \geqslant 1$，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. 若 $X \in \mathcal{S}^p$，H 为可料过程使得 $\|H_\infty^*\|_q < \infty$，则 H 是 X 可积的，且

$$\|H.X\|_{\mathcal{H}^r} \leqslant \|H_\infty^*\|_q \|X\|_{\mathcal{S}^p},$$

$$\|(H.X)_\infty^*\|_r \leqslant C_r \|H_\infty^*\|_q \|X\|_{\mathcal{S}^p},$$

其中 C_r 是仅依赖于 r 的常数.

10.12 设 $X, X^{(n)} \in \mathcal{S}^p$. 称 $(X^{(n)})$ 在 $\mathcal{S}^p$ 中准局部收敛于 X，是指存在停时序列 (T_k)，$T_k \uparrow \infty$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|(X^{(n)} - X)^{T_k -}\|_{\mathcal{S}^p} = 0.$$

则下列两个事实等价：

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \boldsymbol{E}[(X^{(n)} - X)_k^* \wedge 1] = 0$，

2) 对 $(X^{(n)})$ 的每个子列，可进一步选取它的一个子列，使其在 $\mathcal{S}^p$ 中准局部收敛于 X（参见问题 8.20）.

第十一章　半鞅的特征

在本章我们首先引进随机测度，它是研究半鞅的跳的最有用的工具．随后运用跳测度来建立半鞅的积分表示，并引进与之相联系的半鞅可料特征．十分有趣的是独立增量过程的经典的 Lévy-Itô 分解就是半鞅积分表示的特殊形式．在最后一节我们研究另一类简单有用的半鞅——跳跃过程，它在应用概率与统计中起着重要的作用．

§1.　随机测度

11.1 定义　设$(E,\mathscr{B}(E))$为可测空间．定义

$$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})=(\Omega\times\boldsymbol{R}_+\times E,\ \mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E)),$$

$$\tilde{\mathscr{O}}=\mathscr{O}\times\mathscr{B}(E),\ \tilde{\mathscr{P}}=\mathscr{P}\times\mathscr{B}(E).$$

$\tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\mathscr{P}})$称为$\tilde{\Omega}$上**可选(可料)$\sigma$-域**．$\tilde{\Omega}$上的$\tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\mathscr{P}})$可测函数称为$\tilde{\Omega}$上的**可选(可料)函数**．

$(E,\mathscr{B}(E))$假定为 Lusin 空间，即 E 为某一紧距离空间的 Borel 子空间，$\mathscr{B}(E)$为 E 上的 Borel 域．例如，$(E,\mathscr{B}(E))$可以是离散空间，$(\boldsymbol{R},\mathscr{B}(\boldsymbol{R}))$或 n 维空间$(\boldsymbol{R}^n,\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n))$．在本书中，我们主要讨论实随机过程．除非特别说明，我们约定$(E,\mathscr{B}(E))$就取为$(\boldsymbol{R},\mathscr{B}(\boldsymbol{R}))$．

11.2 引理　设W为$\tilde{\Omega}$上可选(可料)函数，(α_t)为可选(可料)过程，T为一停时，则

$$W(\omega,T,\alpha_T(\omega))I_{[T<\infty]}(\omega)\in\mathscr{F}_T(\text{resp. }\mathscr{F}_{T-})\qquad(2.1)$$

证明　容易看出当$W(\omega,t,x)=f(\omega,t)g(x)$，$f(\omega,t)\in\mathscr{O}(\mathscr{P})$及$g(x)\in\mathscr{B}(E)$，(2.1)成立．这样对一般的可选(可料)$W$，

(2.1)可由单调类定理推出. □

11.3 定义 $\Omega\times(\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E))$上非负函数$\mu$称为**随机测度**，若

1) 对每个$\omega\in\Omega$，$\mu(\omega,\cdot)$是$\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E)$上的$\sigma$-有限测度.

2) 对每个$\tilde{B}\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E)$，$\mu(\cdot,B)$是$(\Omega,\mathscr{F})$上的随机变量.

对$\tilde{B}\in\tilde{\mathscr{F}}$，定义

$$M_\mu(\tilde{B})=E\left[\int_{R_+\times E}I_{\tilde{B}}(\omega,t,x)\mu(\omega,dt,dx)\right].$$

则M_μ是$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})$上的测度，并称之为**$\mu$产生的测度**. 若$M_\mu$为有限测度：$M_\mu(\tilde{\Omega})<\infty$，则称$\mu$为**可积的**. 若$M_\mu$限于$\tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\mathscr{P}})$为$\sigma$-有限的，则称$\mu$为**可选(可料)$\sigma$-可积的**.

显然，随机测度概念是增过程概念的推广，设$A=(A_t(\omega))$为一增过程，取$E=\{x_0\}$为一单点集，$\mathscr{B}(E)=\{\varnothing,E\}$，则

$$\mu(\omega,dt,dx)=dA_t(\omega)\delta_{x_0}(dx)$$

为一随机测度，且

$$\mu([0,t]\times E)=A_t.$$

需要指出，一般来说一个随机测度μ可对所有$t\geqslant0$及$B\in\mathscr{B}(E)$，$\mu([0,t]\times B)$都取值无穷.

若$W\in\tilde{\mathscr{F}}^+$，则

$$\nu(\omega,\tilde{B})=\int_{\tilde{B}}W(\omega,t,x)\mu(\omega,dt,dx),$$

$$\tilde{B}\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E),\tag{3.1}$$

仍为一随机测度，(3.1)也记为$\nu=W.\mu$或$d\nu=Wd\mu$.

设$W\in\tilde{\mathscr{F}}$. 若对每个$t\geqslant0$

$$\int_{[0,t]\times E}|W|d\mu<\infty,$$

规定$W*\mu=(W*\mu_t)$如下：

$$W * \mu_t = \int_{[0,t]\times E} W d\mu, \quad t \geqslant 0.$$

显然，$W * \mu$ 是一个有限变差过程.

随机测度 μ 称为可选的(可料的)，若对任一使 $W * \mu$ 存在的可选(可料)函数 W，$W * \mu$ 是一可选(可料)过程.

易见，若对每个 $t \geqslant 0$，$1 * \mu_t < \infty$，则为要 μ 是可选的(可料的)当且仅当对每个 $B \in \mathscr{B}(E)$，$1_B * \mu = (\mu([0, t]\times B))_{t\geqslant 0}$ 为可选的(可料的). 下一结果是容易的.

11.4 引理 设 μ 是一可选(可料)随机测度，W 是一可选(可料)非负实函数，则 $\nu = W \cdot \mu$ 是一个可选(可料)随机测度.

11.5 定理 设 μ 和 ν 是两个可选(可料)随机测度且可选(可料)σ-可积，又在 $\tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\mathscr{P}})$ 上 M_μ 和 M_ν 相等，则 $\mu = \nu$，即 μ 和 ν 是无区别的：

$$P(\{\omega : \exists\ \hat{B} \in \mathscr{B}(R_+) \times \mathscr{B}(E)\ 使得\ \mu(\omega, \hat{B}) \neq \nu(\omega, \hat{B})\}) = 0.$$

证明 设 $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\mathscr{P}})$，$\tilde{A}_n \uparrow \tilde{\Omega}$，且对每个 n，$M_\mu(\tilde{A}_n) = M_\nu(\tilde{A}_n) < \infty$. 令 $\mathscr{D}$ 为满足 $\sigma(\mathscr{D}) = \mathscr{B}(E)$ 的可列 π-类. 对每个 n 及 $D \in \mathscr{D}$ 规定

$$U = (I_{\tilde{A}_n} I_D) * \mu, \quad V = (I_{\tilde{A}_n} I_D) * \nu.$$

则 U 和 V 都是可选(可料)可积增过程. 对任一非负可选(可料)过程 H，我们有

$$E\left[\int_{R_+} H_t dU_t\right] = M_\mu[I_{\tilde{A}_n} I_D H] = M_\nu[I_{\tilde{A}_n} I_D H]$$

$$= E\left[\int_{R_+} H_t dV_t\right].$$

因此 U 和 V 是无区别的. 从而

$$P\left(\left\{\omega : \int_{[0,t]\times D} I_{\tilde{A}_n} d\mu = \int_{[0,t]\times D} I_{\tilde{A}_n} d\nu, \forall\ t \geqslant 0, \forall\ D \in \mathscr{D}\right\}\right) = 1.$$

由测度延拓唯一性可得

$$P\left(\left\{\omega:\int_B I_{\tilde{A}_n}d\mu=\int_B I_{\tilde{A}_n}d\nu, \forall B\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E)\right\}\right)=1. \tag{5.1}$$

在(5.1)中令 $n\to\infty$ 即推得 $\mu=\nu$. □

11.6 定理 设 m 为 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})$ 上的测度，且其限于 $\tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\mathscr{F}})$ 上为 σ-有限的. 为要存在可选(可料)随机测度 μ 使 $m=M_\mu$ 当且仅当

i) 对任一不足道集 $N\subset\Omega\times\boldsymbol{R}_+$，$m(N\times E)=0$，

ii) 对任一 $\tilde{A}\in\tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\mathscr{F}})$，使得 $m(\tilde{A})<\infty$，及有界可测过程 X 有

$$m(XI_{\tilde{A}})=m({}^o XI_{\tilde{A}})\qquad (m(XI_{\tilde{A}})=m({}^p XI_{\tilde{A}})).$$

在此情况下，可选(可料)随机测度 μ 是唯一确定的.

证明 我们只讨论可选情况. 必要性. i) 是显然的：对任一不足道集 N，$M_\mu(N\times E)=0$. 注意 $Y=I_{\tilde{A}}*\mu$ 是一可选可积增过程，对任一有界可测过程 X 有

$$m(XI_{\tilde{A}})=M_\mu(XI_{\tilde{A}})=\boldsymbol{E}\left[\int_{R_+}X_t dY_t\right]=\boldsymbol{E}\left[\int_{R_+}{}^oX_t dY_t\right]$$
$$=M_\mu({}^oXI_{\tilde{A}})=m({}^oXI_{\tilde{A}}).$$

充分性. 首先，假定 m 是有限测度，则 m 可作如下分解：

$$m(d\omega,dt,dx)=n(\omega,t,dx)m(d\omega,dt,E), \tag{6.1}$$

其中对每个 $B\in\mathscr{B}(E)$，$n(\omega,t,B)$ 是 $m(d\omega,dt,B)$ 关于 $m(d\omega,dt,E)$ 在 $\mathscr{O}$ 上的 Radon-Nikodym 导数，同时它又是一个可选过程(定理 5.14)；对所有 (ω,t)，$n(\omega,t,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}(E)$ 上的概率测度.

将定理 5.11 和 5.13 用于 $m(d\omega,dt,E)$，我们可知存在可选增过程 $A=(A_t)$ 使得对任一非负可测过程 X 有

$$m(X)=\boldsymbol{E}\left[\int_{R_+}X_t dA_t\right]. \tag{6.2}$$

取

$$\mu(\omega,dt,dx)=n(\omega,t,dx)dA_t(\omega).$$

不难验证 μ 是可选可积随机测度. 由(6.1)、(6.2)，对任一 $B\in\mathscr{B}(E)$ 及有界可测过程有

$$m(XI_B)=m({}^oXI_B)=\int_{\Omega\times R_+}{}^oX_t(\omega)n(\omega,t,B)m(d\omega,dt,E)$$

$$=E\left[\int_{R_+}{}^oX_t(\omega)n(\omega,t,B)dA_t(\omega)\right]$$

$$=E\left[\int_{R_+}X_t(\omega)n(\omega,t,B)dA_t(\omega)\right]$$

$$=E\left[\int_{R_+\times B}X_t(\omega)\mu(\omega,dt,dx)\right]=M_\mu(XI_B)$$

于是由测度延拓唯一性可得在 $\tilde{\mathscr{F}}$ 上 $m=M_\mu$.

现在假定 m 是 σ-有限的. 这时存在 $\tilde{\mathscr{O}}$ 中互不相交集合序列 $(\tilde{A}_n)$ 使得 $\tilde{\Omega}=\bigcup_n\tilde{A}_n$，且对每个 n，$m(A_n)<\infty$. 将上述结果用于有限测度 $m(WI_{\tilde{A}_n})$ 可知存在可选可积随机测度 μ_n，使 $m(WI_{\tilde{A}_n})=M_{\mu_n}(W)$，对任一 $W\in\tilde{\mathscr{F}}^+$ 成立. 取

$$\mu=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\tilde{A}_n}\cdot\mu_n.$$

则容易看出 μ 是可选随机测度且 $m=M_\mu$，μ 的唯一性可由定理 11.5 推出. □

11.7 定义 设 μ 为一随机测度. 若存在一个可料随机测度 ν，满足

i) ν 为可料 σ 可积的，

ii) 限于 $\tilde{\mathscr{P}}$ 上，M_μ 与 M_ν 相同，

则称 μ **有可料对偶投影或补偿子** ν，ν 为 μ 的**可料对偶投影**或**补偿子**. 当然，随机测度的可料对偶投影（若存在）必由定理 11.6 唯一地确定. μ 的可料对偶投影也记为 μ^p 或 $\tilde{\mu}$.

注 我们也可定义随机测度的可选对偶投影，但本书并不需要用到它.

11.8 定理 随机测度 μ 具有可料对偶投影当且仅当它是可料 σ-可积的.

证明 必要性是显然的. 往证充分性.

对任一有界非负可测过程 X 及非负有界 $\mathscr{B}(E)$ 可测函数 h，取

$$m(Xh) = M_\mu({}^p Xh).$$

因为 M_μ 在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上 σ-有限，m 可唯一地延拓为 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 上的测度. 显然，m 和 M_μ 在 $\mathscr{P}$ 上是相同的. 容易看出，m 满足定理 11.6 的要求，因而存在可料随机测度 ν 使 $m = M_\nu$. 于是 ν 是可料 σ-可积，且 $\nu = \widetilde{\mu}$. □

11.9 定理 设随机测度 μ 有可料对偶投影，$W \in \widetilde{\mathscr{F}}^+$ 且 $\nu = W \cdot \mu$ 为可料 σ-可积随机测度，则 ν 具有如下可料对偶投影：

$$\widetilde{\nu} = U . \widetilde{\mu}$$

其中 $U = M_\mu[W | \widetilde{\mathscr{P}}]$.

证明 由假定 M_ν 在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上 σ-可积，这表明 W 关于 M_μ 在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上 σ-可积. 于是 $U = M_\mu[W | \widetilde{\mathscr{P}}]$ 是有限的. 设 H 为 $\widetilde{\Omega}$ 上可料函数使得 $M_\nu(|H|) = M_\mu(|HW|) < \infty$，则

$$M_\nu(H) = M_\mu(HW) = M_\mu(HU) = M_{\widetilde{\mu}}(HU) = M_{U . \widetilde{\mu}}(H).$$

因此 $\widetilde{\nu} = U . \widetilde{\mu}$. □

11.10 系 设随机测度 μ 有可料对偶投影 $\widetilde{\mu}$，$W \in \widetilde{\mathscr{P}}$ 使得 $X = W * \mu$ 为局部可积变差过程，则 X 具有如下可料对偶投影：$\widetilde{X} = U * \widetilde{\mu}$，其中 $U = M_\mu[W | \widetilde{\mathscr{P}}]$.

11.11 定理 设随机测度 μ 有可料对偶投影 $\widetilde{\mu}$，$W \in \widetilde{\mathscr{P}}^+$，又 T 为一可料时，则

$$\int_E W(T, x) \widetilde{\mu}(\{T\}, dx) I_{[T<\infty]}$$

$$= E\left[\int_E W(T, x) \mu(\{T\}, dx) I_{[T<\infty]} \,\Big|\, \mathscr{F}_{T-}\right] \quad \text{a. s.}. \qquad (11.1)$$

证明 设 $\widetilde{A}_n \in \widetilde{\mathscr{P}}$ 满足 $\widetilde{A}_n \uparrow \widetilde{\Omega}$，$M_\mu(\widetilde{A}_n) < \infty$，且 W 在每个 $\widetilde{A}_n$ 上有界. 这时，$X^{(n)} = (W I_{\widetilde{A}_n}) * \mu$ 为一可积增过程且具有可料对偶投影 $\widetilde{X}^{(n)} = (W I_{\widetilde{A}_n}) * \widetilde{\mu}$. 因此 $\Delta \widetilde{X}_T^{(n)} I_{[T<\infty]} = E[\Delta X_T^{(n)} I_{[T<\infty]} | \mathscr{F}_{T-}]$ a. s.，即

$$\int_E W(T, x) I_{\tilde{A}_n}(T, x) \tilde{\mu}(\{T\}, dx) I_{[T<\infty]}$$

$$= E\left[\int_E W(T, x) I_{\tilde{A}_n}(T, x) \mu(\{T\}, dx) I_{[T<\infty]} \mid \mathscr{F}_{T-}\right] \quad \text{a.s.}. \tag{11.2}$$

在(11.2)中令 $n\to\infty$ 即得(11.1). □

11.12 定义 随机测度 μ 称为整值随机测度，若

1) μ 取值于 $\{0, 1, 2, \cdots, +\infty\}$,

2) 对一切 $t\geqslant 0$, $\mu(\{t\}\times E)\leqslant 1$,

3) μ 是可选且可选 σ-可积的.

11.13 定理 μ 为整值随机测度当且仅当它有如下表示：

$$\mu(dt, dx) = \sum \delta_{(s,\beta_s)}(dt, dx) I_D(s) \tag{13.1}$$

其中 D 是一稀疏集(D 称为 μ 的支集), $\beta=(\beta_t)$ 为一可选过程.

证明 充分性. 只需验证 μ 是可选且可选 σ-可积的. 设 (T_n) 为一列图互不相交的停时, $D=\bigcup_n [\![T_n]\!]$, 又 $W\in\tilde{\mathscr{O}}$, $W*\mu$ 有意义，则

$$W*\mu = \sum_n W(T_n, \beta_{T_n}) I_{[\![T_n, \infty [\![}.$$

由引理 11.2, $W*\mu$ 是可选的，因此 μ 也可选. 另一方面，取 $\tilde{A}_n=(\bigcup_{k=1}^n [\![T_k]\!] \cup D^c)\times E$, 我们有 $\tilde{A}_n\in\tilde{\mathscr{O}}$, $\tilde{A}_n\uparrow\tilde{\Omega}$ 且 $M_\mu(\tilde{A}_n)\leqslant n$, 即 μ 是可选 σ-可积的.

必要性. 记 $D=\{(\omega, t): \mu(\{t\}\times E)=1\}$. D 是一稀疏集. 事实上，设 $\tilde{A}_n\in\tilde{\mathscr{O}}$ 使 $\tilde{A}_n\uparrow\tilde{\Omega}$, 且对每个 n, $M_\mu(\tilde{A}_n)<\infty$, 于是 $B^{(n)}=I_{\tilde{A}_n}*\mu$ 为一可选可积增过程，且 $D=\bigcup_n[\Delta B^{(n)}\neq 0]$. 不妨设 $D=\bigcup_n [\![T_n]\!]$, 其中 (T_n) 为一列图互不相交的停时.

由于 $\mathscr{B}(E)$ 是可列生成的且 E 中每一单点集都可测，若 $T_n(\omega)<\infty$, 则存在实数 $\beta_{T_n(\omega)}(\omega)$ 使 $\mu(\omega, \{(T_n(\omega), \beta_{T_n(\omega)}(\omega))\})=1$. 取

$$\beta = \sum_n \beta_{T_n} I_{[\![T_n]\!]}.$$

则(13.1)成立. 最后,只需证明 β 是可选的. 事实上,对每个 $B\in\mathscr{B}(E)$ 有

$$[\beta_{T_n}\in B,\ T_n<\infty]=[\mu(\{T_n\}\times B)=1,\quad T_n<\infty],$$

且 $\mu(\{T_n\}\times B)I_{[T_n<\infty]}$ 就是可选过程 $I_{[\![T_n]\!]\times B}*\mu$ 在 T_n 的跃度,故 $\beta_{T_n}I_{[T_n<\infty]}\in\mathscr{F}_{T_n}$,因而 β 是可选的. □

11.14 定理 设以 D 为支集的整值随机测度 μ 有可料对偶投影 ν. 取

$$a=(a_t),\quad a_t=\nu(\{t\}\times E),\quad t\geqslant 0. \tag{14.1}$$

$$J=[a>0], \tag{14.2}$$

$$K=[a=1], \tag{14.3}$$

则 a 是稀疏过程,$0\leqslant a\leqslant 1$、J 是 D 的可料支集,K 是含于 D 中的最大可料集(不计不足道集的差别).

证明 设 $\widetilde{A}_n\in\widetilde{\mathscr{P}}$, $\widetilde{A}_n\uparrow\widetilde{\Omega}$ 且对每个 n $M_\mu(\widetilde{A}_n)<\infty$,则 $B^{(n)}=I_{\widetilde{A}_n}*\mu$ 为一可选可积增过程,其可料对偶投影为 $\widetilde{B}^{(n)}=I_{\widetilde{A}_n}*\nu$. 于是 $a=\lim\limits_n\Delta\widetilde{B}^{(n)}$ 是可料的. 显然,$D=\bigcup\limits_n[\Delta B^{(n)}\neq 0]$ 且 D 的可料支集为

$$\bigcup_n[\Delta\widetilde{B^{(n)}}\neq 0]=[a>0]=J.$$

因此 a 是一稀疏过程. 对任一可料时 T

$$a_T I_{[T<\infty]}=\boldsymbol{E}[\mu(\{T\}\times E)I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]\quad \text{a.s.}. \tag{14.4}$$

但是 $0\leqslant\mu(\{t\}\times E)\leqslant 1$. 由截口定理我们有 $0\leqslant a\leqslant 1$.

现在假定 T 是可料时且满足 $[\![T]\!]\subset K=[a=1]$. 由(14.4)可得

$$\boldsymbol{E}[\mu(\{T\}\times E)I_{[T<\infty]}]=\boldsymbol{E}[a_T I_{[T<\infty]}]=\boldsymbol{P}(T<\infty).$$

因为 $0\leqslant\mu(\{T\}\times E)I_{[T<\infty]}\leqslant 1$,于是

$$\mu(\{T\}\times E)=1\quad \text{a.s. 在}[T<\infty]\text{上}.$$

因此 $[\![T]\!]\subset D$, 所以 $K\subset D$.

另一方面,若 H 是 D 的可料子集且存在可料时 T 使 $[\![T]\!]\subset H\backslash K$, $\boldsymbol{P}(T<\infty)>0$,亦由(14.4)可知 $a_T I_{[T<\infty]}=I_{[T<\infty]}$ a.s., 即 $[\![T]\!]\subset K$, 这与 $[\![T]\!]\subset H\backslash K$ 相矛盾,故必须有 $H\subset K$,即 K 是

含于 D 中的最大可料集. □

11.15 定理 设 $X=(X_t)$ 为一适应右连左极过程, $D=[\Delta X\neq 0]$, 则

$$\mu(dt,dx)=\sum_{s>0}\delta_{(s,\Delta X_s)}(dt,dx)I_D(s)$$

为一整值随机测度且具有可料对偶投影 ν.

μ 称为 X 的跳测度, ν 为 X 的 Lévy 族.

证明 已知 $D=[\Delta X\neq 0]$ 为一稀疏集且 ΔX 为一可选过程. 由定理 11.13 μ 为一整值随机测度. 剩下只要证明 M_μ 在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上 σ-有限.

对 $n\geqslant 1$ 取

$$T_{n,0}=0,\quad T_{n,m}$$

$$=\inf\left\{t>T_{n,m-1}:\frac{1}{n}\leqslant|\Delta X_t|<\frac{1}{n-1}\right\},\quad m\geqslant 1,$$

则 $\widetilde{A}_{n,m}=[\![0,T_{n,m}]\!]\times\left(\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right]\cup\{0\}\right)\in\widetilde{\mathscr{P}}$, $\bigcup_{n,m}\widetilde{A}_{n,m}=\widetilde{\Omega}$ 且 $M_\mu(\widetilde{A}_{n,m})\leqslant m$. □

在这一节的其余部分我们都假定 μ 是一个整值随机测度, 具有可料对偶投影 ν 且 $\mu(\{0\}\times E)=0$. 我们将继续使用(13.1)及(14.1)—(14.3)规定的记号.

我们的目的是要规定可料函数 W 关于 $\mu-\nu$ 的随机积分. 事实上, 若 $W*\mu\in\mathscr{A}_{loc}$, 则因为 $W*\nu$ 是 $W*\mu$ 的可料对偶投影,

$$M=W*\mu-W*\nu$$

是具有局部可积变差的局部鞅且 $M_0=0$. 因而自然地规定 M 为 W 关于 $\mu-\nu$ 的随机积分且记为 $M=W*(\mu-\nu)$. 此外

$$\Delta M_t=\int_E W(t,x)\mu(\{t\},dx)-\int_E W(t,x)\nu(\{t\},dx),\quad t>0.$$

由此, 自然地给出下列关于一般随机测度的随机积分的定义.

11.16 定义 记

$$\hat{\nu}_t(dx)=\nu(\{t\},dx),\ t\geqslant 0.$$

若 W 为一可料函数, 且对所有 $t>0$, $\int_E|W(t,x)|\hat{\nu}_t(dx)<\infty$, 记

$$\hat{W}_t = \int_E W(t, x)\hat{\nu}_t(dx), \quad t \geqslant 0,$$

$$\tilde{W}_t = \int_E W(t, x)\mu(\{t\}, dx) - \int_E W(t, x)\nu(\{t\}, dx)$$

$$= W(t, \beta_t)I_D(t) - \hat{W}_t, \quad t \geqslant 0.$$

显然,$\tilde{W} = (\tilde{W}_t)$和$\hat{W} = (\hat{W}_t)$都是稀疏过程,且$\hat{W}$是可料的.由定理 11.11 可知$^p(\tilde{W}) = 0$.令

$$\mathscr{G}(\mu) = \left\{W \in \tilde{\mathscr{P}} : \forall\, t \geqslant 0 \int_E |W(t, x)|\hat{\nu}_t(dx)\right.$$

$$\left. < \infty \text{ 且} \sqrt{\Sigma(\tilde{W})^2} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}\right\}.$$

则由定理 7.42,对每个$W \in \mathscr{G}(\mu)$,存在唯一的纯断局部鞅M使$\Delta M = \tilde{W}$.这一M称为**W关于$\mu - \nu$的随机积分**,且记为$W * (\mu - \nu)$或

$$M_t = \int_{[0, t] \times E} W(s, x)(\mu(ds, dx) - \nu(ds, dx)), \quad t \geqslant 0.$$

易见

$$[M] = \Sigma(\Delta M)^2 = \Sigma(\tilde{W})^2.$$

显然,若$W \in \tilde{\mathscr{P}}$且$W * \mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$,则如同前面所说的,$W \in \mathscr{G}(\mu)$且$W * (\mu - \nu) = W * \mu - W * \nu$.

11.17 定理 设$W \in \mathscr{G}(\mu)$,$M = W * (\mu - \nu)$,则存在$V \in \mathscr{G}(\mu)$使$M = V * (\mu - \nu)$且

$$[a = 1] \subset [\hat{V} = 0]. \tag{17.1}$$

若不计M_μ-零集的差别,上述V是唯一的.

证明 由随机积分的定义,在$\tilde{\Omega}$上有

$$\Delta M = W - \hat{W} \quad M_\mu\text{-a.e.}.$$

所以

$$U = M_\mu[\Delta M | \tilde{\mathscr{P}}] = W - \hat{W}, \quad M_\mu\text{-a.e.}.$$

取

$$V = U + \frac{\hat{U}}{1 - a} I_{[a<1]}.$$

因为$\hat{U}=\hat{W}-\hat{W}a=\hat{W}(1-a)$，我们有

$$V=W-\hat{W}+\hat{W}I_{[a<1]}=W-\hat{W}I_{[a=1]},\ \boldsymbol{M}_{\mu}\text{-a.e.}, \tag{17.2}$$

$$\hat{V}=\hat{W}-\hat{W}I_{[a=1]}a=\hat{W}I_{[a<1]}. \tag{17.3}$$

注意到$[a=1]\subset D$，可得

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_t&=W(t,\beta_t)I_D(t)-\hat{W}_tI_{[a_t=1]}I_D(t)-\hat{W}_tI_{[a_t<1]}\\&=W(t,\beta_t)I_D(t)-\hat{W}_t=\widetilde{W}_t,\quad t\geqslant 0\end{aligned}$$

从而有$V\in\mathscr{G}(\mu)$及$M=V*(\mu-\nu)$. (17.1)由(17.3)推出.

另一方面，V 的定义不依赖于 W. 事实上，若

$$[a=1]\subset[\hat{W}=0],$$

则由(17.2)有

$$V=W,\qquad \boldsymbol{M}_{\mu}\text{-a.e.}.$$

V 的唯一性由此推得. □

11.18 引理 设 H 为可料过程，则

$$\sum(HI_{JD^c})\in\mathscr{A}_{\text{loc}}\Leftrightarrow\Sigma(HI_J(1-a))\in\mathscr{A}_{\text{loc}}. \tag{18.1}$$

这时，$\Sigma(HI_J(1-a))$是$\Sigma(HI_{JD^c})$的可料对偶投影.

证明 设 $J=\bigcup_n[\![T_n]\!]$，其中(T_n)为图互不相交的停时序列. 则因$a_{T_n}I_{[T_n<\infty]}=\boldsymbol{E}[I_D(T_n)I_{[T_n<\infty]}|\mathscr{F}_{T_n-}]$ a.s. 及$H_{T_n}\in\mathscr{F}_{T_n-}$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\Big[\sum_s|H_s|I_{JD^c}(s)\Big]&=\sum_n\boldsymbol{E}[|H_{T_n}|I_{D^c}(T_n)I_{[T_n<\infty]}]\\&=\sum_n\boldsymbol{E}[|H_{T_n}|(1-a_{T_n})I_{[T_n<\infty]}]\\&=\boldsymbol{E}\Big[\sum_s|H_s|I_J(s)(1-a_s)\Big].\end{aligned} \tag{18.2}$$

若T为一停时满足

$$\boldsymbol{E}\Big[\sum_{s\leqslant T}|H_s|I_{JD^c}(s)\Big]<\infty$$

$$\text{或}\qquad \boldsymbol{E}\Big[\sum_{s\leqslant T}|H_s|I_J(s)(1-a_s)\Big]<\infty,$$

则在(18.2)中用$HI_{[\![0,T]\!]}$代替$|H|$就可得到引理的结论. □

11.19 定理 设 $W\in\widetilde{\mathscr{P}}$ 且对所有 $t>0$，$\int_E|W(t,x)|\nu_t(dx)<\infty$．取

$$A=\frac{|W-\hat{W}|^2}{1+|W-\hat{W}|}*\nu+\sum\left(\frac{\hat{W}^2}{1+|\hat{W}|}(1-a)\right),$$

$$B=(|W-\hat{W}|^2I_{[|W-\hat{W}|\leqslant b]}+|W-\hat{W}|I_{[|W-\hat{W}|>b]})*\nu$$
$$+\sum(\hat{W}^2I_{[|\hat{W}|\leqslant b]}+|\hat{W}|I_{[|\hat{W}|>b]}),\quad b>0.$$

则

$$W\in\mathscr{G}(\mu)\Leftrightarrow A\in\mathscr{A}^+_{loc}\Leftrightarrow B\in\mathscr{A}^+_{loc}.\tag{19.1}$$

证明 因为 $\widetilde{W}$ 是一个稀疏过程，我们有

$$\sum_{s\leqslant t}\frac{\widetilde{W}_s^2}{1+|\widetilde{W}_s|}$$
$$=\sum_{s\leqslant t}\frac{|W(s,\beta_s)I_D(s)-\hat{W}_s|^2}{1+|W(s,\beta_s)I_D(s)-\hat{W}_s|}[\mu(\{s\}\times E)$$
$$+(1-\mu(\{s\}\times E))]$$
$$=\int_{[0,t]\times E}\frac{|W(s,x)-\hat{W}_s|^2}{1+|W(s,x)-\hat{W}_s|}\mu(ds,dx)$$
$$+\sum_{s\leqslant t}\frac{\hat{W}_s^2}{1+|\hat{W}_s|}I_{D^c}(s).$$

由系 11.10 及引理 11.18，$\Sigma(\frac{\widetilde{W}^2}{1+|\widetilde{W}|})\in\mathscr{A}^+_{loc}\Leftrightarrow A\in\mathscr{A}^+_{loc}$ 且这时 A 是 $\Sigma(\frac{\widetilde{W}^2}{1+|\widetilde{W}|})$ 的可料对偶投影．

用类似的计算可得

$$\Sigma(\widetilde{W}^2I_{[|\widetilde{W}|\leqslant b]}+|\widetilde{W}|I_{[|\widetilde{W}|>b]})$$
$$=\Sigma((\hat{W}^2I_{[|\hat{W}|\leqslant b]}+|\hat{W}|I_{[|\hat{W}|>b]})I_{D^c}$$
$$+(|W-\hat{W}|^2I_{[|W-\hat{W}|\leqslant b]}+|W-\hat{W}|I_{[|W-\hat{W}|>b]})*\mu$$

和

$$\Sigma(\widetilde{W}^2I_{[|\widetilde{W}|\leqslant b]}+|\widetilde{W}|I_{[|\widetilde{W}|>b]})\in\mathscr{A}^+_{loc}\Leftrightarrow B\in\mathscr{A}^+_{loc}.$$

这时，B 是 $\Sigma(\widetilde{W}^2)I_{[|\widetilde{W}|\leqslant b]}+|\widetilde{W}|I_{[|\widetilde{W}|>b]})$ 的可料对偶投影，于是 (19.1) 可由引理 7.41 推出． □

11.20 系 $\mathscr{G}(\mu)$是一个向量空间,且对任何$W_1,W_2\in\mathscr{G}(\mu)$及实数$a,b$,有

$$(aW_1+bW_2)*(\mu-\nu)=a(W_1*(\mu-\nu))+b(W_2*(\mu-\nu)).$$

11.21 定理 1) 下列$\mathscr{G}_1(\mu)$,$\mathscr{G}_2(\mu)$是$\mathscr{G}(\mu)$的子空间:

$$\mathscr{G}_1(\mu)=\{W\in\tilde{\mathscr{P}}:\forall t\geqslant 0\int_E|W(t,x)|\hat{\nu}_t(dx)<\infty$$

$$\Sigma(|\tilde{W}|)\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}\},$$

$$\mathscr{G}_2(\mu)=\{W\in\tilde{\mathscr{P}}:\forall t\geqslant 0\int_E|W(t,x)|\hat{\nu}_t(dx)<\infty$$

$$\Sigma(\tilde{W}^2)\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}\}.$$

2) $W\in\mathscr{G}_1(\mu)\Leftrightarrow|W-\hat{W}|*\nu+\Sigma(|\hat{W}|(1-a))\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}\Leftrightarrow W*(\mu-\nu)\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc}}$.

3) $W\in\mathscr{G}_2(\mu)\Leftrightarrow|W-\hat{W}|^2*\nu+\Sigma(\hat{W}^2(1-a))\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}\Leftrightarrow W*(\mu-\nu)\in\mathscr{M}^{2,d}_{\mathrm{loc}}$. 且这时有

$$\langle W*(\mu-\nu)\rangle=|W-\hat{W}|^2*\nu+\Sigma(\hat{W}^2(1-a))$$

$$=W^2*\nu-\Sigma(\hat{W}^2).$$

在后一个等式中假定了$W^2*\nu\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

证明 1) 容易由$\Sigma(\frac{\tilde{W}^2}{1+|\tilde{W}|})\leqslant\Sigma(|\tilde{W}|)$和$\Sigma(\frac{\tilde{W}^2}{1+|\tilde{W}|})\leqslant\Sigma(\tilde{W}^2)$推得. 2)和3)的证明类似于定理11.19. 事实上,我们有$\Sigma(|\tilde{W}|)=|W-\hat{W}|*\mu+\Sigma(|\hat{W}|I_{D^c})$和$\Sigma(\tilde{W}^2)=|W-\hat{W}|^2*\mu+\Sigma(\hat{W}^2I_{D^c})$. □

11.22 定理 对每个$W\in\mathscr{G}(\mu)$存在$U\in\mathscr{G}_1(\mu)$及$V\in\mathscr{G}_2(\mu)$使$W=U+V$.

证明 取$M=W*(\mu-\nu)$及$A=\Sigma(\Delta MI_{[|\Delta M|>1]})$. 可知$A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$(引理7.16). 取

$$U=(W-\hat{W})I_{[|W-\hat{W}|>1]}+\hat{W}I_{[|\hat{W}|>1]},$$

$$V=(W-\hat{W})I_{[|W-\hat{W}|\leqslant 1]}+\hat{W}I_{[|\hat{W}|\leqslant 1]}.$$

则$W=U+V$. 由于

$$\Delta A_t=\Delta M_tI_{[|\Delta M_t|>1]}$$

$$= \int_E (W(t,x) - \hat{W}_t) I_{[|W-\hat{W}_t|>1]} \mu(\{t\}, dx)$$
$$- \hat{W}_t I_{[|\hat{W}_t|>1]} (1 - \mu(\{t\} \times E))$$
$$= \int_E U(t,x) \mu(\{t\}, dx) - \hat{W}_t I_{[|\hat{W}_t|>1]},$$

$\int_E U(t,x)\mu(\{t\}, dx) = \Delta A_t + \hat{W}_t I_{[|\hat{W}_t|>1]}$ 的可料投影为

$$\hat{U}_t = \int_E U(t,x) \hat{\nu}_t(dx) = \Delta \tilde{A}_t + \hat{W}_t I_{[|\hat{W}_t|>1]},$$

因而 $\widetilde{U} = \Delta(A - \widetilde{A})$ 且 $U \in \mathscr{G}_1(\mu)(U * (\mu - \nu) = A - \widetilde{A})$. 这样，我们有 $V = W - U \in \mathscr{G}(\mu)$ 且 $\Delta(V * (\mu - \nu)) = \widetilde{V}$ 被 4 界住（因 $|V| \leqslant 2$），$V * (\mu - \nu) \in \mathscr{M}_{\infty}^{2,d}$ 以及 $V \in \mathscr{G}_2(\mu)$. □

11.23 定理 设 $W \in \mathscr{G}_2(\mu)$, $M = W * (\mu - \nu)$, H 为一可料过程. 则为要 H 关于 M 可积当且仅当 $HW \in \mathscr{G}(\mu)$，且这时有

$$H.M = (HW) * (\mu - \nu). \tag{23.1}$$

证明 因为

$$H^2.[M] = \sum (H^2 \Delta M^2) = \Sigma(H^2 \widetilde{W}^2) = \Sigma(\widetilde{HW})^2,$$

H 关于 M 可积，即 $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$，等价于 $HW \in \mathscr{G}(\mu)$. 这时还有 $\Delta(H.M) = H\Delta M = H\widetilde{W} = (\widetilde{HW})$，因而(23.1)成立. □

§2. 半鞅的积分表示

11.24 定理 设 X 为特殊半鞅，且

$$X = M + A$$

为其典则分解，其中 M 为局部鞅，A 是可料有限变差过程，$A_0 = 0$. 设 μ 为 X 的跳测度，ν 为 μ 的可料对偶投影，则

$$M^d = x * (\mu - \nu) \tag{24.1}$$

证明 对任一可料时 T，我们有

$$\Delta A_T I_{[T<\infty]} = \boldsymbol{E}[\Delta X_T I_{[T<\infty]} | \mathscr{F}_{T-}]$$
$$= \boldsymbol{E}\left[\int_E x\mu(\{T\}, dx) I_{[T<\infty]} | \mathscr{F}_{T-}\right]$$

$$= \int_E x\nu(\{T\}, dx) I_{[T<\infty]} \quad \text{a.s.}.$$

因此 ΔA 与 $(\int_E x\nu(\{t\}, dx))$ 无区别，且

$$\int_E x\mu(\{t\}, dx) - \int_E x\nu(\{t\}, dx)$$

$$= \Delta X_t - \Delta A_t = \Delta M_t = \Delta M_t^d, \quad t \geqslant 0.$$

按随机积分的定义，M^d 就是 $x * (\mu - \nu)$. □

11.25 定理 设 X 为半鞅，μ 为其跳测度，ν 为 μ 的可料对偶投影，则

$$X = X_0 + \alpha + X^c + (xI_{[|x| \leqslant 1]}) * (\mu - \nu)$$

$$+ (xI_{[|x|>1]}) * \mu, \tag{25.1}$$

其中 X^c 为 X 的连续鞅部分，α 为一可料有限变差过程，$\alpha_0 = 0$. 此外，我们有

$$\nu(\{0\} \times E) = \nu(\boldsymbol{R}_+ \times \{0\}) = 0, \tag{25.2}$$

$$(x^2 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+, \tag{25.3}$$

$$\Delta\alpha = \left(\int_{|x| \leqslant 1} x\hat{\nu}_t(dx)\right). \tag{25.4}$$

证明 注意 $(xI_{[|x|>1]}) * \mu \overset{\triangle}{=} \Sigma(\Delta X I_{[|\Delta X|>1]})$，可知

$$Y = X - X_0 - (xI_{[|x|>1]}) * \mu, \quad t \geqslant 0, \tag{25.5}$$

是一个特殊半鞅($|\Delta Y| \leqslant 1$)，其典则分解为

$$Y = M + \alpha, \tag{25.6}$$

其中 M 为局部鞅且 $M_0 = 0$，α 为可料有限变差过程，$\alpha_0 = 0$. 显然

$$M^c = Y^c = X^c, \tag{25.7}$$

Y 的跳测度是 $I_{[|x| \leqslant 1]} * \mu$，其可料对偶投影是 $I_{[|x| \leqslant 1]} * \nu$. 由定理 11.24 我们有

$$M^d = (xI_{[|x| \leqslant 1]}) * (\mu - \nu). \tag{25.8}$$

这样(25.1)可由(25.5)—(25.8)推出.

(25.2)是明显的. (25.4)来自(24.2). 仅有(25.3)还需证明. 因为

$$(x^2 I_{[|x| \leqslant 1]}) * \mu = \Sigma((\Delta x)^2 I_{[|\Delta x| \leqslant 1]}) = \Sigma(\Delta Y)^2$$

以及$|\Delta Y|\leqslant 1$，$(x^2 I_{[|x|\leqslant 1]})*\mu\in\mathscr{A}_{loc}^+$且其可料对偶投影为$(x^2 I_{[|x|\leqslant 1]})*\nu\in\mathscr{A}_{loc}^+$. 另一方面，$I_{[|x|>1]}*\mu\in\mathscr{A}_{loc}^+$是明显的，因此$I_{[|x|>1]}*\nu\in\mathscr{A}_{loc}^+$. 总之，$(x^2\wedge 1)*\nu\in\mathscr{A}_{loc}^+$. □

(25.1)称为**半鞅 X 的积分表示**. 记$\beta=\langle X^c\rangle$，三元体(α,β,ν)称为**半鞅 X 的可料特征(或可料三元体或局部特征)**. 可料三元体是研究半鞅的一个重要工具，虽然一个半鞅或其分布律一般不能由其可料特征唯一确定.

11.26 系 一个半鞅 X 是一个特殊半鞅当且仅当

$$(|x|I_{[|x|>1]})*\mu=\Sigma(|\Delta X|I_{[|\Delta X|>1]})\in\mathscr{A}_{loc}^+.$$

这时 X 的典则分解为

$$X=(X_0+X^c+x*(\mu-\nu))+(\alpha+(xI_{[|x|>1]})*\nu),\tag{26.1}$$

其中μ是 X 的跳测度，ν为μ的可料对偶投影.

证明 由 X 的积分表示(25.1)可知 X 为特殊半鞅当且仅当$\alpha+(xI_{[|x|>1]})*\mu\in\mathscr{A}_{loc}$或等价地$(xI_{[|x|>1]})*\mu\in\mathscr{A}_{loc}$，因为$\alpha\in\mathscr{A}_{loc}$. 但$(xI_{[|x|>1]})*\nu$是$(xI_{[|x|>1]})*\mu$的可料对偶投影，(26.1)可直接由(25.1)推出. □

11.27 系 设 X 为一个半鞅，具有积分表示(25.1)，又 f 为 $\boldsymbol{R}_+$上有界 C^2-函数，则特殊半鞅 $f(X)$的典则分解为

$$f(X)=M+A,\tag{27.1}$$

$$M=f(X_0)+f'(X_-).X^c+[f(X_-+x)-f(X_-)]*(\mu-\nu),\tag{27.2}$$

$$A=f'(X_-).\alpha+\frac{1}{2}f''(X_-).\beta+[f(X_-+x)-f(X_-)-xf'(X_-)I_{[|x|\leqslant 1]}]*\nu.\tag{27.3}$$

特别，特殊半鞅$Y=e^{iuX}(u\in\boldsymbol{R})$有下列典则分解：

$$Y=Y_0+(Y_-).N+(Y_-).H,\tag{27.4}$$

$$N=iuX^c+(e^{iux}-1)*(\mu-\nu),\tag{27.5}$$

$$H=iu\alpha-\frac{u^2}{2}\beta+(e^{iux}-1-iuxI_{[|x|\leqslant 1]})*\nu.\tag{27.6}$$

Itô

证明 运用 Itô 公式，积分表示(25.1)及定理 11.23，我们有

$$
\begin{aligned}
f(X) &= f(X_0) + f'(X_-).(X - X_0) + \frac{1}{2}f''(X_-).\langle X^c\rangle \\
&\quad + \Sigma(f(X) - f(X_-) - f'(X_-)\Delta X) \\
&= f(X_0) + f'(X_-).\alpha + f'(X_-).X^c \\
&\quad + (xf'(X_-)I_{[|x|\leqslant 1]}) * (\mu - \nu) \\
&\quad + (xf'(X_-)I_{[|x|>1]}) * \mu + \frac{1}{2}f''(X_-).\beta \\
&\quad + (f(X_- + x) - f(X_-) - xf'(X_-)) * \mu \\
&= f(X_0) + f'(X_-).X^c + (xf'(X_-)I_{[|x|\leqslant 1]}) * (\mu - \nu) \\
&\quad + f'(X_-).\alpha + \frac{1}{2}f''(X_-).\beta + (f(X_- + x) \\
&\quad - f(X_-) - xf'(X_-)I_{[|x|\leqslant 1]}) * \mu.
\end{aligned}
$$

由于 f 有界，$f(X_-)$，$f'(X_-)$ 是局部有界的，$(f(X_-+x)-f(X_-)-xf'(X_-)I_{[|x|\leqslant 1]})*\mu$ 是具有局部有界跳的纯断有限变差过程，因而它属于 $\mathscr{A}_{loc}$ 且其可料对偶投影为 $(f(X_-+x)-f(X_-)-xf'(X_-)I_{[|x|\leqslant 1]})*\nu$，于是容易直接求出典则分解式(27.1)，(27.2)和(27.3).

将(27.1)，(27.2)和(27.3)用于 $f(x)=e^{iux}$，即给出(27.4)，(27.5)和(27.6). □

11.28 系 设 X 为半鞅且以 (α, β, ν) 为可料特征，则为要 X 是随机连续当且仅当对每个 $t>0$.

$$\nu(\{t\} \times E) = 0 \quad \text{a.s.}.$$

这时，α 也是随机连续的.

证明 对每个 $t>0$，因为

$$\nu(\{t\} \times E) = P[\Delta X_t \neq 0 | \mathscr{F}_{t-}],$$

故有

$$
\begin{aligned}
\nu(\{t\} \times E) = 0, \text{a.s.} &\Leftrightarrow E[\nu(\{t\} \times E)] \\
&= 0 \Leftrightarrow P(\Delta X_t \neq 0) = 0.
\end{aligned}
$$

而 X 随机连续就是 $P(\Delta X_t \neq 0) = 0$ 对每 $t>0$ 成立.

若 X 随机连续，则由(25.4)α 亦然. □

11.29 引理 设 X 为一适应右连左极过程. 若对某个实数 $u \neq 0$, e^{iuX} 为一半鞅，则 X 也是半鞅.

证明 设 g 是复平面上的 C^2-函数，满足

$$g(e^{iy}) = y, \text{ 当 } |y| \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

取 $T_0 = 0$,

$$T_n = \inf\left\{t > T_{n-1} : |X_t - X_{T_{n-1}}| > \frac{\pi}{4|u|}\right\}, \ n \geqslant 1.$$

则 $T_n \uparrow \infty$，且对每个 $n \geqslant 1$，有

$$g(e^{iu(X_t - X_{T_{n-1}})}) = u(X_t - X_{T_{n-1}}), \ T_{n-1} \leqslant t < T_n.$$

现在不难直接验证对每个 $n \geqslant 1$ 成立

$$X^{T_n} - X^{T_{n-1}}$$
$$= \frac{1}{u} g(Y_n) + \left[X_{T_n} - X_{T_{n-1}} - \frac{1}{u} g(e^{iu(X_{T_n} - X_{T_{n-1}})})\right] I_{[T_n, \infty[},$$

其中 $Y_n = e^{iu(X^{T_n} - X^{T_{n-1}})}$ 为一个半鞅. 因此对每个 $n \geqslant 1$, $X^{T_n} - X^{T_{n-1}}$ 是一个半鞅，于是 $X \in \mathscr{S}_{\text{loc}} = \mathscr{S}$. □

11.30 定理 设 X 为一适应右连左极过程，α 为可料有限变差过程，$\alpha_0 = 0$, β 为适应连续增过程, $\beta_0 = 0$. 而 ν 为一可料随机测度，且满足

i) 对每个 $t > 0$, $(x^2 \wedge 1) * \nu_t < \infty$,

ii) $0 \leqslant a \leqslant 1$, $a = (\nu(\{t\} \times E))$,

iii) $\nu(\{0\} \times E) = \nu(R_+ \times \{0\}) = 0$,

iv) $\Delta\alpha = \left(\int_{\{|x| \leqslant 1\}} x\nu(\{t\}, dx)\right)$.

记 $h_u(x) = e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x| \leqslant 1]}$ 和 $H(u) = iu\alpha - \frac{u^2}{2}\beta + h_u(x) * \nu$，则下列断言等价：

1) X 是一个以(α, β, ν)为可料特征的半鞅，

2) 对任一有界 $f \in C^2(R)$, $f(X) - f(X_0) - f'(X_-) . \alpha - \frac{1}{2} f''(X_-) . \beta - [f(X_- + x) - f(X_-) - xf'(X_-)I_{[|x| \leqslant 1]}] * \nu \in \mathscr{M}_{\text{loc}, 0}$,

3) 对任一实数 u，$e^{iuX}-e^{iuX_0}-e^{iuX_-}\cdot H(u)\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$.

证明 1) ⇒ 2) ⇒ 3) 在系 11.27 中已经证明，只需证明 3) ⇒ 1).

首先，e^{iuX} 是半鞅，于是由引理 11.29，X 本身也是半鞅．设 $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\nu})$ 为 X 的可料特征，取

$$\tilde{H}(u)=iu\tilde{\alpha}-\frac{1}{2}u^2\tilde{\beta}+k_u(x)*\tilde{\nu}.$$

则 $e^{iuX}-e^{iuX_0}-e^{iuX_-}\cdot\tilde{H}(u)\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$，$e^{iuX_-}\cdot(H(u)-\tilde{H}(u))\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$ 和 $H(u)-\tilde{H}(u)\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$. 但 $H(u)-\tilde{H}(u)$ 是可料有限变差过程，故对每个 u，$H(u)$ 和 $\tilde{H}(u)$ 是无区别的．因为 $H(u)$ 和 $\tilde{H}(u)$ 都关于 u 连续，所以我们有

$$P(\{\omega:\forall\ (t,u)\quad H_t(u)=\tilde{H}_t(u)\})=1. \tag{30.1}$$

由直接计算可知

$$H_t(u)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}H_t(u+rv)dr$$

$$=\frac{v^2}{6}\beta_t+\int_{[o,t]\times E}e^{iux}\left(1-\frac{\sin vx}{vx}\right)\nu(ds,dx),$$

它就是下列测度的特征函数

$$\frac{v^2}{6}\beta_t\delta_0(dx)+\int_o^t\left(1-\frac{\sin vx}{vx}\right)\nu(ds,dx).$$

注意到 $\nu(\boldsymbol{R}_+\times\{0\})=0$，由(30.1)可得 β 与 $\tilde{\beta}$、ν 与 $\tilde{\nu}$ 分别都是无区别的．最后，α 与 $\tilde{\alpha}$ 也是无区别的. □

11.31 定理 设 X 是一个以 (α,β,ν) 为可料特征的半鞅，则下列断言等价：

1) 存在停时序列 (T_n) 满足 $T_n\uparrow\infty$ 及

$$\boldsymbol{E}\left[\sup_{t\leq T_n}|X_t-X_0|^2\right]<\infty \tag{31.1}$$

（这时，半鞅 X 称为**局部平方可积的**）.

2) 对每个 $t>0$，

$$x^2*\nu_t<\infty. \tag{31.2}$$

3) $X=X_0+M+A$，其中 M 为局部平方可积鞅，$M_0=0$，而 A

是有限变差可料过程且 $A_0=0$.

这时,我们有

$$\langle M\rangle=\beta+x^2*\nu-\Sigma(\Delta A)^2. \qquad (31.3)$$

证明 2)⇒3). 由于对每个 $t>0$, $\int_{[0,t]\times\{|x|>1\}}d\nu<\infty$, 故由(31.2)对每个 $t>0$,我们有 $\int_{[0,t]\times\{|x|>1\}}|x|d\nu<\infty$. 按系 11.26, X 是一个特殊半鞅. 令 $X=X_0+M+A$ 为 X 的典则分解,其中 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$, $A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc},0}$ 且 A 为可料的. 由定理 11.24 的证明可知 $\Delta A_t=\int_E x\nu(\{t\},dx)$. 于是 $\sum_{s\leqslant t}(\Delta A_s)^2\leqslant x^2*\nu_t$, $t>0$. 按定理 11.21, $x*(\mu-\nu)\in\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc},0}$ 且 $M=X^c-x*(\mu-\nu)\in\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc},0}$. 同时

$$\langle M\rangle=\langle X^c\rangle+\langle x*(\mu-\nu)\rangle=\beta-x^2*\nu-\Sigma(\Delta A)^2.$$

3)⇒1). 由于 $M\in\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$, $A=A_-+\Delta A$, A_- 又是局部有界的, $\Sigma(\Delta A)^2$ 为一可料增过程, $\Sigma(\Delta A)^2\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$, 于是存在停时序列$(T_n)$ 使 $M^{T_n}\in\mathscr{M}^2$, A^{T_n-} 是有界的, 且 $E\left[\sum_{S\leqslant T_n}(\Delta A_s)^2\right]<\infty$, 所以(31.1)成立.

1)⇒2). 令 $S_n=\inf\left\{t>0:\sum_{s\leqslant t}(\Delta X_s)^2\geqslant n\right\}\wedge T_n$, 则 $S_n\uparrow\infty$, 且对每个 n 有

$$E\left[\sum_{s\leqslant S_n}(\Delta X_s)^2\right]\leqslant n+4E\left[\sup_{t\leqslant T_n}|X_t-X_0|^2\right]<\infty,$$

即 $x^2*\mu_t=\sum_{s\leqslant t}(\Delta X_s)^2$ 为局部可积增过程. 但其可料对偶投影为 $x^2*\nu_t$. 因此(31.2)成立. □

11.32 系 设 M 是以(α,β,ν)为可料特征的局部平方可积鞅, $M_0=0$. 则

$$\langle M\rangle=\beta+x^2*\nu.$$

11.33 定理 设 f 是 $\boldsymbol{R}_+$ 上的右连左极非随机函数,则 f 是一个半鞅当且仅当 f 是一个有限变差函数,即 f 在每个有限区间上为有界变差的.

证明 充分性是明显的,只需证必要性. 假定 f 是一个半鞅,

设 $f=f_0+M+A$ 为它的典则分解，(T_n) 为局部化序列使 $M^{T_n}\in\mathscr{M}_0$，$A^{T_n}\in\mathscr{A}_0$. 记 $F_n(t)$ 为 T_n 的分布函数，则有

$$f_0+\boldsymbol{E}[A_{t\wedge T_n}]=\boldsymbol{E}[f_{t\wedge T_n}]=\int_{[0,\infty]}f_{t\wedge s}F_n(ds)$$

$$=f_tF_n(]t,\infty])+\int_{[0,t]}f_sF_n(ds),$$

且

$$f_tF_n(]t,\infty])=f_0+\boldsymbol{E}[A_{t\wedge T_n}]-\int_{[0,t]}f_sF_n(ds)$$

是一个有限变差函数. 对每个 $t_0>0$，

$$F_n(]t_0,\infty])=\boldsymbol{P}(T_n>t_0)\to 1,\ 当\ n\to\infty.$$

我们可取 n 足够大使 $F_n(]t_0,\infty])>0$. 因为 $F_n(]t,\infty])\geqslant F_n(]t_0,\infty])>0$，$f$ 在 $[0,t_0]$ 上是有界变差的，所以 f 是一个有限变差函数. □

§3. Lévy 过 程

由于定理 2.68，今后我们常认为 Lévy 过程(即随机连续的独立增量过程)是右连左极的. 同时，对 Lévy 过程 $X=(X_t)$，

$$\varphi_t(u)=\boldsymbol{E}[e^{iu(X_t-X_0)}],\qquad u\in\boldsymbol{R},$$

是连续且不为零的，

$$Z_t(u)=\frac{e^{iu(X_t-X_0)}}{\varphi_t(u)},\qquad t\geqslant 0$$

是一个鞅.

11.34 定理 设 X 为一个 Lévy 过程. 若 X 是一个半鞅，则对所有 $u\in\boldsymbol{R}$，$\varphi_t(u)$ 是一个有限变差函数. 反之，若对某个 $u\neq 0$，$\varphi_t(u)$ 是一个有限变差函数，则 X 是半鞅.

证明 不失一般性可假定 $X_0=0$. 若 $X\in\mathscr{S}$，则对所有 $u\in\boldsymbol{R}$，$e^{iuX}\in\mathscr{S}$. 因为 $Z_t(u)\neq 0$，$Z_{t-}(u)\neq 0$，$\varphi_t(u)=\dfrac{e^{iuX_t}}{Z_t(u)}\in\mathscr{S}$(参见问题 9.16). 由定理 11.33，$\varphi(u)$ 是一个有限变差函数.

反之，若对某个 $u \neq 0$，$\varphi_t(u)$ 是有限变差函数，则 $e^{iuX_t} = Z_t(u)\varphi_t(u) \in \mathscr{S}$. 由引理 11.29，我们有 $X \in \mathscr{S}$. □

11.35 系 设 X 为一 Lévy 过程，则存在连续(非随机)函数 f 使 X-f 为半鞅.

证明 取 $f_t = \arg(\boldsymbol{E}[e^{i(X_t - X_0)}])$，则 $f_0 = 0$ 且因 $\varphi_t(u) \neq 0$，f 可取得是连续的. $X - f$ 仍为 Lévy 过程. 但

$$\boldsymbol{E}[e^{i(X_t - f_t - X_0)}] = |\boldsymbol{E}[e^{i(X_t - X_0)}]|$$

是一单调减函数，因而 $X - f \in \mathscr{S}$. □

11.36 定理 设 X 是一随机连续半鞅，则 X 是一 Lévy 过程当仅且当其可料特征 (α, β, ν) 为非随机的. 这时，我们有

i) α 是有限变差连续函数且 $\alpha_0 = 0$，

ii) β 是连续增函数且 $\beta_0 = 0$，

iii) ν 是 $(\boldsymbol{R}_+ \times E, \mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathscr{B}(E))$ 上 σ-有限测度，且对所有 $t \geqslant 0$ 有

$$\nu(\{t\} \times E) = \nu(\boldsymbol{R}_+ \times \{0\}) = 0, \quad (x^2 \wedge 1) * \nu_t < \infty.$$

特别，X 是拟左连续的.

证明 必要性. 为简单计设 $X_0 = 0$. 对 $Y = e^{iuX}$ 运用分部积分公式可得

$$\begin{aligned} Y_t = Z_t\varphi_t &= 1 + \int_0^t \varphi_s dZ_s + \int_0^t Z_{s-} d\varphi_s \\ &= 1 + \int_0^t \varphi_s dZ_s + \int_0^t Y_{s-} \frac{1}{\varphi_s} d\varphi_s. \end{aligned} \tag{36.1}$$

比较(36.1)与(27.4)并注意到 $|Y_-| = 1$，我们有

$$H_t(u) = \int_0^t \frac{1}{\varphi_s(u)} d\varphi_s(u), \quad t \geqslant 0. \tag{36.2}$$

即对每个 u，$H(u)$ 与一非随机函数无区别. 但 $H(u)$ 关于 u 连续，故对几乎所有 ω，(36.2)对所有 $t \in \boldsymbol{R}_+$ 及 $u \in \boldsymbol{R}$ 成立. 在定理 11.30 的证明中已看到 X 的可料特征 (α, β, ν) 由 $\{H(u), u \in \boldsymbol{R}\}$ 完全确定，因此 (α, β, ν) 是非随机的. 条件 i)、ii) 和 iii) 可由定理 11.30 及系 11.28 直接推出.

充分性．只需证明对所有 $u\in \mathbf{R}$ 及 $0\leqslant s\leqslant t$ 有

$$\boldsymbol{E}[e^{iu(X_t-X_s)}|\mathscr{F}_s]=\boldsymbol{E}[e^{iu(X_t-X_s)}],$$

即对任意满足 $\boldsymbol{P}(A)>0$ 的 $A\in\mathscr{F}_s$ 有

$$\boldsymbol{E}[I_Ae^{iu(X_t-X_s)}]=\boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{E}[e^{iu(X_t-X_s)}]. \tag{36.3}$$

取 s 作为新的原点，对 $\widetilde{Y}_t=e^{iu(X_t-X_s)}$，$t\geqslant s$，运用系 11.27，我们有

$$\widetilde{Y}_t=1+\int_s^t\widetilde{Y}_{r-}dN_r+\int_s^t\widetilde{Y}_{r-}dH_r,\quad t\geqslant s.$$

因为

$$\sup_{s\leqslant r\leqslant t}\left|\int_s^t\widetilde{Y}_{r-}dN_r\right|=\sup_{s\leqslant r\leqslant t}\left|\widetilde{Y}_t-1-\int_s^t\widetilde{Y}_{r-}dH_r\right|\leqslant 2+\int_s^t|dH_r|$$

且 $\int_s^t|dH_r|$ 为非随机的，$(\int_s^t\widetilde{Y}_{r-}dN_r)_{t\geqslant s}$ 为一鞅（定理 7.12），于是

$$\boldsymbol{E}\left[I_A\int_s^t\widetilde{Y}_{r-}dN_r\right]=0,$$

$$\boldsymbol{E}[I_A\widetilde{Y}_t]=\boldsymbol{E}[I_A]+\boldsymbol{E}\left[I_A\int_s^t\widetilde{Y}_{r-}dH_r\right]$$

$$=\boldsymbol{E}[I_A]+\int_s^t\boldsymbol{E}[I_A\widetilde{Y}_{r-}]dH_r.$$

取 $f_t=\dfrac{\boldsymbol{E}[I_A\widetilde{Y}_t]}{\boldsymbol{P}(A)}$，我们有

$$f_t=1+\int_s^tf_{r-}dH_r,$$

且 $f_t=e^{H_t-H_s}$ 不依赖于 A．这样

$$\frac{\boldsymbol{E}[I_A\widetilde{Y}_t]}{\boldsymbol{P}(A)}=\frac{\boldsymbol{E}[I_\Omega\widetilde{Y}_t]}{\boldsymbol{P}(\Omega)}=\boldsymbol{E}[\widetilde{Y}_t].$$

这就是(36.3)． □

11.37 系　设 X 为一 Lévy 过程，$X_0=0$．若 X 是一个半鞅，则其分布律由其可料特征 (α,β,ν) 唯一确定．

证明　前面我们已证得（见 27.4）和(27.6)

$$\varphi_t(u)=\exp\left\{iu\alpha_t-\frac{1}{2}u^2\beta_t+\int_{[0,t]\times E}(e^{iux}-1-iuxI_{[|x|\leqslant 1]})\nu(ds,dx)\right\}. \tag{37.1}$$

于是对一切 $0\leqslant s<t$ 有

$$E[e^{iu(X_t-X_s)}]=\varphi_{s,t}(u)=\frac{\varphi_t(u)}{\varphi_s(u)}$$

$$=\exp\left\{iu(\alpha_t-\alpha_s)-\frac{1}{2}u^2(\beta_t-\beta_s)\right.$$

$$\left.+\int_{]s,t]\times E}(e^{iux}-1-iuxI_{[|x|\leqslant 1]})\nu(dr,dx)\right\}$$

独立增量过程的分布律由其初始分布(即 X_0 的分布律)与其增量的分布律所确定. 从而由上式知 X 的分布律由(α,β,ν)唯一确定. □

11.38 定理 设 X 为一随机过程,$X_0=0$,则 X 为正态 Lévy 过程当且仅当下列条件成立:

i) 存在(非随机)连续函数 f 使 $Y=X-f$ 是一连续局部鞅,

ii) $\langle Y\rangle$ 为非随机的.

证明 充分性. 显然,我们可取 $f_0=Y_0=0$. Y 的可料特征是 $(0,\langle Y\rangle,0)$,它是非随机的. 由定理 11.36,Y 是 Lévy 过程. 由(37.1)

$$E[e^{iu(Y_t-Y_s)}]=\exp\left\{-\frac{u^2}{2}(\beta_t-\beta_s)\right\},\quad 0\leqslant s<t,\tag{38.1}$$

其中 $\beta=\langle Y\rangle$. 因此 Y 是正态 Lévy 过程,所以 $X=Y+f$ 亦然.

必要性. 因为 X 是正态过程

$$\varphi_t(u)=E[e^{iuX_t}]=\exp\left\{iuf_t-\frac{u^2}{2}\beta_t\right\},\quad t\geqslant 0,$$

其中 $f_t=E[X_t]$, $\beta_t=D[X_t]$. 由 X 的随机连续性,f 和 β 都是连续函数. 由独立增量性 β 是单调增的,显然,$Y=X-f$ 仍为 Lévy 过程,(38.1)仍成立. 因为 $E[Y_t]\equiv 0$,Y 是一个鞅(定理 2.69). 由(38.1)可见 Y 的可料特征是$(0,\beta,0)$,因此 Y 是连续鞅且$\langle Y\rangle=\beta$ 是非随机的. □

11.39 系 随机过程 $X=(X_t)$, $X_0=0$ 为一标准 Wiener 过程当且仅当下列条件被满足:

i) (X_t)为连续局部鞅,

ii) (X_t^2-t)为局部鞅.

证明 只需注意条件 ii)等价于$\langle X\rangle_t=t$ 而(38.1)化为

$$E[e^{iu(X_t-X_s)}]=\exp\left\{-\frac{u^2}{2}(t-s)\right\},\quad 0\leqslant s\leqslant t.\quad \square$$

系 11.39 是熟知的 Wiener 过程的鞅表征. 它也称为 **Lévy 定理**. 作为它的应用,我们将证明连续局部鞅与 Wiener 过程的一个重要的联系.

11.40 引理 设 M 为一连续局部鞅,则对几乎所有 ω, $M.(\omega)$和$\langle M\rangle.(\omega)$有相同的常数区间,即对 $a<b$,若 $M.(\omega)$在$[a,b]$上为常数,则$\langle M\rangle.(\omega)$也在$[a,b]$上取常数,反之亦然.

证明 对每个有理数 $r>0$,取

$$T_r=\inf\{t\geqslant r:\langle M\rangle_t\neq\langle M\rangle_r\},$$

$$S_r=\inf\{t\geqslant r:M_t\neq M_r\},$$

因为$\langle I_{]\!]r,T_r]\!]}\cdot M\rangle=I_{]\!]r,T_r]\!]}\cdot\langle M\rangle=0$, $I_{]\!]r,T_r]\!]}\cdot M=0$. 类似地, $I_{]\!]r,S_r]\!]}\cdot\langle M\rangle=\langle I_{]\!]r,S_r]\!]}\cdot M\rangle=0$. 这样不难看出对几乎所有的 ω 对每个 r 有 $T_r(\omega)=S_r(\omega)$, $M.(\omega)$和$\langle M\rangle.(\omega)$在$[r,T_r(\omega)]$上为常数. 所以 $M.(\omega)$和$\langle M\rangle.(\omega)$有相同的常数区间. $\square$

11.41 定理 设 M 为连续局部鞅,$M_0=0$ 且$\langle M\rangle_\infty=\infty$. 取

$$\tau_t=\inf\{s:\langle M\rangle_s>t\},\quad N_t=M_{\tau_t},\quad \mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{\tau_t},\quad t\geqslant 0.$$

则(N_t)关于$(\mathscr{G}_t)$是标准 Wiener 过程,且(M_t)与$(N_{\langle M\rangle_t})$无区别.

证明 事实上,(τ_t)是与$\langle M\rangle$相联系的时变. 因为$\langle M\rangle_\infty=\infty$,每个 τ_t 是有限的. 此外,我们有 $\tau_\infty=\infty$, $\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_\infty$. 由于$\langle M\rangle$连续,我们有(引理 1.37)$\langle M\rangle_{\tau_t}=t$, $t\geqslant 0$. 按定理 7.32,对每个 t $(M_s^{\tau_t})_{s\geqslant 0}\in\mathscr{M}^2$ 且$(M_{s\wedge\tau_t}^2-\langle M\rangle_{s\wedge\tau_t})_{s\geqslant 0}\in\mathscr{M}$,由 Doob 停时定理,对所有 $0\leqslant s<t$ 有

$$E[N_t|\mathscr{G}_s]=E[M_{\tau_t}|\mathscr{F}_{\tau_s}]=M_{\tau_s}=N_s\quad\text{a.s.},$$

$$E[N_t^2-t|\mathscr{G}_s]=E[M_{\tau_t}^2-\langle M\rangle_{\tau_t}|\mathscr{F}_{\tau_s}]$$

$$=M_{\tau_s}^2-\langle M\rangle_{\tau_s}=N_s^2-s,\ \text{a.s.},$$

即(N_t)和(N_t^2-t)为$(\mathscr{G}_t)$-鞅. 显然,(N_t)是右连续的,$(N_{t-})=$

(M_{τ_t-}). 由于 $\langle M\rangle_{\tau_t-}=t=\langle M\rangle_{\tau_t}$，由引理 11.40，$(N_{t-})$ 与 $(M_{\tau_t})=(N_t)$ 无区别. 因此 (N_t) 是连续的. 因而由系 11.39 (N_t) 是关于 $(\mathscr{G}_t)$ 的标准 Wiener 过程. 由于 $\langle M\rangle_{\tau_{\langle M\rangle_t}}=\langle M\rangle_t$，再由引理 11.40，$(M_t)$ 与 $(M_{\tau_{\langle M\rangle_t}})=(N_{\langle M\rangle_t})$ 无区别. □

11.42 定理 设 X 为适应点过程，即

$$X=\sum_{n=1}^{\infty}I_{[T_n,\infty[},$$

其中 (T_n) 为一递增停时序列，满足 $T_n\uparrow\infty$，对每个 $n\geqslant 0$，$T_n<\infty\Rightarrow T_n<T_{n+1}(T_0=0)$，则下列断言等价

1) X 为一 Lévy 过程且对所有 $0\leqslant s<t$，X_t-X_s 具有 Poisson 分布(这样的过程若它不是时齐的则称为**非时齐 Poisson 过程**)，

2) 存在连续增函数 Λ_t 使 $X-\Lambda$ 为一零初值局部鞅.

证明 1)⇒2). 记 $\Lambda_t=\boldsymbol{E}[X_t]$. 因为对所有 $s\leqslant t$，$X_t-X_s\geqslant 0$，故

$$\Lambda_t=\boldsymbol{E}[X_t]=\boldsymbol{E}[X_s]+\boldsymbol{E}[X_t-X_s]\geqslant\boldsymbol{E}[X_s]=\Lambda_s.$$

因而 Λ 为单调递增的. 由 X 的随机连续性，

$$e^{-(\Lambda_t-\Lambda_s)}=\boldsymbol{P}(X_t-X_s=0)\to 1,\qquad 当\ t-s\to 0,$$

即 Λ 是连续的. 由定理 2.69，$X-\Lambda\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$.

2)⇒1). X 的跳测度为

$$\mu([0,t]\times B)=\Lambda_t\delta_1(B),\ B\in\mathscr{B}(E).$$

易见 X 的可料特征是 $(\Lambda,0,\nu)$，它是非随机的. 因而由系 11.28 和定理 11.36，X 是 Lévy 过程. 进而由(37.1)

$$\begin{aligned}\varphi_t(u)&=\exp\left\{iu\Lambda_t+\int_{[0,t]\times E}(e^{iux}-1-iuxI_{[|x|\leqslant 1]})d\Lambda_s\delta_1(dx)\right\}\\&=\exp\{\Lambda_t(e^{iu}-1)\}.\end{aligned}$$

因此对所有 $s<t$，X_t-X_s 具有参数为 $\Lambda_t-\Lambda_s$ 的 Poisson 分布律. □

定理 11.42 就是熟知的 Poisson 过程的鞅表征. 它也称为 **Watanabe 定理**. 类似于定理 11.41，每个点过程与 Poisson 过程只差一个时变，其证明也是相仿的. 我们将其留给读者作练习(问题

11.11).

现在我们再回到对一般 Lévy 过程的讨论.

11.43 定理 设 $X^{(1)},\cdots\cdots,X^{(n)}$ 为 Lévy 过程也是半鞅,初值为 0. 若 $[X^{(j)}, X^{(k)}]=0$, $j\neq k$, $j,k=1,\cdots,n$, 则 $X^{(1)},\cdots\cdots,X^{(n)}$ 为相互独立的.

证明 先考虑 $n=2$ 的情形. 由假设 $\Delta X^{(1)}\Delta X^{(2)}=0$, $\langle (X^{(1)})^c, (X^{(2)})^c\rangle=0$, 令 $Z^{(k)}=\dfrac{e^{iu_kX^{(k)}}}{\varphi^{(k)}(u_k)}$ $k=1, 2$. 易见 $\Delta Z^{(1)}\Delta Z^{(2)}=0$ 且

$$\langle (Z^{(1)})^c, (Z^{(2)})^c\rangle=\left(\frac{iu_1e^{iu_1X_-^{(1)}}}{\varphi^{(1)}(u_1)}\right)\left(\frac{iu_2e^{iu_2X_-^{(2)}}}{\varphi^{(2)}(u_2)}\right)\cdot\langle (X^{(1)})^c,(X^{(2)})^c\rangle=0$$

于是 $[Z^{(1)}, Z^{(2)}]=0$, $Z^{(1)}Z^{(2)}$ 是个鞅,所以有

$$E[e^{i(u_1X_t^{(1)}+u_2X_t^{(2)})}]=E[e^{iu_1X_t^{(1)}}]E[e^{iu_2X_t^{(2)}}]. \tag{43.1}$$

对任意 $n, m\geqslant 1$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, $0=s_0<s_1<\cdots<s_m$, $u_j\in \boldsymbol{R}$, $j=1,\cdots,m$, $v_k\in\boldsymbol{R}$, $k=1, \cdots, m$, 将(43.1)用于 $\sum\limits_{j=1}^{n}u_j(X_{t\wedge t_j}^{(1)}-X_{t\wedge t_{j-1}}^{(1)})$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{m}v_k(X_{t\wedge s_k}^{(2)}-X_{t\wedge s_{k-1}}^{(2)})$ 并令 $t\to\infty$, 可得

$$\begin{aligned}&E\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}u_j(X_{t_j}^{(1)}-X_{t_{j-1}}^{(1)})+i\sum_{k=1}^{m}v_k(X_{s_k}^{(2)}-X_{s_{k-1}}^{(2)})\right\}\right]\\&=E\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}u_j(X_{t_j}^{(1)}-X_{t_{j-1}}^{(1)})\right\}\right]\\&\quad\times E\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}v_k(X_{s_k}^{(2)}-X_{s_{k-1}}^{(2)})\right\}\right],\end{aligned}$$

即 $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ 是相互独立的.

采用归纳法重复上述论证就可对一般的 n 得出定理中所叙述的结论. □

注 定理 11.43 的逆命题也成立. 我们将此留给读者作为练习.

11.44 引理 设 (ξ_n) 为依概率收敛于 ξ 的随机变量序列. 若对每个 n, ξ_n 服从参数 λ_n 的 Poisson 分布律, 则 $\lambda_n\to\lambda$(λ 可能取 0 或

$+\infty$)，且 ξ 服从参数 λ 的 Poisson 分布律(当 $\lambda=0$ 或 $+\infty$，这意味着 ξ 分别以概率 1 取 0 或 $+\infty$)

证明 由假定对 $u\in\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{E}[e^{iu\xi_n}]=\exp\{\lambda_n(e^{iu}-1)\}.$$

若存在子列 $\lambda_{n_k}\to\lambda$，且 λ 有限，则 ξ 服从参数 λ 的 Pisson 分布. 若存在子列 $\lambda_{n_k}\to\infty$，则对任一整数 l

$$\boldsymbol{P}(\xi<l)\leqslant\lim_k\boldsymbol{P}(\xi_{n_k}<l)=\lim_k\sum_{j=0}^{l-1}\frac{\lambda_{n_k}^j}{j!}e^{-\lambda_{n_k}}=0,$$

即 $\boldsymbol{P}(\xi=+\infty)=1$. 总之，必有 $\lambda_n\to\lambda$ 且 ξ 服从参数为 λ 的 Poisson 分布. □

11.45 定理 设 X 为 Lévy 过程，则

$$X_t=X_0+\widetilde{X}_t+\int_{[0,t]\times[|x|>1]}xd\mu-\int_{[0,t]\times[|x|\leqslant 1]}xd(\mu-\nu),\tag{45.1}$$

其中 1) $\widetilde{X}$ 是连续正态独立增量过程，$\widetilde{X}_0=0$；

2) μ 为 X 的跳测度，具有下列性质：

i) 对任一 $\hat{B}\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R})\times\mathscr{B}(E)$，$\mu(\hat{B})$ 服从 Poisson 分布，

ii) 对任一 $n\geqslant1$ 及互不相交的 $\hat{B}_1,\cdots,\hat{B}_n\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E)$，$\mu(\hat{B}_1),\cdots,\mu(\hat{B}_n)$ 相互独立. 此外，若对某个 $s\geqslant0$，$\hat{B}_j\in]s,\infty[\times E$，$j=1,\cdots,n$，则 $(\mu(\hat{B}_1),\cdots,\mu(\hat{B}_n))$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立；

3) $\nu=\boldsymbol{E}[\mu]$ 为 μ 的可料对偶投影，它是 $\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E)$ 上的 σ-有限测度，且对每个 $t>0$，$\nu(\boldsymbol{R}_+\times\{0\})=\nu(\{t\}\times E)=0$，$(x^2\wedge1)*\nu_t<\infty$；

4) X_0，$\widetilde{X}$ 和 μ 相互独立.

同时，我们有

$$\varphi_t(u)=\exp\left\{iuf_t-\frac{1}{2}u^2\beta_t+(e^{iux}-1-iuxI_{[|x|\leqslant1]})*\nu_t\right\},\tag{45.2}$$

其中 $f_t=\boldsymbol{E}[\widetilde{X}_t]$，$\beta_t=\boldsymbol{D}[\widetilde{X}_t]$ 为连续的，β_t 还是递增的，$f_0=\beta_0=0$.

证明 由系 11.35 存在连续函数 g 使 $X-X_0-g\in\mathscr{S}_0$. Lévy

过程 $X-X_0-g$ 与 X_0 独立，且与 X 有同一跳测度，因而可假定 $X\in\mathscr{S}_0$. 由定理 11.36，X 的可料特征$(\alpha,\ \beta,\ \nu)$是非随机的.

$$X_t=\alpha_t+X_t^c+\int_{[0,t]\times[|x|>1]}xd\mu+\int_{[0,t]\times[|x|\leqslant1]}xd(\mu-\nu).$$

取 $\tilde{X}=\alpha+X^c$ 可得(45.1).

$\tilde{X}$ 是一个连续半鞅，其可料特征$(\alpha,\ \beta,\ 0)$为非随机的. 由定理 11.36，$\tilde{X}$ 是 Lévy 过程，再由定理 11.38，$\tilde{X}$ 是正态过程. 1) 成立.

对任一 $\hat{B}\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E)$

$$\boldsymbol{E}[\mu(\hat{B})]=\boldsymbol{M}_\mu(I_{\hat{B}})=\boldsymbol{M}_\nu(I_{\hat{B}})=\nu(\hat{B}).$$

则 3)由定理 11.36 推得.

设 $\hat{B}\in\mathscr{B}(R_+)\times\mathscr{B}(E)$及 $\nu(\hat{B})<\infty$. 令

$$Y=I_{\hat{B}}*\mu,\Lambda=I_{\hat{B}}*\nu.$$

则 Y 为一点过程，Λ 是一连续递增函数且 $Y-\Lambda$ 是一局部鞅. 故由定理 11.42，Y 为 Poisson 过程. 对每个 $t\geqslant0$，Y_t 服从参数 Λ_t 的 Poisson 分布. 由引理 11.44，$\mu(\hat{B})=\lim\limits_{t\to\infty}Y_t$ 也服从 Poisson 分布. 若 $\nu(\hat{B})=\infty$，则由 ν 的 σ-有限性及引理 11.44，$\mu(\hat{B})$ 也服从 Poisson 分布.

设 $\hat{B}_1,\cdots,\hat{B}_n\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E)$为互不相交的. 往证 $\mu(\hat{B}_1)$，$\cdots$，$\mu(\hat{B}_n)$与 $\tilde{X}$ 独立. 显然，可认为 $\nu(B_1)<\infty$，$\cdots$，$\nu(B_n)<\infty$. 令

$$Y^{(j)}=I_{B_j}*\mu,\quad j=1,\cdots,n.$$

我们已知 $Y^{(j)}$，$j=1,\cdots,n$ 为 Poisson 过程. 此外 $\Delta Y^{(j)}\Delta Y^{(k)}=0$，当 $j\neq k$. 故有

$$[Y^{(j)},Y^{(k)}]=0,\quad j\neq k,\quad [Y^{(j)},\tilde{X}]=0,\quad j,k=1,\cdots,n.$$

由定理 11.43，$Y^{(1)}$，$\cdots$，$Y^{(n)}$和 $\tilde{X}$ 相互独立. 因为 $\mu(\hat{B}_j)=\lim\limits_{t\to\infty}Y_t^{(j)}$，$j=1$，$\cdots$，$n$，我们可得到要求的结论. 进而，若对某个 $s\geqslant0$，$\hat{B}_j\subset]s,\infty[\times E$，$j=1,\cdots,n$，则 $\mu(\hat{B}_j)=\lim\limits_{t\to\infty}(Y_t^{(j)}-Y_s^{(j)})$，$j=1,\cdots,n$，于是$(\mu(\hat{B}_1),\cdots,\mu(\hat{B}_n))$与 $\mathscr{F}_s$ 独立，这样 2)，4)都获得证明.

最后，由(45.1)及(37.1)可推出(45.2). □

(45.1)就是著名的 Lévy 过程的 **Lévy-Itô 分解**. 我们也称(45.2)中的(f,β,ν)为 **Lévy 过程 X 的特征**. Lévy 过程的分布律由其初始分布与特征唯一确定. 下面两个定理说明 Lévy-Itô 分解的应用.

11.46 定理 设 X 为一 Lévy 过程, $X_0=0$.

1) 若 X 为一半鞅且 $E[|X_t|]<\infty$, $t>0$, 则 X 为特殊半鞅.

2) 若 X 为特殊半鞅, 则 $E[|X_t|]<\infty$, $t>0$.

3) 若 X 为局部鞅, 则 X 为鞅.

证明 1) 因为$(X_t-E[X_t])$为鞅, 故 $E[X_t]$是半鞅, 因而 $E[X_t]$是一个有限变差函数且 $X_t=(X_t-E[X_t])+E[X_t]$是一个特殊半鞅.

2) 由系 11.26, $(xI_{[|x|>1]})*\mu\in\mathscr{A}_{loc}$, 于是 $xI_{[|x|>1]}*\nu\in\mathscr{A}_{loc}$, 所以 $Y=xI_{[|x|>1]}*(\mu-\nu)\in W_{loc}$, 且对每个 $s>0$, $Y^s=(Y_{s\wedge t})_{t\geqslant 0}\in W$. 由定理 11.21.3)

$$\langle(xI_{[|x|\leqslant 1]})*(\mu-\nu)\rangle=(x^2I_{[|x|\leqslant 1]})*\nu.$$

因此 $Z=(xI_{[|x|\leqslant 1]})*(\mu-\nu)\in\mathscr{M}^2_{loc}$ 且对每 $s>0$, $Z^s\in\mathscr{M}^2$. 同样地, 因为$\langle X^c\rangle=\beta$, 对所有 $s\geqslant 0$, $(X^c_{s\wedge t})_{t\geqslant 0}\in\mathscr{M}^2$. 但我们有

$$X_t=X^c_t+Y_t+Z_t+\alpha_t+(xI_{[|x|>1]})*\nu_t,\qquad(46.1)$$

故对所有 $s>0$, $E[|X_s|]<\infty$.

3) 在此情形下由典则分解唯一性在(46.1)中有 $\alpha+(xI_{[|x|>1]})*\nu=0$. 于是对所有 $s>0$, $X^s\in\mathscr{M}$, 即 X 是鞅. □

11.47 定理 设 X 为一 Lévy 过程且 ΔX 有界, 则对所有 $p>0$ 及 $0\leqslant s<t$ 成立

$$E[|X_t-X_s|^p]<\infty$$

证明 不失一般性可设 $X_0=0$ 及$|\Delta X|\leqslant 1$. 只需证明对所有 $t>0$, $E[|X_t|^p]<\infty$. 我们有

$$\varphi_t(u)=\exp\left\{iu\alpha_t-\frac{1}{2}u^2\beta_t\right.$$
$$\left.+\int_{[0,t]\times[|x|\leqslant 1]}(e^{iux}-1-iux)d\nu\right\}.$$

对任一正整数 m

$E[|X_t|^{2m}]<\infty\Leftrightarrow\varphi_t^{(2m)}(0)$ 存在且有限

$$\Leftrightarrow\frac{d^{2m}}{du^{2m}}([I_{[|x|\leqslant 1]}(e^{iux}-1-iux)]*\nu_t)\text{ 存在且有限}$$

$$\Leftrightarrow\int_{[0,t]\times[|x|\leqslant 1]}x^{2m}d\nu<\infty.$$

但是

$$\int_{[0,t]\times[|x|\leqslant 1]}x^{2m}d\nu\leqslant\int_{[0,t]\times[|x|\leqslant 1]}x^2d\nu<\infty,$$

于是 $E[|X_t|^{2m}]<\infty$. □

§4. 跳跃过程

11.48 定义 随机过程 X 称为**跳跃过程**(或称**阶梯过程**),若其轨道是右连左极阶梯函数且在每个有限区间至多只含有限个跳跃,即 X 可表为:

$$X=X_0+\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n I_{[T_n,\infty[},\tag{48.1}$$

其中 1)$T_n\uparrow\infty$; 2) 对每个 $n\geqslant 0$, $T_n<\infty\Rightarrow T_n<T_{n+1}$(按约定 $T_0=0$); 3) 对每个 $n\geqslant 1$, $\xi_n\neq 0\Leftrightarrow T_n<\infty$. 事实上, 对 $n\geqslant 1$, T_n 是 X 的第 n 个跳时:

$$T_n=\inf\{t>T_{n-1}: X_t\neq X_{T_{n-1}}\},\quad n\geqslant 1,$$

而 $\xi_n=\Delta X_{T_n}I_{[T_n<\infty]}$是 X 的第 n 个跳跃的跃度.

易见,跳跃过程 X 为适应的当且仅当每个 T_n 是停时且 $\xi_n\in\mathscr{F}_{T_n}$.

回忆自然流 $\boldsymbol{F}^0(X)=(\mathscr{F}_t^0(X))$的定义为

$$\mathscr{F}_t^0(X)=\sigma\{X_s,s\leqslant t\}=\sigma\{X_{s\wedge t},s\geqslant 0\},\quad t\geqslant 0.$$

对每个 $n\geqslant 0$,我们有

$\mathscr{F}_t^0(X)\cap[T_n\leqslant t<T_{n+1}]=\sigma\{X_{s\wedge T_n},s\geqslant 0\}\cap[T_n\leqslant t<T_{n+1}]$,

因为在$[T_n\leqslant t<T_{n+1}]$上,对所有 $s\geqslant 0$ 有 $X_{s\wedge t}=X_{s\wedge T_n}$. 显然

$$\sigma\{X_{s\wedge T_n}, s\geqslant 0\} = \sigma\{X_0, T_1, \cdots, T_n, \xi_1, \cdots, \xi_n\}, n\geqslant 1.$$

记$\mathscr{G}_n=\sigma\{X_0, T_1, \cdots, T_n, \xi_1, \cdots, \xi_n\}$, $n\geqslant 1$ 和$\mathscr{G}_0=\sigma\{X_0\}$. 于是

$$\mathscr{F}_t^0(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(\mathscr{G}_n \cap [T_n \leqslant t < T_{n+1}]), \quad t\geqslant 0.$$

我们还有

$$\mathscr{G}_n \cap [T_{n+1} = \infty] = \mathscr{G}_\infty \cap [T_{n+1} = \infty], \quad n\geqslant 0.$$

因而 $\boldsymbol{F}^0(X)$是第五章 § 5 讨论过的离散型流，我们将利用那里的所有结果. 例如，由定理 5.56 可知对所有 $\boldsymbol{F}^0(X)$停时 T 有

$$\mathscr{F}_T^0(X) = \sigma\{X_{s\wedge T}, s\geqslant 0\}.$$

在这一节的其余部分，都给定一个跳跃过程 X，而流 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$就取为 X 的完备化的自然流$\boldsymbol{F}^P(X)$. $\boldsymbol{F}^0(X)=(\mathscr{F}_t^0(X))$就简单地记为$\boldsymbol{F}^0=(\mathscr{F}_t^0)$. X 的跳测度以 μ 表示：

$$\mu(dt, dx) = \sum_{n=1}^{\infty}\delta_{(T_n, \xi_n)}(dt, dx)I_{[T_n<\infty]}.$$

显然，

$$X = X_0 + x * \mu.$$

11.49 定理 对每个 $n\geqslant 0$，设$G_n(dt, dx)$为(T_{n+1}, ξ_{n+1})关于$\mathscr{F}_{T_n}$的条件分布：

$$G_n(dt, dx) = \boldsymbol{P}[T_{n+1}\in dt, \xi_{n+1}\in dx \mid \mathscr{F}_{T_n}].$$

令

$$H_n(dt) = G_n(dt, E) = \boldsymbol{P}[T_{n+1}\in dt \mid \mathscr{F}_{T_n}].$$

则 μ 的可料对偶投影为：

$$\nu(dt, dx) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{G_n(dt, dx)}{H_n([t, \infty])}I_{[T_n<t\leqslant T_{n+1}]}. \tag{49.1}$$

证明 首先，我们指出(49.1)是有意义的. 事实上，令 $S_{n+1}=\inf\{t: H_n([t, \infty])=0\}$，则 $S_{n+1}\in\mathscr{F}_{T_n}$，$H_n(]S_{n+1}, \infty])=0$，对 $t<S_{n+1}$，$H_n([t, \infty])>0$ 且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(T_{n+1} > S_{n+1}) &= \boldsymbol{E}[\boldsymbol{P}[T_{n+1} > S_{n+1} \mid \mathscr{F}_{T_n}]] \\ &= \boldsymbol{E}[H_n(]S_{n+1}, \infty])] = 0.\end{aligned}$$

于是 $T_{n+1} \leqslant S_{n+1}$ a. s.. 当 $t < T_{n+1}$, a. s. 或者 $t < S_{n+1}$, $H_n([t, \infty])>0$ 或者 $t = S_{n+1}$. 在后一情况，若 $H_n([S_{n+1}, \infty])=0$, 即 $H_n(\{S_{n+1}\})=0$, 则 $G_n(\{S_{n+1}\}, dx)=0$. 所以 ν 是有意义的. 由定理 5.55. 2) ν 是可料随机测度.

为证 $\nu=\widetilde{\mu}$, 由于单调类定理，只需证明对任一 $B\in\mathscr{B}(E)$, $I_B*\nu$ 是 $I_B*\mu$ 的可料对偶投影. 显然 $I_B*\mu\in\mathscr{A}^+_{loc}$, 因为 $I_B*\mu_{T_n}=\mu([0, T_n]\times B)\leqslant n$. 因而只要证明对任一停时 T 及 $n\geqslant 0$ 有

$$E[\mu([0, T\wedge T_{n+1}]\times B)]=E[\nu([0, T\wedge T_{n+1}]\times B)].$$

但我们有

$$\mu([0, T\wedge T_{n+1}]\times B)=\sum_{k=0}^{n} I_{[T_k\leqslant T]}\mu(]T_k, T_{k+1}\wedge T]\times B).$$

关于 ν 亦有同样的表示式. 现在只需证明

$$\begin{aligned}&E[I_{[T_n\leqslant T]}\mu(]T_n, T_{n+1}\wedge T]\times B)]\\ &=E[I_{[T_n\leqslant T]}\nu(]T_n, T_{n+1}\wedge T]\times B)], \quad n\geqslant 0. \quad (49.2)\end{aligned}$$

由定理 5.54 存在 $R_n\in\mathscr{F}_{T_n}$ 使 $T\wedge T_{n+1}=R_n\wedge T_{n+1}$. 于是

$$\begin{aligned}\nu(]T_n, T_{n+1}]\times B)&=\int_{T_n}^{T_{n+1}\wedge T}\frac{G_n(dt, B)}{H_n([t, \infty])}\\ &=\int_{T_n}^{T_{n+1}\wedge R_n}\frac{G_n(dt, B)}{H_n([t, \infty])},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&E\{T_{[T_n\leqslant T]}\nu(]T_n, T_{n+1}\wedge T]\times B)\}\\ &=E\left\{I_{[T_n\leqslant T]}E\left[\int_{T_n}^{T_{n+1}\wedge R_n}\frac{G_n(ds, B)}{H_n([s, \infty])}\,\middle|\,\mathscr{F}_{T_n}\right]\right\}\\ &=E\left\{I_{[T_n\leqslant T]}\int_{T_n}^{\infty}H_n(dt)\int_{T_n}^{t\wedge R_n}\frac{G_n(ds, B)}{H_n([s, \infty])}\right\}\\ &=E\left\{I_{[T_n\leqslant T]}\int_{T_n}^{\infty}H_n(dt)\int_{T_n}^{\infty}I_{[s\leqslant R_n]}I_{[s\leqslant t]}\frac{G_n(ds, B)}{H_n([s, \infty])}\right\}\\ &=E\left\{I_{[T_n\leqslant T]}\int_{T_n}^{\infty}I_{[s\leqslant R_n]}\frac{G_n(ds, B)}{H_n([s, \infty])}H_n([s, \infty])\right\}\\ &=E\left\{I_{[T_n\leqslant T]}\int_{T_n}^{\infty}I_{[s\leqslant R_n]}G_n(ds, B)\right\}.\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\{I_{[T_n\leqslant T]}\mu(]T_n, T_{n+1}\wedge T]\times B)\}\\
&=\boldsymbol{E}\{I_{[T_n\leqslant T]}\mu(]T_n, T_{n+1}\wedge R_n]\times B)\}\\
&=\boldsymbol{E}\{I_{[T_n\leqslant T]}I_{[R_n\geqslant T_{n+1}, \xi_{n+1}\in B]}\}\\
&=\boldsymbol{E}\{I_{[T_n\leqslant T]}\boldsymbol{P}[R_n\geqslant T_{n+1}, \xi_{n-1}\in B|\mathscr{F}_{T_n}]\}\\
&=\boldsymbol{E}\left\{I_{[T_n\leqslant T]}\int_{T_n}^{\infty}I_{[R_n\geqslant s]}G_n(ds, B)\right\}.
\end{aligned}$$

由此，(49.2)成立. □

11.50 注 1) (49.1)也可由定理 5.69 推出. 由于它的重要性，我们在此给出它的详细证明.

2) 在(49.1)中，可取 $G_n(dt, dx)$ 为 (T_{n+1}, ξ_{n+1}) 关于 $\mathscr{F}^0_{T_n}$ 的条件分布，即我们可考虑可料对偶投影 ν 为 $\boldsymbol{F}^0$-可料随机测度.

3) 对任一 $B\in\mathscr{B}(E)$，$G_n(dt, B)\ll H_n(dt)$，故

$$G_n(\omega, dt, B)=Q_n(\omega, t, B)H_n(\omega, dt),$$

其中 $G_n(\omega, dt, B)$ 关于 $H_n(\omega, dt)$ 的 Radon-Nikodym 导数 $Q_n(\omega, t, B)$ 可取得对固定的 (ω, t)，$Q_n(\omega, t, \cdot)$ 是 $\mathscr{B}(E)$ 上的概率测度，而固定 $B\in\mathscr{B}(E)$，$Q_n(\cdot, \cdot, B)$ 是 $\mathscr{F}_{T_n}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$-可测的，即 $Q_n(\omega, t, dx)$ 是 $(\Omega\times\boldsymbol{R}_+, \mathscr{F}_{T_n}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+))$ 到 $(E, \mathscr{B}(E))$ 的转移概率测度. 事实上，在 $\{T_n<\infty\}$ 上我们有

$$Q_n(T_{n+1}, dx)=\boldsymbol{P}[\xi_{n+1}\in dx|\mathscr{F}_{T_{n+1}}]\quad \text{a.s.}. \tag{50.1}$$

为说明这一点，取 $B\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 及 $C\in\mathscr{F}_{T_n}$，则有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}([T_{n+1}\in D, \xi_{n+1}\in B]\cap C)\\
&=\int_C G_n(D\times B)d\boldsymbol{P}\\
&=\int_C\left[\int_D Q_n(t, B)H_n(dt)\right]d\boldsymbol{P}\\
&=\int_C \boldsymbol{E}[Q_n(T_{n+1}, B)I_{[T_{n+1}\in D]}|\mathscr{F}_{T_n}]d\boldsymbol{P}\\
&=\int_{[T_{n+1}\in D]\cap C}Q_n(T_{n+1}, B)d\boldsymbol{P}.
\end{aligned}$$

由系 5.57，$\mathscr{F}_{T_{n+1}-}=\mathscr{F}_{T_n}\vee\sigma\{T_{n+1}\}$. 所以(50.1)成立.

取

$$Q(t,dx)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(t,dx)I_{[T_n<t\leqslant T_{n+1}]},$$

$$\Lambda(dt)=\nu(dt,E)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(dt)}{H_n([t,\infty])}I_{[T_n<t\leqslant T_{n+1}]}.$$

则

$$\nu(dt,dx)=Q(t,dx)\Lambda(dt), \tag{50.2}$$

其中 $\Lambda_t=\Lambda([0,t])=\nu([0,t]\times E)$ 为计数过程 $\mu([0,t]\times E)=\sum_{n=1}^{\infty}I_{[T_n\leqslant t]}$ 的可料对偶投影，$Q(\omega,t,dx)$ 是 $(\Omega\times\boldsymbol{R}_+,\mathscr{P})$ 到 $(E,\mathscr{B}(E))$ 的转移概率. (50.2)有清楚的概率含义，且常被用到.

4) 若 $\Lambda(dt)\ll dt$(Lebesgue 测度)，则存在非负可料过程(λ_t)满足

$$\Lambda(dt)=\lambda_t dt.$$

(λ_t)称为**计数过程** $\sum_{n=1}^{\infty}I_{[T_n,\infty[}$ **的强度**. 这时

$$\nu(dt,dx)=\lambda_t Q(t,dx)dt.$$

$\lambda(t,dt)=\lambda_t Q(t,dt)$也称为**跳跃过程 X 的强度**.

11.51 例 设 X 为一以 $\boldsymbol{Z}$ 为状态空间的规则时齐 Markov 链，$Q=(q_{ij})$为其密度阵：

$$0\leqslant q_i=-q_{ii}=\sum_{j\neq 1}q_{ij}<\infty.$$

设(r_{ij})为其跳跃链的转移概率阵：

$$r_{ij}=\begin{cases}(1-\delta_{ij})\dfrac{q_{ij}}{q_i}, & \text{若 } q_i>0,\\ \delta_{ij}, & \text{若 } q_i=0.\end{cases}$$

在$[T_n<\infty]$上对 $j\neq 0$ 有

$$G_n(dt,\{j\})=q_{X_{T_n}}e^{-q_{X_{T_n}}(t-T_n)}I_{]T_n,\infty[}r_{X_{T_n},X_{T_{n+j}}}dt.$$

对 $t>T_n$ 有

$$H_n([t,\infty])=e^{-q_{X_{T_n}}(t-T_n)}.$$

由(49.1)对 $j\neq 0$ 有

$$\nu(dt, \{j\}) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{X_{T_n}} r_{X_{T_n}, X_{T_n}+j} I_{]T_n, T_{n+1}]}(dt)$$

$$= q_{X_{t-}, X_{t-}+j}\, dt. \tag{51.1}$$

设 $u(j)$ 为定义在 $\mathbf{Z}$ 上的函数使得对所有 i 成立:

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} |u(j)| < \infty.$$

记

$$(Qu)(i) = \sum_{j} q_{ij} u(j).$$

由直接计算可得

$$u(X_t) - u(X_0) = \int_{[0,t]\times E} [u(X_{s-}+x) - u(X_{s-})]\mu(ds, dx),$$

因为在 $[T_{n+1}<\infty]$ 上

$$u(X_{T_{n+1}}) - u(X_{T_n}) = \int_{]T_n, T_{n+1}]\times E} [u(X_{s-}+x) - u(X_{s-})]\mu(ds, dx).$$

另一方面,由(51.1)

$$\int_{[0,t]\times E} [u(X_{s-}+x) - u(X_{s-})]\nu(ds, dx)$$

$$= \int_0^t \sum_{j\neq 0} [u(X_{s-}+j) - u(X_{s-})] q_{X_{s-}, X_{s-}+j}\, ds$$

$$= \int_0^t \Big[\sum_{j\neq X_{s-}} q_{X_{s-}, j} u(j) + q_{X_{s-}, X_{s-}} u(X_{s-}) \Big] ds$$

$$= \int_0^t (Qu)(X_{s-}) ds$$

$$= \int_0^t (Qu)(X_s) ds.$$

这样我们得到下列熟知的结果:下列过程是一个局部鞅,

$$u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t (Qu)(X_s) ds$$

$$= \int_{[0,t]\times E} [u(X_{s-}+x) - u(X_{s-})] d(\mu - \nu).$$

11.52 定义 设 H 为 $]0, \infty]$ 上的一个概率测度. 规定

$$t_H = \inf\{t : H([t, \infty]) = 0\},$$

$$\Phi(H) = \begin{cases} [0, t_H], & \text{当 } t_H < \infty \text{ 且 } H(\{t_H\}) > 0, \\ [0, t_H[, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$F_H(t) = \int_0^t \frac{H(ds)}{H([s, \infty])}, t \geqslant 0.$$

显然, $F_H(t)$ 在 $\boldsymbol{R}_+$ 上单调递增, $F_H(0) = 0$. 若 $t < t_H$, 则因 $H(]t, \infty]) > 0$, 有

$$F_H(t) = \int_0^t \frac{H(ds)}{H([s, \infty])} \leqslant \frac{H([0, t])}{H([t, \infty])} < \infty,$$

$$\Delta F_H(t) = \frac{H(\{t\})}{H([t, \infty])} < 1.$$

由 Doléans-Dade 指数公式

$$H(]t, \infty]) = e^{-F_H^c(t)} \prod_{s \leqslant t} (1 - \Delta F_H(s)), \quad t \in [0, t_H[.$$

于是

$$H([0, t]) = \begin{cases} 1 - e^{-F_H^c(t)} \prod_{s \leqslant t} (1 - \Delta F_H(s)), & t < t_H, \\ 1, & t \geqslant t_H. \end{cases} \tag{52.1}$$

其中 $F_H^c(t)$ 是 $F_H(t)$ 的连续部分.

若 $F(\{t_H\}) > 0$,

$$F_H(t_H) \leqslant \frac{H([0, t_H])}{H(\{t_H\})} < \infty.$$

若同时还有 $t_H < \infty$, 则

$$\Delta F_H(t_H) = \frac{H(\{t_H\})}{H([t_H, \infty])} = 1,$$

$$F_H(t) = F_H(t_H), \qquad t \geqslant t_H.$$

若 $H(\{t_H\}) = 0$, 由(52.1)有

$$0 = H(\{t_H\}) = e^{-F_H^c(t_H-)} \prod_{s < t_H} (1 - \Delta F_H(s)).$$

于是或者 $F_H^c(t_H-) = +\infty$ 或者 $\prod_{s < t_H} (1 - \Delta F_H(s)) = 0$, 即 $\sum_{s < t_H} F_H(s) =$

∞. 总之,$F_H(t_H-)=\infty$ 且 $F_H(t)=\infty$, 当 $t>t_H$.

11.53 引理 设 H 和 H' 是 $]0,\infty]$ 上两个概率测度. 若当 $t\in\Phi(H)\cap\Phi(H')$ 时 $F_H(t)=F_{H'}(t)$, 则 $H=H'$.

证明 若 $t_H<t_{H'}$, 则对 $t<t_H$ 有 $F_H(t)=F_{H'}(t)$. 这时 $F_H(t_H-)=F_{H'}(t_H-)<\infty$, $H(\{t_H\})>0$ 且 $t_H\in\Phi(H)$. 因而当 $t\leqslant t_H$ 时 $F_H(t)=F_{H'}(t)$. 由于 $t_H<\infty$, $\Delta F_{H'}(t_H)=\Delta F_H(t_H)=1$ 且 $H'(]t_H,\infty])=0$. 这与 $t_{H'}>t_H$ 相矛盾, 所以 $t_H<t_{H'}$ 不成立. 由对称性必须有 $t_H=t_{H'}$. 于是由(52.1)有 $H=H'$. □

11.54 定理 设 P' 是 $\mathscr{F}^0_\infty$ 上另一个概率, 满足

i) $P'|_{\mathscr{F}^0_0}=P|_{\mathscr{F}^0_0}$,

ii) 在 P' 下 ν(取为 F^0 可料的)仍保持为 μ 的可料对偶投影. 则

$$P'|_{\mathscr{F}^0_\infty}=P|_{\mathscr{F}^0_\infty}.$$

证明 运用归纳法只需证明若 $P'|_{\mathscr{F}^0_{T_n}}=P|_{\mathscr{F}^0_{T_n}}$, 则必有 $P'|_{\mathscr{F}^0_{T_{n+1}}}=P|_{\mathscr{F}^0_{T_{n+1}}}$. 因为 $\mathscr{F}^0_{T_{n+1}}=\mathscr{F}^0_{T_n}\vee\sigma\{T_{n+1},\xi_{n+1}\}$, 只需证明在 P 和 P' 下我们有

$$\begin{aligned}G_n(dt,dx)&=P[T_{n+1}\in dt,\ \xi_{n+1}\in dx\mid\mathscr{F}^0_{T_n}]\\&=P'[T_{n+1}\in dt,\ \xi_{n+1}\in dx\mid\mathscr{F}^0_{T_n}]\\&=G'_n(dt,dx),\quad\text{a.s.}.\end{aligned}\tag{54.1}$$

由于 $\mathscr{F}^0_{T_{n-1}}\cap[T_n=\infty]=\mathscr{F}^0_{T_n}\cap[T_n=\infty]$, 故只需证明(54.1)在 $\Omega_n=[T_n<\infty]$ 上成立. 首先证明在 Ω_n 上

$$\begin{aligned}H_n(]T_n,t])&=G_n(]T_n,t]\times E)\\&=G'_n(]T_n,t]\times E)\\&=H'_n(]T_n,t]).\end{aligned}$$

我们采用下列简化的记号:

$H(]0,t])=H_n(]T_n,T_n+t])$, $\quad H'(]0,t])=H'_n(]T_n,T_n+t])$

$F(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{H(ds)}{H([s,\infty])}$, $\quad F'(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{H'(ds)}{H'([s,\infty])}$

$T=\inf\{t:H([t,\infty])=0\}$, $\quad T'=\inf\{t:H'([t,\infty])=0\}$,

$\Phi=\Phi(H)$, $\quad \Phi'=\Phi(H')$.

由定理5.55.2) 存在过程 $B\in\mathscr{F}^0_{T_n}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$ 使在 $]\!]T_n, T_{n+1}]\!]$ 上有 $1*\nu=B$. 记 $C(t)=B_{T_n+t}-B_{T_n}$, $t\geqslant0$. 则

$$\boldsymbol{P}(\Omega_n\cap[F(t)=C(t), t\leqslant T_{n+1}-T_n])=\boldsymbol{P}(\Omega_n).$$

注意到 $F(t)$ 和 $C(t)$ 都是 $\mathscr{F}^0_{T_n}$-可测的，对任一固定的 $t>0$ 我们有

$$0=\boldsymbol{P}([F(t)\neq C(t), t\leqslant T_{n+1}-T_n]\Omega_n)$$
$$=\boldsymbol{E}[I_{[F(t)\neq C(t)]}H([t,\infty])I_{\Omega_n}].$$

但对 $t\in\Phi$ 有 $H([t,\infty])>0$, 故

$$\boldsymbol{P}([F(t)\neq C(t)]\cap[T\in\Phi]\cap\Omega_n)=0. \qquad (54.2)$$

由于 T 也是 $\mathscr{F}^0_{T_n}$-可测的，用同样的论证得到

$$\boldsymbol{P}([F(T)\neq C(T)]\cap[T\in\Phi]\cap\Omega_n)=0. \qquad (54.3)$$

记 $A=[F(t)=C(t), \forall t\in\Phi]\cap\Omega_n$, 则 $A\in\mathscr{F}^0_{T_n}$ 且

$$A^c\Omega_n\subset\{(\bigcup_{r\in Q_+}[F(r)\neq C(r), r\in\Phi])$$
$$\cup[F(T)\neq C(T), T\in\Phi]\}\Omega_n.$$

由(54.2)及(54.3)我们有 $\boldsymbol{P}(A)=\boldsymbol{P}(\Omega_n)$ 和 $\boldsymbol{P}'(A')=\boldsymbol{P}(A)=\boldsymbol{P}(\Omega_n)=\boldsymbol{P}'(\Omega_n)$.

记 $A'=[F'(t)=C(t), \forall t\in\Phi']\cap\Omega_n$. 用同样的论证可得 $\boldsymbol{P}(A)=\boldsymbol{P}'(A')=\boldsymbol{P}(\Omega_n)=\boldsymbol{P}(\Omega_n)$ 且 $\boldsymbol{P}(AA')=\boldsymbol{P}'(AA')=\boldsymbol{P}'(\Omega_n)=\boldsymbol{P}(\Omega_n)$. 在 AA' 上，对所有 $t\in\Phi\cap\Phi'$ 有 $F(t)=F'(t)$. 由引理11.53 $H=H'$, 即 $H_n=H'_n$.

对任一 $B\in\mathscr{B}(E)$, 上述已建立的结果可用于 $G_n(]T_n, t]\times B)$ 和 $G'_n(]T_n, t]\times B)$. 因为 $\mathscr{B}(E)$ 是可列生成的，不难看出在 Ω_n 上(54.1)在 $\boldsymbol{P}$ 或 $\boldsymbol{P}'$ 下都成立. □

显然，跳跃过程 X 是一个半鞅，其可料特征为 $((xI_{[|x|\leqslant1]})*\nu, 0, \nu)$. 定理11.54表明跳跃过程的分布律由其初始分布和Lévy族唯一确定.

11.55 定义 设 $N=\sum_{n=1}^{\infty}I_{[\![T_n,\infty[\![}$ 为一个点过程，即 $(T_n)_{n\geqslant1}$ 为一个递增非负随机变量序列满足 $T_n\uparrow\infty$ 且对每个 $n\geqslant0$, $T_n<\infty\Rightarrow T_n<T_{n+1}$ $(T_0=0)$. 设 $(\xi_n)_{n\geqslant1}$ 为另一随机变量序列. $(T_n, \xi_n)_{n\geqslant1}$ 称

为**标值点过程**(或**多元点过程**). 事实上,一个标值点过程不是通常含义下的过程. 只是当对每个 $n\geqslant 1$ $T_n=\infty \Leftrightarrow \xi_n=0$ 时,$(T_n,\xi_n)_{n\geqslant 1}$ 和跳跃过程 $X=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n I_{[T_n,\infty[}$ 可相互确定.

对一个标值点过程 $(T_n,\xi_n)_{n\geqslant 1}$,我们仍规定

$$\mathscr{F}_t^0=\bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathscr{G}_n\cap[T_n\leqslant t<T_{n+1}]),\quad t\geqslant 0,$$

$$\mathscr{G}_n=\sigma\{T_1,\cdots,T_n,\xi_1,\cdots,\xi_n\},\ n\geqslant 1,\ (\mathscr{G}_0 \text{ 是任意的}),$$

且称 $\boldsymbol{F}^0=(\mathscr{F}_t^0)$ 为它的**自然流**. 亦可由(48.1)规定它的跳测度. 不难看出,对标值点过程,即使其初始 σ 域 $\mathscr{G}_0$ 不是平凡 σ-域而是一般的 σ-域,两个主要的定理 11.49 和 11.54 仍保持成立. □

问题与补充

11.1 设 μ 和 ν 是两个可选(可料)且可选(可料)σ-可积随机测度.

1) 下列论断等价

i) $\boldsymbol{P}(\{\omega: \mu(\omega,\cdot)\ll\nu(\omega,\cdot)\})=1$,

ii) 在 $\tilde{\mathscr{F}}$ 上,$\boldsymbol{M}_\mu\ll\boldsymbol{M}_\nu$,

iii) 在 $\tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\mathscr{P}})$ 上,$\boldsymbol{M}_\mu\ll\boldsymbol{M}_\nu$,

iv) $\mu=W.\nu$,其中 $W\in\tilde{\mathscr{O}}^+(\tilde{\mathscr{P}}^+)$.

2) 下列论断等价:

i) $\boldsymbol{P}(\{\omega: \mu(\omega,\cdot)\perp\nu(\omega,\cdot)\})=1$,

ii) 在 $\tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\mathscr{P}})$ 上,$\boldsymbol{M}_\mu\perp\boldsymbol{M}_\nu$,

iii) 在 $\tilde{\mathscr{F}}$ 上,$\boldsymbol{M}_\mu\perp\boldsymbol{M}_\nu$.

11.2 设 μ 为一整值随机测度,ν 为其可料对偶投影. 若 μ 为拟左连续的,即 μ 的支集绝不可及,则 $W\mapsto W*(\mu-\nu)$ 是 $L^2(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{P}},\boldsymbol{M}_\nu)$ 到 $\mathscr{M}^{2,d}$ 的等距映照.

11.3 设半鞅 X 以 (α,β,ν) 为可料特征,则 $X\in\mathscr{U}_{\mathrm{loc}}(\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}})$

当且仅当$(|x|I_{[|x|>1]})*\nu\in\mathscr{A}^+_{loc}$($x^2*\nu\in\mathscr{A}^+_{loc}$)且$\alpha=-(xI_{[|x|>1]})*\nu$.

11.4 设半鞅X以(α,β,ν)为可料特征. 则 1) $X\in\mathscr{V}\Leftrightarrow(|x|\wedge 1)*\nu\in\mathscr{A}^+_{loc}$且$\beta=0$; 2) $X\in\mathscr{V}^+\Leftrightarrow(|x|\wedge 1)*\nu\in\mathscr{A}^+_{loc}$, $\beta=0$, $\nu(R_+\times[x>0])=0$且$\alpha^c\geqslant(xI_{[x\leqslant 1]}I_{[\alpha\neq 0]})*\nu$. 其中$\alpha^c$是$\alpha$的连续部分; 3) $X\in\mathscr{A}_{loc}\Leftrightarrow|x|*\nu\in\mathscr{A}^+_{loc}$且$\beta=0$.

11.5 设X为一半鞅, 则

1) $D=\{t: P(\Delta X_t\neq 0)>0\}$至多为一可列集,

2) $X=X'+X''$, 其中X'是一随机连续半鞅, $X''_t=\sum\limits_{0<s\leqslant t,s\in D}\Delta X_s$(这一级数依概率绝对收敛).

11.6 设X为一Lévy过程, μ为它的跳测度, ν为其Lévy族. 又$f(t,x)$为$R_+\times E$上Borel函数. 若$\forall\ t>0\ I_{[f\neq 0]}*\nu_t<\infty$或$\forall\ t>0\ |f|*\nu_t<\infty$, 则$Y=f*\mu$也是Lévy过程, 且

$$E[e^{iuY_t}]=\exp\left\{\int_{[0,t]\times E}(e^{iuf(s,x)}-1)\nu(ds,dx)\right\}.$$

11.7 设X是以(f,β,ν)为特征的Lévy过程.

1) $X\in\mathscr{V}^+$当且仅当$\beta=0$, $\nu(R_+\times]-\infty,0])=0$且$\forall\ t>0$ $xI_{[0<x\leqslant 1]}*\nu_t<\infty$, $\bar{f}_t=f_t-(xI_{[0<x\leqslant 1]})*\nu_t$为单调递增函数. 这时

$$\varphi_t(u)=\exp\left\{i\bar{f}_tu+\int_{[0,t]\times[x>0]}(e^{iux}-1)d\nu\right\}.$$

2) $X\in\mathscr{V}$当且仅当$\beta=0$, $\forall\ t>0(|x|I_{[|x|\leqslant 1]}*\nu_t)<\infty$且$\bar{f}_t=f_t-(xI_{[|x|\leqslant 1]})*\nu_t$是一个有限变差函数, 这时

$$\varphi_t(u)=\exp\left\{i\bar{f}_tu+\int_{[0,t]\times E}(e^{iux}-1)d\nu\right\}.$$

此外, $\bar{Y}_t=\int_{s\in[0,t]}|dY_s|$, $t\geqslant 0$, 也是一个Lévy过程, 且

$$E[e^{iu(Y_t-Y_0)}]=\exp\left\{iu\int_0^t|d\bar{f}_s|+\int_{[0,t]\times E}(e^{iux}-1)d\nu\right\}.$$

11.8 设X为Lévy过程, ν为其Lévy族. 则X为跳跃过程当且仅当$\forall\ t\ \nu([0,t]\times E)<\infty$且

$$\varphi_t(u)=\exp\left\{\int_{[0,t]\times E}(e^{iux}-1)d\nu\right\}.$$

11.9 设 X 为一连续 Lévy 过程且 $X_0=0$，则 X 是正态过程.

11.10 设 X 为一 Lévy 过程，$X_0=0$，则 X 为 Poisson 过程当且仅当 X 是点过程.

11.11 设 X 为点过程，A 为其补偿，$A_\infty=\infty$. 设(τ_t)为与 A 相联系的时变，则(X_{τ_t})是参数为 1 关于$(\mathscr{F}_{\tau_t})$的 Poisson 过程.

11.12 设 μ 是整值随机测度，又 m 为$(\boldsymbol{R}_+\times E,\mathscr{B}(E))$上 σ-有限测度，$\forall\, t>0$ $m(\{t\}\times E)=0$. 若 m 是 μ 的补偿子，则

i) $m=\boldsymbol{E}[\mu]$，

ii) 对每个 $B\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E)$，$\mu(B)$服从 Poisson 分布，

iii)对任何互不相交 $B_1,\cdots,B_n\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E)$及某个 s，$B_i\in\,]s,\infty[\,\times E$，$i=1,\cdots,n$，$\mu(B_1),\cdots,\mu(B_n)$与 $\mathscr{F}_s$ 相互独立.

11.13 设 $B=(B_t)$为一标准 Brown 运动. 令

$$\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_t\vee\sigma\{B_1\},\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$W_t=B_t-\int_0^t\frac{B_1-B_s}{1-s}ds,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则$(W_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$是一$(\mathscr{G}_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$-Brown 运动，且

$$B_t=tB_1+(1-t)\int_0^t\frac{dW_s}{1-s},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

(注意$(B_t-tB_1)_{0\leqslant t\leqslant 1}$是一个 Brown 桥.)

11.14 一个连续适应 d-维过程 $W=(W^1,\cdots,W^d)$为一 d-维标准 Wiener 过程当且仅当$\langle W^i,W^j\rangle_t=\delta_{ij}t$，$t\geqslant 0$.

11.15 设 $X=\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_{[T_n\leqslant t]}$ 为一个点过程，则 X 为一 Poisson 过程当且仅当存在一连续增函数 A_t，$A_0=0$，使对每个 $n\geqslant 0$ 有

$$\boldsymbol{P}[T_{n+1}\in dt\,|\,\mathscr{F}_{T_n}]I_{[T_n<\infty]}=e^{-(A_t-A_{T_n})}I_{[T_n<t]}dA_t.$$

11.16 设$(\xi_n)_{n\geqslant 1}$为独立同分布随机变量序列，其共同分布为 F. 又 $N=(N_t)$为与(ξ_n)独立的时齐 Poisson 过程. 找出下列过程的 Lévy 族：

1) $X_t=\xi_1+\cdots+\xi_{N_t}$(当 $N_t=0$ 时 $X_t=0$)，$t\geqslant 0$.

2) $X_t=\max(0,\ \xi_1,\cdots,\xi_{N_t})$(当 $N_t=0$ 时 $X_t=0$)，$t\geqslant 0$.

11.17 设 $X=\sum_{n=1}^{\infty}I_{[T_n,\infty[}$ 为点过程. 假定 T_1，T_2-T_1，…，$T_{n+1}-T_n$，… 相互独立且有共同分布 $F(F(0)=0)$，即 X 是更新过程. 找出 X 的 Lévy 族.

11.18 设 X 为跳跃过程. 若 $f(t,\ x)$ 为 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}$ 上 Borel 函数且关于 t 可微，则

$$f(t,\ X_t)=f(0,\ X_0)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial s}f(s,\ X_s)ds$$

$$+\sum_{0<s\leqslant t}[f(s,\ X_s)-f(s,\ X_{s-})].$$

10.19 设 X 是以 $\mathbf{Z}$ 为状态空间的规则时齐 Markov 链，$Q=(q_{ij})$ 为 X 的密度矩阵. 假定 $f(i,\ j)$ 为 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 上函数满足对所有 i，$f(i,\ i)=0$ 及 $\sum_j q_{ij}|f(i,\ j)|<\infty$，则 $\sum_{0<s\leqslant t}f(X_{s-},\ X_s)-\int_0^t\sum_j q_{X_s,j}f(X_s,\ j)ds$ 是一个局部鞅.

11.20 设 X 为一跳跃过程，ν 为其 Lévy 族，则 X 是一个 Markov 过程当且仅当 ν 有如下形式

$$\nu(dt,\ dx)=Q(t,\ X_{t-},\ X_{t-}+dx)\Lambda(X_{t-},dt),$$

其中 1) $Q(t,\ x,\ dy)$ 是 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的转移概率测度，$Q(t,\ x,\ \{x\})=0$；

2) $\Lambda(x,\ dt)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}_+$ 的 σ-有限转移测度，$\Lambda(x,\ \{t\})\leqslant 1$，且存在两列 $\boldsymbol{R}$ 上的 Borel 函数 (f_n) 和 (g_n)，使对每个 $x\in\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}_+$ 可表为不相交区间的并：

$$\boldsymbol{R}_+=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f_n(x),\ g_n(x)[,$$

且对所有 $t\in\ ]f_n(x),\ g_n(x)[$

$$\Lambda(x,\ ]f_n(x),\ t[)<\infty,\quad \Lambda(x,\ \{t\})<1.$$

第十二章　测度变换

在这一章我们将介绍 Girsanov 定理，它描述在测度改变时半鞅与随机积分如何变换．我们还将给出 Girsanov 定理的某些应用，包括半鞅的刻划等．

§1.　局部绝对连续性

在这一章的前三节，我们都是基于下列基本假定．在基本可测空间$(\Omega, \mathscr{F}^0)$上给定：

i）一个右连续流 $F^0=(\mathscr{F}_t^0)_{t\geq 0}$，$\mathscr{F}_\infty^0=\mathscr{F}^0$，

ii）两个概率测度 P 和 P'．

置

$$\widetilde{P}=\frac{1}{2}(P+P').$$

显然，在 $\mathscr{F}^0$ 有上 $P\ll\widetilde{P}$ 和 $P'\ll\widetilde{P}$．规定

$$F=(F^0)^{\widetilde{P}}:\mathscr{F}_t=(\mathscr{F}_t^0)^{\widetilde{P}}=\mathscr{F}_t^0\vee\widetilde{\mathscr{N}},\quad t\geq 0,$$

其中，$\widetilde{\mathscr{N}}$ 是由所有 $\mathscr{F}_\infty=(\mathscr{F}^0)^{\widetilde{P}}$中的 $\widetilde{P}$-零集生成的 σ-域．以后，我们取 $F=(F^0)^{\widetilde{P}}$ 为基本流．因为我们要同时涉及两个测度 P 和 P'，这样的选择是自然而合理的．由此，停时、可选过程、局部鞅、半鞅，……总是分别指 F-停时，F 可选过程，F-局部鞅，F-半鞅等等，除非另有说明．对任一停时 T，以 P_T 和 P'_T 分别表示 P 和 P' 在 $\mathscr{F}_T$ 上的限制．E，E' 和 $\widetilde{E}$ 分别表示 P，P' 和 $\widetilde{P}$ 之下的期望．

这些基本假定以后不再重复．但我们强调一点：需十分小心地处理零集和不足道集．通常，零集和不足道集是分别指 $\widetilde{P}$-零集和 $\widetilde{P}$ 不足道集，除非明确地有其它规定．

12.1 定义　称 P' 关于 P 是局部绝对连续的，并表以 $P'\overset{\text{loc}}{\ll}P$，若

对所有 $t\geqslant 0$，$P'|_{\mathscr{F}_t}\ll P|_{\mathscr{F}_t}$，或等价地 $P'_t\ll P_t$.

12.2 定理 假定存在停时序列 (T_n)，$T_n\uparrow\infty$ 且对每个 n $P'_{T_n}\ll P_{T_n}$，则对每个满足 $P'(T<\infty)=1$ 的停时 T 有 $P'_T\ll P_T$. 特别地，$P'\overset{loc}{\ll}P$.

证明 设 $A\in\mathscr{F}_T$ 且 $P(A)=0$. 由于 $A[T\leqslant T_n]\in\mathscr{F}_{T\wedge T_n}$ 及 $P(A[T\leqslant T_n])\leqslant P(A)=0$，我们有 $P'(A[T\leqslant T_n])=0$. 于是

$$P'(A)=P'(A[T>T_n])\leqslant P'(T>T_n).$$

但 $\limsup\limits_{n\to\infty}P'(T>T_n)\leqslant P'(T=\infty)=0$. 故 $P'(A)=0$. □

12.3 引理 若 $P'\overset{loc}{\ll}P$，S，T 为两个停时，则

1) $P(S<T)=0\Rightarrow P'(S<T)=0$. 特别有 $P(S<\infty)=0\Rightarrow P'(S<\infty)=0$，

2) $P(S=T<\infty)=0\Rightarrow P'(S=T<\infty)=0$.

证明 1) 由于 $\forall\ t>0$，$[S<T,S\leqslant t]\in\mathscr{F}_t$，我们有

$$\begin{aligned}P(S<T)=0&\Rightarrow\forall\ t>0,P(S<T,S\leqslant t)=0\\&\Rightarrow\forall\ t>0,P'(S<T,S\leqslant t)=0\\&\Rightarrow P'(S<T)=0.\end{aligned}$$

2) 的证明是类似的. □

12.4 定理 若 $P'\overset{loc}{\ll}P$，则存在唯一非负适应右连左极过程 $Z=(Z_t)$ 满足

1) $Z_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}Z_t\ \widetilde{P}$-a.s. 存在且

$$P(Z_\infty=\infty)=P(\sup_{t\geqslant 0}Z_t=\infty)=0,\tag{4.1}$$

$$P'(Z_\infty=0)=P'(\inf_{t\geqslant 0}Z_t=0)=0,\tag{4.2}$$

2) 对每个停时 T，当 $P'_T\ll P_T$ 时我们有

$$Z_T=\frac{dP'_T}{dP_T}\quad P\text{-a.s.},\tag{4.3}$$

特别的，在 P 下 (Z_t) 是鞅. $Z=(Z_t)$ 称为 P' 关于 P 的**密度过程**.

证明 设 (Y_t) 和 $(\widetilde{Y}_t)$ 分别为 $\left(\widetilde{E}\left[\frac{dP}{d\widetilde{P}}\middle|\mathscr{F}_t\right]\right)$ 和 $\left(\widetilde{E}\left[\frac{dP'}{d\widetilde{P}}\middle|\mathscr{F}_t\right]\right)$ 的右连左极修正. 令

$$\tau=\inf\{t:Y_t=0\}\ ,\quad \tau'=\inf\{t:Y'_t=0\}.$$

由于 $t<\tau(t<\tau')$ 时，$Y_t>0, Y_{t-}>0(Y'_t>0, Y'_{t-}>0)$，而当 $t\geqslant\tau(t\geqslant\tau')$ 时，$Y_t=0(Y'_t=0)$（定理 2.62），于是

$$P(\tau<\infty)=\int_{[\tau<\infty]}Y_\tau d\widetilde{P}=0,$$

$$P'(\tau'<\infty)=\int_{[\tau'<\infty]}Y'_{\tau'} d\widetilde{P}=0.$$

由引理 12.3，$P'(\tau<\infty)=0$. 所以 $\widetilde{P}(\tau<\infty)=0$，即我们可认为 $\tau=\infty$. 现在定义

$$Z_t=\frac{Y'_t}{Y_t},\quad t\geqslant 0.$$

显然，$Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个适应右连左极过程．当 $t\to\infty$ 时，

$$Z_t\to\frac{Y'_\infty}{Y_\infty}\quad \widetilde{P}\text{-a.s.}.$$

因为 $Y'_\infty=\dfrac{dP'}{d\widetilde{P}}$，$Y_\infty=\dfrac{dP}{d\widetilde{P}}$，

$$P'(Y'_\infty=0)=\int_{[Y'_\infty=0]}Y'_\infty d\widetilde{P}=0,$$

$$P(Y_\infty=0)=\int_{[Y_\infty=0]}Y_\infty d\widetilde{P}=0,$$

我们有 $\widetilde{P}(Y'_\infty=Y_\infty=0)=0$，即 $Z_\infty=Y'_\infty/Y_\infty$ 有意义．同时可得

$$P(Z_\infty=\infty)=P(Y'_\infty>0, Y_\infty=0)=0,$$

$$P'(Z_\infty=0)=P'(Y'_\infty=0)=0.$$

另一方面，因为 Z_t 在每个有限区间有界，$\sup\limits_t Z_t=\infty\Leftrightarrow Z_\infty=\infty$. 在 $[\tau'<\infty]$ 上我们有 $\inf\limits_t Z_t=Z_{\tau'}=0$，而在 $[\tau'=\infty]$ 上，$\forall\, t\geqslant 0, Z_t>0$，$\forall\, t>0, Z_{t-}>0$. 所以 $\inf\limits_t Z_t=0\Leftrightarrow Z_\infty=0$. 这就证明了(4.1)和(4.2).

设 T 为停时，满足 $P'_T\ll P_T$，则 $P_T\sim\widetilde{P}_T$ 且

$$\frac{dP'_T}{dP_T}=\frac{dP'_T}{d\widetilde{P}_T}\Big/\frac{dP_T}{d\widetilde{P}_T}=Y'_T/Y_T=Z_T\quad \widetilde{P}\text{ a.s.}.$$

特别，对所有 $t\geqslant 0$

$$Z_t = \frac{dP'_t}{dP_t} \quad \tilde{P}\text{-a.s.}. \tag{4.4}$$

由(4.4)及 Z 的右连续性，$Z=(Z_t)$ 是唯一确定的． □

注 若 $P' \ll P$，并不需要引入 $\tilde{P}$ 而用 P 代替之．基本流 $F=(\mathscr{F}_t)$ 就取 $(F^0)^P=((\mathscr{F}_t^0)^P)$，而密度过程 $Z=(Z_t)$ 就是 $\left\{E\left[\frac{dP'}{dP}\Big|\mathscr{F}_t\right]\right\}$ 的右连左极修正．

从上面的证明可直接看出下列推论．

12.5 系 若 $P' \overset{\text{loc}}{\ll} P$，则 $B=[\![0]\!]\cup[Z_->0]$ 是一个可料区间型集，在此 Z 为密度过程．事实上有

$$I_B = I_F I_{[\![0,R[\![} + I_{F^c} I_{[\![0,R]\!]}, \tag{5.1}$$

$$R = \inf\{t: Z_t = 0\},$$

$$F = \{\omega: 0 < R(\omega) < \infty, Z_{R(\omega)-}(\omega) = 0\} \tag{5.2}$$

或

$$B = \bigcup_n [\![0, R_n]\!],$$

$$R_n = \inf\left\{t: Z_t \leqslant \frac{1}{n}\right\}, \quad n \geqslant 1. \tag{5.3}$$

在这一章里我们将一直运用系 12.5 规定的记号．

12.6 定理 若 $P' \overset{\text{loc}}{\ll} P$．设 T 为一停时，则

1) $P'(R<\infty)=0$，

2) $P'(T=\infty)=1 \Leftrightarrow P(T\geqslant R)=1$.

证明 因为 $R=\tau'$，1)可由定理 12.4 推出．我们仍用那里的记号

$$0 = P'(T<\infty) = \int_{[T<\infty]} Y'_T d\tilde{P} \Leftrightarrow Y'_T I_{[T<\infty]} = 0 \quad \tilde{P}\text{-a.s.}$$
$$\Leftrightarrow \tilde{P}(T \geqslant R) = 1.$$

显然，$P'(T=\infty)=1 \Rightarrow P(T\geqslant R)=1$. 反之，由引理 12.3

$$P(T\geqslant R)=1 \Rightarrow P(T<R)=0 \Leftrightarrow P'(T<R)=0 \Rightarrow P'(T\geqslant R)=1.$$

但 $P'(R=\infty)=1$，故 $P'(T=\infty)=1$. □

12.7 系 若设 $P' \overset{\text{loc}}{\ll} P$，$X$ 为可选过程．则 X 为 P'-不足道当且仅当 $XI_{[0,R[}$ 是 P-不足道的．

证明 设 T 是 $[X\neq 0]$ 的初遇，则

$$X \text{ 为 } P'\text{-不足道的} \Leftrightarrow P'(T=\infty)=1$$
$$\Leftrightarrow P(T\geqslant R)=1$$
$$\Leftrightarrow XI_{[0,R[} \text{ 为 } P\text{-不足道的}. \quad \square$$

12.8 引理 设 $P' \overset{\text{loc}}{\ll} P$，$X$ 为一个 $(F^0)^P$-适应过程，其轨道 P-a.s. 右连左极（连续）．则存在一个 F-适应右连左极（连续）过程 $\tilde{X}$ 使 X 与 $\tilde{X}$ 是 P-无区别的．

证明 对每个 $r\in Q_+$ 取 $Y_r\in\mathscr{F}_r^0$ 使 $P(Y_r=X_r)=1$．记 $A_t=\{\omega$：存在 R_+ 上右连左极函数 f 使对所有 $r\in[0,t]\cap Q$ $Y_r(\omega)=f(r)\}$，$t\geqslant 0$．则 $A_t\in\mathscr{F}_t^0$（其证明放在最后）．令

$$S(\omega)=\inf\{t:\omega\notin A_t\}.$$

由于 A_t^c 关于 t 单调增，对所有 $t\geqslant 0$ 有

$$[S<t]\subset A_t^c\subset[S\leqslant t],$$
$$[S\leqslant t]=\bigcap_{u>t}A_u^c\in\mathscr{F}_{t+}^0=\mathscr{F}_t^0.$$

因而 S 是一个 F^0-停时．由假定 $P(S=\infty)=1$，按引理 12.3，$P'(S=\infty)=1$．所以 $\tilde{P}(S<\infty)=0$，$[S<\infty]\in\mathscr{F}_0$．

置

$$\tilde{X}_t(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{r\downarrow t,r\in Q_+} Y_r(\omega), & \text{若 } S(\omega)=\infty,\\ 0, & \text{若 } S(\omega)<\infty.\end{cases}$$

则 $\tilde{X}$ 是 F-适应右连左极的，且与 X P-无区别．

若 X 的轨道 P-a.s. 连续，取

$$T(\omega)=\inf\{t:\Delta\tilde{X}_t\neq 0\}.$$

则 T 是一个 F-停时且 $P(T<\infty)=0$．同样，我们有 $P'(T<\infty)=0$，$\tilde{P}(T<\infty)=0$ 且 $[T<\infty]\in\mathscr{F}_0$．取

$$X'_t(\omega)=\begin{cases}\tilde{X}_t(\omega), & \text{若 } T(\omega)=\infty,\\ 0, & \text{若 } T(\omega)<\infty.\end{cases}$$

则 X' 是 F-适应连续的，且与 X P-无区别．

最后，我们来证明 $A_t \in \mathscr{F}_t^0$. 对任一正整数 l 归纳地规定

$$T_{l,0}(\omega)=0, \quad Z_{l,0}(\omega)=\begin{cases} Y_0(\omega), & \text{若} \lim\limits_{r\downarrow 0} Y_r(\omega)=Y_0(\omega), \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$T_{l,n+1}(\omega)=\inf\left\{r\in \boldsymbol{Q}_+: r>T_{l,n}(\omega), |Y_r(\omega)-Z_{l,n}(\omega)|>\frac{1}{2^l}\right\}\wedge t,$$

$$Z_{l,n+1}(\omega)=\begin{cases} \lim\limits_{r\downarrow T_{l,n+1}(\omega)} Y_r(\omega), & \text{若 } T_{l,n+1}(\omega)<t \text{ 且} \\ & \lim\limits_{r\downarrow T_{l,n+1}} Y_r(\omega)=Y_{T_{l,n+1}(\omega)}(\omega)^{1)}, \\ +\infty & \text{其它} \end{cases}$$

我们要证明

$$A_t=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}[T_{l,n}=t]. \tag{8.1}$$

显然，(8.1)右端的集合属于 $\mathscr{F}_t^0$. 设 $\omega\in A_t$. 固定 l，若 $T_{l,n}(\omega)<t$，则 $Z_{l,n}(\omega)<\infty$ 且 $T_{l,n}(\omega)<T_{l,n+1}(\omega)$. 若对所有 $n\geqslant 1$ $T_{l,n}(\omega)<t$，则 $T_{l,n}(\omega)\uparrow s\leqslant t$，$|Z_{l,n+1}(\omega)-Z_{l,n}(\omega)|\geqslant\frac{1}{2^l}$ 且 $\lim\limits_{r\uparrow s}Y_r(\omega)$ 不存在，这与 $\omega\in A_t$ 矛盾．因此 $\omega\in\bigcup\limits_{k=1}\bigcap\limits_{n=k}[T_{l,n}=t]$. 反之，设 $\omega\in\bigcap\limits_{l=1}\bigcup\limits_{k}\bigcap\limits_{n=k}[T_{l,n}=t]$. 对 $l\geqslant 1$ 定义 $k=\min\{n: T_{l,n}(\omega)=t\}$ 及

$$f_l(s)=\begin{cases} Z_{l,n}(\omega), & s\in[T_{l,n}(\omega),T_{l,n+1}(\omega)[, \ n\leqslant k-1, \\ Y_t(\omega), & s\in[t,\infty[, \ t\in\boldsymbol{Q}_+, \\ 0 & s\in[t,\infty[, \ t\notin\boldsymbol{Q}_+. \end{cases}$$

则 f_l 在 $\boldsymbol{R}_+$ 上为右连左极，且可直接验证

$$\sup_{r\in[0,t]\cap Q}|f_l(r)-Y_r(\omega)|\leqslant\frac{1}{2^l},$$

$$\sup_{m\geqslant 1}\sup_{s\geqslant 0}|f_l(s)-f_{l+m}(s)|\leqslant\frac{1}{2^{l-1}}.$$

由此 $(f_l)_{l\geqslant 1}$ 一致收敛于 f，f 在 $\boldsymbol{R}_+$ 上右连左极且对所有 $r\in[0,t]\cap\boldsymbol{Q}_+$ $f(r)=Y_r(\omega)$，即 $\omega\in A_t$. □

12.9 定理 设 $P'\overset{\text{loc}}{\ll}P$，$X$ 为 $\boldsymbol{F}$-适应过程，其轨道右连左极（连续、递增右连、右连续且具有限变差），则 X' 的轨道按 P' a.s. 具有

1) 如果 $T_{l,n+1}(\omega)\in Q_+$，只要求极限存在。

同样性质．

证明 由引理 12.8 存在适应右连左极（连续）过程 $\tilde{X}$ 使 $[X\neq\tilde{X}]$ 为 P-不足道的．由系 12.7 $[X\neq\tilde{X}]$ 是 P'-不足道的，即 X 的轨道是 P'-a.s. 右连左极（连续）的．

若 X 的轨道 P-a.s. 递增，则对所有 $s<t$ $P(X_s\leqslant X_t)=1$，所以 $P'(X_s\leqslant X_t)=1$. 已经知道 X 的轨道 P'-a.s. 右连左极，所以 X 的轨道 P'-a.s. 递增．

若 X 的轨道 P-a.s. 为有限变差函数，则 $P(T<\infty)=0$，其中 $T=\inf\{t:\int_{[0,t]}|d\tilde{X}_s|=\infty\}$ 为一停时．同样地，$P'(T<\infty)=0$，即 X 的轨道 P'-a.s. 为有限变差函数． □

§2. 局部鞅和半鞅的 Girsanov 定理

在这一节我们总是假定 $P'\overset{loc}{\ll}P$，且 $Z=(Z_t)$ 为 P' 关于 P 的密度过程．

由于局部鞅、半鞅、…这些概念都与测度有关，所以我们用 $\mathscr{M}_{loc}(P)$ 表示所有在 P 之下为局部鞅的过程全体．按照引理 12.8 及引理 12.9，对每个 $X\in\mathscr{M}_{loc}(P)$ 存在一个 F-适应右连左极过程 $\tilde{X}$ 与 X P 无区别．因而我们认为 $\mathscr{M}_{loc}(P)$ 中每个过程为 F-适应和右连左极的．对其它过程类情况也是类似的，我们不再一一重复．

12.10 引理 设 S,T 为两个停时且 $P'_S\ll P_S$，$P'_T\ll P_T$. 又设随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_T$ 且 $E'[|\xi|]<\infty$，则

$$E[\xi Z_T|\mathscr{F}_S]I_{[S\leqslant T]}=Z_SE'[\xi|\mathscr{F}_S]I_{[S\leqslant T]}\quad P\text{-a.s.}. \tag{10.1}$$

证明 设 $D\in\mathscr{F}_S$，则 $D[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_{S\wedge T}$ 且

$$E[I_{D[S\leqslant T]}\xi Z_T]=E'[I_{D[S\leqslant T]}\xi]=E'\{I_{D[S\leqslant T]}E'[\xi|\mathscr{F}_S]\}$$
$$=E[I_{D[S\leqslant T]}Z_SE'[\xi|\mathscr{F}_S]].$$

(10.1)可由此推得． □

12.11 引理 设 X 为一适应右连左极过程，(T_n) 为一停时序

列满足$\lim\limits_n T_n \geq R$ $\boldsymbol{P}$-a.s. 且对每个 n $X^{T_n} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\boldsymbol{P})$，则 $X \in (\mathscr{M}_{\text{loc}}(\boldsymbol{P}))^B$（这里区间型可料集 B 及停时 R 分别由(5.1)及(5.2)所规定）.

证明 可设$\boldsymbol{P}(\lim\limits_n T_n = R) = 1$，否则可以 $T_n \wedge R$ 代替 T_n. 若 T 为一停时满足$[\![0,T]\!] \subset B$，往证 $X^{T_n} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\boldsymbol{P})$. 取

$$T'_n = (T_n)_{[T_n<T]}, \quad D = \bigcap_n [T_n < T].$$

不难验证下列几点 i) $T'_n \uparrow$；ii) 在 D 上对每个 $n \geq 1$，$T'_n = T_n < T \leq R$，所以 $T = R$；iii) 在 D^C 上对足够大的 n，$T_n \geq T$ 和 $T'_n = \infty$. 因而$(T'_n \wedge n)$ $\boldsymbol{P}$-a.s. 预报 R_D，R_D 是可料的.

由于 $Z \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\boldsymbol{P})$，

$$Z_{R_D-} I_{[R_D<\infty]} = \boldsymbol{E}[Z_{R_D-} I_{[R_D<\infty]} | \mathscr{F}_{R_D-}] = 0. \quad \boldsymbol{P}\text{-a.s.}.$$

于是对 $\boldsymbol{P}$-几乎所有 $\omega \in [R_D < \infty]$，$[0, T(\omega)] \subset [0, \boldsymbol{R}(\omega)[$. 但上面我们已知在 D 上 $T = R$，所以必有 $\boldsymbol{P}(R_D < \infty) = 0$，因而$\boldsymbol{P}(T'_n \uparrow \infty) = 1$. 另一方面，

$$(X^T)^{T'_n} = (X^{T'_n})^T \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\boldsymbol{P}).$$

故 $X^T \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\boldsymbol{P})$. □

注 事实上，引理只涉及一个测度 $\boldsymbol{P}$. 它不仅对局部鞅是成立的，对于一切关于局部化为稳定的过程类也同样成立.

12.12 定理 设 X 为适应右连左极过程，则 $X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\boldsymbol{P}')$ 当且仅当 $XZ \in (\mathscr{M}_{\text{loc}}(\boldsymbol{P}))^B$

证明 因为只考虑局部鞅，可认为 $X_0 = 0$.

必要性. 设 $X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\boldsymbol{P}')$，则存在递增停时列$(T_n)$满足 $T_n \uparrow +\infty$ $\boldsymbol{P}'$-a.s.，对每个 n，$X^{T_n} \in \mathscr{M}(\boldsymbol{P}')$ 及 $\boldsymbol{P}'_{T_n} \ll \boldsymbol{P}_{T_n}$. 最后一点若有必要以 $T_n \wedge n$ 代替 T_n 总可使之成立的. 由引理 12.10

$$\boldsymbol{E}[(XZ)_{T_n} | \mathscr{F}_t] I_{[t\leq T_n]} = (XZ)_t I_{[t\leq T_n]} \quad \boldsymbol{P}\text{-a.s.}.$$

但$(XZ)_{T_n} I_{[T_n<t]} \in \mathscr{F}_t$，从而有

$$\boldsymbol{E}[(XZ)_{T_n} | \mathscr{F}_t] = (XZ)_{t\wedge T_n} \quad \boldsymbol{P}\text{-a.s.},$$

即$(XZ)^{T_n} \in \mathscr{M}(\boldsymbol{P})$. 由定理 12.6.2) $\boldsymbol{P}(\lim\limits_n T_n \geq R) = 1$. 于是由引

理 12.11, $XZ \in (\mathscr{M}_{loc}(P))^B$.

充分性．设 $XZ \in (\mathscr{M}_{loc}(P))^B$，则存在递增停时列 (T_n) 使得 $T_n \uparrow R$ P-a.s.，对每个 n，$(XZ)^{T_n} \in \mathscr{M}(P)$ 且 $P'_{T_n} \ll P_{T_n}$. 因为在 P' 下 Z 值不为零，故在 $[t \leqslant T_n]$ 上有

$$(XZ)_{t\wedge T_n} = E[(XZ)_{T_n}|\mathscr{F}_t] = Z_t E'[X_{T_n}|\mathscr{F}_t] \quad P\text{-a.s.},$$

$$E'[X_{T_n}|\mathscr{F}_t] = X_{t\wedge T_n}, \quad P'\text{-a.s.}.$$

但 $X_{T_n} I_{[T_n < t]} \in \mathscr{F}_t$，故

$$E'[X_{T_n}|\mathscr{F}_t] = X_{t\wedge T_n}, \quad P'\text{-a.s.},$$

即 $X^{T_n} \in \mathscr{M}(P')$. 由于 $P'(T_n \uparrow \infty) = 1$, $X \in \mathscr{M}_{loc}(P')$. □

12.13 定理 若 $X \in \mathscr{M}_{loc,0}(P)$ 且 $[X,Z] \in (\mathscr{A}_{loc}(P))^B$，则

$$\frac{1}{Z_-} \cdot \langle X,Z\rangle \in \mathscr{A}_{loc}(P'),$$

$$X' = X - \frac{1}{Z_-} \cdot \langle X,Z\rangle \in \mathscr{M}_{loc,0}(P'),$$

其中 $[X,Z]$ 和 $\langle X,Z\rangle$ 是按 P 规定的．

证明 记 $C = \frac{1}{Z_-} \cdot \langle X,Z\rangle$. 由定理 12.9 $\langle X,Z\rangle \in \mathscr{A}_{loc}(P')$. 在 $]\!]0,R_n]\!]$ 上我们有 $Z_- \geqslant \frac{1}{n}$，这里 R_n 由(5.3)规定．于是 $C^{R_n} \in \mathscr{A}_{loc}(P')$. 但 $P'(R_n \uparrow \infty) = 1$，故 $C \in \mathscr{A}_{loc}(P')$.

由于 $XZ - \langle X,Z\rangle \in (\mathscr{M}_{loc,0}(P))^B$，对每个 n，$(XZ)^{R_n} - \langle X,Z\rangle^{R_n} \in \mathscr{M}_{loc,0}(P)$. 另一方面，由分部积分公式和 Yœurp 引理

$$(CZ)^{R_n} - \langle X,Z\rangle^{R_n} = (CZ)^{R_n} - Z_- \cdot C^{R_n}$$
$$= C^{R_n} \cdot Z^{R_n} + [C^{R_n}, Z^{R_n}] \in \mathscr{M}_{loc}(P),$$

因而 $(XZ)^{R_n} - (CZ)^{R_n} = (X'Z)^{R_n} \in \mathscr{M}_{loc}(P)$. 由定理 12.12 $X' \in \mathscr{M}_{loc}(P')$. □

定理 12.13 也称之为**局部鞅的 Girsanov 定理**．

12.14 定理 若 $X \in \mathscr{S}(P)$，则 $X \in \mathscr{S}(P')$ 且 $[X](P)$ 与 $[X](P')$ P'-无区别．

证明 将 X 分解为 $X = X_0 + M + A$，其中 $M \in \mathscr{M}_{loc,0}(P)$，$|\Delta M| \leqslant 1$ 且 $A \in \mathscr{V}(P)$. 我们有 $[M,Z](P) \in \mathscr{A}_{loc}(P)$ (问题 7.10).

由定理 12.13，$M'=M-C\in\mathscr{M}_{loc}(P')$，其中 $C=\frac{1}{Z_-}\cdot\langle M,Z\rangle\in\mathscr{V}(P')$。于是在 P' 下 X 可分解为 $X=X_0+M'+(C+A)$，$C+A\in\mathscr{V}(P')$，故 $X\in\mathscr{S}(P')$。

对每个 $t>0$，$P'_t\ll P_t$。由定理 9.33 之后的注 $[X]_t(P)$（$[X]_t(P')$）是 X 在 $[0,t]$ 上二次变差在 $P(P')$ 下的极限。因而

$$[X]_t(P')=[X]_t(P)\quad P'\text{-a.s.}.$$

由轨道右连续性（定理 12.9），$[X](P')$ 与 $[X](P)$ 是 P'-无区别的。 □

12.15 系 若 $X\in\mathscr{M}^c_{loc,0}(P)$，则 $X'=X-\frac{1}{Z_-}\cdot\langle X,Z\rangle\in\mathscr{M}^c_{loc,0}(P')$ 且 $\langle X'\rangle(P')$ 与 $\langle X\rangle(P)$ 是 P' 是无区别的。

证明 直接由定理 12.14 和 12.9 推出。 □

12.16 系 若 $X\in\mathscr{M}^d_{loc}(P)$ 且 $[X,Z](P)\in(\mathscr{A}_{loc}(P))^0$，则 $X'=X-\frac{1}{Z_-}\cdot\langle X,Z\rangle\in\mathscr{M}^d_{loc}(P')$。

证明 只需证明 P'-局部鞅 X' 是纯断的。记 $C=\frac{1}{Z_-}\cdot\langle X,Z\rangle$。在 P' 下有

$$\begin{aligned}
&[X](P')=[X](P)=\Sigma(\Delta X)^2,\\
&[X'](P')=[X](P')-2[X,C](P')+[C](P')\\
&\qquad=\Sigma(\Delta X)^2-2\Sigma(\Delta X\Delta C)+\Sigma(\Delta C)^2\\
&\qquad=\Sigma(\Delta X')^2,
\end{aligned}$$

这就表明 X' 在 P' 下是纯断的。 □

12.17 系 若 $X\in\mathscr{S}(P)$，X^c 为在 (P) 下 X 的连续鞅部分，则 $(X^c)'=X^c-\frac{1}{Z_-}\cdot\langle X^c,Z\rangle$ 是 X 在 (P') 下的连续鞅部分。

证明 将 X 分解为 $X=X_0+M+A$，这里 $M\in\mathscr{M}_{loc,0}(P)$，$|\Delta M|\leqslant1$ 且 $A\in\mathscr{V}(P)$，于是 $X^c=M^c$，$(M^c)'=M^c-\frac{1}{Z_-}\cdot\langle M^c,Z\rangle\in\mathscr{M}^c_{loc,0}(P')$，$(M^d)'=M^d-\frac{1}{Z_-}\cdot\langle M^d,Z\rangle\in\mathscr{M}^d_{loc}(P')$，

$$X=X_0+(M^c)'+(M^d)'+\left(A+\frac{1}{Z_-}\cdot\langle M,Z\rangle\right).$$

因而$(X^c)'=(M^c)'$是在P'下X'的连续鞅部分. □

12.18 定理 设X为一适应右连左极过程,则

1) $X\in\mathscr{V}(P')\Leftrightarrow X\in(\mathscr{V}(P))^B$.

2) $X\in\mathscr{S}(P')\Leftrightarrow X\in(\mathscr{S}(P))^B$.

3) $X\in\mathscr{S}_p(P')\Leftrightarrow X\in(\mathscr{S}(P))^B$ 和 $X+\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]\in(\mathscr{S}_p(P))^B$.

4) $X\in\mathscr{M}_{loc}(P')\Leftrightarrow X\in(\mathscr{S}(P))^B$ 和 $X+\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]\in(\mathscr{M}_{loc}(P))^B$.

5) $X\in\mathscr{A}_{loc}(P')\Leftrightarrow X\in(\mathscr{V}(P))^B$ 和 $X+\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]\in(\mathscr{A}_{loc}(P))^B$.

在此情况下,X在P'下的可料对偶投影与$X+\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]$在$P$下的可料对偶投影$P'$-无区别.

证明 不失一般性,我们可假定$X_0=0$.

1) 设$X\in\mathscr{V}(P')$. 取$T_n=\inf\{t:\int_0^t|dX_s|\geqslant n\}\wedge R_n$. 则$P'(T_n\uparrow\infty)=1$, $P(T_n\uparrow R)=1$. 若$T_n=\infty$,则对所有$t>0$, $\int_0^t|dX_s|\leqslant n$. 若$T_n<\infty$, $\int_0^{T_n}|dX_s|\leqslant n+|\Delta X_{T_n}|$. 因此$X^{T_n}\in\mathscr{V}(P)$,所以$X\in(\mathscr{V}(P))^B$.

设$X\in(\mathscr{V}(P))^B$ $((\mathscr{S}(P))^B)$. 则对每个n $X^{R_n}\in\mathscr{V}(P)$ $(\mathscr{S}(P))$, $X^{R_n}\in\mathscr{V}(P')$ $(\mathscr{S}(P'))$. 但$P'(R_n\uparrow\infty)=1$,故$X\in\mathscr{V}(P')$ $(\mathscr{S}(P'))$.

2) 设$X\in\mathscr{S}_{loc}(P')$. 则对每个$n$, $(XZ)^{R_n}\in\mathscr{S}_{loc}(P)$. 取$F(x,y)\in C^2(R^2)$满足当$|y|\geqslant 1/n$时$F(x,y)=x/y$. 于是

$$Y=F((XZ)^{R_n},Z)\in\mathscr{S}(P).$$

当$t<R_n$有$|Z_t|\geqslant 1/n$. 因此$YI_{[\![0,R_n[\![}=XI_{[\![0,R_n[\![}$. 由于

$$YI_{[\![0,R_n[\![}=Y^{R_n}-Y_{R_n}I_{[R_n<\infty]}I_{[\![R_n,\infty[\![}\in\mathscr{S}(P),$$

$$X^{R_n}=XI_{[\![0,R_n[\![}+X_{R_n}I_{[R_n<\infty]}I_{[\![R_n,\infty[\![}\in\mathscr{S}(P).$$

故$X\in(\mathscr{S}(P))^B$. 我们建立了$X\in\mathscr{S}(P')\Rightarrow X\in(\mathscr{S}(P))^B$. 相反

的包含关系已在前面的 1)中证明了.

3)设 $X\in\mathscr{S}_p(\boldsymbol{P}')$，则在 $\boldsymbol{P}'$ 下 $X=N+A$，其中 $N\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}')$，$A\in\mathscr{V}_0(\boldsymbol{P}')$ 且 A 为可料的．取 $T_n=\inf\{t:\int_0^t|dA_s|\geqslant n\}\wedge R_n$． 于是 $\boldsymbol{P}(T_n\uparrow R)=1$，$X^{T_n}\in\mathscr{S}_0(\boldsymbol{P})$，$(NZ)^{T_n}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$且 $A^{T_n}\in\mathscr{V}_0(\boldsymbol{P})$．由分部积分公式

$$(NZ)^{T_n}+(AZ)^{T_n}=(XZ)^{T_n}=X_-.Z^{T_n}+Z_-.X^{T_n}+[X^{T_n},Z].$$

由于 A^{T_n}是可料的且$(AZ)^{T_n}-Z_-.A^{T_n}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$，$Z_-.X^{T_n}+[X^{T_n},Z]-Z_-.A^{T_n}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$．因为在 $]\!]0,T_n]\!]$ 上 $Z_-\geqslant\frac{1}{n}$，我们得到 $X^{T_n}+\frac{1}{Z_-}.[X^{T_n},Z]-A^{T_n}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$，即 $X^{T_n}+\frac{1}{Z_-}.[X^{T_n},Z]\in\mathscr{S}_p(\boldsymbol{P})$．因而由引理 12.11 及其注可得 $X+\frac{1}{Z_-}.[X,Z]\in(\mathscr{S}_p(\boldsymbol{P}))^B$.

现设 $X\in(\mathscr{S}(\boldsymbol{P}))^B$ 及 $X+\frac{1}{Z_-}.[X,Z]\in(\mathscr{S}_p(\boldsymbol{P}))^B$，则 $X^{R_n}\in\mathscr{S}(\boldsymbol{P})$ 且 $Y^{(n)}=X^{R_n}+\frac{1}{Z_-}.[X^{R_n},Z]\in\mathscr{S}_p(\boldsymbol{P})$．令 $Y^{(n)}=M^{(n)}+A^{(n)}$为$Y^{(n)}$的典则分解，其中 $M^{(n)}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$，$A^{(n)}\in\mathscr{V}(\boldsymbol{P}')$且 $A^{(n)}$为可料的．由于$(A^{(n+1)})^{R_n}=A^{(n)}$，所以

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}A^{(n)}I_{]\!]R_{n-1},R_n]\!]}\in\mathscr{V}(\boldsymbol{P}'),$$

且 A 是可料的$(R_0=0)$．事实上，$X+\frac{1}{Z_-}.[X,Z]-A\in(\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}))^B$.

取 $N=X-A$，则 $N^{R_n}=X^{R_n}-A^{R_n}=M^{(n)}-\frac{1}{Z_-}.[X^{R_n},Z]$,

$$\begin{aligned}(NZ)^{R_n}&=N_-.Z^{R_n}+Z_-.N^{R_n}+[N^{R_n},Z]\\&=N_-.Z^{R_n}+Z_-.M^{(n)}-[X^{R_n},Z]+[N^{R_n},Z]\\&=N_-.Z^{R_n}+Z_-.M^{(n)}-[A^{R_n},Z]\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}).\end{aligned}$$

因而 $N\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}')$，$X=N+A$ 是 X 在 $\boldsymbol{P}'$ 下的典则分解．这就表明 $X\in\mathscr{S}(\boldsymbol{P}')$.

4)可由 3)的证明$(A=0)$得.

5）设 $X\in\mathscr{A}_{loc}(P')$，则 $X\in\mathscr{V}(P')\cap\mathscr{S}_p(P')$. 由 1）和 3）我们有 $X\in\{\mathscr{V}(P)\}^B$ 以及 $X+\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]\in\{\mathscr{S}_p(P)\}^B$. 因而

$$X+\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]\in\{\mathscr{A}_{loc}(P)\}^B.$$

反之，设 $X\in\{\mathscr{V}(P)\}^B$ 和 $X+\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]\in\{\mathscr{A}_{loc}(P)\}^B$. 则由 1），3）可得 $X\in\mathscr{V}(P')$ 和 $X\in\mathscr{S}_p(P')$. 因而 $X\in\mathscr{A}_{loc}(P')$. 最后一个断言可由 3）的证明得到，其中 A 既是 X 在 P' 下的可料对偶投影也是在 P 之下 $X+\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]$ 在 B 上的可料对偶投影. □

12.19 系 若 $A\in\{\mathscr{A}_{loc}(P)\}^B$，则

$$A\in\mathscr{A}_{loc}(P')\Leftrightarrow[A,Z]\in\{\mathscr{A}_{loc}(P)\}^B.$$

这时，在 (P') 下有

$$A^{p,P'}=A^{p,P}+\frac{1}{Z_-}\cdot\langle A,Z\rangle,$$

其中 $A^{p,P}$ 和 $A^{p,P'}$ 分别是 P（在 B 上）和 P' 下 A 的可料对偶投影.

证明 这是定理 12.18.5）的结论，在这里的条件下，

$$\begin{aligned}A\in\mathscr{A}_{loc}(P')&\Leftrightarrow A+\frac{1}{Z_-}\cdot[A,Z]\in\{\mathscr{A}_{loc}(P)\}^B\\&\Leftrightarrow\frac{1}{Z_-}\cdot[A,Z]\in\{\mathscr{A}_{loc}(P)\}^B\\&\Leftrightarrow[A,Z]\in\{\mathscr{A}_{loc}(P)\}^B,\end{aligned}$$

且有

$$A^{p,P'}=\left(A+\frac{1}{Z_-}\cdot[A,Z]\right)^{p,P}=A^{p,P}+\frac{1}{Z_-}\cdot\langle A,Z\rangle.\quad\square$$

定理 12.14 和 12.18 是半鞅的 Girsanov 定理. 下一定理是另一个局部鞅的 Girsanov 定理.

12.20 定理 设 $X\in\mathscr{M}_{loc,0}(P)$，则

1）$X\in\mathscr{S}(P')$ 且 $M=X-\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]+\tilde{Y}\in\mathscr{M}_{loc,0}(P')$，其中 $\tilde{Y}$ 是 $Y=\Delta X_R I_{[R<\infty]}I_{[\![R,\infty[\![}$ 在 P 下的可料对偶投影.

2）$X\in\mathscr{S}_p(P')\Leftrightarrow[X,Z]\in\{\mathscr{A}_{loc}(P)\}^B$，这时 X 在 P' 下的典

则分解为：

$$X=\left(X-\frac{1}{Z_-}\cdot\langle X,Z\rangle\right)+\frac{1}{Z_-}\cdot\langle X,Z\rangle.$$

3) $X\in\mathscr{M}_{loc}(P')\Leftrightarrow[X,Z]\in(\mathscr{M}_{loc,0}(P))^{R}$.

证明 1) 由于 $\int_0^t|dY_s|\leqslant\sqrt{[X]_t}$，$Y\in\mathscr{A}_{loc}(P)$. 因为 $A=\frac{I_{[Z>0]}}{Z}\cdot[X,Z]$ 与 $\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]P'$- 无区别，只要证明对每个 n，$(MZ)^{R_n}\in\mathscr{M}_{loc,0}(P)$，其中 $M=X-A+\widetilde{Y}$. 我们有

$$(ZA)^{R_n}=A_-.Z^{R_n}+Z.A^{R_n},$$

$$Z.A^{R_n}=I_{[Z>0]}.[X^{R_n},Z]=[X^{R_n},Z]^{R-}.$$

于是 $(ZA)^{R_n}-[X^{R_n},Z]^R\in\mathscr{M}_{loc,0}(P)$. 我们还有 $(Z\widetilde{Y})^{R_n}-Z_-.\widetilde{Y}^{R_n}=\widetilde{Y}.Z^{R_n}\in\mathscr{M}_{loc,0}(P)$ 和 $(ZX)^{R_n}-[X^{R_n},Z]\in\mathscr{M}_{loc,0}(P)$. 因而

$$(MZ)^{R_n}-\{[X^{R_n},Z]-[X^{R_n},Z]^{R-}+Z_-.Y^{R_n}\}\in\mathscr{M}_{loc,0}(P).\tag{20.1}$$

注意 $Z_R I_{[R<\infty]}=0$，有

$$[X^{R_n},Z]-[X^{R_n},Z]^{R-}+Z_-.Y^{R_n}$$

$$=\Delta Z_R\Delta X_R^{R_n}I_{[R<\infty]}I_{[R,\infty[}+Z_{R-}\Delta Y_R^{R_n}I_{[R<\infty]}I_{[R,\infty[}$$

$$=\Delta Z_R\Delta X_R I_{[R_n=R<\infty]}I_{[R,\infty[}-\Delta Z_R\Delta X_R I_{[R_n=R<\infty]}I_{[R,\infty[}=0.$$

由(20.1)可得 $(MZ)^{R_n}\in\mathscr{M}_{loc,0}(P)$.

2) 设 $X\in\mathscr{S}_p(P')$. 由定理 12.18.3) $X+\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]\in(\mathscr{S}_p(P))^R$，且对每个 n，$X^{R_n}+\frac{1}{Z_-}\cdot[X^{R_n},Z]\in\mathscr{S}_p(P)$. 因为 $X^{R_n}\in\mathscr{M}_{loc,0}(P)$，我们有 $\frac{1}{Z_-}\cdot[X^{R_n},Z]\in\mathscr{A}_{loc}(P)$ 及 $[X^{R_n},Z]\in\mathscr{A}_{loc}(P)$. 于是 $[X,Z]\in(\mathscr{A}_{loc}(P))^R$. 结论的另一半就是定理 12.14.

3) 由定理 12.18.4)

$$X\in\mathscr{M}_{loc,0}(P')\Leftrightarrow X+\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]\in(M_{loc,0}(P))^R$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{Z_-}\cdot[X,Z]\in(\mathscr{M}_{loc,0}(P))^R$$

$$\Leftrightarrow [X,Z] \in \{\mathscr{M}_{loc,0}(P)\}^{\perp}. \quad \square$$

12.21 定理 假定 $X \in \mathscr{M}_{loc,c}(P)$ 及 $[X,Z] \in \mathscr{A}_{loc}(P)$. 设 H 为一可料过程，在 P 之下 $H.X$ 存在（即 $\sqrt{H^2.[X]} \in \mathscr{A}_{loc}(P)$）且 $[H.X,Z] \in \mathscr{A}_{loc}(P)$. 置 $X' = X - \frac{1}{Z_-}.\langle X,Z\rangle$，则在 P' 下 $H.X'$ 存在且

$$H.X' = H.X - \frac{1}{Z_-}.\langle H.X,Z\rangle. \tag{21.1}$$

证明 记 $M = H.X$, $M' = M - \frac{1}{Z_-}.\langle M,Z\rangle$. 我们分别考虑连续与纯断的情形.

首先，假定 $X \in \mathscr{M}_{loc,0}^c(P)$. 由系 11.15 $X' \in \mathscr{M}_{loc,0}^c(P')$ 且 $\langle X'\rangle(P')$ 与 $\langle X\rangle(P)$ P'-无区别. 由 $\sqrt{H^2.\langle X\rangle} \in A_{loc}(P)$，故 $\sqrt{H^2.\langle X'\rangle} \in A_{loc}(P')$（系 12.19），在 P' 下 $H.X'$ 存在. 另一方面，在 P' 下我们有

$$\begin{aligned}\langle M', H.X'\rangle &= H.\langle M', X'\rangle = H.\langle M,X\rangle \\ &= \langle M, H.X\rangle = H^2.\langle X\rangle,\end{aligned}$$

$$\langle M'\rangle = \langle M\rangle = H^2.\langle X\rangle,$$

$$\langle H.X'\rangle = H^2.\langle X'\rangle = H^2.\langle X\rangle.$$

于是 $\langle M' - H.X'\rangle = 0$, $M' = H.X'$.（上面的 $\langle X\rangle$, $\langle M\rangle$ 和 $\langle M,X\rangle$ 都是在 P 之下给出的.）

其次，假定 $X \in \mathscr{M}_{loc}^d(P)$. 由系 12.16，$X' \in \mathscr{M}_{loc}^d(P')$. 同时我们有 $M \in \mathscr{M}_{loc}^d(P)$, $M' \in \mathscr{M}_{loc}^d(P')$. 由于

$$\Delta X' = \Delta X - \frac{1}{Z_-}\Delta\langle X,Z\rangle,$$

$$\Delta M' = H\Delta X - \frac{H}{Z_-}\Delta\langle X,Z\rangle = H\Delta X',$$

在 P' 下，$H.X'$ 存在且 $H.X' = M'$. $\square$

12.22 定理 设 $X \in \mathscr{S}(P)$，又 H 为一可料过程，在 P 下 $H.X$ 存在（表以 $H\overset{P}{.}X$），则在 P' 下 $H.X$ 存在（表以 $H\overset{P'}{.}X$），且 $H\overset{P'}{.}X$ 与 $H\overset{P}{.}X$ P'-无区别.

证明　假定 $X_0=0$. 设 $X=M+A$ 是在 P 下 X 的一个 H-分解，其中 $M\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}(P)$，$A\in\mathscr{V}(P)$. 我们可假定 ΔM，$H\Delta M$ 都有界. 否则令

$$C=\Sigma(\Delta M I_{[|\Delta M|>1\text{或}|H\Delta M|>1]}),\quad N=C-\tilde{C},$$

($\tilde{C}$ 为 C 在 P 下的补偿)，并以 $M-N$ 及 $N+A$ 分别代替 M 及 A. 于是 $[M,Z]$，$[H\overset{P}{\cdot}M,Z]\in\mathscr{A}_{\text{loc}}(P)$. 取 $M'=M-\frac{1}{Z_-}.\langle M,Z\rangle$，$A'=A+\frac{1}{Z_-}.\langle M,Z\rangle$. 由定理 12.21

$$H^{P}.M'=H^{P}.M-\frac{1}{Z_-}.\langle H^{P}.M,Z\rangle=H^{P}.M-\frac{H}{Z_-}.\langle M,Z\rangle.$$

另一方面，$H.A\in\mathscr{V}(P)\Leftrightarrow H.A\in\mathscr{V}(P')$，且 $\langle H^{P}.M,Z\rangle\in\mathscr{V}(P)$ $\Rightarrow\frac{H}{Z_-}.\langle M,Z\rangle=\frac{1}{Z_-}.\langle H^{P}.M,Z\rangle\in\mathscr{V}(P')$. 于是

$$H.A'=H.A+\frac{H}{Z_-}.\langle M,Z\rangle\in\mathscr{V}(P').$$

所以，在 P' 下 $X=M'+A'$ 是一个 H-分解，且

$$H\overset{P'}{\cdot}X=H\overset{P'}{\cdot}M'+H.A'=H\overset{P}{\cdot}M+H.A=H\overset{P}{\cdot}X.\quad\Box$$

定理 12.21 和 12.22 是随机积分的 Girsanov 定理. 作为定理 12.22 的一个简单的应用，我们将在下一定理中证明随机积分的局部性. 它只涉及一个测度 P.

12.23 定理　假定 X 和 Y 是半鞅，H 和 K 是可料过程，且 $H.X$ 和 $K.Y$ 都存在. 设 $A\in\mathscr{F}$，在 A 上 X 和 Y 无区别，H 和 K 无区别，则在 A 上 $H.X$ 和 $K.Y$ 同样无区别.

证明　假定 $P(A)>0$，取 $P'(\cdot)=\frac{P(\cdot\cap A)}{P(A)}$. 则 $P'\ll P$，$X(H)$ 与 $Y(K)$ P' 无区别. 于是 $H\overset{P'}{\cdot}X=K\overset{P'}{\cdot}Y$. 由定理 12.22 $H.X$ $(K.Y)$ 与 $H\overset{P'}{\cdot}X(K\overset{P'}{\cdot}Y)$，$P'$-无区别. 因此 $H.X$ 与 $K.Y$，P'-无区别，即在 A 上 $H.X$ 与 $K.Y$ 无区别. $\Box$

§ 3. 随机测度的 Girsanov 定理

在这一节我们仍假定 $P' \overset{loc}{\ll} P$. 同时,我们假定 μ 为一整值随机测度:

$$\mu(dt,dx)=\sum_{s>0}\delta_{(s,\beta_s)}(dt,dx)I_D,$$

其中 $\beta=(\beta_t)$ 为一可选过程,$D\subset [\![0,\infty[\![$ 为 μ 的支集. 在 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}')$ 下由 μ 产生的测度表以 $\boldsymbol{M}_\mu(\boldsymbol{M}'_\mu)$. 我们假定 $\boldsymbol{M}_\mu$ 在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上 σ-有限. 在 $\boldsymbol{P}$ 下 μ 的可料对偶投影表以 ν.

12.24 引理 若 $N=(N_t)\in\mathscr{S}_P$, $\boldsymbol{E}[|N_0|]<\infty$,则 N 及 ΔN 在 $\boldsymbol{M}_\mu$ 下关于 $\widetilde{\mathscr{P}}$ σ-可积(注意在此只涉及测度 $\boldsymbol{P}$).

证明 设 $\widetilde{A}_n\in\widetilde{\mathscr{P}}$ 满足 $\widetilde{A}_n\uparrow\widetilde{\Omega}$, $\boldsymbol{M}_\mu(\widetilde{A}_n)<\infty$,则 $C^{(n)}=I_{\widetilde{A}_n}*\mu\in\mathscr{A}^+$. 取

$$T_0^{(n)}=0,\ T_m^{(n)}=\inf\{t>T_{m-1}^{(n)}:\ \Delta C_t^{(n)}\neq 0\},\ m\geqslant 1.$$

我们有 $\boldsymbol{P}(\lim\limits_{m\to\infty}T_m^{(n)}=\infty)=1$. 由假定存在停时序列 $(S_m^{(n)})_{m\geqslant1}$ 满足 $S_m^{(n)}\leqslant T_m^{(n)}$, $\boldsymbol{P}(\lim\limits_{m\to\infty}S_m^{(n)}=\infty)=1$ 且 $N^{S_m^{(n)}}$ 为类(D)的. 于是

$$\boldsymbol{M}_\mu(|N|I_{[\![0,S_m^{(n)}]\!]}I_{\widetilde{A}_n})\leqslant\sum_{k=1}^m\boldsymbol{E}\left|N_{S_m^{(n)}\wedge T_k^{(n)}}\right|<\infty.$$

因此在 $\boldsymbol{M}_\mu$ 下 N 关于 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 是 σ-可积的. 又因 N_- 是局部有界的, ΔN 在 $\boldsymbol{M}_\mu$ 下关于 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 也是 σ-可积的. □

12.25 定理 $\boldsymbol{M}'_\mu$ 和 $\boldsymbol{M}'_\nu$ 在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上 σ-有限,在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上 $\boldsymbol{M}'_\mu\ll\boldsymbol{M}'_\nu$.

证明 取 $\widetilde{A}_n\in\widetilde{\mathscr{P}}$ 使 $\boldsymbol{M}_\mu(\widetilde{A}_n)<\infty$ 及 $\widetilde{A}_n\uparrow\widetilde{\Omega}$. 对所有 $t>0$ 及 $A\in\widetilde{\mathscr{P}}$ 由定理 5.32 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}'_\mu(A\widetilde{A}_n([\![0,t]\!]\times E))&=\boldsymbol{E}'[I_{A\widetilde{A}_n}*\mu_t]\\&=\boldsymbol{E}[Z_t(I_{A\widetilde{A}_n}*\mu_t)]\\&=\boldsymbol{E}[(ZI_{A\widetilde{A}_n})*\mu_t].\end{aligned}$$

令 $t\to\infty$ 及 $n\to\infty$ 得到

$$M'_{\mu}(I_A)=M_{\mu}(ZI_A),\ A\in\widetilde{\mathscr{P}}. \qquad (25.1)$$

由引理 12.24，在 M_{μ} 下 Z 关于 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 是 σ-可积的．因而 M'_{μ} 在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上 σ-有限．记 ν' 为 μ 在 P' 下的可料对偶投影．

在 P 下，$B^{(n)}=I_{\tilde{A}_n}*\nu$ 是 $I_{\tilde{A}_n}*\mu$ 的可料对偶投影．取 $T_{n,m}=\inf\{t:B_t^{(n)}\geqslant m\}$，则 $P(\lim\limits_{m\to\infty}T_{n,m}=\infty)=1$．所以 $P'(\lim\limits_{m\to\infty}T_{n,m}=\infty)=1$．由于 $\Delta B^{(n)}\leqslant 1$，

$$M'_{\nu}(\tilde{A}_n(\llbracket 0,T_{n,m}\rrbracket\times E))=E'[B^{(n)}_{T_{n,m}}]\leqslant m+1.$$

因而 M'_{ν} 在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上 σ-有限．

现在我们可以假定 $M'_{\mu}(\tilde{A}_n)=M'_{\nu}(\tilde{A}_n)<\infty$ 及 $M'_{\nu}(\tilde{A}_n)<\infty$．对所有 $t>0$ 及 $A\in\widetilde{\mathscr{P}}$ 由定理 5.33 可得

$$\begin{aligned}M'_{\nu}(A\tilde{A}_n([0,t]\times E))&=E[Z_t(I_{A\tilde{A}_n}*\nu_t)]\\&=E[Z_-(I_{A\tilde{A}_n})*\nu_t]\\&=M_{\nu}[Z_-I_{A\tilde{A}_n(\llbracket 0,t\rrbracket\times E)}]\\&=M_{\mu}[Z\cdot I_{A\tilde{A}_n(\llbracket 0,t\rrbracket\times E)}].\end{aligned}$$

令 $t\to\infty$ 及 $n\to\infty$ 得到

$$M'_{\nu}(I_A)=M_{\mu}(Z_-I_A),\quad A\in\widetilde{\mathscr{P}}. \qquad (25.2)$$

在 P' 下 $C^{(n)}=I_{\tilde{A}_n}*\nu'$ 为 $I_{\tilde{A}_n}*\mu$ 的可料对偶投影．取 $S_{n,m}=\inf\{t:C_t^{(n)}\geqslant m\}\wedge m$．则 $P'(\lim\limits_{m\to\infty}S_{n,m}=\infty)=1$．且 $M_{\nu'}(\tilde{A}_n(\llbracket 0,S_{n,m}\rrbracket\times E))\leqslant m+1$．对所有 $A\in\widetilde{\mathscr{P}}$

$$\begin{aligned}&M'_{\mu}[A\tilde{A}_n([Z_-=0]\llbracket 0,S_{n,m}\rrbracket\times E)]\\&=M_{\nu'}[A\tilde{A}_n([Z_-=0]\llbracket 0,S_{n,m}\rrbracket\times E)]\\&=E[Z_{S_{n,m}}(I_{A\tilde{A}_n[Z_-=0]}*\nu')_{S_{n,m}}]\\&=E[(Z_-I_{A\tilde{A}_n[Z_-=0]})*\nu_{S_{n,m}}]=0,\end{aligned}$$

所以 $M'_{\mu}(A[Z_-=0])=0$．联合(25.1)可得

$$M'_{\mu}(I_A)=M'_{\mu}(I_{A[Z_->0]})=M_{\mu}(ZI_{A[Z_->0]}). \qquad (25.3)$$

于是由(25.2)和(25.3)可推出在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上 $M'_{\mu}\ll M'_{\nu}$．

12.26 定理 存在 Ω 上非负可料函数 Y 使

1) $\nu' = Y.\nu$ 为 μ 在 P' 下的可料对偶投影，且对 P'-几乎所有 ω 对每个 $t>0$ 有

$$0 \leqslant \nu'(\omega, \{t\} \times E) \leqslant 1, \tag{26.1}$$

$$\nu(\omega, \{t\} \times E) = 1 \Rightarrow \nu'(\omega, \{t\} \times E) = 1. \tag{26.2}$$

2) $M_\mu[Z \mid \widetilde{\mathscr{P}}] = Z_{\cdot} Y.$

证明 由定理 12.25，以 Y 表 M'_μ 关于 M'_ν 在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上的 Radon-Nikodym 导数，则对所有 $A \in \widetilde{\mathscr{P}}$ 有

$$M'_\mu(I_A) = M'_\nu(YI_A) = M'_{Y.\nu}(I_A)$$

这表明 $\nu' = Y.\nu$ 是 μ 在 P' 下的可料对偶投影。

记 $a_t = \nu(\{t\} \times E)$ 及 $a'_t = \nu'(\{t\} \times E)$。取

$$Y' = \begin{cases} Y, & \text{若 } a<1, a' \leqslant 1, \text{或 } a = a' = 1, \\ 1, & \text{其它}. \end{cases}$$

为证 (26.1) 和 (26.2)，只需证明 Y 和 Y' 是 P'-无区别的。我们已知 $[a'>1]$ ($[a>1]$) 是 P'-(P-) 不足道的。所以只要证明 $[a=1 \neq a']$ 是 P'-不足道的。假定存在可料时 $T>0$ 满足 $[\![T]\!] \subset [a=1 \neq a']$ 及 $P'(T<\infty)>0$。由定理 11.14 $[\![T]\!] \setminus D$ 是 P-不足道的，即 $P(\mu(\{T\} \times E) \neq 1, T<\infty) = 0$。对所有 $t>0$ 我们有 $P(\mu(\{T\} \times E) \neq 1, T \leqslant t) = 0$。所以 $P'(\mu(\{T\} \times E) \neq 1, T \leqslant t) = 0$，$P'(\mu(\{T\} \times E) \neq 1, T<\infty) = 0$。

$$a_T I_{[T<\infty]} = E'[\mu(\{T\} \times E) I_{[T<\infty]} \mid \mathscr{F}_{T-}] = I_{[T<\infty]}, \quad P'\text{-a.s.},$$

即在 $[T<\infty]$ 上 $a_T = 1$ P'-a.s. 这与 $[\![T]\!] \subset [a' \neq 1]$ 矛盾，因此 $[a=1 \neq a']$ 是 P' 不足道的。

由 (25.1) 及 (25.2)，对所有 $A \in \widetilde{\mathscr{P}}$ 有

$$M_\mu(Z_{\cdot} YI_A) = M_\nu(YI_A) = M_{\nu'}(I_A) = M_\mu(I_A) = M_\mu(ZI_A).$$

这样就证明了 2)。 □

注 事实上，若 Y 是 Ω 上非负可料函数且满足 $M_\mu[Z \mid \widetilde{\mathscr{P}}] = Z_{\cdot} Y$，则 $Y.\nu$ 是 μ 在 P' 下的补偿子，因为对所有 $A \in \widetilde{\mathscr{P}}$

$$M'_\mu(I_A)=M_p(ZI_A)=M_\mu(Z_YI_A)=M'_\nu(YI_A)=M'_{Y\cdot\nu}(I_A).$$

12.27 引理 假定 $M=W*(\mu-\nu)(W\in\mathscr{G}(\mu))$，$N\in\mathscr{M}_{loc,0}$，$V=M_\mu[\Delta N|\tilde{\mathscr{P}}]$，且$[M,N]\in\mathscr{A}_{loc}$. 则

$$\langle M,N\rangle=(VW)*\nu. \tag{27.1}$$

（注意在此也只涉及一个测度 $\boldsymbol{P}$.）

证明 记 $H=\langle M,N\rangle$. 对任一可料时 $T>0$ 有

$$\begin{aligned}\Delta H_T I_{[T<\infty]}&=\boldsymbol{E}[\Delta[M,N]_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]\\&=\boldsymbol{E}[\Delta M_T\Delta N_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]\\&=\boldsymbol{E}[(W(T,\beta_T)I_D(T)-\hat{W}_T)\Delta N_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]\\&=\boldsymbol{E}[\Delta N_T W(T,\beta_T)I_D(T)|\mathscr{F}_{T-}].\end{aligned}$$

由于 $\Delta M_T\Delta N_T I_{[T<\infty]}$与 $\hat{W}_T\Delta N_T I_{[T<\infty]}$关于 $\mathscr{F}_{T-}$ 是 σ-可积的，故 $\Delta N_T W(T,\beta_T)I_D(T)$ 亦是关于 $\mathscr{F}_{T-}$ σ-可积的. 进而，若 $\boldsymbol{E}[|\Delta N_T W(T,\beta_T)I_D(T)|]<\infty$，则对任一有界可料过程 X 有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}[\Delta N_T W(T,\beta_T)I_D(T)X_T]\\&=\boldsymbol{E}\left[\int_{R_+\times E}\Delta NWXI_{[\![T]\!]}d\mu\right]\\&=M_\mu(\Delta NWXI_{[\![T]\!]})=M_\mu(VWXI_{[\![T]\!]})\\&=M_\nu(VWXI_{[\![T]\!]})=\boldsymbol{E}[(\hat{VW})_T X_T I_{[T<\infty]}].\end{aligned}$$

因而对任一可料时 T 有

$$\begin{aligned}\Delta H_T I_{[T<\infty]}&=\boldsymbol{E}[\Delta N_T W(T,\beta_T)I_D(T)|\mathscr{F}_{T-}]\\&=(\hat{VW})_T I_{[T<\infty]}\ \text{a.s.}.\end{aligned}$$

所以 $\Delta H=\hat{VW}$，H 的纯断部分为

$$H^d=\Sigma(\Delta H)=\Sigma(\hat{VW})=(VWI_J)*\nu, \tag{27.2}$$

其中 $J=[a>0]$是 D 的可料支集.

设 K 为可料过程满足 $K.[M,N]\in\mathscr{A}$，由于 J 是稀疏集且 $I_{J^c}.H^d=0$（由(27.2)），我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\left[\int_0^\infty K_t dH_t^c\right]&=\boldsymbol{E}\left[\int_0^\infty K_t I_{J^c}(t)dH_t^c\right]\\&=\boldsymbol{E}\left[\int_0^\infty K_t I_{J^c}(t)dH_t\right]\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\int_0^{\infty} K_t I_{\Gamma}(t) d[M,N]_t\right]$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\sum_{t>0} K_t \Delta M_t \Delta N_t I_{\Gamma}(t)\right]$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\sum_{t>0} K_t W(t,\beta_t) \Delta N_t I_{\Gamma D}(t)\right]$$

$$= \boldsymbol{M}_\mu(\Delta N W K I_{\Gamma}) = \boldsymbol{M}_\mu(V W K I_{\Gamma})$$

$$= \boldsymbol{M}_\nu(V W K I_{\Gamma}) = \boldsymbol{E}\left[\int_0^{\infty} K_t d((V W I_{\Gamma}) * \nu_t)\right].$$

因而 H 的连续部分为

$$H^c = (V W I_{\Gamma}) * \nu. \tag{27.3}$$

于是(27.1)可由(27.2)及(27.3)推出. □

注 若在引理中假定$[M,N] \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$代以$[M,N] \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{A}$,其中$A$为区间型可料集,则$[M,N]$在$A$上的可料对偶投影为$\langle M,N\rangle = (VWI_A) * \nu$.

12.28 定理 假定$M = W \overset{P}{*} (\mu - \nu)$ $(W \in \mathscr{G}(\mu, \boldsymbol{P}))$且$[M,Z] \in (\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}))^B$. 取$A = (W(Y-1)) * \nu$,则

1) A 与$\frac{1}{Z_-} \cdot \langle M,Z\rangle$ $\boldsymbol{P}'$-无区别,

2) $W \in \mathscr{G}(\mu, \boldsymbol{P}')$且

$$W^{P'} * (\mu - \nu') = M - \frac{1}{Z_-} \cdot \langle M,Z\rangle = M - A. \tag{28.1}$$

证明 记$M' = M - \frac{1}{Z_-} \cdot \langle M,Z\rangle$. 由系 12.16, $M' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{d}(\boldsymbol{P}')$. 另一方面,由定理 12.26, $\boldsymbol{M}_\mu[\Delta Z \mid \tilde{\mathscr{P}}] = Z_-(Y-1)$. 由引理 12.27, $\langle M,Z\rangle = (Z_- W(Y-1)) * \nu$, 故在$\boldsymbol{P}'$下, $A = \frac{1}{Z_-} \cdot \langle M,Z\rangle$. 进而,

$$\Delta M_t = W(t,\beta_t) I_D(t) - \int_E W(t,x) \nu(\{t\}, dx)$$

$$- \int_E W(t,x)[Y(t,x) - 1] \nu(\{t\}, dx)$$

显然

$$= W(t,\beta_t)I_D(t) - \int_E W(t,x)\nu'(\{t\},dx).$$

因此 $W\in\mathscr{G}(\mu,P')$ 且 $M'=W\overset{P'}{*}(\mu-\nu)$. □

12.29 定理 若 ν' 与 ν 是 P' 无区别的，则

1) $M_\mu[\Delta Z|\tilde{\mathscr{P}}]=0$,

2) $\mathscr{G}(\mu,P)\subset\mathscr{G}(\mu,P')$，且对所有 $W\in\mathscr{G}(\mu,P)$，$W\overset{P'}{*}(\mu-\nu)$ 与 $W\overset{P}{*}(\mu-\nu)$ 是 P'-无区别的.

证明 我们可取 $Y=1$. 1) 可由定理 12.26 推出. 设 $W\in\mathscr{G}(\mu,P)$. 由定理 11.19

$$A=\frac{|W-\hat{W}|^2}{1+|W-\hat{W}|}*\nu+\sum\left(\frac{|\hat{W}|^2}{1+|\hat{W}|}\right)(1-a)\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}(P).$$

因为在 P' 下，$\nu'=\nu$，$a'=a$，$\hat{W}$ 亦适用于关于 P' 的积分. 在 P' 下 A 仍为局部可积变差的可料过程，再由定理 11.19，$W\in\mathscr{G}(\mu,P')$.

记 $M=W\overset{P}{*}(\mu-\nu)$ 及 $M'=W\overset{P'}{*}(\mu-\nu)$，则 $X=M-M'\in\mathscr{S}(P')$. 但 ΔX P'-无区别于 0，故 $X\in\mathscr{S}_p(P')$，$M\in\mathscr{S}_p(P')$. 由定理 12.20.2)，$[M,Z]\in(\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}(P))^d$，故由定理 12.28，在 P' 下，$M=M'$. □

12.30 定理 设 $X\in\mathscr{S}(P)$ 且

$$X=X_0+\alpha+X^c+(xI_{[|x|>1]})*\mu+(xI_{[|x|\leqslant1]})*(\mu-\nu)$$

为 X 在 P 下的积分表示，其中 μ 是 X 的跳测度，(α,β,ν) 是在 P 下 X 的可料特征. 则在 P' 下 X 的积分表示为

$$X=X_0+\alpha'+(X^c)'+(xI_{[|x|>1]})*\mu+(xI_{[|x|\leqslant1]})*(\mu-\nu'),$$

其中 $(X^c)'=X^c-\frac{1}{Z_-}\cdot\langle X^c,Z\rangle$，$X$ 在 P' 下的可料特征 (α',β',ν') 满足下列条件：

i) $\alpha'=\alpha+\frac{1}{Z_-}\cdot\langle X^c,Z\rangle+((Y-1)xI_{[|x|\leqslant1]})*\nu$,

ii) $\beta'=\beta$,

iii) $\nu'=Y\cdot\nu$，其中 Y 是如定理 12.26 所确定的非负可料函数.

证明 记 $W=xI_{[|x|\leqslant1]}$ 及 $M=W\overset{P}{*}(\mu-\nu)$. 由于 $|W|\leqslant1$,

$|\Delta M|\leqslant 2$，故有$[M,Z]\in\mathscr{A}_{loc}(P)$. 由定理 12.28

$$W^{P'}*(\mu-\nu')=W^{P'}*(\mu-\nu)-(W(Y-1))*\nu.$$

由系 12.15 知$(X^c)'\in\mathscr{M}_{loc,0}(P')$及$\beta'=\langle(X^c)'\rangle(P')=\langle X^c\rangle(P)=\beta$. 而$\nu'=Y.\nu$由定理 12.26 推出，稍加整理即可得到在$P'$下$X$的积分表示式和$\alpha'$的表示式. □

12.31 定理 设$X\in\mathscr{S}(P)$，(α,β,ν)和(α',β',ν')分别为X在P和P'下的可料特征. 则(α,β,ν)和(α',β',ν')为P'-无区别的当且仅当下列条件成立：

i) $M_\mu[\Delta Z|\widetilde{\mathscr{P}}]=0$,

ii) $\langle X^c,Z\rangle$ P-无区别于 0.

证明 在P'下，$\beta'=\beta$总是成立的. 由定理 11.26 及其注可知 i)等价于$Y=1$，即$\nu'=\nu$. 现在由定理 12.30 及系 12.7 可知，在P'下$\alpha'=\alpha\Leftrightarrow$在$P'$下$\frac{1}{Z_-}\cdot\langle X^c,Z\rangle=0\Leftrightarrow$在$P'$下$\langle X1^c,Z\rangle=0\Leftrightarrow$在$P$下$\langle X^c,Z\rangle I_{[0,R[}=0\Leftrightarrow$在$P$下$\langle X^c,Z\rangle=0$. 最后一个关系式成立是因为$Z=Z^R$及$\langle X^c,Z\rangle$为连续的. □

§4. 半鞅的刻画

在本节如同通常一样假定$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个完备的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$并带有满足通常条件的σ域流$F=(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. 以$L^1$和$L^\infty$分别表示可积随机变量全体和有界随机变量全体. 若$G$和$H$为$L^1$的子集，表以$G-H=\{x-y;x\in G,y\in H\}$，$\overline{G}$表$G$在$L^1$中的闭包.

12.32 定理 设K为L^1中的凸集，$0\in K$. 则下列三个断言等价：

1)对每个$\eta\in(L^1)^+\setminus\{0\}$，存在常数$c>0$使$c\eta\in\overline{K-(L^\infty)^+}$，

2)对每个$A\in\mathscr{F}$，若$P(A)>0$，则存在常数$c>0$使$cI_A\notin\overline{K-(L^\infty)^+}$，

3)存在$\zeta\in L^\infty$满足$\zeta>0$ a.s. 以及$\sup\limits_{\xi\in K}E[\zeta\xi]<\infty$，

其中$(L^1)^+$,$(L^\infty)^+$分别表示L^1,L^∞中非负元素全体.

证明 1)⇒ 往证2)是明显的.2)⇒ 3). 设$A\in\mathscr{F}$且$P(A)>0$. 由假设存在常数$c>0$使$cI_A\notin\overline{K-(L^\infty)^+}$,因为$K-(L^\infty)^+$是凸的,$L^\infty$是$L^1$的共轭空间,由 Ascoli-Mazur 定理,存在$\theta\in L^\infty$使

$$\sup_{\xi\in K,\eta\in(L^\infty)^+} E[\theta(\xi-\eta)] < cE[\theta I_A]. \tag{32.1}$$

在(32.1)中取$\xi=0$, $\eta=a\theta^-$,$a>0$产生

$$aE[(\theta^-)^2] < cE[\theta I_A]. \tag{32.2}$$

由(32.2)对一切$a>0$成立,必有$\theta^-=0$,a.s.,即$\theta\in(L^\infty)^+$. 此外,显然有$P(\theta>0)>0$. 若以$\frac{\theta}{E[\theta]}$代替θ可认为$E[\theta]=1$,于是

$$\sup_{\xi\in K}E[\theta\xi] < c.$$

取$H=\{\theta\in(L^\infty)^+; E[\theta]=1$以及$\sup\limits_{\xi\in K}E[\theta\xi]<\infty\}$. 我们已证明$H$是非空的. 令$\mathscr{C}=\{[\theta=0];\theta\in H\}$. 往证$\mathscr{C}$对可列交是封闭的.设$(\theta_n)\subset H$以及$c_n=\sup\limits_{\xi\in K}E[\theta_n\xi]$,$d_n=\|\theta_n\|_{L^\infty}$. 取严格正的实数列$(b_n)$满足

$$\sum_n b_n=1,\quad \sum_n c_n b_n<\infty,\quad \sum_n b_n d_n<\infty.$$

设$\theta=\sum\limits_n b_n\theta_n$. 显然$\theta\in H$且$[\theta=0]=\bigcap\limits_n[\theta_n=0]$. 这表明$\mathscr{C}$对可列交是封闭的. 于是存在$\zeta\in H$使

$$P([\zeta=0])=\inf_{\theta\in H}P([\theta=0]). \tag{32.3}$$

还需证$\zeta>0$,a.s.. 若$P([\zeta=0])>0$,记$A=[\zeta=0]$. 由上面已得到的结论,必存在$\theta\in H$使(32.1)成立. 特别有$E[\theta I_{[\zeta=0]}]>0$. 这蕴含$P([\theta>0]\cap[\zeta=0])>0$. 因而$P([\theta=0]\cap[\zeta=0])<P([\zeta=0])$. 但$[\theta=0]\cap[\zeta=0]\in\mathscr{C}$,这与(32.3)矛盾.

3)⇒1). 若1)不真,则存在$\eta\in(L^1)^+\backslash\{0\}$使对所有$c>0$都有$c\eta\in\overline{K-(L^\infty)^+}$. 对每个$n$存在$\xi_n\in K$, $\eta_n\in(L^\infty)^+$及$\delta_n\in L^1$使$n\eta=\xi_n-\eta_n-\delta_n$以及$\|\delta_n\|_{L^1}<\frac{1}{n}$. 我们有$\xi_n\geqslant n\eta+\delta_n$且对任一严格正随机变量$\zeta$有

$$\sup_{\xi\in K} E[\zeta\xi] \geqslant \sup_n E[\zeta\xi_n] = +\infty$$

这与 3)矛盾，所以 1)成立． □

12.33 定理 设 K 是 L^1 中凸集，若对任一列$(\xi_n)\subset K$ 有$\frac{1}{n}\xi_n^+ \xrightarrow{P} 0$[1]，则存在 $\zeta\in L^\infty$ 满足 $\zeta>0$ a.s. 以及$\sup_{\xi\in K} E[\zeta\xi]<\infty$.

证明 首先，可认为 $0\in K$，否则取任一 $\eta\in K$ 并以$\{x-\eta: x\in K\}$代替 K. 若定理 12.32 断言 1)不成立．由定理 12.32 的 3)⇒1)的证明可知存在 $\eta\in(L^1)^+\setminus\{0\}$，$(\xi_n)\subset K$ 及$(\delta_n)\in L^1$ 使对每个 n $\|\delta_n\|_{L^1}\leqslant\frac{1}{n}$ 及$\frac{\xi_n}{n}\geqslant\eta+\frac{\delta_n}{n}$. 这与$\frac{1}{n}\xi_n^+ \xrightarrow{P} 0$ 矛盾．于是定理 12.32 断言 1)成立．由定理 12.32 就可得到要求的结论． □

12.34 定义 以 $\mathscr{H}$ 表示下列形式的有界可料过程全体：

$$H = \sum_{i=0}^{n-1}\xi_i I_{]t_i,t_{i+1}]},$$

其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n<\infty$，$\xi_i\in\mathscr{F}_{t_i}$，$|\xi_i|\leqslant 1$，$i=0,1,\cdots,n-1$. 设 X 为随机过程．对每个 $H\in\mathscr{H}$，规定 $J(X,H)$如下：

$$J(X,H)_t = \sum_{i=0}^{n-1}\xi_i(X_{t_{i+1}\wedge t}-X_{t_i\wedge t}),\quad t\geqslant 0.$$

显然，对每个 t，映射$(X,H)\mapsto J(X,H)_t$ 是双线性的．此外，若 X 为半鞅，则 $J(X,H)=H.X$.

下一定理给出了半鞅的一个刻画。该定理在文献中通常称为 **Dellacherie-Meyer-Mokobodzki 定理**．

12.35 定理． 设 X 为一适应右连左极过程．为要 X 是一个半鞅当且仅当对每个序列$(H^{(n)})\subset\mathscr{H}$ 及所有 $t\geqslant 0$ 有$\frac{1}{n}J(X,H^{(n)})_t \xrightarrow{P} 0$.

证明 必要性．设 $X\in\mathscr{S}$，$(H^{(n)})\subset\mathscr{H}$ 及 $t\geqslant 0$. 因为$|\frac{1}{n}H^{(n)}|\leqslant 1/n$，由定理 9.30

---

1) 容易看出这一条件等价于下列条件：对任一给定的 $\varepsilon>0$ 存在 $c>0$ 使对一切 $\xi\in K$ 有 $P(\xi>c)<\varepsilon$.

$$\frac{1}{n}J(X,H^{(n)})_t=\left(\frac{H^{(n)}}{n}.X\right)_t \xrightarrow{P} 0.$$

充分性．欲证对所有 $t>0$ $X^t=(X_{s\wedge t})_{s\geq 0}\in\mathscr{S}$．因为 X 为右连左极的，$X_t^*=\sup\limits_{s\leq t}|X_s|<\infty$．我们可假定 $\boldsymbol{E}[X_t^*]<\infty$，否则 $\boldsymbol{P}$ 用一个与它等价的概率测度来代替(这时定理假定仍保持成立)．取

$$K=\{J(X,H)_t;H\in\mathscr{H}\}.$$

则 K 是 L^1 中凸集．按假定对每个序列$(\xi_n)\subset K$ 有$\frac{1}{n}\xi_n\xrightarrow{P}0$. 由定理 12.32 存在严格正有界随机变量 ζ 使 $\boldsymbol{E}[\zeta]=1$ 及 $\boldsymbol{E}[\zeta\xi]<\infty$．令 $d\boldsymbol{P}'=\zeta d\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{P}'$ 为等价于 $\boldsymbol{P}$ 的概率测度．由于 ζ 有界，$\boldsymbol{E}'[X_t^*]=\boldsymbol{E}[\zeta X_t^*]<\infty$．欲证 X^t 是 $\boldsymbol{P}'$ 下的拟鞅．令 $\tau:0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ 为$[0,t]$的有限分割．取

$$H^{(\tau)}=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i I_{]t_i,t_{i+1}]},\quad \xi_i=\operatorname{sgn}(E'[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\mathscr{F}_{t_i}]).$$

则 $H^{(\tau)}\in\mathscr{H}$ 且

$$\boldsymbol{E}'[J(X,H^{(\tau)})_t]=\boldsymbol{E}'\left[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})\right]$$

$$=\boldsymbol{E}'\left[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\boldsymbol{E}'(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\mathscr{F}_{t_i}]\right]$$

$$=\boldsymbol{E}'\left[\sum_{i=0}^{n-1}|\boldsymbol{E}'[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\mathscr{F}_{t_i}]|\right].$$

因而有

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X^t,P')&=\sup_\tau\boldsymbol{E}'\left[\sum_{i=0}^{n-1}|\boldsymbol{E}'[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\mathscr{F}_{t_i}]|\right]+\boldsymbol{E}'[|X_t|]\\&=\sup_\tau\boldsymbol{E}'[J(X,H^{(\tau)})_t]+\boldsymbol{E}'[|X_t|]\\&=\sup_\tau\boldsymbol{E}[\zeta J(X,H^{(\tau)})_t]+\boldsymbol{E}'[\zeta|X_t|]<\infty.\end{aligned}$$

这表明在 $\boldsymbol{P}'$ 下 X^t 是拟鞅．所以对所有 $t>0$，$X^t\in\mathscr{S}$，因此 $X\in\mathscr{S}$． □

12.36 定理 设 $\boldsymbol{G}=(\mathscr{G}_t)$ 为一满足通常条件的 σ 域流，对所有 $t\geq 0$，$\mathscr{G}_t\subset\mathscr{F}_t$．若 X 为一 $\boldsymbol{F}$-半鞅且 $\boldsymbol{G}$-适应，则 X 是 $\boldsymbol{G}$-半鞅，且$[X](\boldsymbol{F})$与$[X](\boldsymbol{G})$无区别．

证明 取

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{G}) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \xi_i I_{(t_i, t_{i+1}]} : \begin{array}{l} 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty, \xi_i \in \mathscr{G}_{t_i}, \\ |\xi_i| \leqslant 1, i = 0, \cdots, n-1, n \geqslant 1 \end{array} \right\},$$

则 $\mathscr{H}(\boldsymbol{G}) \subset \mathscr{H}$. 由于 X 是 $\boldsymbol{F}$-半鞅, 故由定理 12.35 知: 对每个 $(H^{(n)}) \subset \mathscr{H}(\boldsymbol{G}) \subset \mathscr{H}$, 以及对每个 $t \geqslant 0$,

$$\frac{1}{n} J(X, H^{(n)})_t \xrightarrow{P} 0.$$

再由定理 12.35, X 是 $\boldsymbol{G}$-半鞅. 最后, 由于 $[X]_t$ 是 X 在 $[0,t]$ 上差分平方和的依概率极限, 它不依赖于流. □

12.37 定理 设 $\boldsymbol{G} = (\mathscr{G}_t)$ 为满足通常条件的流, 且对所有 $t \geqslant 0$ 有 $\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t$. 假定 X 是一个 $\boldsymbol{F}$-半鞅且 $\boldsymbol{G}$-适应. 设 H 为一 $\boldsymbol{G}$-可料过程且 H 关于 X 和 $\boldsymbol{F}$ 是可积的(积分表以 $H \overset{F}{\cdot} X$). 则 H 关于 X 和 $\boldsymbol{G}$ 也是可积的(积分表以 $H \overset{G}{\cdot} X$)且 $H \overset{F}{\cdot} X$ 与 $H \overset{G}{\cdot} X$ 无区别.

证明 首先, 我们证明 X 关于 H 和 $\boldsymbol{G}$ 的可积性. 令

$$A = \sum (\Delta X I_{[|\Delta X| > 1 \text{ or } |H\Delta X| > 1]}), \quad Z = X - A.$$

必要时 P 代之以等价的概率测度使得两个 $\boldsymbol{F}$-特殊半鞅 Z 和 $H \overset{F}{\cdot} Z$ 有下列典则分解:

$$Z = N + B, \quad H \overset{F}{\cdot} Z = N' + B',$$

其中 N 和 N' 为 $\boldsymbol{F}$-鞅, B 和 B' 为 $\boldsymbol{F}$-可料有限变差过程, $B_0 = B'_0 = 0$, 且对所有 $t > 0$

$$\boldsymbol{E}\left[\int_0^t |dB_s|\right] < \infty, \quad \boldsymbol{E}\left[\int_0^t |dB'_s|\right] < \infty \text{(参见问题 12.12)}.$$

由定理 9.16 有 $B' = H.B$. 于是对所有 $t > 0$ $\boldsymbol{E}\left[\int_0^t |H_s| |dB_s|\right] < \infty$. 令 $\tilde{B}$ 为 B 关于 $\boldsymbol{G}$ 的可料对偶投影. 于是对所有 $t > 0$, $\boldsymbol{E}\left[\int_0^t |H_s| |d\tilde{B}_s|\right] < \infty$, 即 $H.\tilde{B}$ 存在. 由定理 5.30.2) 对 $s < t$ 有

$$\boldsymbol{E}[B_t - \tilde{B}_t | \mathscr{G}_s] = \boldsymbol{E}[B_s - \tilde{B}_s | \mathscr{G}_s] \quad \text{a.s.},$$

所以(注意 $Z = N + B$ 是 $\boldsymbol{G}$-适应的)

$$E[N_t+B_t-\widetilde{B}_t|\mathscr{G}_s]=E[E[N_t|\mathscr{F}_s]|\mathscr{G}_s]+E[B_t-\widetilde{B}_t|\mathscr{G}_s]$$
$$=E[N_s+B_s-\widetilde{B}_s|\mathscr{G}_s]$$
$$=N_s+B_s-\widetilde{B}_s,\quad \text{a.s.}.$$

因此 $N+B-\widetilde{B}$ 是 G-鞅．由于$\sqrt{H^2.[N-B-\widetilde{B}]}\leqslant\sqrt{H^2.[Z]}+\Sigma(H\Delta B)$及$|H\Delta Z|\leqslant 1$，$\sqrt{H^2.[N+B-\widetilde{B}]}$关于 G 为局部可积的，即 $H\overset{G}{\cdot}(N+B-\widetilde{B})$是存在的．所以 H 关于 X 及 G 是可积的且 $H\overset{G}{\cdot}X=H\overset{G}{\cdot}(N+B-\widetilde{B})+H.(A+\widetilde{B})$，这里第二项是 Stieltjes 积分．

现在我们来证明 $H\overset{F}{\cdot}X$ 和 $H\overset{G}{\cdot}X$ 无区别．由定理 9.30 及其注可假定 H 是有界的．取 $\mathscr{C}=\{[\![O_A]\!]:A\in\mathscr{G}_0\}\cup\{]\!]T,\infty[\![:T$ 为 G-停时$\}$．显然，对 $A\in\mathscr{C}$，$I_A\overset{F}{\cdot}X$ 和 $I_A\overset{G}{\cdot}X$ 无区别．于是由单调类定理可得要求的结论． □

12.38 定义　假定在基本空间$(\Omega,\mathscr{F}^0)$上给定一个右连续流 $F^0=(\mathscr{F}_t^0)_{t\geqslant 0}$，$\mathscr{F}_\infty^0=\mathscr{F}^0$ 以及随机过程 $X=(X_t)$．$(\Omega,\mathscr{F}^0)$上概率测度 P 称为**关于**(X,F^0)**的半鞅(鞅)测度**若在 P 之下 X 是一个$(F^0)^P$-半鞅(局部鞅)．一个关于(X,F^0)的半鞅(鞅)测度也称为**半鞅(鞅)问题**(X,F^0)**的解**．半鞅(鞅)问题(X,F^0)解的全体表以$\Gamma_s(X,F^0)(\Gamma_m(X,F^0))$．半鞅(鞅)问题的定义可自然地推广到过程族$\{X^\theta,\theta\in\Xi\}$的情形．

例如，在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上给出一个连续过程 $W=(W_t)$，$W_0=0$．若 W 关于其自然流是一个标准 Wiener 过程．令

$$\mathscr{F}_t^0=\bigcap_{s>t}\sigma\{W_r,r\leqslant s\},t\geqslant 0,\quad \mathscr{F}^0=\mathscr{F}_\infty^0,$$
$$X_t^1=W_t,\ X_t^2=W_t^2-t,\quad t\geqslant 0.$$

则由系 15.39 及 11.37 知 P 是鞅问题$(\{X^1,X^2\},F^0)$的唯一解．

进而，我们假定

i)F 是 R 上的概率分布，

ii)α,β 为两个过程，$\alpha_0=\beta_0=0$，

iii)ν 是一个随机测度，$\nu(\{t\}\times E)=\nu(R_+\times X\{0\})=0$.

$(\Omega,\mathscr{F}^0)$上的概率测度 P 称为**半鞅问题**$(X,F^0;\ F,\alpha,\beta,\nu)$的

解，若在 P 之下 X 是一个 $(\boldsymbol{F}^0)^P$-半鞅，以 F 为初始分布（即 X_0 的分布），以 (α,β,ν) 为其可料特征．半鞅问题 $(X,\boldsymbol{F}^0;F,\alpha,\beta,\nu)$ 的解的全体表以 $\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0;F,\alpha,\beta,\nu)$．

12.39 定理 设 $(\Omega,\mathscr{F}^0)$，$\boldsymbol{F}^0$ 及 X 如定义 12.39 所给出．若 $(\boldsymbol{P}_n)\subset\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0)$ 且 $\boldsymbol{P}'$ 为 $(\Omega,\mathscr{F}^0)$ 上概率，$\boldsymbol{P}'$ 关于 $\Sigma_n\boldsymbol{P}_n$ 绝对连续，则 $\boldsymbol{P}'\in\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0)$．

特别，$\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0)$ 是凸的．

证明 令

$$\mathscr{H}^0=\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i I_{]t_i,t_{i+1}]}:\begin{array}{c}0=t_0<t_1<\cdots<t_n<\infty,\xi_i\in\mathscr{F}^0_{t_i},\\ |\xi_i|\leqslant 1,\ i=0,\cdots,n-1,\ n\geqslant 1\end{array}\right\},$$

及 $\boldsymbol{P}=\Sigma_n\lambda_n\boldsymbol{P}_n$，其中 $\lambda_n>0,n\geqslant 1$，且 $\Sigma_n\lambda_n=1$．

对每个 $(H^{(k)})\subset\mathscr{H}^0$ 及 $t\geqslant 0$，由定理 12.35 对一切 n

$$\frac{1}{k}J(X,H^{(k)})_t\xrightarrow{P_n}0,\qquad k\to\infty.$$

容易看出有

$$\frac{1}{k}J(X,H^{(k)})_t\xrightarrow{P}0,\qquad k\to\infty.$$

但 $\boldsymbol{P}'\ll\boldsymbol{P}$，故有

$$\frac{1}{k}J(X,H^{(k)})_t\xrightarrow{P'}0,\qquad k\to\infty.$$

再由定理 12.35 可知 $\boldsymbol{P}'\in\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0)$．

若 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2\in\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0)$，且 $\boldsymbol{P}=\alpha\boldsymbol{P}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{P}_2,0<\alpha<1$，则 $\boldsymbol{P}\ll\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$，所以 $\boldsymbol{P}\in\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0)$．这表明 $\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0)$ 是凸的． □

12.40 定理 设 $(\Omega,\mathscr{F}^0)$，$\boldsymbol{F}^0,X,F,\alpha,\beta,\nu$ 如定义 12.38 所给，则 $\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0;F,\alpha,\beta,\nu)$ 是凸的．

证明 设 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2\in\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0;F,\alpha,\beta,\nu)$ 且 $\boldsymbol{P}=\alpha\boldsymbol{P}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{P}_2$，$0<\alpha<1$．首先在 $\boldsymbol{P}$ 下 X_0 的分布律仍为 F．设 μ 为 X 的跳测度，则 $\boldsymbol{M}_\mu(\boldsymbol{P})=\alpha\boldsymbol{M}_\mu(\boldsymbol{P}_1)+(1-\alpha)\boldsymbol{M}_\mu(\boldsymbol{P}_2)$，而在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上，$\boldsymbol{M}_\nu(\boldsymbol{P})=\alpha\boldsymbol{M}_\nu(\boldsymbol{P}_1)+(1-\alpha)\boldsymbol{M}_\mu(\boldsymbol{P}_2)=\boldsymbol{M}_\mu(\boldsymbol{P})$．这表明在 $\boldsymbol{P}$ 下 ν 仍为 μ 的可料对偶投影．设 (α',β',ν) 为 $\boldsymbol{P}$ 下 X 的可料特征．由定理 12.30 在 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$

下，β 都和 β' 无区别，所以在 $\boldsymbol{P}$ 下 β 和 β' 无区别．由定理 12.29 $(xI_{[|x|\leq 1]})\overset{P_1}{*}(\mu-\nu)$ 与 $(xI_{[|x|\leq 1]})\overset{P}{*}(\mu-\nu)$ $\boldsymbol{P}_1$-无区别，$(xI_{[|x|\leq 1]})\overset{P_2}{*}(\mu-\nu)$ 与 $(xI_{[|x|\leq 1]})\overset{P}{*}(\mu-\nu)$ $\boldsymbol{P}_2$-无区别．所以 $X-X_0-\alpha-(xI_{[|x|>1]})*\mu-(xI_{[|x|\leq 1]})*(\mu-\nu)$ 在 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 下都是连续局部鞅，在 $\boldsymbol{P}$ 下它也是连续局部鞅，即 α 与 α' $\boldsymbol{P}$-无区别．总之，(α,β,ν) 为 X 在 $\boldsymbol{P}$ 下的可料特征．因而 $\boldsymbol{P}\in\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0;F,\alpha,\beta,\nu)$． □

问题与补充

12.1 设 ξ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$ 上的随机变量，则存在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上另一概率测度 $\boldsymbol{P}'$ 使 $\boldsymbol{P}'\sim\boldsymbol{P}$，$\dfrac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}}$ 有界且对一切 n，$\boldsymbol{E}'[|\xi^n|]<\infty$．

12.2 设 (ξ_n) 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$ 上的随机变量序列．若 $\lim_{n,m\to\infty}\boldsymbol{E}[|\xi_n-\xi_m|\wedge 1]=0$．则存在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上另一概率测度 $\boldsymbol{P}'$ 使 $\boldsymbol{P}'\sim\boldsymbol{P}$，$\dfrac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}}$ 有界且对一切 $p\geq 1$ $\lim_{n,m\to\infty}\boldsymbol{E}[|\xi_n-\xi_m|^p]=0$．

12.3 设 $X\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P})$，$A=\Sigma(\Delta XI_{[|\Delta X|>1]})$，$\widetilde{A}$ 为 A 在 $\boldsymbol{P}$ 下的可料对偶投影．假定 $\boldsymbol{P}'\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\boldsymbol{P}$，且 Z 为 $\boldsymbol{P}'$ 关于 $\boldsymbol{P}$ 的密度过程．取 $Y=X-\dfrac{1}{Z_-}\cdot\langle X-A,Z\rangle-A+\widetilde{A}$，则 $Y\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}')$．进而，$X\in\mathscr{S}_p(\boldsymbol{P}')$ 当且仅当 $A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}')$．

12.4 设 $M,X\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P})$．假定 $\langle X,M\rangle$ 存在且 $\mathscr{E}(M)$ 在 $\boldsymbol{P}$ 下为非负一致可积鞅．令 $d\boldsymbol{P}'=\mathscr{E}(M)_\infty d\boldsymbol{P}$，则 $X-\langle X,M\rangle\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}')$．

12.5 设 W 为标准 Wiener 过程，H 为一适应可测过程．若 $\boldsymbol{E}\left[\exp\left(\dfrac{1}{2}\int_0^\infty H_s^2\,ds\right)\right]<\infty$ 且 $d\boldsymbol{P}'=\mathscr{E}(H.W)_\infty d\boldsymbol{P}$．则在 $\boldsymbol{P}'$ 下 $\left(W_t-\int_0^t H_s\,ds\right)$ 是标准 Wiener 过程．

12.6 假定 $P' \overset{loc}{\ll} P$ 且 Z 为 P' 关于 P 的密度过程. 设 $A \in \mathscr{V}(P)$, $[A,Z] \in (\mathscr{A}_{loc}(P))^B$, 则 $A \in \mathscr{A}_{loc}(P') \Leftrightarrow A \in (\mathscr{A}_{loc}(P))^B$. 这时 $\widetilde{A}(P') = \widetilde{A}(P) + \frac{1}{Z_-} . \langle A, Z \rangle$.

12.7 假定 $P' \overset{loc}{\ll} P$ 且 Z 为 P' 关于 P 的密度过程. 设 $A \in \mathscr{V}_0(P)$, $C = Z . A$, 则 $A \in \mathscr{A}_{loc}(P') \Leftrightarrow C \in (\mathscr{A}_{loc}(P))^B$. 这时, $\widetilde{A}(P') = \frac{1}{Z_-} . \widetilde{C}(P)$.

12.8 设 $A \in \mathscr{F}$, $X \in \mathscr{S}$ 且 $H \in L(X)$. 若对所有 $\omega \in A$, $X.(\omega)$ 为有限变差函数, $Y = XI_A$, 则 Stieltjes 积分 $H.Y$ 存在, 且在 A 上 $H.X$ 与 $H.Y$ 无区别.

12.9 设 $A \in \mathscr{F}$, $X, Y \in \mathscr{S}$

1)若在 A 上, $X - Y$ 为有限变差过程且 $X_0 = Y_0$, 则在 A 上 X^c 与 Y^c 无区别.

2)若在 A 上, $X - Y$ 为连续有限变差过程且 $X_0 = Y_0$, 则在 A 上 $[X]$ 与 $[Y]$ 无区别.

12.10 设 $X = (X_t)$ 为一适应右连左极过程, 对所有 $t \geqslant 0$ $E[|X_t|] < \infty$. 取 $K_a = \{J(X,H)_a : H = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{]t_i, t_{i+1}]}, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = a, \xi_i \in \mathscr{F}_{t_i}$ 为有界的, $i = 0, \cdots, n-1, n \geqslant 1\}$, $a > 0$. 则下列断言等价:

1)存在概率测度 $P' \sim P$, $\frac{dP'}{dP} \in L^\infty$ 且在 P' 下 $X^a = (X_{t \wedge a})_{t \geqslant 0}$ 是一个鞅.

2)对所有 $A \in \mathscr{F}$, $P(A) > 0$, 有 $I_A \notin \overline{K_a - (L^\infty)^+}$,

3)$(L^1)^+ \cap \overline{K_a - (L^\infty)^+} = \{0\}$.

12.11 设 $X = (X_t)$ 为一适应连续过程且对每个 $t > 0$, $E[|X_t|] < \infty$, K_a, $a > 0$ 如上一问题所定义. 为要存在概率 $P' \sim P$, $\frac{dP'}{dP} \in L^\infty$ 且在 P' 下 $X^a = (X_{t \wedge a})$ 为鞅, 其充要条件是 $(L^1)^+ \cap \overline{K_a} = \{0\}$.

12.12 设 $X \in \mathscr{S}$, 则存在一个概率测度 $P' \sim P$, 使得 $\frac{dP'}{dP} \in$

L^{∞}, $X\in\mathscr{S}_p(\boldsymbol{P}')$，且 X 在 $\boldsymbol{P}'$ 下的典则分解 $X=M+A$ 满足下列条件：$\forall\ t>0, M^t=(M_{s\wedge t})_{s\geqslant 0}\in\mathscr{M}^2(\boldsymbol{P}'), A^t=(A_{s\wedge t})_{s\geqslant 0}\in\mathscr{A}(\boldsymbol{P}')$.

12.13 设 X 为一适应右连左极过程．令

$$\mathscr{K}=\left\{K=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i I_{[T_i,T_{i+1}[}:\begin{array}{l}0=T_0\leqslant T_1\leqslant\cdots\leqslant T_n, T_i, 1\leqslant i\leqslant n,\\ \text{为停时}, \quad \xi_i\in\mathscr{F}_{T_i},\\ |\xi_i|\leqslant 1, i=0,\cdots,n-1, n\geqslant 1\end{array}\right\},$$

$$J^0(X,K)_t=\begin{cases}\sum_{j=0}^{i-1}[\xi_j(X_{T_{j+1}-}-X_{T_j-})]+\xi_i(X_t-X_{T_i-}),\\ \qquad\qquad T_i\leqslant t<T_{i+1},\ i=0,\cdots,n-1,\\ \sum_{j=0}^{n-1}[\xi_j(X_{T_{j+1}-}-X_{T_j-})], T_n\leqslant t.\end{cases}$$

则下列断言等价：

1) X 为半鞅，且对所有 $t>0$，$\sum_{s\leqslant t}|\Delta X_s|<\infty$ a.s.，

2) 对所有 $(K^{(n)})\subset\mathscr{K}$ 及 $t>0$，$\frac{1}{n}J^0(X,K^{(n)})_t\xrightarrow{P}0$，

3) 存在适应增过程 A 使对任一停时 T 及 $K\in\mathscr{K}$ 有 $\boldsymbol{E}[(J^0(X,K)^*_{T-})^2]\leqslant\boldsymbol{E}[A_{T-}(K^2\cdot A)_{T-}]$.

12.14 设 X 为适应右连左极过程．若存在随机变量序列 (R_n)，$R_n\uparrow\infty$ 以及半鞅序列 $(X^{(n)})$ 使对每个 n，$X_t=X_t^{(n)}$，$t<R_n$，则 X 为半鞅．

12.15 设 $\{A_1, A_2\cdots\}$ 为 Ω 的可列分割．令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_t\vee\sigma\{A_1, A_2,\cdots\}$，$t\geqslant 0$. 则 $(\mathscr{F}_t)$-半鞅也是 $(\mathscr{G}_t)$-半鞅．

12.16 设在基本空间 $(\Omega,\mathscr{F}^0)$ 上给定一个右连续流 $\boldsymbol{F}^0$ 及 $\boldsymbol{F}^0$-适应过程 X. 设 $\boldsymbol{P}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F}^0)$ 上的概率．对 $A\in\mathscr{F}^0$，$\boldsymbol{P}(A)>0$. 规定 $\boldsymbol{P}_A(\cdot)=\boldsymbol{P}(\cdot\cap A)/\boldsymbol{P}(A)$. 若 $\mathscr{C}=\{A:\boldsymbol{P}_A\in\Gamma_s(X,\boldsymbol{F}^0)\}$ 为非空的且 $B=\text{esssup}\,\mathscr{C}$，则 $B\in\mathscr{C}$.

12.17 若 $(\Omega,\mathscr{F}^0)$，$\boldsymbol{F}^0$ 及 X 如同上题所给出的．则 $\Gamma(X,\boldsymbol{F}^0)=\{\boldsymbol{P}:\boldsymbol{P}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F}^0)$ 上概率测度且 $X\in\mathscr{M}(\boldsymbol{P})\}$ 为凸的．

12.18 设 $(\Omega,\mathscr{F}^0)$，$\boldsymbol{F}^0$ 及 X 如同上题所给出的．设 C 为 $\boldsymbol{F}^0$-

可料增过程具有有界跳 ΔC，则 $\Gamma_m^2(X, \boldsymbol{F}^0; C) = \{\boldsymbol{P}; \boldsymbol{P}$ 为$(\Omega, \mathscr{F}^0)$上的概率，$X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}^2(\boldsymbol{P})$且$\langle X \rangle(\boldsymbol{P}) = C\}$为凸的.

第十三章　可料表示性

可料表示性就是指每个局部鞅可表为可料过程的随机积分．它不仅在理论上是有意义且重要的，而且在应用上如滤波、控制等方面也如此．

在这一章，我们给定了一个完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，在其上配有满足通常条件的流$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$，且$\mathscr{F}=\mathscr{F}_{\infty}$．

§1.　强可料表示性

13.1 定义　设$M=(M_t)_{t\geqslant 0}$为局部鞅，$M_0=0$．如定义9.1以$L_m(M)$表示所有按局部鞅积分关于M可积的可料过程全体．记

$$\mathscr{L}(M)=\{H.M:H\in L_m(M)\},\ \mathscr{L}^1(M)=\mathscr{L}(M)\cap\mathscr{H}^1.$$

若$\mathscr{L}(M)=\mathscr{M}_{\text{loc},0}$，称$M$具有**强可料表示性**．这里附加形容词“强”是因为在下一节我们还将引入另一类较弱的可料表示性．

13.2 引理　假定$M,L\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$．若存在停时序列$(T_n)$满足$T_n\uparrow\infty$且对每个$n$ $L^{T_n}\in\mathscr{L}(M)$，则$L\in\mathscr{L}(M)$．

证明　设$L^{T_n}=H^{(n)}\cdot M$，其中$H^{(n)}\in L_m(M)$．令$H=\sum_{n=1}^{\infty}H^nI_{]T_{n-1},T_n]}(T_0=0)$，易见$H\in L_m(M)$且$L=H.M$．　□

13.3 引理　假定$M\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$，则$\mathscr{L}^1(M)$是$\mathscr{H}^1$的稳定闭子空间．

证明　显然$\mathscr{L}^1(M)$是一个稳定子空间．只要证明$\mathscr{L}^1(M)$的完备性．设$(H^{(n)}.M)_{n\geqslant 1}$为$\mathscr{L}^1(M)$中的基本列且满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|H^{(n+1)}.M-H^{(n)}.M\|_{\mathscr{H}^1}<\infty\quad(H^{(0)}=0).$$

故对所有$t>0$有

$$\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} |H_s^{(n+1)} - H_s^{(n)}| d[M]_s$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t |H_s^{(n+1)} - H_s^{(n)}|^2 d[M]_s \right)^{\frac{1}{2}} ([M]_t)^{\frac{1}{2}}.$$

记

$$A = \left[\sum_{n=0}^{\infty} |H^{(n+1)} - H^{(n)}| < \infty \right]$$

和

$$H = I_A \sum_{n=0}^{\infty} (H^{(n+1)} - H^{(n)}).$$

则A，H 是可料的，且 $P\left(\int_0^\infty I_{A^c} d[M]_s = 0 \right) = 1$. 因而

$$E\left[\left(\int_0^\infty H_s^2 \, d[M]_s \right)^{1/2} \right]$$

$$\leqslant E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^\infty |H_s^{(n+1)} - H_s^{(n)}|^2 d[M]_s \right)^{1/2} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \| H^{(n+1)}.M - H^{(n)}.M \|_{\mathscr{H}^1} < \infty,$$

即 $H.M \in \mathscr{L}^1(M)$. 同时，当 $n \to \infty$ 时

$$\| H.M - H^{(n)}.M \|_{\mathscr{H}^1} = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} (H^{(k+1)} - H^{(k)}).M \right\|_{\mathscr{H}^1}$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \| (H^{(k+1)} - H^{(k)}).M \|_{\mathscr{H}^1} \to 0,$$

故 $H^{(n)}.M \to H.M$. □

13.4 定理 假定 $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，则下列断言等价：

1) $\mathscr{L}(M) = \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，即 M 有强可料表示性，

2) $\mathscr{L}^1(M) = \mathscr{H}_0^1$，

3) $\mathscr{M}_0^b \subset \mathscr{L}(M)$ ($\mathscr{M}^b$ 为有界鞅全体).

证明 因为 $\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0} = \mathscr{H}^1_{\mathrm{loc},0}$，由引理 13.2 可得 2)⇒1). 1)⇒3)是显然的. 最后来证 3)⇒2). 设 $L \in \mathscr{H}_0^1$. 因为 $\mathscr{M}_0^b$ 在 $\mathscr{H}_0^1$ 中稠密(定理10.5)，故存在$(N^{(n)}) \subset \mathscr{M}_0^b$ 使 $\| N^{(n)} - L \|_{\mathscr{H}^1} \to 0$. 但 $N^{(n)} \in \mathscr{L}^1(M)$，故由引理 13.3 可得 $L \in \mathscr{L}^1(M)$. □

13.5 定理 假定 $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，则下列断言等价：

1) $\mathscr{L}(M)=\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，即 M 有强可料表示性，

2) 对所有 $L\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，$LM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}\Rightarrow L=0$，

3) 对所有 $N\in\mathscr{M}_0^{\infty}$，$NM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}\Rightarrow N=0$.

证明 1)$\Rightarrow$2) 设 $L,LM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 由强可料表示性有 $L=H.M$，$H\in L_m(M)$，故$[L,M]=H.[M]$. 因为 $LM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，故$[L,M]\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，即$[L,M]\in\mathscr{W}_{\mathrm{loc},0}$. 于是对下列 Stieltjes 积分有

$$(HI_{[|H|\leqslant n]}).[L,M]=(H^2I_{[|H|\leqslant n]}).[M]\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}.$$

但$(H^2I_{[|H|\leqslant n]}).[M]\in\mathscr{V}^+$，所以它必须是零，令 $n\to\infty$ 即可得 $H^2.[M]=0$，即$[L]=0$. 这样就有 $L=0$.

2)$\Rightarrow$3) 是显然的.

3)$\Rightarrow$1)、由定理 13.4，只要证 $\mathscr{L}^1(M)=\mathscr{H}_0^1$. 令 φ 为 $\mathscr{H}_0^1$ 上有界线性泛函满足 $\varphi|_{\mathscr{L}^1(M)}=0$. 欲证 $\varphi=0$. 由定理 10.21 存在 $N\in\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}_0$ 使

$$\varphi(L)=\boldsymbol{E}[[L,N]_\infty],\quad L\in\mathscr{H}_0^1.$$

因为对所有 $L\in\mathscr{L}^1(M)$，$\boldsymbol{E}[[L,N]_\infty]=0$，对每个停时 T 有

$$\boldsymbol{E}[[L,N]_T]=\boldsymbol{E}[[L^T,N]_\infty]=0.$$

于是$[L,N]\in\mathscr{M}_0$. 因为 $\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}_{\mathrm{loc}}=\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{\infty}$ 及 $\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}=\mathscr{H}_{\mathrm{loc},0}^1$，存在停时列$(T_n)$，$T_n\uparrow\infty$ 且对每个 n 有 $M^{T_n}\in\mathscr{H}_0^1$ 和 $N^{T_n}\in\mathscr{M}_0^{\infty}$. 由于 $M^{T_n}=I_{[0,T_n]}\cdot M\in\mathscr{L}^1(M)$，故有$[M^{T_n},N]\in\mathscr{M}_0$，$[N^{T_n},M]\in\mathscr{M}_0$ 及 $MN^{T_n}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 由假定可得 $N^{T_n}=0$，进而有 $N=0$，故 $\varphi=0$. □

13.6 系 假定 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，则下列断言等价：

1) $\mathscr{L}(M)=\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，

2) 对每个 $L\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ 且 $L_0=1$，$LM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}\Rightarrow L=1$，

3) 对每个严格正的 $L\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ 且 $L_0=1$，$LM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}\Rightarrow L=1$.

证明 1)$\Rightarrow$2). 设 $L,LM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ 且 $L_0=1$，则有 $N=L-1\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 以及 $NM=LM-M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 由定理 13.5 得到 $N=0$，即 $L=1$.

2)$\Rightarrow$3) 是明显的.

3) ⇒1). 设 $N\in\mathscr{M}_0^{\infty}$ 以及 $NM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 又设常数 k 满足 $|N|\leqslant k$. 令 $L=1+\frac{N}{2k}$,则 $L\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, $LM=M+\frac{NM}{k}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, $L_0=1$ 以及 $L>0$. 于是 $L=1$,即 $N=0$. 由定理 13.5 这蕴含了 M 有强可料表示性. □

13.7 定理 假定 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}^c$,则下列断言等价:

1) $\mathscr{L}(M)=\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}^c$.

2) $\mathscr{L}^1(M)=\mathscr{H}_0^{1,c}$ ($\mathscr{H}_0^{1,c}$ 为所有连续 $\mathscr{H}_0^1$-鞅构成的子空间),

3) $\mathscr{M}^{\infty,c}\subset\mathscr{L}(M)$ ($\mathscr{M}^{\infty,c}$ 是所有连续有界鞅构成的空间),

4) 对每个 $L\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}^c$, $LM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}\Rightarrow L=0$,

5) 对每个 $N\in\mathscr{M}^{\infty,c}$, $NM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}\Rightarrow N=0$.

证明 1) ⇔ 2) ⇔ 3) 可象定理 13.4 一样证明.

1) ⇒ 4). 设 $L\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}^c$ 及 $LM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$,则 $L=H.M$, $H\in L_m(M)$ 以及 $\langle L,M\rangle=H.\langle M\rangle$. 但是 $\langle L,M\rangle\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$,它是纯不连续的又是连续的,必须有 $\langle L,M\rangle=0$. 于是 $H^2.\langle M\rangle=H.\langle L,M\rangle=0$,故 $L=H.M=0$.

4) ⇒ 5) 是明显的.

5) ⇒ 2) $\mathscr{H}_0^{1,c}$ 是 $\mathscr{H}_0^1$ 的闭子空间(见问题 10.3). 设 φ 为 $\mathscr{H}_0^{1,c}$ 上的有界线性泛函且 $\varphi|_{\mathscr{L}^1(M)}=0$. 往证 $\varphi=0$. φ 可延拓为 $\mathscr{H}_0^1$ 上的有界线性泛函,于是存在 $N\in\mathscr{BMO}_0$ 使

$$\varphi(L)=\boldsymbol{E}[[L,N]_{\infty}],\quad L\in\mathscr{H}_0^1.$$

因而

$$\varphi(L)=\boldsymbol{E}[\langle L,N^c\rangle_{\infty}],\quad L\in\mathscr{H}_0^{1,c}. \tag{7.1}$$

这样对 $L\in\mathscr{L}^1(M)$ 有 $LN^c\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 取停时列 (T_n), $T_n\uparrow\infty$ 使对每个 n $M^{T_n}\in\mathscr{H}_0^{1,c}$ 以及 $(N^c)^{T_n}\in\mathscr{M}_0^{\infty,c}$. 但是 $M^{T_n}\in\mathscr{L}^1(M)$, 故 $M^{T_n}N^c\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 且 $0=\langle M^{T_n},N^c\rangle=\langle M,(N^c)^{T_n}\rangle$. 于是 $M(N^c)^{T_n}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 由假定 $(N^c)^{T_n}=0$,所以 $N^c=0$. 由 (7.1) 即得 $\varphi|_{\mathscr{H}_0^{1,c}}=0$. □

13.8 引理 假定 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 具有强可料表示性,则对任一停时 T, M^T 关于 $(\mathscr{F}_{t\wedge T})_{t\geq0}$ 有强可料表示性.

证明 记 $F^T=(\mathscr{F}_{t\wedge T})_{t\geq 0}$. 不难验证若 L 是一致可积 F^T-鞅，L 也一定是一致可积 F-鞅且 $L=L^T$. 因而若 L 是 F^T-局部鞅，则 L 也是 F-局部鞅且 $L=L^T$. 同时若 L 是一个 F-局部鞅，则 L^T 是一个 F^T 局部鞅(见定理 3.53). 现在设 L 和 LM^T 是 F^T-鞅且 $L_0=0$. 只需证 $L=0$. 由于 $L(M-M^T)=L_T(M-M^T)$ 是一个 F-局部鞅(定理 7.38). 如同上面所指出的，L 和 LM^T 都是 F-局部鞅. 故 LM 也是 F-局部鞅. 由于 M 有强可料表示性，我们有 $L=0$. □

13.9 定理 设 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 令

$$\Gamma=\left\{P':\begin{array}{l}P'\text{ 为 }\mathscr{F}\text{ 上的概率}\\ P'=P|_{\mathscr{F}_0}\quad\text{且 } M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(P')\end{array}\right\}.$$

则下列断言等价:

1) M 有强可料表示性,

2) $P'\in\Gamma, P'\overset{\mathrm{loc}}{\ll}P\Rightarrow P'=P$,

3) $P'\in\Gamma, P'\ll P\Rightarrow P'=P$,

4) $P'\in\Gamma, P'\sim P\Rightarrow P'=P$,

5) $P'\in\Gamma, P'\sim P, \dfrac{dP'}{dP}\in L^\infty\Rightarrow P'=P$.

证明 1) ⇒ 2). 设 $P'\in\Gamma, P'\overset{\mathrm{loc}}{\ll}P$, $Z=(Z_t)$ 为 P' 关于 P 的密度过程且 $R=\inf\{t:Z_t=0\}$. 因为 $Z_0=1$ 故有 $R>0$. 由于 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(P')$，存在有限停时列 (T_n), $T_n\uparrow R$ P-a.s.，且对每个 n $(MZ)^{T_n}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 于是 Z^{T_n} 和 $Z^{T_n}M^{T_n}$ 为 $(\mathscr{F}_{t\wedge T_n})$-局部鞅. 由引理 13.8, M^{T_n} 对 $(\mathscr{F}_{t\wedge T_n})$ 有强可料表示性. 于是由系 13.6 可得 $Z^{T_n}=1$. 这表明 $P'=P|_{\mathscr{F}_{T_n}}$, $n\geq 1$.

在 $[R<\infty]$ 我们有 $Z_R=0$. 但 $Z_{T_n}=1$, $n\geq 1$，这意味 $T_n<R$, $n\geq 1$ 且 $\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}=\mathscr{F}_{R-}$. 于是 $P'=P|_{\mathscr{F}_{R-}}$. 特别有

$$P(R<\infty)=P'(R<\infty)=0.$$

即 $P(T_n\uparrow\infty)=1$. 因而 $Z=1$，这就是 $P'=P$.

2) ⇒ 3) ⇒ 4) ⇒ 5) 是明显的.

5)⇒1). 假 $N\in\mathscr{M}_0^\infty$ 且 $NM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 只需证 $N=0$. 我们可

设 $|N|\leqslant 1$. 令 $dP'=\left(1+\frac{N_\infty}{2}\right)dP$. 对所有 $A\in\mathscr{F}_0$,

$$\int_A N_\infty dP=\int_A N_0 dP=0,$$

故 P' 为概率测度且 $P'=P|_{\mathscr{F}_0}$. 由于 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{dP'}{dP}\leqslant\frac{3}{2}$, 可得 $P'\sim P$. 密度过程为 $Z_t=E\left[\frac{dP'}{dP}|\mathscr{F}_t\right]=1+\frac{N_t}{2}, t\geqslant 0$. 于是有 $MZ=M+\frac{NM}{2}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 以及 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(P')$. 由假定可得 $P'=P$, 所以 $N_\infty=0$ 以及 $N=0$. □

13.10 定义 设 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$. 令

$\Gamma(M)=\{P': P'$ 为 $\mathscr{F}$ 上概率测度且 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P')\}$.

以 $\Gamma_e(M)$ 表 $\Gamma(M)$ 的端点集, 即 $P'\in\Gamma_e(M)\Leftrightarrow P'\in\Gamma(M)$ 且若 $P'=aP_1+(1-a)P_2, P_1,P_2\in\Gamma(M), 0<a<1$, 则 $P'=P_1=P_2$. 不过一般我们并不知道 $\Gamma(M)$ 是否为凸集.

13.11 定理 假定 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$, 则下列断言等价:

1) M 有强可料表示性且 $\mathscr{F}_0$ 为平凡 σ-域 $\mathscr{N}$(即由 P-零集生成的 σ-域),

2) $P\in\Gamma_e(M)$.

证明 1) ⇒ 2). 设 $P=aP_1+(1-a)P_2; P_1,P_2\in\Gamma(M), 0<a<1$. 由 $P_1\ll P$, 故 $P_1=P|_{\mathscr{F}_0}$. 按定理 13.9, $P_1=P$, 因而也有 $P_2=P$. 故 $P\in\Gamma_e(M)$.

2) ⇒ 1). 假定 i) ξ 为有界 $\mathscr{F}_0$-可测随机变量且 $E[\xi]=0$, ii) $N\in\mathscr{M}_0^\infty$ 和 $NM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 令 $L=\xi+N$, 则 $L\in\mathscr{M}^\infty$, 我们可认为 $|L|\leqslant 1$. 规定

$$dP_1=\left(1+\frac{L_\infty}{2}\right)dP,\quad dP_2=\left(1-\frac{L_\infty}{2}\right)dP.$$

由 $E[L_\infty]=0$, P_1,P_2 为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度. 易见 $P_1\sim P_2\sim P$ 且 P_1、P_2 关于 P 的密度过程分别为

$$Z_t^{(1)}=E\left[\frac{dP_1}{dP}|\mathscr{F}_t\right]=1+\frac{1}{2}L_t, t\geqslant 0,$$

$$Z_t^{(2)}=E\left[\frac{dP_2}{dP}|\mathscr{F}_t\right]=1-\frac{1}{2}L_t, t\geqslant 0.$$

因此 $MZ^{(1)}=M\left(1+\frac{1}{2}\xi\right)+\frac{1}{2}NM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，$MZ^{(2)}=M\left(1+\frac{1}{2}\xi\right)-\frac{1}{2}NM\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$. 所以 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}_1)$，$M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}_2)$，即$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2\in\Gamma(M)$. 但$\boldsymbol{P}\in\Gamma_e(M)$，及$\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)$，故必有$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2$. 因此 $L_\infty=0$ 及 $L=0$. 这意味着 $\xi=L_0=0$ 及 $N=L-\xi=0$. 由此 1) 成立. □

13.12 定理 假定 $\boldsymbol{P}'\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\boldsymbol{P}$，$M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$，$[M,Z]\in(\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}))^B$ 且在$\boldsymbol{P}$下M有强可料表示性，则在$\boldsymbol{P}'$下，$M'=M-\frac{1}{Z_-}.\langle M,Z\rangle\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}')$也有强可料表示性（这里我们运用第十二章§1和§2的记号）.

证明 假定 N'，$N'M'\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}')$. 往证在$\boldsymbol{P}'$下 $N'=0$. 设(T_n)为满足 $T_n\uparrow R\ \boldsymbol{P}$-a.s. 的停时列且对每个 n $(N'Z)^{T_n}$，$(N'M'Z)^{T_n}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$，$[M,Z]^{T_n}\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P})$以及 $T_n\leqslant R_n=\inf\{t:Z_t\leqslant\frac{1}{n}\}$. 记 $Y=(N'Z)^{T_n}$，$A=\frac{1}{Z_-}.\langle M,Z^{T_n}\rangle$. 由分部积分公式，

$$\begin{aligned}Y(M')^{T_n}&=YM^{T_n}-YA\\&=YM^{T_n}-(Y_-).A-(A_-).Y-[Y,A].\end{aligned}$$

由于 $Y(M')^{T_n}$，$(A_-).Y$，$[Y,A]\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$，易知$[Y,M^{T_n}]-(Y_-).A\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P})$以及$\langle Y,M^{T_n}\rangle=(Y_-).A=\frac{Y_-}{Z_-}\cdot\langle M,Z^{T_n}\rangle$. 注意到 $Y=Y^{T_n}$，可得

$$\langle M,Y-\frac{Y_-}{Z_-}.Z^{T_n}\rangle=0.$$

但$Y-\frac{Y_-}{Z_-}.Z^{T_n}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$，故 $M\left(Y-\frac{Y_-}{Z_-}.Z^{T_n}\right)\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$. 由于$M$有强可料表示性，

$$Y-\frac{Y_-}{Z_-}.Z^{T_n}=0\ \text{或}\ Y=(Y_-).\left(\frac{1}{Z_-}.Z^{T_n}\right)\qquad(12.1)$$

因 $Y_0=0$，(12.1)只有零解：$Y=0$，即$(N'Z)^{T_n}=0$. 又因 $T_n\leqslant R_n$，我们有 $Z^{T_n}I_{[\![0,R_n[\![}>0$. 这样 $N'I_{[\![0,T_n[\![}=0$ 和 $N'I_{[\![0,R[\![}=0$. 因而在

P' 下 $N'=0$. □

§2. 弱可料表示性

13.13 定义 设 X 为半鞅，μ，X^c 和 (α,β,ν) 分别为它的跳测度，连续鞅部分和可料特征. 记

$$\mathscr{K}(\mu)=\{W.(\mu-\nu):W\in\mathscr{G}(\mu)\}.$$

若 $\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc},0}=\mathscr{L}(X^c)$ 和 $\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}=\mathscr{K}(\mu)$，或者等价地

$$\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}=\mathscr{L}(X^c)+\mathscr{K}(\mu)$$

（上式右端为向量空间的线性和），则称 X 有**弱可料表示性**.

13.14 定理 假定 $X\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 且 X 有强可料表示性，则 X 也有弱可料表示性.

证明 对所有 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，可有 $M=H.X$，其中 $H\in L_m(X)$，于是由定理 9.3，11.24 和 11.23 有

$$M^c=H.X^c,\ M^d=H.X^d=(Hx)*(\mu-\nu).\quad\square$$

13.15 引理 假定 $X\in\mathscr{S}$. 设 $U\in\mathscr{O}$ 且 $M_\mu[U|\widetilde{\mathscr{P}}]=W$ 存在（即在 M_μ 下 U 关于 $\widetilde{\mathscr{P}}$ σ-可积），则存在停时列 (T_n) 满足.

i) $D=[\Delta X\neq0]=\bigcup_n[\![T_n]\!]$，且当 $n\neq m$ 时 $[\![T_n]\!]\cap[\![T_m]\!]=\varnothing$.

ii) 对每个 n

$$W(T_n,\Delta X_{T_n})I_{[T_n<\infty]}$$
$$=E\left[U(T_n,\Delta X_{T_n})I_{[T_n<\infty]}|\mathscr{F}_{T_n-}\vee\sigma\{\Delta X_{T_n}I_{[T_n<\infty]}\}\right]\quad\text{a.s.}.$$

(15.1)

证明 选 $(\widetilde{A}_n)\subset\widetilde{\mathscr{P}}$ 使 $\widetilde{\Omega}=\bigcup_n\widetilde{A}_n$，当 $m\neq n$ 时 $\widetilde{A}_n\cap\widetilde{A}_m=\varnothing$ 且对每个 n，$M_\mu(\widetilde{A}_n)<\infty$，$M_\mu(|U|I_{\widetilde{A}_n})<\infty$. 置 $B^{(n)}=I_{\widetilde{A}_n}*\mu$ 及

$$T_{n,0}=0,\ T_{n,m}=\inf\{t>T_{n,m-1}:\Delta B^{(n)}_t\neq0\},\quad m\geq1.$$

则 $(T_{n,m})_{n,m\geq1}$ 满足 i). 还只要证 $T=T_{n,m}$ 满足 ii).

注意到 $\xi\in\mathscr{F}_{T-}\vee\sigma\{\Delta X_tI_{[T<\infty]}\}\Leftrightarrow$ 存在 $V\in\widetilde{\mathscr{P}}$ 使 $\xi I_{[T<\infty]}=$

$V(T,\Delta X_T)I_{[T<\infty]}$. 进而，若 ξ 是非负的(有界的)，V 也可取成非负的(有界的).

设 $V\in\widetilde{\mathscr{P}}$ 是有界的，令 $\widetilde{V}=I_{\Lambda_i}I_{]T_{n,m-1},T_{n,m}]}V$. 由 $M_\mu(W\widetilde{V})=M_\mu(U\widetilde{V})$，我们有

$$E[W(T,\Delta X_T)V(T,\Delta X_T)I_{[T<\infty]}]$$
$$=E[U(T,\Delta X_T)V(T,\Delta X_T)I_{[T<\infty]}],$$
$$E[W(T,\Delta X_T)\xi I_{[T<\infty]}]$$
$$=E[U(T,\Delta X_T)\xi I_{[T<\infty]}],$$

其中 $\xi\in\mathscr{F}_{T-}\vee\sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}$ 是有界的. 由此即得(15.1). □

13.16 定理 假定 $X\in\mathscr{S}$，则下列断言等价：

1) $\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{K}(\mu)$.

2) $\mathscr{O}=\mathscr{P}\vee\sigma\{\Delta X\}$.

3) 对一切 $M\in\mathscr{M}^d_{loc}$，$M_\mu[\Delta M|\widetilde{\mathscr{P}}]=0\Rightarrow M=0$.

4) 对一切 $M\in\mathscr{M}^{\infty,d}$(所有有界纯断局部鞅构成的空间)，$M_\mu[\Delta M|\widetilde{\mathscr{P}}]=0\Rightarrow M=0$.

5) i) 若 T 为绝不可及时，$[T]\subset[\Delta X\neq 0]$；

ii) 对每个停时 T，$\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}\vee\sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}$.

证明 1)⇒2). 首先，欲证 $\mathscr{O}=\mathscr{P}\vee\sigma\{\mathscr{M}_{loc,0}\}$. 事实上，对任停时 T，令 $A=I_{[T,\infty[}$，则 $M=A-\widetilde{A}\in\mathscr{M}_{loc,0}$，$A=M+\widetilde{A}\in\mathscr{P}\vee\sigma\{\mathscr{M}_{loc,0}\}$. 由于 $M=M_-+\Delta M$，只要证对所有 $M\in\mathscr{M}_{loc,0}$ $\Delta M\in\mathscr{P}\vee\sigma\{\Delta X\}$.

由假设 $M^d=W*(\mu-\nu)$，其中 $W\in\mathscr{G}(\mu)$，故

$$\Delta M_t=\Delta M^d_t=W(t,\Delta X_t)I_D-\hat{W}_t,\quad D=[\Delta X\neq 0].$$

易见 $\hat{W}\in\mathscr{P}$，$D\in\sigma\{\Delta X\}$，$(W(t,\Delta X_t))\in\mathscr{P}\vee\sigma\{\Delta X\}$. 因此 $\Delta M\in\mathscr{P}\vee\sigma\{\Delta X\}$.

2)⇒3). 设 $M\in\mathscr{M}^d_{loc,0}$ 及 $M_\mu[\Delta M|\widetilde{\mathscr{P}}]=0$. 因为 $\Delta M\in\mathscr{O}=\mathscr{P}\vee\sigma\{\Delta X\}$，存在 $V\in\widetilde{\mathscr{P}}$ 使得

$$\Delta M_t=V(t,\Delta X_t),\quad t\geqslant 0.$$

于是

$$0 = M_\mu[\Delta MV] = E\Big\{\sum_{t>0}[\Delta M_t V(t,\Delta X_t) I_{D^c}]\Big\}$$
$$= E\Big\{\sum_{t>0}[(\Delta M_t)^2 I_{D^c}]\Big\}.$$
$$\Delta M I_{D^c} = 0. \tag{16.1}$$

注意 $M=0 \Leftrightarrow \Delta M = 0$（因为 $M \in \mathscr{M}^d_{loc,0}$），由(16.1)还只要证 $\Delta M I_D = 0$. 设 T 为一绝不可及时，则 $I_{[\![T]\!]} I_D$ 的可料投影为零，因为它是一个只有绝不可及跳的适应可积增过程的跳过程. 另一方面，因为 $\mathscr{O} \cap D^c = \mathscr{P} \cap D^c$，存在 $Y \in \mathscr{P}$ 使

$$I_{[\![T]\!]} I_{D^c} = Y I_{D^c}. \tag{16.2}$$

在(16.2)两端取可料投影可得

$$Y(1-a) = 0,$$

其中 $a_t = \nu(\{t\} \times E)$，$t \geq 0$. 但 $[a=1] \subset D$，故 $D^c \subset [a<1] \subset [Y=0]$，$I_{[\![T]\!]} I_{D^c} = Y I_{D^c} = 0$，即 $[\![T]\!] \subset D$. 于是

$$(\Delta M I_{D^c})_T I_{[T<\infty]} = 0, \quad \text{a.s.}. \tag{16.3}$$

设 T 为可料时且 $Z \in \mathscr{P}$ 使 $\Delta M I_{D^c} = Z I_{D^c}$. 由(16.1)有

$$0 = E[\Delta M_T I_{[T<\infty]} | \mathscr{F}_{T-}]$$
$$= E[(\Delta M I_{D^c})_T I_{[T<\infty]} | \mathscr{F}_{T-}]$$
$$= Z_T(1-a_T) I_{[T<\infty]}.$$

同样地有 $[(I_{D^c})_T = 1, T<\infty] \subset [a_T < 1, T<\infty] \subset [Z_T = 0, T<\infty]$，因而 $(Z I_{D^c})_T I_{[T<\infty]} = 0$，即(16.3)对任一可料时成立. 于是(16.3)对一切停时成立，即 $\Delta M I_{D^c} = 0$.

3)⇒4)是平凡的.

4)⇒5). 设 T 为绝不可及时. 令 $S = T_{[(I_D)_T = 1, T<\infty]}$，则 $(I_D)_S I_{[S<\infty]} = 0$. 还只需证 $P(S<\infty) = 0$. 令 $A = I_{[\![S,\infty[\![}$，则 $N = A - \tilde{A} \in \mathscr{M}^d_{loc}$. 由于 S 是绝不可及的，$\tilde{A}$ 连续以及 $\Delta N = \Delta A = I_{[\![S]\!]}$. 对任一 $W \in \tilde{\mathscr{P}}^+$,

$$M_\mu[\Delta N W] = E[W(S, \Delta X_S)(I_D)_S I_{[S<\infty]}] = 0,$$

即 $M_\mu[\Delta N | \tilde{\mathscr{P}}] = 0$. 由假定 $N = 0$，$A = \tilde{A}$，故 A 连续，这必须是 $P(S<\infty) = 0$，i)成立.

设 T 为停时，为证 ii) 可设 $T>0$，这是由于 $\mathscr{F}_T\cap[T=0]=\mathscr{F}_{T-}\cap[T=0]$，$T$ 可代以 $T_{[T>0]}$. 设 $\xi\in b\mathscr{F}_T$,

$$A=\eta I_{[\![T,\infty[\![},\eta=\xi-\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}\vee\sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}].$$

由于 $\boldsymbol{E}[\eta|\mathscr{F}_{T-}]=0$，可知 $A\in\mathscr{M}^{\infty,d}$ 及 $\Delta A=\eta I_{[\![T]\!]}$. 对任一 $W\in\widetilde{\mathscr{P}}^1$，我们有 $W(T,\Delta X_T)(I_D)_T I_{[T<\infty]}\in\mathscr{F}_{T-}\vee\sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}$ 以及

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_\mu[\Delta AW]&=\boldsymbol{E}[W(T,\Delta X_T)\eta(I_D)_T I_{[T<\infty]}]\\&=\boldsymbol{E}[W(T,\Delta X_T)(I_D)_T I_{[T<\infty]}\\&\quad\times\boldsymbol{E}[\eta|\mathscr{F}_{T-}\vee\sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}]]\\&=0.\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{M}_\mu[\Delta A|\widetilde{\mathscr{P}}]=0$. 由假定，$A=0$，即 $\eta I_{[T<\infty]}=0$ a.s.. 但在 $[T=\infty]$ 上 $\mathscr{F}_T$ 与 $\mathscr{F}_{T-}$ 一致．因而

$$\xi=\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}\vee\sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}]\quad\text{a.s.}.$$

这表明 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}\vee\sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}$.

5)⇒1). 设 $M\in\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}$ 及 $U=\boldsymbol{M}_\mu[\Delta M|\widetilde{\mathscr{P}}]$. 由引理 13.15 存在图互不相交的停时列 (T_n) 使 $D=\bigcup_n[\![T_n]\!]$ 且对每个 n

$$\begin{aligned}U(T_n,\Delta X_{T_n})I_{[T_n<\infty]}&=\boldsymbol{E}[\Delta M_{T_n}I_{[T_n<\infty]}|\mathscr{F}_{T_n-}\vee\sigma\{\Delta X_{T_n}I_{[T_n<\infty]}\}]\\&=\boldsymbol{E}[\Delta M_{T_n}I_{[T_n<\infty]}|\mathscr{F}_{T_n}]\\&=\Delta M_{T_n}I_{[T_n<\infty]}\quad\text{a.s.},\end{aligned}$$

这意味着

$$\left(\int_E U(t,x)\mu(\{t\},dx)\right)=(U(t,\Delta X_t)(I_D)_t)=\Delta MI_D.\tag{16.4}$$

于是 $\hat{U}=\left(\int_E U(t,x)\nu(\{t\},dx)\right)$ 是 ΔMI_D 的可料投影．令

$$W=U+\frac{\hat{U}}{1-a}I_{[a<1]}.$$

若 $\Delta M=\widetilde{W}$，则可知 $W\in\mathscr{G}(\mu)$ 及 $M=W*(\mu-\nu)$，因而 ii) 成立．往证 $\Delta M=\widetilde{W}$. 由于 $D^c\subset[a<1]$，由 (16.4) 有

$$\widetilde{W}_t=U(t,\Delta X_t)(I_D)_t+\frac{\hat{U}_t}{1-a_t}I_{[a_t<1]}(I_D)_t-\hat{U}_t-\frac{\hat{U}_t}{1-a_t}I_{[a_t<1]}a_t$$

$$=\Delta M_t(I_D)_t-\frac{\hat{U}_t}{1-a_t}I_{[a_t<1]}(I_{D'})_t-\hat{U}_t+\hat{U}_tI_{[a_t<1]}$$

$$=\Delta M_t(I_D)_t-\frac{\hat{U}_t}{1-a_t}(I_{D'})_t-\hat{U}_tI_{[a_t=1]}. \tag{16.5}$$

因为 ${}^p(\Delta MI_D)=\hat{U}$，故有

$$\hat{U}I_{[a=1]}={}^p(\Delta MI_DI_{[a=1]})={}^p(\Delta MI_{[a=1]})={}^p(\Delta M)I_{[a=1]}=0. \tag{16.6}$$

由(16.5)和(16.6)还要证 $\Delta MI_{D'}=-\frac{\hat{U}}{1-a}I_{D'}$，即对任一停时 T

$$\Delta M_T(I_{D'})_TI_{[T<\infty]}=-\frac{\hat{U}_T}{1-a_T}(I_{D'})_TI_{[T<\infty]},\quad \text{a.s.}. \tag{16.7}$$

若 T 为绝不可及时，$[\![T]\!]\subset D$ 及(16.7)成立是显然的．最后，只需对可料时 T 证明(16.7)成立．在这一情况下存在 $\xi\in\mathscr{F}_{T-}$ 使

$$\Delta M_T(I_{D'})_TI_{[T<\infty]}=\xi(I_{D'})_TI_{[T<\infty]}.$$

由于

$$\begin{aligned}\hat{U}_TI_{[T<\infty]}&=\boldsymbol{E}[\Delta M_T(I_D)_TI_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]\\&=-\boldsymbol{E}[\Delta M_T(I_{D'})_TI_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}],\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}-\frac{\hat{U}_T}{1-a_T}(I_{D'})_TI_{[T<\infty]}&=\frac{(I_{D'})_T}{1-a_T}\boldsymbol{E}[\Delta M_T(I_{D'})_TI_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]\\&=\frac{(I_{D'})_T}{1-a_T}\boldsymbol{E}[\xi(I_{D'})_TI_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]\\&=\xi(I_{D'})_TI_{[T<\infty]}\\&=\Delta M_T(I_{D'})_TI_{[T<\infty]},\quad \text{a.s.}.\end{aligned}$$ □

13.17 定理　假定 $X\in\mathscr{S}$，则下列断言等价：

1) X 有弱可料表示性，

2) 对所有 $M\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$，由 $\langle M^c,X^c\rangle=0$ 及 $M_\mu[\Delta M|\tilde{\mathscr{P}}]=0$ 可推出 $M=0$，

3) 对所有 $N\in\mathscr{M}_0^\infty$，由 $\langle N^c,X^c\rangle=0$ 及 $M_\mu[\Delta N|\tilde{\mathscr{P}}]=0$ 可推出 $N=0$.

证明　这可由定理 13.7 和 13.6 直接推出． □

13.18 定理　假定 $X\in\mathscr{S}$ 且 (α,β,ν) 为其可料特征．令

$$\Gamma=\left\{P':\begin{array}{l}P'\text{ 为 }\mathscr{F}\text{ 上的概率测度},P'=P|\mathscr{F}_0,\\ \\ X\in\mathscr{S}(P'),\text{在 }P'\text{ 下 }X\text{ 的可料特征为}(\alpha,\beta,\nu)\end{array}\right\}.$$

则下列断言等价：

1) X 有弱可料表示性，

2) $P'\in\Gamma, P'\overset{\text{loc}}{\ll}P\Rightarrow P'=P$，

3) $P'\in\Gamma, P'\ll P\Rightarrow P'=P$，

4) $P'\in\Gamma, P'\sim P\Rightarrow P'=P$，

5) $P'\in\Gamma, P'\sim P, \dfrac{dP'}{dP}\in L^\infty\Rightarrow P'=P$.

证明 1)⇒2). 设 $P'\in\Gamma, P'\overset{\text{loc}}{\ll}P$ 且 $Z=(Z_t)$ 为 P' 关于 P 的密度过程. 因为 $P'=P|_{\mathscr{F}_0}$，故 $Z_0=1$ 且 $(Z-1)\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}(P)$. 由定理 12.31 有 $M_\mu[\Delta Z|\tilde{\mathscr{P}}]=0$ 及 $\langle Z,X^c\rangle=0$，即有 $M_\mu[\Delta(Z-1)|\tilde{\mathscr{P}}]=0$ 及 $\langle Z-1,X^c\rangle=0$. 由定理 13.17 可知 $Z=1$，这蕴含了 $P'=P$.

2) ⇒ 3) ⇒ 4) ⇒ 5) 是明显的.

5) ⇒ 1). 按定理 13.17 只需证明

$$N\in\mathscr{M}_0^\infty, \langle N^c,X^c\rangle=0, M_\mu[\Delta N|\tilde{\mathscr{P}}]=0\Rightarrow N=0.$$

可设 $|N|\leqslant 1$. 令 $dP'=\left(1+\dfrac{N_\infty}{2}\right)dP$. 易知 P' 为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度，$P'\sim P$，$\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{dP'}{dP}\leqslant\dfrac{3}{2}$，$P'=P|_{\mathscr{F}_0}$ 且密度过程为 $Z=1+\dfrac{1}{2}N$. 由定理 12.31 有 $P'\in\Gamma$. 于是 $P'=P|_{\mathscr{F}}$，$N_\infty=0$，故 $N=0$. □

由定理 13.18 及 11.54 可直接得到跳跃过程可料表示性的下列两个结果. 而对另一类重要过程——Lévy 过程，我们将在 §4 研究它的可料表示性.

13.19 定理 设 X 为一个跳跃过程，$F=(\mathscr{F}_t)$ 为 X 的完备自然流：$F=F^P(X)$，则 X 有弱可料表示性. 特别地，每个 F-局部鞅是纯断的.

13.20 定理 设 X 为一个点过程，$F=(\mathscr{F}_t)$ 为 X 的完备自然流，则 $M=X-\tilde{X}$ 有强可料表示性.

13.21 定理 假定 $X\in\mathscr{S}$，(α,β,ν) 为 X 的可料特征. 令

$$\Gamma=\left\{P':\begin{array}{l}P'\text{ 为 }\mathscr{F}\text{ 上的概率},X\in\mathscr{S}(P')\\ \text{且}(\alpha,\beta,\nu)\text{ 为 }X\text{ 在 }P'\text{ 下的可料特征}\end{array}\right\}.$$

则下列断言等价：

1）X 有弱可料表示性且 $\mathscr{F}_0$ 为平凡 σ-域．

2）P 为 Γ 的一个端点．

证明 它与定理 13.11 的证明完全类似，留给读者自行完成．

13.22 定理 假定 $X\in\mathscr{S}$ 有弱可料表示性．若 $P'\overset{\text{loc}}{\ll}P$，则 X 在 P' 下也有弱可料表示性．

证明 设 (α,β,ν) 为 X 在 P 下的可料特征，Z' 为 P' 关于 P 的密度过程，则在 P' 下 X 的可料特征 (α',β',ν') 可表为：

$$\alpha'=\alpha+\frac{1}{Z'_-}\cdot\langle Z',X^c\rangle+[xI_{[|x|\leqslant1]}(Y-1)]*\nu,\ \beta'=\beta,\ \nu'=Y\cdot\nu,$$

且 $M_\mu[\Delta Z'|\widetilde{\mathscr{P}}]=Z'_-(Y-1)$.

设 P'' 为另一概率测度满足 $P''\sim P'$，$P''\sim P'|_{\mathscr{F}_0}$，且在 P'' 下 X 的可料特征仍为 (α',β',ν')．由定理 13.18 只要证明 $P''=P'$．

显然，$P''\overset{\text{loc}}{\ll}P$．设 Z'' 为 P'' 关于 P 的密度过程，则在 P''（或 P'）下有

$$\frac{1}{Z'_-}\cdot\langle Z',X^c\rangle=\frac{1}{Z''_-}\cdot\langle Z'',X^c\rangle$$

以及 $M_\mu[\Delta Z''|\widetilde{\mathscr{P}}]=Z''_-(Y-1)$．令 $T_n=\inf\left\{t:Z'_t\leqslant\frac{1}{n}\text{ 或 }Z''_t\leqslant\frac{1}{n}\right\}$．则有 $P'(T_n\uparrow\infty)=P''(T_n\uparrow\infty)=1$．令

$$M^{(n)}=\frac{1}{Z'_-}\cdot(Z')^{T_n}-\frac{1}{Z''_-}\cdot(Z'')^{T_n},\quad n\geqslant1.$$

由于 $P''=P'|_{\mathscr{F}_0}$，有 $Z''_0=Z'_0$，从而 $M_0^{(n)}=0$，因此 $M^{(n)}\in\mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$．同时还有

$$\begin{aligned}M_\mu[\Delta M^{(n)}|\widetilde{\mathscr{P}}]&=M_\mu\left[\left(\frac{1}{Z'_-}\Delta Z'-\frac{1}{Z''_-}\Delta Z''\right)I_{[0,T_n]}\middle|\widetilde{\mathscr{P}}\right]\\&=\left\{\frac{1}{Z'_-}M_\mu[\Delta Z'|\widetilde{\mathscr{P}}]-\frac{1}{Z''_-}M_\mu[\Delta Z''|\widetilde{\mathscr{P}}]\right\}I_{[0,T_n]}\end{aligned}$$

$= 0,$

$$\langle M^{(n)}, X^c\rangle = \left\{\frac{1}{Z'_-}\cdot\langle Z', X^c\rangle - \frac{1}{Z''_-}\cdot\langle Z'', X^c\rangle\right\}^{T_n} = 0.$$

因为 X 有弱可料表示性，按定理 13.17 可得 $M^{(n)}=0$，即

$$\frac{1}{Z'_-}\cdot(Z')^{T_n} = \frac{1}{Z''_-}\cdot(Z'')^{T_n}.$$

又因 $Z'_0=Z''_0$，故可得 $(Z')^{T_n}=(Z'')^{T_n}$.

令 $R'=\inf\{t: Z'_t=0\}$ 及 $R''=\inf\{t: Z''_t=0\}$. 由 $\boldsymbol{P}'(R'=\infty)=1$ 及 $\boldsymbol{P}''\sim\boldsymbol{P}'$ 可得 $\boldsymbol{P}''(R'=\infty)=1$. 于是由定理 12.6.2)，$\boldsymbol{P}(R'\geqslant R'')=1$. 同样可以证明 $\boldsymbol{P}(R''\geqslant R')=1$. 于是 $\boldsymbol{P}(R'=R'')=1$ 及 $\boldsymbol{P}(T_n\uparrow R'=R'')=1$. 这样在 $\boldsymbol{P}$ 下 Z' 和 Z'' 无区别，所以 $\boldsymbol{P}''=\boldsymbol{P}'$.
□

弱可料表示性与拟左连续性和流的全连续性是密切有关的．

13.23 定理 假定 $X\in\mathscr{S}$. 设 μ 和 ν 分别为 X 的跳测度和 Lévy 族．若 $\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{K}(\mu)$，则为要 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 是拟左连续的必须且只需下列条件成立：

i) $J=K$（注意 $J=[a>0]$，$K=[a>1]$，$a_t=\nu(\{t\}\times E)$），

ii) 存在一个可料过程 H 满足 $|H|>0$ 且

$$\nu(\{t\}, dx) = \delta_{H_t}(dx)I_J(t). \tag{23.1}$$

证明 必要性．设 $D=[\Delta X\neq 0]=\bigcup_n [\![T_n]\!]$，其中 (T_n) 是图互不相交的停时列．在此情况下，T_n 的可及部分 T^a_n 是可料的．作为 D 的可料支集 $J=\bigcup_n [\![T^a_n]\!]\subset D$. 但 K 是含于 D 的最大可料集（定理 11.14），因而 $J=K$.

因为对每个 n $\Delta X_{T^a_n}I_{[T^a_n<\infty]}\in\mathscr{F}_{T^a_n}=\mathscr{F}_{T^a_n-}$，故

$$H=\sum_n \Delta X_{T^a_n}I_{[\![T^a_n]\!]}+(1-I_J)$$

为一可料过程且 $|H|>0$. 显然有 $\Delta XI_J=HI_J$ 及

$$\boldsymbol{M}_\nu(J[H\neq x]) = \boldsymbol{M}_\mu(J[H\neq x]) = \boldsymbol{M}_\mu(J[\Delta X\neq H]) = 0,$$

$$\boldsymbol{E}\left\{\sum_{t\in J}\int_{\{H_t\}^c}\nu(\{t\}, dx)\right\} = 0, \tag{23.2}$$

其中 H 及 x 被视为 $\widehat{\Omega}$ 上的可料函数．由于 $J=K$，$t\in J\Rightarrow\nu(\{t\}\times E)=1$．故(23.1)可由(23.2)推出．

充分性．注意到 $J=K\subset D$，有 $D=(DJ)\cup(D\setminus J)=K\cup(D\setminus J)$．由于 $D\setminus J$ 是绝不可及集，对任一可料时 T 有 $[\![T]\!]\cap(D\setminus J)=\varnothing$，故

$$\Delta X_T I_{[T<\infty]}=\Delta X_T(I_K)_T I_{[T<\infty]}. \tag{23.3}$$

另一方面，由(23.1)可得

$$M_\mu(K[\Delta X\neq H])=M_\mu(K[x\neq H])=M_\nu(K[x\neq H])=0.$$

$$\Delta X I_K=H I_K.$$

联合上式与(23.3)可得

$$\Delta X_T I_{[T<\infty]}=H_T(I_K)_T I_{[T<\infty]}\in\mathscr{F}_{T-}.$$

由定理 13.16.5)知 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$．这表明 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 是拟左连续的．□

13.24 引理 假定 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 全连续．设 S，T 为停时，则存在可料集 L 使

$$[\![S_{[S<T]}]\!]\subset L,\quad [\![T]\!]\subset L. \tag{24.1}$$

证明 记 $R=S\wedge T$．由 $[R<T]\in\mathscr{F}_R=\mathscr{F}_{R-}$，存在 $L\in\mathscr{P}$ 使

$$I_{[R<T]}=(I_L)_R I_{[R<\infty]}. \tag{24.2}$$

可设 $L\subset[\![0,R]\!]$，否则 L 代以 $L[\![0,R]\!]$ (24.2)仍成立．由(24.2)直接推出

$$[\![S_{[S<T]}]\!]=[\![R_{[R<T]}]\!]\subset L,\quad [\![T_{[R=T]}]\!]=[\![R_{[R=T]}]\!]\subset L.$$

另一方面，$[\![T_{[R<T]}]\!]\subset]\!]R,\infty[\![\subset L$．于是

$$[\![T]\!]=[\![T_{[R=T]}]\!]\cup[\![T_{[R<T]}]\!]\subset L.$$

(24.1)成立．□

13.25 引理 假定 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 全连续且有一稀疏集 D 使得对任一绝不可及时 S 有 $[\![S]\!]\subset D$．则对任一停时 T 存在可料集 H 使

i) $[\![T]\!]\subset H$，

ii) 若 S 为绝不可及时且 $[\![S]\!]\subset H$，则 $S\geqslant T$．

证明 设$D=\bigcup_n [\![S_n]\!]$，其中(S_n)为停时序列．按引理13.24对每个n存在$L_n\in\mathscr{P}$使

$$[\![(S_n)_{[S_n<T]}]\!]\subset L_n, \quad [\![T]\!]\not\subset L_n^c.$$

取$H=\bigcap_n L_n^c$，则有$H\in\mathscr{P}$以及

$$[\![T]\!]\subset H, \quad [\![(S_n)_{[S_n<T]}]\!]\subset H^c.$$

若S为绝不可及时且$[\![S]\!]\subset H$，则

$$[\![S_{[S<T]}]\!]\subset\bigcup_n [\![(S_n)_{[S_n<T]}]\!]\subset H^c,$$

因为$[\![S]\!]\subset D=\bigcup_n [\![S_n]\!]$．因而$[\![S_{[S<T]}]\!]=\varnothing$，即$S\geqslant T$． □

13.26 定理 假定$X\in\mathscr{S}$．设μ和ν分别为X的跳测度和Lévy族．若$\mathscr{M}_{loc}^d=\mathscr{K}(\mu)$，则为要$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$是全连续的必须且只需下列条件成立：

i) $J=K$，

ii) 存在可料过程H满足$|H|>0$且

$$\nu(dt,dx) = \delta_{H_t}(dx)\Lambda(dt), \tag{26.1}$$

其中$\Lambda(dt)$为$\Omega\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$上的随机测度．

证明 充分性．在$J=K$上由(26.1)有$\Lambda(\{t\})=\nu(\{t\}\times E)=1$．于是由定理13.23，$\boldsymbol{F}$是拟左连续的．另一方面，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_\mu([\Delta X\neq H])&=\boldsymbol{M}_\mu([x\neq H])=\boldsymbol{M}_\nu([x\neq H])\\&=\boldsymbol{E}\left[\int_0^\infty\Lambda(dt)\int_E I_{[x\neq H]}\delta_{H_t}(dx)\right]=0,\end{aligned}\tag{26.2}$$

$$\Delta X=HI_D.$$

若T为绝不可及时，则有$[\![T]\!]\subset D$(定理13.16.5))及

$$\Delta X_T I_{[T<\infty]}=H_T I_{[T<\infty]}\in\mathscr{F}_{T-}.$$

再由定理13.16.5)可知$\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$．这时就不难进一步推出对任一停时$T$有$\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$，即$\boldsymbol{F}$为全连续的．

必要性．我们要构造出可料过程H使(26.2)成立．设$D=\bigcup_n [\![T_n]\!]$，其中(T_n)是图互不相交的停时列．由定理13.23，$J=K=\bigcup_n [\![T_n^a]\!]$，$D\setminus J=\bigcup_n [\![T_n^i]\!]$．令$H'=\sum_n \Delta X_{T_n^a}I_{[\![T_n^a]\!]}$，则$H'$可

料且 $\Delta X I_J = H' I_J$.

由引理 13.25 对每个 n 存在 $G_n \in \mathscr{P}$ 使 $[\![T_n']\!] \subset G_n$ 且若 S 为绝不可及时满足 $[\![S]\!] \subset G_n$，则 $S \geqslant T_n'$. 取 $L_n = G_n \setminus (\bigcup_{m<n} G_m [\![0, T_m']\!])$. 则 $L_n \in \mathscr{P}$ 且满足下列两个条件

$$[\![T_n']\!] \subset L_n, \tag{26.3}$$

$$[\![T_m']\!] \cap L_n = \varnothing, \quad 当 n \neq m. \tag{26.4}$$

(26.4)是显然的，因为 $[\![T_m']\!] \subset G_m [\![0, T_m']\!]$ 且对 $n \neq m$ $[\![T_m']\!] \cap L_n = \varnothing$. 为了建立(26.3)只要证当 $n \neq m$ 时 $G_m [\![0, T_m']\!] [\![T_n']\!] = \varnothing$. 取 $A = [I_{G_m}(T_n') I_{[T_n' < \infty]} = 1]$. 则

$$[\![T_n']\!] G_m = [\![(T_n')_A]\!],$$

$A \in \mathscr{F}_{T_n'}$，$(T_n')_A$ 为绝不可及时且 $[\![(T_n')_A]\!] \subset G_m$. 于是 $T_m' \leqslant (T_n')_A$. 但 $[\![T_n']\!]$ 和 $[\![T_m']\!]$ 互不相交，故若 $(T_n')_A < \infty$，必有 $T_m' < T_n'$，因而 $[\![0, T_m']\!] [\![(T_n')_A]\!] = \varnothing$，

$$[\![T_n']\!] G_m [\![0, T_m']\!] = [\![(T_n')_A]\!] [\![0, T_m']\!] = \varnothing.$$

现在由 $\Delta X_{T_n'} I_{[T_n' < \infty]} \in \mathscr{F}_{T_n'} = \mathscr{F}_{T_n'-}$，存在可料过程 $H^{(n)}$ 使 $\Delta X_{T_n'} I_{[T_n' < \infty]} = H^{(n)}_{T_n'} I_{[T_n' < \infty]}$. 令

$$B = \left[\overline{\lim_{N \to \infty}} \sum_{n=1}^{N} H^{(n)} I_{L_n} < \infty \right], \quad H'' = I_B \left(\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} H^{(n)} I_{L_n} \right).$$

则 H'' 为可料的且由(26.3)、(26.4)可知

$$\Delta X I_{D \setminus J} = H'' I_{D \setminus J}.$$

令

$$\tilde{H} = H' + H''(1 - I_J), \quad H = \tilde{H} I_{[\tilde{H} \neq 0]} + I_{[\tilde{H} = 0]}.$$

则 H 为可料的，$|H| > 0$ 且 $\Delta X = H I_D$. 因而

$$0 = M_\mu([\Delta X \neq H]) = M_\mu([x \neq H]) = M_\nu([x \neq H]) \tag{26.5}$$

且对每个 n，$\left\{ \mu\left([0, t \wedge n] \times \left\{ x : |x| \geqslant \frac{1}{n} \right\}\right) \right\}$ 为一适应局部可积增过程，其可料对偶投影为 $\nu\left([0, t \wedge n][|H| \geqslant \frac{1}{n}] \times E\right)$. 记 $A(dt) = \nu(dt, E)$，则对每个 n 有

$$\Lambda\left(\{t:0<t\leqslant n,|H_t|\geqslant\frac{1}{n}\}\right)<\infty,$$

所以 $\Lambda(dt)$ 是 σ-有限的．(26.1)可由(26.5)推出． □.

§3. 两类可料表示性间的关系

13.27 定理 设 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 且 μ 为 M 的跳测度，则下列断言等价：

1) $\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}=\mathscr{L}(M^d)$，

2) i) $\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}=\mathscr{K}(\mu)$，

ii) 存在两个可料过程 $\alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$ 使

$$(\Delta M-\alpha^{(1)})(\Delta M-\alpha^{(2)})=0.\tag{27.1}$$

证明 1)⇒2)．取 $W^{(n)}=x^2I_{[|x|\leqslant n]}\in\widetilde{\mathscr{P}}$．则

$$\widetilde{W}^{(n)}_t=\Delta M_t^2I_{[|\Delta M_t|\leqslant n]}-\int x^2I_{[|x|\leqslant n]}\nu(\{t\},dx),$$

$$|\widetilde{W}^{(n)}_t|\leqslant n|\Delta M_t|+n\sqrt{\int x^2I_{[|x|\leqslant n]}\nu(\{t\},dx)},$$

$$\sqrt{\sum_{s\leqslant t}(\widetilde{W}^{(n)}_s)^2}\leqslant n\sqrt{\sum_{s\leqslant t}(\Delta M_s)^2}+n\sqrt{\sum_{s\leqslant t}\int x^2I_{[|x|\leqslant n]}\nu(\{s\},dx)}$$

$$\leqslant n\sqrt{[M]_t}+n\sqrt{(x^2I_{[|x|\leqslant n]})*\nu_t},$$

其中 ν 为 μ 的补偿子．因为 $(x^2I_{[|x|\leqslant n]})*\nu\in\mathscr{V}^+$，有 $\sqrt{\Sigma(\widetilde{W}^{(n)})^2}\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ 以及 $W^{(n)}\in\mathscr{G}(\mu)$．由定理假定存在可料过程 $H^{(n)}$ 使

$$\begin{aligned}H^{(n)}.M^d&=W^{(n)}*(\mu-\nu),\\ H^{(n)}\Delta M&=\widetilde{W}^{(n)}=\Delta M^2I_{[|\Delta M|\leqslant n]}-\hat{W}^{(n)}.\end{aligned}\tag{27.2}$$

显然 $\hat{W}^{(n)}\uparrow W\in\widetilde{\mathscr{P}}$．由(27.2)有

$$[\Delta M=0]\subset[W=0].\tag{27.3}$$

规定 $A=[W=\infty]$ 及

$$X=\begin{cases}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\hat{W}^{(n)}}{H^{(n)}}, & \text{若极限存在有限},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}\lim_{n\to\infty} H^{(n)}, & \text{若极限存在有限,}\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

则 A,X 和 Y 都是可料的. 在 A 上由(27.3)我们有 $\Delta M\neq 0$ 及$\lim_{n\to\infty}|H^{(n)}|=\infty$,由(27.2)有

$$\Delta M = \frac{(\Delta M)^2 I_{[|\Delta M|\leqslant n]}}{H^{(n)}} - \frac{\hat{W}^{(n)}}{H^{(n)}} = -\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{W}^{(n)}}{H^{(n)}} = X. \quad (27.4)$$

在 A^c 上有

$$(\Delta M)^2 - Y\Delta M - W = 0. \quad (27.5)$$

事实上,若 $\Delta M=0$,(27.5)由(27.3)推出. 若 $\Delta M\neq 0$,

$$H^{(n)} = \frac{1}{\Delta M}\{(\Delta M)^2 I_{[|\Delta M|\leqslant n]} - \hat{W}^{(n)}\}.$$

令 $n\to\infty$ 得出(27.5). 设 $\tilde{\alpha}^{(1)}$ 和 $\tilde{\alpha}^{(2)}$ 为两个可料过程,它们是 $z^2-Yz-W=0$ 的两个根. 则 $\alpha^{(1)}=\tilde{\alpha}^{(1)}I_{A^c}+XI_A$,$\alpha^{(2)}=\tilde{\alpha}^{(2)}I_{A^c}$满足 ii).
i)可由定理 13.14 推出.

2)⇒1) 首先假定$|\alpha^{(2)}|>|\alpha^{(1)}|$及$|\alpha^{(2)}|>0$,否则 $\alpha^{(1)}$,$\alpha^{(2)}$可代以下式规定的 $\tilde{\alpha}^{(1)}$,$\tilde{\alpha}^{(2)}$

$$\tilde{\alpha}^{(1)}=\alpha^{(1)}I_{[|\alpha^{(1)}|\leqslant|\alpha^{(2)}|]}+\alpha^{(2)}I_{[|\alpha^{(1)}|>|\alpha^{(2)}|]},$$

$$\tilde{\alpha}^{(2)}=\alpha^{(1)}I_{[|\alpha^{(1)}|>|\alpha^{(2)}|]}+\alpha^{(2)}I_{[|\alpha^{(1)}|\leqslant|\alpha^{(2)}|,\alpha^{(2)}\neq 0]}+I_{[\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=0]}.$$

令 $L\in\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc},0}$,则存在 $W\in\mathscr{G}(\mu)$使 $L=W*(\mu-\nu)$. 令

$$X=I_{[\Delta M=\alpha^{(1)}]},\quad Y=I_{[\Delta M\neq\alpha^{(1)}]}=1-X.$$

则

$$\Delta M=\alpha^{(1)}X+\alpha^{(2)}Y,$$

$$\Delta L_t=W(t,\alpha_t^{(1)})I_{[\alpha_t^{(1)}\neq 0]}X_t+W(t,\alpha_t^{(2)})Y_t-\hat{W}_t. \quad (27.6)$$

记$W_t^{(1)}=W(t,\alpha_t^{(1)})I_{[\alpha_t^{(1)}\neq 0]}-\hat{W}_t$, $W_t^{(2)}=W(t,\alpha_t^{(2)})-\hat{W}_t$, $t\geqslant 0$. 则 $W^{(1)}$,$W^{(2)}\in\mathscr{P}$ 且

$$\Delta L = W^{(1)}X + W^{(2)}Y. \quad (27.7)$$

在(27.6)(27.7)中取可料对偶投影可得

$$\begin{aligned}\alpha^{(1)p}X + \alpha^{(2)p}Y &= 0,\\ W^{(1)p}X + W^{(2)p}Y &= 0.\end{aligned} \quad (27.8)$$

因为 ${}^pX+{}^pY=1$,${}^pX$ 和 ${}^pY$ 不能同时为零. 于是由(27.8)可得

$$\alpha^{(1)}W^{(2)} - \alpha^{(2)}W^{(1)} = 0. \tag{27.9}$$

令 $H=\frac{W^{(2)}}{\alpha^{(2)}}\in\mathscr{P}$. 由(27.6),(27.7)及(27.9)有

$$H\Delta M=H\alpha^{(1)}X+H\alpha^{(2)}Y=W^{(1)}X+W^{(2)}Y=\Delta L.$$

因而 $H\in L_m(M^d)$ 且 $L=H.M^d$. □

注 在定理中,若 M 是拟左连续的,可取 $\alpha^{(1)}=0$. 事实上,此时 $W=0$,故 $0,Y$ 是方程 $z^2-Yz-W=0$ 的两个根.

13.28 引理 假定 $M\in\mathscr{M}_{loc,0}$,则下列断言等价

1) $\mathscr{L}(M)=\mathscr{L}(M^c)+\mathscr{L}(M^d)$,

2) $\mathscr{L}(M^c)\subset\mathscr{L}(M)$,

3) $M^c\in\mathscr{L}(M)$,

4) $\mathscr{L}(M^d)\subset\mathscr{L}(M)$,

5) $M^d\in\mathscr{L}(M)$.

证明 2) ⇒ 3) 是明显的.

3) ⇒ 2) 假定 $M^c=H.M$, $H\in L_m(M)$. 令 $L\in\mathscr{L}(M^c)$,则 $L=K.M^c$, $K\in L_m(M^c)$. 于是 $L=K.(H.M)=(KH).M\in\mathscr{L}(M)$.

类似可证 4) ⇒ 5).

由于 $M\in\mathscr{L}(M)$,$M=M^c+M^d$,我们有 3)⇔5).

最后,1)⇒2)和 2)+4)⇒1)都是明显的. □

13.29 定理 假定 $M\in\mathscr{M}_{loc,0}$,则 M 有强可料表示性当且仅当 $\mathscr{M}^c_{loc}=\mathscr{L}(M^c)$,$\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{L}(M^d)$ 且 $\mathscr{L}(M)=\mathscr{L}(M^c)+\mathscr{L}(M^d)$.

证明 必要性. 设 $L\in\mathscr{M}^c_{loc,0}$,则 $L=H.M$,$H\in L_m(M)$. 事实上,$L=H.M^c$. 于是 $\mathscr{M}^c_{loc,0}=\mathscr{L}(M^c)$. 类似地有 $\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{L}(M^d)$. 进而,

$$\mathscr{L}(M)=\mathscr{M}_{loc,0}=\mathscr{M}^c_{loc,0}+\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{L}(M^c)+\mathscr{L}(M^d).$$

充分性. 反向地进行上述推理可得

$$\mathscr{M}_{loc,0}=\mathscr{M}^c_{loc,0}+\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{L}(M^c)+\mathscr{L}(M^d)=\mathscr{L}(M). \quad \Box$$

13.30 定义 设 ν 为可料随机测度满足 $\nu(\{0\}\times E)=0$. 若

$$\nu(\omega,dt,dx) = G(\omega,t,dx)dB_t(\omega), \tag{30.1}$$

其中 i) B 为可料过程 $B_0=0$, ii) 对固定的(ω,t), $G(\omega,t,\cdot)$为$(E,\mathscr{B}(E))$上的测度, iii)对固定的 $K\in\mathscr{B}(E)$, $G(\cdot,K)$为可料过程. 则(30.1)称为ν的**可料分解**. 此外, 若

$$I_A.B=0,\ A=\{(\omega,t):G(\omega,t,E)=0\},\qquad(30.2)$$

可料分解(30.1)称为**典则的**.

13.31 引理 设(30.1)为可料随机测度ν的典则可料分解. 若ν有另一可料分解:

$$\nu(\omega,dt,dx)=G'(\omega,t,dx)dB'_t(\omega)\qquad(31.1)$$

则 $\boldsymbol{P}(\{\omega:dB_t(\omega)\ll dB'_t(\omega)\})=1$. 进而, 若分解(31.1)也是典则的, 则 $\boldsymbol{P}(\{\omega:dB_t(\omega)\sim dB'_t(\omega)\})=1$.

证明 只需证第一个断言即可. 为此, 设 $H\in\mathscr{P}^+$ 及 $H.B'=0$. 则

$$\boldsymbol{E}\left[\int_0^\infty H_tG(t,E)dB_t\right]=\boldsymbol{M}\nu(H)=\boldsymbol{E}\left[\int_0^\infty H_tG'(t,E)dB'_t\right]=0.$$

由(30.2)可知 $H.B=0$. 定理结论可由定理5.14推出. □

13.32 引理 设μ为适应右连左极过程 X 的跳测度, 则它的补偿子ν有典则可料分解(30.1). 进而, 若 $W\in\tilde{\mathscr{P}}^-$ 为严格正的, $C=W*\mu\in\nu^+$则 $\boldsymbol{P}(\{\omega:dB_t(\omega)\sim dC_t(\omega)\})=1$.

证明 对 $n\geqslant1$ 规定

$$\mu_n=I_{\{\frac{1}{n}<|x|\leqslant\frac{1}{n-1}\}}\cdot\mu,\qquad\nu_n=I_{\{\frac{1}{n}<|x|\leqslant\frac{1}{n-1}\}}\cdot\nu.$$

则 $A_t^{(n)}=\nu_n([0,t]\times E)\in\mathscr{A}^+_{loc}$. 由于它是点过程 $\mu_n([0,t]\times E)$ 的补偿子, 必存在可料可积增过程 $\overline{A}^{(n)}$ 使 $\boldsymbol{P}(\{\omega:d\overline{A}_t^{(n)}(\omega)\sim dA_t^{(n)}(\omega)\})=1$. (事实上, 若$(S_k)$是$A^{(n)}$的局部化序列, 可取 $\overline{A}^{(n)}=\sum\limits_{k=1}^\infty\{2^k\boldsymbol{E}[A^{(n)}_{S_k}]\}^{-1}(A^{(n)})^{S_k}$.) 令

$$\overline{B}=\sum_{n=1}^\infty\{2^n\boldsymbol{E}[\overline{A}^{(n)}_\infty]\}^{-1}\overline{A}^{(n)}.$$

则 $\overline{B}\in\mathscr{A}^+$ 为可料的, 且对每个 $n\geqslant1$, $\boldsymbol{P}(\{\omega:d\overline{A}_t^{(n)}(\omega)\ll d\overline{B}_t(\omega)\})=1$. ν_n 可分解为

$$\nu_n(\omega,dt,dx)=G^{(n)}(\omega,t,dx)d\overline{B}_t(\omega)\qquad(32.1)$$

且使(32.1)为随机测度 ν_n 的一个可料分解，同时 $G^{(n)}(\omega,t,dx)$ 在 $\left\{x:\frac{1}{n}<|x|\leqslant\frac{1}{n-1}\right\}$ 之外无负荷. 令 $G=\sum_{n=1}^{\infty}G^{(n)}$, $B=I_{A^c}\cdot\overline{B}$, 其中 $A=\{(\omega,t):G(\omega,t,E)=0\}$, 则 ν 有典则可料分解(30.1).

现在来证第二个结论. 对任一 $H\in\mathscr{P}^+$ 有

$$H.C=0\Leftrightarrow H.A^{(n)}=0,\forall\ n\geqslant 1. \tag{32.2}$$

类似于(32.1)，ν_n 有下列可料分解：

$$\nu_n(\omega,dt,dx)=\overline{G}^{(n)}(\omega,t,dx)dC_t(\omega),$$

其中 $\overline{G}^{(n)}(\omega,t,dx)$ 也在 $\{x:\frac{1}{n}<|x|\leqslant\frac{1}{n-1}\}$ 之外无荷负. 令 $\overline{G}=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{G}^{(n)}$，则 ν 有下列可料分解：

$$\nu(\omega,dt,dx)=\overline{G}(\omega,t,dx)dC_t(\omega). \tag{32.3}$$

取 $D=\{(\omega,t):\overline{G}(\omega,t,E)=0\}$, $D_n=\{(\omega,t):\overline{G}^{(n)}(\omega,t,E)=0\}$, $n\geqslant 1$. 则 $D=\bigcap_n D_n$ 且对所有 $n\geqslant 1$, $I_{D_n}.A^{(n)}=0$, $I_D.A^{(n)}=0$. 由(32.2)我们有 $I_D.C=0$. 这蕴含了分解式(32.3)是典则的. 由引理 13.31 有 $P(\{\omega:dB_t(\omega)\sim dC_t(\omega)\})=1$. □

13.33 系 设 μ 为适应右连左极过程 X 的跳测度，(30.1)为 μ 的补偿子 ν 的典则可料分解. 若 $\mu([0,t]\times E)\in\mathscr{A}^+_{loc}$，则 $P(\{\omega:dB_t(\omega)\sim\nu(\omega,dt,E)\})=1$.

证明 在引理 13.32 中取 $W=1$，则 $C_t=\nu([0,t]\times E)$. □

13.34 系 设 $M\in\mathscr{M}^2_{loc}$. 设 μ 为 M 的跳测度，ν 为 μ 的补偿子. 若 ν 有可料分解(30.1)，则 $P(dB_t\sim d\langle X^d\rangle_t)=1$.

证明 在引理 13.32 中取 $W=x^2+I_{[x=0]}>0$，则 $C=\langle X^d\rangle$. □

13.35 定理 设 $M\in\mathscr{M}_{loc,0}$ 且 (α,β,ν) 为 M 的可料特征. 假定 ν 有典则可料分解(30.1)，则 M 有强可料表示性当且仅当 $\mathscr{M}_{loc,0}=\mathscr{L}(M^c)$, $\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{L}(M^d)$ 及 $P(d\beta_t\perp dB_t)=1$.

证明 由定理 13.29 及引理 13.28 只需证

$$P(d\beta_t\perp dB_t)=1\Leftrightarrow M^c\in\mathscr{L}(M).$$

设 $M^c\in\mathscr{L}(M)$，则 $M^c=H.M, H\in L_m(M)$ 且 $\langle M^c\rangle=H^2.\langle M\rangle, H^2.[M^d]=0$. 记 $A=[H^2=1]$，则 $A\in\mathscr{P}, I_{A^c}.\beta=I_{A^c}.\langle M^c\rangle=0$. 另一方面，由 $H^2.[M^d]=0$ 有 $H.I_D=0$ 及

$$0=M_\mu(H^2)=M_\nu(H^2)=E\left[\int_0^\infty H_t^2G(t,E)dB_t\right].$$

于是 $I_A.B=0$，所以 $P(d\beta_t\perp dB_t)=1$.

反之，假定 $P(d\beta_t\perp dB_t)=1$，则存在 $A\in\mathscr{P}$ 使 $I_{A^c}.\beta=0$ 及 $I_A.B=0$（定理 5.15）. 由 $I_{A^c}.\langle M^c\rangle=0$，可得到 $I_{A^c}.M^c=0, M^c=I_A.M^c$. 另一方面，

$$\begin{aligned}E\left[\int_0^\infty (I_A)_td[M^d]_t\right]&=M_\mu(x^2I_A)-M_\nu(x^2I_A)\\&=E\left[\int_0^\infty (I_A)_t\left(\int_E x^2G(t,dx)\right)dB_t\right]=0.\end{aligned}$$

于是 $I_A.M^d=0$ 且 $M^c=I_A.M\in\mathscr{L}(M)$. □

13.36 系 假定 $M\in\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc},0}$. 则 M 有强可料表示性当且仅当

$$\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc},0}=\mathscr{L}(M^c),\quad \mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}=\mathscr{L}(M^d)$$

和
$$P(d\langle M^c\rangle_t\perp d\langle M^d\rangle_t)=1.$$

证明 由定理 13.35 及系 13.34 推得. □

13.37 定理 设 $X\in\mathscr{S}$，μ 为 X 的跳测度. 若 $\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}=\mathscr{K}(\mu)$，则下列断言等价：

1）存在 $M\in\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}$ 使 $\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}=\mathscr{L}(M)$，

2）存在两个可料过程 $\alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$ 使

$$(\Delta X-\alpha^{(1)})(\Delta X-\alpha^{(2)})=0.$$

证明 首先设 $X\in\mathscr{S}_p$. 这时存在可料有限变差过程 A 使 $N=X-X_0-X^c-A\in\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}$ 及 $\Delta N=\Delta X-\Delta A$.

2）⇒1）. 由定理 13.16 有 $\mathscr{O}=\mathscr{P}\vee\sigma\{\Delta X\}$. 但 $\Delta X=\Delta N+\Delta A, \Delta A\in\mathscr{P}$. 因而 $\mathscr{O}=\mathscr{P}\vee\sigma\{\Delta N\}$. 令 $r^{(i)}=\alpha^{(i)}-\Delta A, i=1,2$，则 $r^{(1)}$ 和 $r^{(2)}$ 可料，且 $(\Delta N-r^{(1)})(\Delta N-r^{(2)})=0$，故由定理 13.6 和 13.27 可知 $\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}=\mathscr{L}(N)$.

1）⇒2）. 设 $L=H.M, H\in L_m(M)$，则 $H\Delta M=\Delta N=\Delta X-\Delta A$. 由定理 13.27 存在两个可料过程 $r^{(1)}$ 和 $r^{(2)}$ 使 $(\Delta M-r^{(1)})$

$(\Delta M - r^{(2)}) = 0$. 令 $\alpha^{(i)} = Hr^{(i)} + \Delta A, i = 1, 2$, 则 $(\Delta X - \alpha^{(1)})(\Delta X - \alpha^{(2)}) = 0$.

再考虑一般的情况. 因为 X 有积分表示:

$$X_t = X_0 + \alpha_t + X_t^c + \int_{[0,t]\times[|x|\leq 1]} x d(\mu - \nu) + \int_{[0,t]\times[|x|>1]} x d\mu.$$

设 φ 为 $(1, \infty)$ 到 $(1, 2)$ 和 $(-\infty, -1)$ 到 $(-2, -1)$ 的一一映照, φ^{-1} 为 φ 的逆映照. 规定

$$X'_t = X_0 + \alpha_t + X_t^c + \int_{[0,t]\times[|x|\leq 1]} x d(\mu - \nu) + \int_{[0,t]\times[|x|>1]} \varphi(x) d\mu.$$

易见 $X' \in \mathscr{S}$ 及

$$|\Delta X| \leq 1 \Leftrightarrow |\Delta X'| \leq 1 \Rightarrow \Delta X = \Delta X',$$
$$|\Delta X| > 1 \Leftrightarrow |\Delta X'| > 1 \Rightarrow \Delta X' = \varphi(\Delta X), \Delta X = \varphi^{-1}(\Delta X'). \tag{37.1}$$

由 $|\Delta X'| \leq 2, X' \in \mathscr{S}_p$. 设 μ' 为 X' 的跳测度. 则 $\mathscr{H}^d_{loc} = \mathscr{K}(\mu')$. 事实上, 由 (37.1) $\sigma\{\Delta X\} = \sigma\{\Delta X'\}$ 且 $\mathscr{O} = \mathscr{P} \vee \sigma\{\Delta X\} = \mathscr{P} \vee \sigma\{\Delta X'\}$. 按上面已证得的结果 1) 等价于下列条件:

2′) 存在两个可料过程 $\bar{\alpha}^{(1)}$ 和 $\bar{\alpha}^{(2)}$ 使

$$(\Delta X' - \bar{\alpha}^{(1)})(\Delta X' - \bar{\alpha}^{(2)}) = 0.$$

不难由 (37.1) 看出 2) $\Leftrightarrow$ 2′). □

13.38 定理 设 X 为适应右连左极过程, μ 为 X 的跳测度, ν 为 μ 的补偿子. 则下列断言等价

1) 存在两个可料过程 $\alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$ 使

$$(\Delta X - \alpha^{(1)})(\Delta X - \alpha^{(2)}) = 0. \tag{38.1}$$

2) ν 有下列典则可料分解:

$$\nu(dt, dx) = \{C_t^{(1)}\delta_{\alpha_t^{(1)}}(dx) + C_t^{(2)}\delta_{\alpha_t^{(2)}}(dx)\} dB_t, \tag{38.2}$$

其中 $C^{(1)}, C^{(2)}, \alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$ 都是可料过程且

$$[\alpha^{(1)} \neq 0] \subset [a = 1], \quad [\alpha^{(i)} = 0] \subset [C^{(i)} = 0]. \tag{38.3}$$

证明 2) $\Rightarrow$ 1). 由 (38.2) 有

$$M_\mu([\Delta X\neq\alpha^{(1)}][\Delta X\neq\alpha^{(2)}])=M_\mu([x\neq\alpha^{(1)}][x\neq\alpha^{(2)}])$$
$$=M_\nu([x\neq\alpha^{(1)}][x\neq\alpha^{(2)}])=0.$$

这表明在 $D=[\Delta X\neq 0]$ 上(38.1)成立. 由(38.3)

$$[\alpha^{(1)}\neq 0]\subset[a=1]\subset D,\quad D^c\subset[\alpha^{(1)}=0].$$

因而在 D^c 上我们有 $\Delta X=0$ 和 $\alpha^{(1)}=0$,即(38.1)在 D^c 上也成立.

1)⇒2). 如同定理 13.27 的证明我们可假定 $|\alpha^{(1)}|\leqslant|\alpha^{(2)}|$ 和 $|\alpha^{(2)}|>0$. 由(38.1)有 $[\alpha^{(1)}\neq 0]\subset D$. 但 $K=[a=1]$ 为含于 D 中的最大的可料集,因而 $[\alpha^{(1)}\neq 0]\subset K$.

设 $\nu(dt,dx)=G_t(dx)dB_t$ 为 ν 的典则可料分解. 于是

$$0=M_\mu([\Delta X\neq\alpha^{(1)}][\Delta X\neq\alpha^{(2)}])$$
$$=M_\mu([x\neq\alpha^{(1)}][x\neq\alpha^{(2)}])$$
$$=M_\nu([x\neq\alpha^{(1)}][x\neq\alpha^{(2)}])$$
$$=E\Big[\int_0^\infty\Big(\int_{[x\neq\alpha_t^{(1)},x\neq\alpha_t^{(2)}]}G_t(dx)\Big)dB_t\Big].$$

令 $C_t^{(1)}=G_t(\{\alpha_t^{(1)}\}),C_t^{(2)}=G_t(\{\alpha_t^{(2)}\})$. 则

$$G_t(dx)=C_t^{(1)}\delta_{\alpha_t^{(1)}}(dx)+C_t^{(2)}\delta_{\alpha_t^{(2)}}(dx).$$

由于 $G_t(\{0\})=0,[\alpha^{(1)}=0]\subset[C^{(1)}=0]$. 注意下列过程为可料的,

$$\int_0^t C_s^{(i)}dB_s=\int_0^t\int_E I_{[x=\alpha^{(i)}]}\nu(ds,dx),\quad i=1,2,$$

因而 $C^{(i)}$ 亦可取为可料的. □

定理 13.38 给出了条件(38.1)的可料形式.

13.39 定理 设 $X\in\mathscr{S}$ 以 (α,β,ν) 为可料特征. 若 X 有弱可料表示性,则下列断言等价:

1)存在 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 使 $\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}=\mathscr{L}(M)$.

2) i)ν 有典则可料分解(38.2).

ii)$P(d\beta_t\perp dB_t)=1$.

证明 首先假定 ΔX 是有界的. 这时 $X\in\mathscr{S}_p$ 且存在可料有限变差过程 A 使 $N=X-X_0-X^c-A\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2,d}$ 以及

$$\langle N\rangle_t=\int_{[0,t]\times E}x^2d\nu-\sum_{s\leqslant t}\Big[\int_E x\nu(\{s\},dx)\Big]^2.\qquad(39.1)$$

2)⇒1). 令 $M=X^c+N$，则 $M\in\mathscr{M}^2_{loc,0}$，$M^c=X^c$，$M^d=N$. 由于 $\mathscr{M}^c_{loc,0}=\mathscr{L}(X^c)=\mathscr{L}(M^c)$，由定理 13.37 的证明可知 $\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{L}(N)=\mathscr{L}(M^d)$. 又注意

$$\langle N\rangle_t=\int_{[0,t]\times E}x^2d\nu+\sum_{s\leqslant t}\left\{\int_E x^2\nu(\{s\},dx)-\left[\int_E x\nu(\{s\},dx)\right]^2\right\}$$

及 $\beta=\langle X^c\rangle=\langle M^c\rangle$ 是连续的. 因而

$$\begin{aligned}d\beta_t\perp dB_t&\Leftrightarrow d\beta_t\perp\int_E x^2\nu(dt,dx)\\&\Leftrightarrow d\beta_t\perp\int_E x^2\nu^c(dt,dx)\\&\Leftrightarrow d\beta_t\perp d\langle N\rangle_t.\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{P}(d\langle M^c\rangle_t\perp d\langle M^d\rangle_t)=1$. 由系 13.36 有 $\mathscr{M}_{loc,0}=\mathscr{L}(M)$.

1) ⇒ 2) . i) 由定理 13.37 和 13.38 推出. 设 μ' 为 M 的跳测度，ν' 为 μ' 的补偿子. 又设 $X^c=H.M$，$H\in L_m(M)$，则

$$\beta=\langle X^c\rangle=H^2.\langle M^c\rangle,\ d\beta_t\ll d\langle M^c\rangle_t\ \text{a.s.}.$$

另一方面，令 $N=H'.M^d=(H'x)*(\mu'-\nu')$，$H'\in L_m(H)$ 且 $\nu'(dt,dx)=G'_t(dx)dB'_t$ 为 ν' 的典则可料分解. 于是

$$\langle N\rangle_t=\int_{[0,t]\times E}(H'x)^2d\nu'=\int_0^t\left\{(H'_s)^2\int_E x^2G'_s(dx)\right\}dB'_s,$$

$$d\langle N\rangle_t\ll dB'_t,\quad \text{a.s.}.$$

由定理 13.35 有 $\boldsymbol{P}(d\langle M^c\rangle_t\perp dB'_t)=1$. 因而 $\boldsymbol{P}(d\beta_t\perp d\langle N\rangle_t)=1$，故有 $\boldsymbol{P}(d\beta_t\perp dB_t)=1$.

现在我们考虑一般情况. 如同定理 13.37 的证明一样引入 $X'\in\mathscr{S}_p$. 显然 X' 也有弱可料表示性. 正如定理 13.37 的证明中已指出的，(38.1)对 X 或 X' 成立是等价的. 于是条件 2) i) 等价于 X' 跳测度的补偿子有形如(38.2)的典则可料分解. 然而，$[\Delta X\neq 0]=[\Delta X'\neq 0]$. 因而过程 B 对 X' 也合用的. 这意味条件 2) ii) 对 X' 是不变的(注意 $(X')^c=X^c$). 总之，X 代以 X' 条件 2) 不变. 但 $|\Delta X'|\leqslant 2$，于是定理得证. □

注 我们称流 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 有强(弱)可料表示性若存在 $M\in\mathscr{M}_{loc,0}(X\in\mathscr{S})$ 使 $M(X)$ 有强(弱)可料表示性. 故定理 13.39 刻

明了流的跳和这两种可料表示性间的关系.

13.40 引理 设 $F=(\mathscr{F}_t)$ 为拟左连续的且存在 $M\in\mathscr{M}_{loc}$, 使 $\mathscr{M}^d_{loc}\subset\mathscr{L}(M)$, 则 $F=(\mathscr{F}_t)$ 全连续.

证明 只需证明对每个绝不可及时 T 有 $\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_T$. 设 $\xi\in b\mathscr{F}_T$. 令 $A=\xi I_{[\![T,\infty[\![}$ 及 $N=A-\tilde{A}$, 则 $N=H.M$, $H\in L_m(M)$ 且 $\Delta N=H\Delta M$. 另一方面, $\Delta N=\xi I_{[\![T]\!]}$, 因为这时 $\tilde{A}$ 连续且 $T<\infty$. 于是

$$\xi=H_T\Delta M_T,\quad \text{a.s. 在 } [T<\infty] \text{ 上}. \tag{40.1}$$

取 $\xi=1$ 有

$$1=H'_T\Delta M_T,\quad \text{a.s. 在 } [T<\infty] \text{ 上}, \tag{40.2}$$

其中 H' 为另一可料过程. 由(40.2)可知 $\Delta M_T\neq0$ 及在 $[T<\infty]$ 上, $H'_T\neq0$. 因而

$$\xi=H_T/H'_T\quad \text{a.s., 在 } [T<\infty] \text{ 上}.$$

但 $\frac{H_T}{H'_T}I_{[T<\infty]}\in\mathscr{F}_{T-}$, 所以 $\xi\in\mathscr{F}_{T-}$. 这蕴含了 $\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_T$. □

13.41 定理 假定 $F=(\mathscr{F}_t)$ 是拟左连续的. 设 $X\in\mathscr{S}$, μ 为 X 的跳测度. 若 $\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{K}(\mu)$, 则下列断言等价:

1) 存在 $M\in\mathscr{M}^d_{loc}$ 使 $\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{L}(M)$.

2) $F=(\mathscr{F}_t)$ 全连续.

证明 1)⇒2) 可由引理 13.40 推出(实际上还不要 $\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{K}(\mu)$ 的假定).

2)⇒1). 由定理 13.26 μ 的补偿子 ν 可表为

$$\nu(dt,dx)=\delta_{H_t}(dx)A(dt),$$

其中 H 为可料过程. 因而

$$M_\mu[\{\Delta X\neq H\}]=M_\mu[\{x\neq H\}]=M_\nu[\{x\neq H\}]=0.$$

所以 $\Delta X=HI_D$, $D=[\Delta X\neq0]$. 于是

$$\Delta X(\Delta X-H)=0.$$

故 1)可由定理 13.37 推得. □

下一定理是定理 13.41 的直接的应用.

13.42 定理 设 X 为跳跃过程, $F=(\mathscr{F}_t)$ 为 X 的完备自然

流．假定 X 拟左连续且 $X\in\mathscr{A}_{loc}$．则下列断言等价：

1）$M=X-\widetilde{X}$ 有强可料表示性．

2）$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 为全连续的．

3）X 的 Lévy 族 ν 可表为 $\nu(dt,dx)=\delta_{H_t}(dx)A(dt)$，其中 H 为可料过程，$A(dt)=\nu(dt,E)$．

证明 由于 X 是拟左连续的，故 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 亦然（定理 5.64）．由定理 13.19 有 $\mathscr{M}_{loc,0}=\mathscr{M}^d_{loc}=\mathscr{K}(\mu)$，其中 μ 为 X 的跳测度．定理的结论可由定理 13.27 及 13.41 得到． □

§4. Lévy 过程的可料表示性

13.43 引理 对任意随机过程 $X=(X_t)_{t\geq 0}$，

$$\mathscr{H}=\left\{\exp\{i[u_0X_{t_0}+\sum_{j=1}^n u_j(X_{t_j}-X_{t_{j-1}})]\}: \begin{matrix} n\geq 1,u_0,u_1,\cdots,u_n\in\boldsymbol{R},\\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_n \end{matrix}\right\}$$

为 $L^2(\mathscr{F}^P_\infty(X))$ 中的完备系，即由 $\mathscr{H}$ 张成的线性空间在 $L^2(\mathscr{F}^P_\infty(X))$ 中稠密，这里 $L^2(\mathscr{F}^P_\infty(X))$ 表示所有 $\mathscr{F}^P_\infty(X)$-可测且平方可积随机变量全体．

证明 首先我们讨论有限个随机变量的情形，即 $X=(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})$．这时，对任一 $\xi\in L^2(\mathscr{F}^P_\infty(X))$ 存在 n 元 Borel 函数 f 使 $\xi=f(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})$ a.s.．以 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 表 $(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})$ 的分布函数．取

$$dG(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)\,dF(x_1,\cdots,x_n)$$

若 $\xi\perp\mathscr{H}$，则对任意 $u_1,\cdots,u_n\in\boldsymbol{R}$ 有

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{E}\Big[\xi\exp(-i\sum_{j=1}^n u_jx_{t_j})\Big]\\&=\int_{\boldsymbol{R}^n}\exp(-i\sum_{j=1}^n u_jx_j)dG(x_1,\cdots,x_n).\end{aligned}$$

运用 Fourier-Stieltjes 变换的逆转公式可得到 $dG=0$．因而 $\xi=0$ a.s.．所以 $\mathscr{H}$ 在 $L^2(\mathscr{F}^P_\infty(X))$ 中完备．

现在来讨论一般情况：$X=(X_t)_{t\geq 0}$．设 $\xi\in L^2(\mathscr{F}^P_\infty(X))$ 且 ξ

上$\mathscr{H}$. 对任一 $\varepsilon>0$ 存在$\{t_1,\cdots,t_n\}$及 $\xi_\varepsilon\in L^2(\sigma(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}))$使

$$E[|\xi-\xi_\varepsilon|^2]<\varepsilon.$$

运用上面已获得的结果可知$\xi\perp\xi_\varepsilon$. 于是

$$E[\xi^2]=E[\xi(\overline{\xi-\xi_\varepsilon})]\leqslant\{E[\xi^2]E[|\xi-\xi_\varepsilon|^2]\}^{1/2}\leqslant\{\varepsilon E[\xi^2]\}^{1/2},$$

$$E[\xi^2]\leqslant\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$ 即得 $\xi=0$ a.s.. □

13.44 定理 设 X 为 Lévy 过程，则对每个 $t\geqslant0$

$$\mathscr{F}_t^P(X)=\mathscr{F}_{t+}^P(X)=\mathscr{F}_{t-}^P(X).$$

因而 $F^P(X)=(\mathscr{F}_t^P(X))$ 是 X 的自然流的通常化扩张.

证明 由 X 的随机连续性易得 $\mathscr{F}_t^P(X)=\mathscr{F}_{t-}^P(X)$.

对所有 $u\in\boldsymbol{R}$, $0\leqslant r\leqslant s$, 不难直接算得

$$\begin{aligned}M_t(u,r,s)&=E[e^{iu(X_s-X_r)}|\mathscr{F}_t^P(X)]\\&=\varphi_{X_s-X_{r\vee t}}(u)e^{iu(X_{s\wedge t}-X_{r\wedge t})}.\end{aligned}\qquad(44.1)$$

由(44.1)可知$(M_t(u,r,s))_{t\geqslant0}$为右连左极有界 $F^P(X)$-鞅. 设

$$\eta=\exp\{iu_0X_0+iu_1(X_{t_1}-X_{t_0})+\cdots+iu_n(X_{t_n}-X_{t_{n-1}})\},$$

$$n\geqslant1,u_0,u_1,\cdots,u_n\in\boldsymbol{R},\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_n.\qquad(44.2)$$

用同样计算还有

$$E[\eta|\mathscr{F}_t^P(X)]=e^{iu_0X_0}M_t(u_1,t_0,t_1)\cdots M_t(u_n,t_{n-1},t_n).\qquad(44.3)$$

以 Y_t 表示(44.3)的右端，则(Y_t)右连续. 所以

$$E[\eta|\mathscr{F}_{t+}^P(X)]=Y_{t+}=Y_t=E[\eta|\mathscr{F}_t^P(X)]\quad\text{a.s.}.\qquad(44.4)$$

由引理 2.69，从(44.4)可推得$\mathscr{F}_{t+}^P(X)=\mathscr{F}_t^P(X)$. □

13.45 定理 设 X 为一 Lévy 过程，T 为 $F^P(X)$-停时，则

$$\mathscr{F}_T^P(X)=\sigma\{T\}\vee\mathscr{F}_\infty^P(X^T).\qquad(45.1)$$

证明 取$\mathscr{G}=\sigma\{T\}\vee\mathscr{F}_\infty^P(X^T)$. $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}_T^P(X)$是明显的. 若$\eta$由(44.2)规定. 由 $F^P(X)$和$(M_t(u,r,s))$的右连续性我们有

$$E[\eta|\mathscr{F}_T^P(X)]=e^{iu_0X_0}M_T(u_1,t_0,t_1)\cdots M_T(u_n,t_{n-1},t_n),\quad\text{a.s.}.$$

由(44.4)易见 $M_T(u,r,s)$是$\mathscr{G}$-可测的. 因而$E[\eta|\mathscr{F}_T^P(X)]$是$\mathscr{G}$-

可测的. 按引理 13.43, 对任一 $\eta\in L^1(\mathscr{F}^P(X))$, $E[\eta|\mathscr{F}_T(X)]$ 是 $\mathscr{G}$ 可测的. 这表明 $\mathscr{F}_T(X)\subset\mathscr{G}$. 因而 $\mathscr{F}_T(X)=\mathscr{G}$. □

13.46 定理 设 X 为右连左极过程, T 为 $\boldsymbol{F}^0(X)$ 停时, 则

$$\mathscr{F}_{T-}(X)=\sigma\{T\}\vee\mathscr{F}^0(X^{T-}). \qquad (46.1)$$

证明 取 $\mathscr{G}=\sigma\{T\}\vee\mathscr{F}^0(X^{T-})$. 由于 (X_{t-}) 为 $\boldsymbol{F}^0(X)$-可料的, 我们有 $X_{T-}\in\mathscr{F}_{T-}(X)$. 于是对每个 $t\geqslant 0$

$$X_t^{T-}=X_tI_{[t<T]}+X_{T-}I_{[t\geqslant T]}\in\mathscr{F}_{T-}(X).$$

因而 $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}_{T-}(X)$. 另一方面, $\mathscr{F}_0(X)\subset\mathscr{G}$ 是显然的, 而对任意的 $0\leqslant s<t$ 及 Borel 函数 f

$$f(X_s)I_{[t<T]}=f(X_s^{T-})I_{[t<T]},$$

因而 $\mathscr{F}_{T-}(X)\subset\mathscr{G}$. 所以 $\mathscr{F}_{T-}(X)=\mathscr{G}$. □

13.47 系 设 X 为一 Lévy 过程, T 为一 $\boldsymbol{F}^0(X)$ 停时, 则

$$\mathscr{F}_T(X)=\mathscr{F}_{T-}(X)\vee\sigma\{\Delta X_TI_{[T<\infty]}\}. \qquad (47.1)$$

证明 因为 $X^T=X^{T-}+\Delta X_TI_{[T<\infty]}I_{[T,\infty[}$, (47.1) 由 (46.1) 及 (16.4) 直接推出. □

13.48 定理 设 X 为一 Lévy 过程, 则 $\boldsymbol{F}^0(X)$ 为拟左连续的.

证明 由定理 11.36 我们已经知道 Lévy 过程是拟左连续的. 若 T 为可料时, 则 $\Delta X_TI_{[T<\infty]}=0$ a.s.. 由 (47.1) 我们有 $\mathscr{F}_T(X)=\mathscr{F}_{T-}(X)$. □

13.49 定理 设 X 为一 Lévy 过程且 $X\in\mathscr{S}_p$, 又 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^0(X)$, 则 X 有弱可料表示性.

证明 因为由 X 的可料特征和 X_0 的分布律完全确定了 $\mathscr{F}$ 上的概率测度, 故按定理 13.18, X 有弱可料表示性. □

注 对任一 Lévy 过程 X, $\boldsymbol{F}^0(X)$ 也具有弱可料表示性.

13.50 定理 设 X 为一 Lévy 过程, $X_0=0$ 且 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^0(X)$. 若 T 为一停时, 则

1) T 绝不可及 $\Leftrightarrow[\![T]\!]\subset[\Delta X\neq 0]$.

2) T 可料 $\Leftrightarrow[\![T]\!]\subset[\Delta X=0]$.

证明 1) 若 T 为绝不可及的, 则由定理 13.49 及 13.16.5) $[\![T]\!]\subset[\Delta X\neq 0]$. 若 $[\![T]\!]\subset[\Delta X\neq 0]$, 因为 X 是拟左连续的,

T 为绝不可及的．

2）可由 1）推出，因为 $\boldsymbol{F}$ 拟左连续，可料时就是可及时．□

13.51 定理 设 X 为一 Lévy 过程，$X_0=0$，又 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^P(X)$．则下列断言等价：

1）$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^P(X)$ 为全连续的．

2）存在 Borel 函数 g 使

$$\nu(dt,dx)=\delta_{g_t}(dx)A(dt) \tag{51.1}$$

其中 ν 为 X 的 Lévy 族，$A(dt)$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上的 σ-有限测度

3）存在 Borel 函数 $g\neq 0$ 使 $\Delta X=gI_{[\Delta X\neq 0]}$．

证明 1）⇒2）．不失一般性可认为 X 是半鞅，则 X 有弱可料表示性．由于 ν 是非随机的，2）由定理 13.26 推出．

2）⇒3）．由（51.1）我们有

$$M_\mu([\Delta X\neq g])=M_\mu([x\neq g])=M_\nu([x\neq g])=0.$$

因而 $\Delta X=gI_{[\Delta X\neq 0]}$．

3）⇒1）．我们也可假定 $X\in\mathscr{S}$．由于 $\Delta X(\Delta X-g)=0$，由定理 13.37 和 13.41 可知 $\boldsymbol{F}$ 是全连续的．□

13.52 定理 设 X 为 Lévy 过程，$X_0=0$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^P(X)$，又 (α,β,ν) 为 X 的可料特征，则 $\boldsymbol{F}$ 有强可料表示性当且仅当下列条件被满足：i）存在 Borel 函数 $g\neq 0$ 使 $\nu(dt,dx)=\delta_{g_t}(dx)A(dt)$．ii）$d\beta_t\ll A(dt)$．

证明 不失一般性我们可认为 $X\in\mathscr{S}$．若 $\boldsymbol{F}$ 有强可料表示性，则由引理 13.40 和定理 13.48 $\boldsymbol{F}$ 是全连续的．i）可由定理 13.51 得出．ii）由定理 13.39 得到．反之，若 i）和 ii）成立，则 $\Delta X=gI_{[\Delta X\neq 0]}$ 且也由定理 13.39 可知 $\boldsymbol{F}$ 有强可料表示性．□

13.53 定理 设 X 为时齐 Lévy 过程，$X_0=0$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^P(X)$．又 ν 为 X 的 Lévy 族，则

1）$\boldsymbol{F}$ 为全连续的充要条件是

$$\nu(dt,dx)=\lambda\delta_a(dx)dt,\lambda\geq 0,\quad a\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}. \tag{53.1}$$

或等价地，$\Delta X=aI_{[\Delta X\neq 0]}$，$a\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$．

2）$\boldsymbol{F}$ 有强可料表示性当且仅当 $X=bY+at$，其中 Y 为标准

Wiener 过程或一个时齐 Poisson 过程，而 $a,b\in\boldsymbol{R}$.

证明 在这一情况下，$X\in\mathscr{S}$ 且 $\nu(dt,dx)=\lambda dtF(dx)$，其中 $\lambda>0$ 且 F 为一 σ-有限测度．于是 1)由定理 13.51 得出．同时因为 $d\beta=\sigma^2dt$，$A(dt)=\lambda dt$ 及 $d\beta_t\perp A(dt)$ 蕴含 $\sigma^2=0$ 或 $\lambda=0$，故 2)可由定理 13.52 得到． □

13.54 系 设 X 为一时齐 Lévy 过程，$X_0=0$ 及 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^P(X)$．假定 X 是一个鞅，则 X 有强可料表示性当且仅当 X 与标准 Wiener 过程或补偿 Poisson 过程(不计一个常数因子)．

问题与补充

13.1 设 $C_0(\boldsymbol{R}_+)$表 $\boldsymbol{R}_+$ 上有紧支集的连续函数全体．若 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$且 $\left\{\exp\{(f.M)_\infty-\frac{1}{2}(f^2.\langle M\rangle)_\infty\}:f\in C_0(\boldsymbol{R}_+)\right\}$为 $L^2(\mathscr{F}_\infty)$中完备系，则 M 有强可料表示性且 $\mathscr{F}_0$ 为平凡 σ-域．

13.2 设 $M,N\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$且$\langle M,N\rangle$存在．记 $X=M-\langle M,N\rangle$，则 M 有强可料表示性当且仅当对任一 $L\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，$L_0=1$ 由 $LX\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$可推出 $L=\mathscr{E}(N)$.

13.3 假定 $X\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$有强可料表示性．设 $\boldsymbol{P}'\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\boldsymbol{P}$ 且 $X=M+A$ 为 X 在 $\boldsymbol{P}'$下的典则分解．则存在唯一 $L\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}')$使得在 $\boldsymbol{P}'$ 下 $A=\langle L,M\rangle(\boldsymbol{P}')$.

13.4 设 $X_t=M_t+\int_0^t H_sds,t\geqslant 0$，其中 M 为 Brown 运动，H 为可料过程且对一切 $t>0$，$\int_0^t H_s^2ds<\infty$．设$\overline{\boldsymbol{F}}=(\overline{\mathscr{F}}_t)$为 X 的通常化自然流．设 $\boldsymbol{P}_0$ 为 $\overline{\mathscr{F}}_\infty$上的概率测度，在 $\boldsymbol{P}_0$ 下 X 为关于 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 的 Brown 运动，则对所有 $t\geqslant 0$，$\boldsymbol{P}|\overline{\mathscr{F}}_t=\boldsymbol{P}_0|\overline{\mathscr{F}}_t$．因而，若 $X=\overline{M}+\overline{A}$ 为 X 关于 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 的典则分解，则 $\overline{M}$(它也是关于 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 的 Brown 运动)对 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 有强可料表示性．

13.5 设 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$且$\langle M\rangle_\infty=\infty$ a.s.，流 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$为 M 的通常化自然流．令 $\tau_t=\inf\{s:\langle M\rangle_s>t\}$及 $B_t=M_{\tau_t},t\geqslant 0$．则 M 有

强可料表示性当且仅当 B 关于 $(\mathscr{F}_{\tau_t})$ 有强可料表示性.

13.6 设 $M\in\mathscr{M}_{loc,0}$, $\langle M\rangle_\infty=\infty$ a.s. 且流 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 为 M 的通常化自然流. 令 $\tau_t=\inf\{s:\langle M\rangle_s>t\}$ 及 $B_t=M_{\tau_t}$, $t\geqslant 0$. 则下列条件等价:

1) $\forall\ t\geqslant 0$, $\tau_t\in\mathscr{F}_\infty(B)$,

2) $\forall\ t\geqslant 0$, $\langle M\rangle_t\in\mathscr{F}_\infty(B)$,

3) $\forall\ t\geqslant 0$, $\langle M\rangle_t$ 为 $(\mathscr{F}_t(B))$ 一停时,

4) $\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}_\infty(B)$.

若这些条件成立(则 M 称为纯的), M 有强可料表示性.

13.7 设 W 为标准 Brown 运动, $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 为其通常化自然流. 设 $H\in\mathscr{P}^+$ 满足对几乎所有 $\omega\{t:H_t(\omega)=0\}$ 的 Lelesgue 测度为零. 令 $M=H.W$, 则 M 关于 $(\mathscr{F}_t(M))$ 有强可料表示性. 特别对每个 n, $M=W^n.W$ 有强可料表示性.

13.8 设 $M\in\mathscr{M}_{loc,0}$ 为拟左连续的. 记

$$\mathscr{L}'(M)=\{H.M:\ H\text{ 为可选过程}, H.M\text{ 存在}\},$$

则下列断言等价:

1) $\mathscr{M}_{loc,0}=\mathscr{L}'(M)$,

2) 对任一 $L\in\mathscr{M}_{loc,0}$, $[L,M]=0\Rightarrow L=0$,

3) $\mathscr{M}_0^2\subset\mathscr{L}'(M)$,

4) 对任一 $L\in\mathscr{M}_0^2$, $[L,M]=0\Rightarrow L=0$.

13.9 假定 $M\in\mathscr{M}_{loc,0}$ 为拟左连续的. 若 M 有弱可料表示性, 则 $\mathscr{M}_{loc,0}=\mathscr{L}'(M)$, 其中 $\mathscr{L}'(M)$ 同上题的规定.

13.10 设 X 为跳跃过程且 $F=(\mathscr{F}_t)$ 为其完备自然流, 则 $\mathscr{M}_{loc}=\mathscr{W}_{loc}$.

13.11 设 W 为 Brown 运动, 已知有 $|W|=M+A$, $M=\operatorname{sgn}(W).W$, $A=L^0(W)$, 则 1) W 的通常化自然流, 表以 $\boldsymbol{G}$, 与 M 的通常化自然流一致; 2) M 关于 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ 都是 Brown 运动, 且关于 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ 都有可料表示性.

13.12 设 $X=X_0+\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n I_{[T_n,\infty[}$ 为跳跃过程, 其中 $T_n\uparrow\infty$, 对

于 n T_n … $>T_n<T_{n+1}$ $(T_0=0)$ 且对 $n\geq 1$ $[T_n<\infty]=[\xi_n\neq 0]$. 又 $F=(\mathscr{F}_t)$ 为 X 的完备化自然流，则 $F=(\mathscr{F}_t)$ 有强可料表示性当且仅当存在 Borel 函数 $f_n^{(i)}(x_0,t_1,x_1,\cdots,t_n,x_n,t_{n+1})$，$i=1,2$，$n=0,1,\cdots$ 使得对 $n\geq 0$ 有

i) $\xi_{n+1}=f_n^{(1)}(X_0,T_1,\xi_1,\cdots,T_n,\xi_n,T_{n+1})$，a.s. 在 $[a_{T_{n+1}}<1, T_{n+1}<\infty]$ 上.

ii) 在 $[a_{T_{n+1}}=1, T_{n+1}<\infty]$ 上

$$[\xi_{n+1}-f_n^{(1)}(X_0,T_1,\xi_1,\cdots,T_n,\xi_n,T_{n+1})]$$
$$\times[\xi_{n+1}-f_n^{(2)}(X_0,T_1,\xi_1,\cdots,T_n,\xi_n,T_{n+1})]=0 \quad \text{a.s.},$$

其中 $a=\nu(\{t\}\times E)$，ν 为 X 的 Lévy 族.

13.13 设 $X=I_{[T,\infty[}$，$T>0$ 为单跳点过程，$F=(\mathscr{F}_t)$ 为它的完备化自然流. 又 G 为 T 的分布函数且 $c=\inf\{t: P(T>t)=0\}$. 则

1) $M\in\mathscr{M}_0$ 当且仅当存在 $]0,\infty]$ 上 Borel 函数 h 使 $(|h|,G)<\infty$，$(h,G)=0$ 且

$$M_t=I_{[T\leq t]}h(T)-I_{[T>t]}\frac{1}{G(]t,\infty])}\int_{]0,t]}h_s dG_s,\quad t\geq 0.$$

2) 若 $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$，则 $(M_t)_{0\leq t<c}$ 是鞅.

3) 若 $c<\infty$ 且 $P(T=c)>0$，则 $\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}=\mathscr{M}_0$.

13.14 设 $Y=Y_0+M+A$，其中 M 为一零初值鞅，$A\in\mathscr{V}_0$ 且对每个 $t\geq 0$ $E\left[\int_0^t|dA_s|\right]<\infty$. 设 X 为一适应跳跃过程，$G=(\mathscr{G}_t)$ 为 X 的完备化自然流. 则 $Z=(Z_t=E[Y_t|\mathscr{G}_t])$（它称为关于 G 的滤波过程）有右连左极修正且

$$Z_t=Z_0+\bar{A}_t+\int_{]0,t]\times E}\left(U(s,x)+\frac{\hat{U}_s}{1-a_s}I_{[a_s<1]}\right)(\mu(ds,dx)-\nu(ds,dx)),$$

其中 i) $\bar{A}=(\bar{A})_t$ 是 A 的 G-补偿子.

ii) μ 为 X 的跳测度，ν 为 μ 的 G-补偿子.

iii) $U=M_\mu(Z|\tilde{\mathscr{P}}(G))-Z_--\Delta\bar{A}$（事实上有 $M_\mu[Z|\tilde{\mathscr{P}}(G)]$

$=M_p\{Y|\mathscr{F}(G)\}$).

13.15 假定 X^a 和 X^b 是两个强度分别为 $a>0, b>0$ 的时齐 Poisson 过程，ξ 为一随机变量，$P(\xi=b)=p, P(\xi=a)=1-p, 0<p<1$ 且 ξ, X^a, X^b 相互独立. 设 $\mathscr{F}_t^0=\sigma\{\xi, X_s^a, X_s^b, s\leqslant t\}, t\geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 为 $\boldsymbol{F}^0=(\mathscr{F}_t^0)$ 的完备化流，令 $X=X^aI_{[\xi=a]}+X^bI_{[\xi=b]}$. 令 $\boldsymbol{G}=(\mathscr{G}_t)$ 为 X 的完备化自然流，则滤波过程 $Z=(Z_t=\boldsymbol{P}[\xi=b|\mathscr{G}_t])$ 满足下列随机微分方程

$$Z_t=p+\int_0^t\frac{(b-a)Z_{s-}(1-Z_{s-})}{bZ_{s-}+a(1-Z_{s-})}(dX_s-[bZ_{s-}+a(1-Z_{s-})]ds),\quad t\geqslant 0.$$

13.16 设 W 为 Brown 运动，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^P(W)$，则对任一停时 T 及任一随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_T$ 存在 $H\in L_m(W)$ 使 $\xi=H.W_T$ a.s..

13.17 设 N 为补偿 Poisson 过程，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^P(N)$，则对任一停时 T 和任一随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_T(\xi\in\mathscr{F}_{\infty})$，存在 $H\in L_m(N)$ 使 $\xi=H.N_T(\xi=H.N_{\infty})$.

13.18 假定 X^1 和 X^2 是两个半鞅（局部鞅），它们分别关于 $\boldsymbol{F}^1=(\mathscr{F}_t^1)$ 和 $\boldsymbol{F}^2=(\mathscr{F}_t^2)$ 有弱（强）可料表示性. 设 $(\alpha^1, \beta^1, \nu^1)$ 和 $(\alpha^2, \beta^2, \nu^2)$ 分别为 X^1, X^2 的可料特征，$a^i=(\nu^i(\{t\}\times E))$，$J^i=[a^i>0]$ 且 $\nu^i(dt, dx)=G^i(t, dx)dB_t^i$ 为 ν^i 的典则可料分解，$i=1,2$. 假定 $\mathscr{F}_\infty^1$ 和 $\mathscr{F}_\infty^2$ 相互独立，$J^1\cap J^2=\varnothing$. 令 $X=X_1+X_2$，$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$，$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_t^1\vee\mathscr{F}_t^2$. 则 X 关于 $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$ 有弱（强）可料表示性当且仅当

$d\beta^1\perp d\beta^2$，$d\nu^1\perp d\beta^2$ a.s. $(d(\beta^1+B^1)\perp d(\beta^2+B^2)$ a.s.$)$.

第十四章　测度的绝对连续性与近邻性

随机过程导出测度的绝对连续性和奇异性是随机过程理论的一个经典问题．半鞅理论和随机分析为它提供了一个全新的处理．在§1 我们引入基本工具——Hellinger 过程．然后在§2 讨论测度的绝对连续性和奇异性．绝对连续性和奇异性的推广－测度的近邻性和完全可分离性及与之有关的测度变差收敛在§3 中讨论．最后，对 Lévy 过程的应用在§4 给出．

§1. Hellinger　过　程

在本节和下一节，我们都假定$(\Omega,\mathscr{F})$是一个可测空间，P、P'和$\widetilde{P}$为$\mathscr{F}$上的概率测度满足

$$P\ll\widetilde{P},\quad P'\ll\widetilde{P}.$$

14.1 定义　对任一$\alpha\in\,]0,1[$规定

$$h_\alpha(P,P')=\widetilde{E}\left[\left(\frac{dP}{d\widetilde{P}}\right)^{\alpha}\left(\frac{dP'}{d\widetilde{P}}\right)^{1-\alpha}\right].$$

不难看出$h_\alpha(P,P')$与$\widetilde{P}$的取法无关，它只依赖于P,P'和α. 事实上，设$P=\frac{1}{2}(P+P')$，则

$$\widetilde{E}\left[\left(\frac{dP}{d\widetilde{P}}\right)^{\alpha}\left(\frac{dP'}{d\widetilde{P}}\right)^{1-\alpha}\right]=E\left[\left(\frac{dP}{dP}\right)^{\alpha}\left(\frac{dP'}{dP}\right)^{1-\alpha}\right].$$

14.2 定理　1) $0\leqslant h_\alpha(P,P')\leqslant 1$.

2) $h_\alpha(P,P')=1\Leftrightarrow P=P'$,

3) $h_\alpha(P,P')=0\Leftrightarrow P\perp P'$,

4) $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}h_\alpha(P,P')=1\Leftrightarrow P'\ll P$.

证明　对任一$\alpha\in\,]0,1[$有

$$u^{\alpha}v^{1-\alpha} \leqslant \alpha u + (1-\alpha)v, u \geqslant 0, v \geqslant 0, \tag{2.1}$$

且等式当且仅当 $u=v$ 时成立，因而

$$\left(\frac{dP}{d\widetilde{P}}\right)^{\alpha}\left(\frac{dP'}{d\widetilde{P}}\right)^{1-\alpha} \leqslant \alpha\frac{dP}{d\widetilde{P}} + (1-\alpha)\frac{dP'}{d\widetilde{P}}, \quad \widetilde{P}\text{-a.s.}, \tag{2.2}$$

于是 1)可由(2.2)取期望直接得出．而

$$h_{\alpha}(P,P')=1 \Leftrightarrow \widetilde{P}\left(\frac{dP}{d\widetilde{P}}=\frac{dP'}{d\widetilde{P}}\right)=1 \Leftrightarrow P=P'.$$

2)就得到了．显然

$$h_{\alpha}(P,P')=0 \Leftrightarrow \widetilde{P}\left(\frac{dP}{d\widetilde{P}}\frac{dP'}{d\widetilde{P}}=0\right)=1 \Leftrightarrow P \perp P'.$$

故有 3)．最后，因为 $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\left(\frac{dP}{d\widetilde{P}}\right)^{\alpha}\left(\frac{dP'}{d\widetilde{P}}\right)^{1-\alpha}=\frac{dP'}{d\widetilde{P}}I_{\left[\frac{dP}{d\widetilde{P}}>0\right]}$，由(2.2)及控制收敛定理可得 $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}h_{\alpha}(P,P')=\widetilde{E}\left[\frac{dP'}{d\widetilde{P}}I_{\left[\frac{dP}{d\widetilde{P}}>0\right]}\right]=P'\left(\frac{dP}{d\widetilde{P}}>0\right)$．

因而

$$P' \ll P \Leftrightarrow P'\left(\frac{dP}{d\widetilde{P}}>0\right)=1 \Leftrightarrow \lim_{\alpha\downarrow 0}h_{\alpha}(P,P')=1,$$

即 4)成立． □

14.3 定理 对任一 $\alpha\in]0,1[$ 存在一个常数 $C_{\alpha}>0$ 使

$$2[1-h_{\alpha}(P,P')] \leqslant \|P-P'\| \leqslant [C_{\alpha}(1-h_{\alpha}(P,P'))]^{1/2}, \tag{3.1}$$

其中 $\|P-P'\|=2\sup\limits_{A}|P(A)-P'(A)|$ 是 $P-P'$ 的全变差．

证明 取 $\widetilde{P}=\frac{1}{2}(P+P')$，则 $\frac{dP}{d\widetilde{P}}+\frac{dP'}{d\widetilde{P}}=2$，

$$2(1-h_{\alpha}(P,P')) = 2\int\left[1-\left(\frac{dP}{d\widetilde{P}}\right)^{\alpha}\left(2-\frac{dP}{d\widetilde{P}}\right)^{1-\alpha}\right]d\widetilde{P},$$

$$\|P-P'\| = 2\int\left|1-\frac{dP}{d\widetilde{P}}\right|d\widetilde{P}.$$

容易验证对 $z\in[0,2]$，$1-z^{\alpha}(2-z)^{1-\alpha}\leqslant|1-z|$，这样就可得到(3.1)的左端的不等式．另一方面，我们已知 $\alpha z+(1-\alpha)(2-z)$

$-z^{\alpha}(2-z)^{1-\alpha}$在$[0,2]$中只有一个零点$z=1$，又因

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^{-2}\left[\alpha z+(1-\alpha)(2-z)-z^{\alpha}(2-z)^{1-\alpha}\right]$$
$$=2\alpha(1-\alpha)>0,$$

故存在常数C_{α}使

$$\alpha z+(1-\alpha)(2-z)-z^{\alpha}(2-z)^{1-\alpha}$$
$$\geqslant 4C_{\alpha}(z-1)^2,\ z\in[0,2]. \tag{3.2}$$

这样把$\dfrac{dP}{d\tilde{P}}$代以(3.2)中的z并关于$\tilde{P}$积分就可得到(3.1)右端的不等式. □

注 通常$h_{1/2}(P,P')$称为 **Hellinger 积分**并表以$\int\sqrt{dPdP'}$. 容易验证$2(1-h_{1/2}(P,P'))$是由$(\Omega,\mathscr{F})$上概率测度全体构成的空间上的一个距离. 它称为 **Hellinger-Kakutani 距离**, 也表以$\int(\sqrt{dP}-\sqrt{dP'})^2$. 定理14.3说明按Hellinger-Kakutani距离收敛就是变差收敛.

以下假定一个右连续流$F=(\mathscr{F}_t)$已给定且$\mathscr{F}=\bigvee_t\mathscr{F}_t$, 并取$F^{\tilde{P}}$为参考流. 设$Z$和$Z'$分别为$P$和$P'$关于$\tilde{P}$的密度过程. 记

$$R_k=\inf\{t:Z_t\leqslant\frac{1}{k}\},\ R'_k=\inf\{t:Z'_t\leqslant\frac{1}{k}\},\ S_k=R_k\wedge R'_k,$$
$$R=\inf\{t:Z_t=0\},\ R'=\inf\{t:Z'_t=0\},\ S=R\wedge R',$$
$$\Gamma=\bigcup_k[\![0,S_k]\!]=[\![0]\!]\cup[Z_->0,Z'_->0],$$
$$Y(\alpha)=Z^{\alpha}(Z')^{1-\alpha},\ \alpha\in]0,1[.$$

14.4 引理 在$\tilde{P}$下$Y(\alpha)$是一个类(D)非负上鞅.

证明 因为$0\leqslant Y(\alpha)\leqslant\alpha Z+(1-\alpha)Z'$, 在$\tilde{P}$下$Y(\alpha)$是非负且类$(D)$的. 不难验证在$P$下$W=\dfrac{Z'}{Z}I_{[Z>0]}$是一个上鞅. 由 Jensen 不等式对$0\leqslant s<t$有

$$E[W_t^{1-\alpha}|\mathscr{F}_s]\leqslant(E[W_t|\mathscr{F}_s])^{1-\alpha}\leqslant W_s^{1-\alpha},\quad P\text{-a.s.},$$

即$W^{1-\alpha}$为P-上鞅. 于是$Y(\alpha)=W^{1-\alpha}Z$为$\tilde{P}$-上鞅. □

14.5 定理 在 Γ 上存在唯一（不计 $\tilde{P}$ 无区别）可料增过程 $H(\alpha)$ 满足 $H_0(\alpha)=0$ 及 $Y(\alpha)+Y_-(\alpha)\cdot H(\alpha)\in\mathscr{M}_{loc}(\tilde{P})$.

证明 按 Doob-Meyer 分解有

$$Y(\alpha)=Y_0(\alpha)+M-A, \tag{5.1}$$

其中 $M\in\mathscr{M}_{loc}(\tilde{P})$ 和 $A\in\mathscr{A}^+_{loc}(\tilde{P})$ 为可料的. 由于

$$I_{\Gamma^c}\cdot Y(\alpha)=\lim_{n\to\infty}I_{[\![S_n,\infty[\![}\cdot Y(\alpha)=\lim_{n\to\infty}[Y(\alpha)-(Y(\alpha))^{S_n}]=0.$$

按 Doob-Meyer 分解唯一性有

$$I_{\Gamma^c}\cdot M=0,\ I_{\Gamma^c}\cdot A=0.$$

令

$$H(\alpha)=\frac{I_\Gamma}{Y_-(\alpha)}\cdot A.$$

于是 $H(\alpha)$ 满足定理的要求. 事实上对每个 n, $\tilde{E}[H_{S_n}(\alpha)]\le n\tilde{E}[A_{S_n}]<\infty$, 因而 $H(\alpha)$ 是 Γ 上的可料增过程. 另一方面, 由典则分解唯一性, $Y_-(\alpha)\cdot H(\alpha)^{S_n}$ 由 $Y(\alpha)^{S_n}$ 唯一确定, 故 $H(\alpha)^{S_n}$ 亦由 $Y(\alpha)^{S_n}$ 唯一确定. 这样就建立了 $H(\alpha)$ 在 Γ 上的唯一性. □

注 在上述证明中 $H(\alpha)$ 在整个 R_+ 上有定义且被下列要求唯一确定: $H(\alpha)=I_\Gamma\cdot H(\alpha)$. 但在 Γ^c 上 $H(\alpha)$ 可能取 $+\infty$. 换言之, $H(\alpha)$ 是唯一的 $\bar{R}_+$ 值可料增过程使 $\boldsymbol{H}(\alpha)=\boldsymbol{I}_\Gamma\cdot\boldsymbol{H}(\alpha)$ 和 $\boldsymbol{Y}(\alpha)+\boldsymbol{Y}_-(\alpha)\cdot\boldsymbol{H}(\alpha)\in\mathscr{M}_{loc}(\tilde{\boldsymbol{P}})$.

14.6 定理 设 P 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上另一概率测度, $\tilde{P}\ll P$. 设 $H(\alpha)$ 是在定理 14.5 中在 $\tilde{P}$ 下唯一确定的 Γ 上的可料增过程, 则 $H(\alpha)$ 与 $H(\alpha)$ $\tilde{P}$-无区别.

证明 设 W 为 $\tilde{P}$ 关于 P 的密度过程, 则 $\tilde{Y}(\alpha)=Y(\alpha)W$. 且由 (5.1)

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(\alpha)&=(Y_0(\alpha)+M-A)W\\&=Y_0(\alpha)W+W_-\cdot M+(M-A)_-\cdot W+[M,W]-W_-\cdot A.\end{aligned}\tag{6.1}$$

(6.1) 右端前三项都是 $\tilde{P}$-局部鞅. 故在 $\tilde{P}$ 下

$$Y_-(\alpha)\cdot H(\alpha)=W_-\cdot A=\tilde{Y}_-(\alpha)\cdot H(\alpha).$$

在 $\tilde{P}$ 下 $W_->0$, 因而 $\Gamma=\bigcup_n[\![0,S_n]\!]\subset\{Y_-(\alpha)>0\}$. 于是 $H(\alpha)$ 与 $H(\alpha)$

$\widetilde{P}$-无区别． □

14.7 定义 $H(\alpha)$称为P和P'间的α阶**Hellinger过程**．注意$H(\alpha)$关于(P,P')不是对称的，除非$\alpha=\frac{1}{2}$．在定理14.6的含义下$H(\alpha)$与$\widetilde{P}$的选择无关（S,S'和Γ亦如此），因而可认为$H(\alpha)$是$P+P'$ a.e.唯一确定的．

14.8 定理 在$\widetilde{P}$下$\Delta H(\alpha)\leqslant 1$且在$]\!]0,S[\![$上$\Delta H(\alpha)<1$.

证明 由(5.1)有$\Delta Y(\alpha)=\Delta M-Y_-(\alpha)\Delta H(\alpha)$，且

$$0\leqslant Y(\alpha)=\Delta M+Y_-(\alpha)[1-\Delta H(\alpha)]. \tag{8.1}$$

对(8.1)取可料投影并注意${}^p(\Delta M)=0$可得

$${}^p(Y(\alpha))=Y_-(\alpha)[1-\Delta H(\alpha)]\geqslant 0.$$

由于在$\Gamma\cap]\!]0,\infty[\![$上$Y_-(\alpha)>0$，我们有$\Delta H(\alpha)\leqslant 1$. 另一方面，$T=\inf\{t:\Delta H_t(\alpha)=1\}$是可料时，$T<\infty\Rightarrow {}^p(Y(\alpha))_T=0$，故$\widetilde{E}[Y_T(\alpha)I_{[T<\infty]}]=0$. 这就蕴含了$T\geqslant S$且在$]\!]0,S[\![$上$\Delta H(\alpha)<1$. □

下面我们转到计算Hellinger过程上来．

14.9 定理 在Γ上$H(\alpha)$是下列$K(\alpha)$的$\widetilde{P}$-补偿子：

$$K(\alpha)=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left\{\frac{1}{Z_-^2}.\langle Z^c\rangle-\frac{2}{Z_-Z'_-}\langle Z^c,Z'^c\rangle+\frac{1}{Z'^2_-}.\langle Z'^c\rangle\right\}$$
$$+\sum\varphi_\alpha\left(1+\frac{\Delta Z}{Z},1+\frac{\Delta Z'}{Z'}\right). \tag{9.1}$$

其中

$$\varphi_{(\alpha)}(u,v)=\alpha u+(1-\alpha)v-u^\alpha v^{1-\alpha}. \tag{9.2}$$

证明 在$[\![0,S_n[\![$可对Z^α用Ito公式，我们有

$$Z^\alpha=Z_0^\alpha+(\alpha Z_-^{\alpha-1}I_{[\![0,S_n[\![}).Z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}Z_-^{\alpha-2}.\langle Z^c\rangle$$
$$+\sum\left(Z_-^\alpha\left[\left(1+\frac{\Delta Z}{Z_-}\right)^\alpha-1-\alpha\frac{\Delta Z}{Z_-}\right]\right). \tag{9.3}$$

若$0<S_n<\infty$，可直接验证(9.3)两端在S_n上的跳相同．因而(9.3)在$[\![0,S_n]\!]$上也成立．类似地，在$[\![0,S_n]\!]$上

$$(Z')^{1-\alpha}=(Z'_0)^{1-\alpha}+(1-\alpha)((Z'_-)^{-\alpha}I_{[\![0,S_n[\![}).Z'$$

$$-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(Z')^{-1-\alpha}\cdot\langle Z'^c\rangle$$

$$+\sum\left\{(Z'_-)^{1-\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right)^{1-\alpha}-1-(1-\alpha)\frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right]\right\}.$$

运用分部积分公式,

$$Y(\alpha)=(Z^{\alpha}_-I_{]0,\infty[}).(Z')^{1-\alpha}+((Z'_-)^{1-\alpha}I_{]0,\infty[}).Z^{\alpha}$$

$$+[Z^{\alpha},(Z')^{1-\alpha}].$$

在 $[\![0,S_n]\!]$ 上有

$$Y(\alpha)=Y_0(\alpha)+(1-\alpha)\left(\frac{Y_-(\alpha)}{Z'_-}I_{]0,\infty[}\right).Z'$$

$$+\alpha\left(\frac{Y_-(\alpha)}{Z_-}I_{]0,\infty[}\right).Z-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}Y_-(\alpha)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{Z_-^2}.\langle Z^c\rangle-\frac{2}{Z_-Z'_-}.\langle Z^c,Z'^c\rangle+\frac{1}{Z'^2_-}.\langle Z'^c\rangle\right]$$

$$+\sum\left[Y_-(\alpha)\left\{\left(1+\frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right)^{1-\alpha}-1-(1-\alpha)\frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right.\right.$$

$$+\left(1+\frac{\Delta Z}{Z_-}\right)^{\alpha}-1-\alpha\frac{\Delta Z}{Z_-}+\left[(1+\frac{\Delta Z}{Z_-})^{\alpha}-1\right]$$

$$\left.\left.\times\left[(1+\frac{\Delta Z'}{Z'_-})^{1-\alpha}-1\right]\right\}\right]$$

$$=Y_0(\alpha)+(1-\alpha)\left(\frac{Y_-(\alpha)}{Z'_-}I_{]0,\infty[}\right).Z'$$

$$+\alpha\left(\frac{Y_-(\alpha)}{Z_-}I_{]0,\infty[}\right).Z-Y_-(\alpha).K(\alpha).$$

因为 $[Y(\alpha)+Y_-(\alpha).K(\alpha)]^{S_n}\in\mathscr{M}_{\text{loc}}(\tilde{P})$,容易验证 $\{H(\alpha)\}^{S_n}$ 是 $(K(\alpha))^{S_n}$ 的 $\tilde{P}$ 补偿子. 定理得证. □

14.10 系 假定 $\tilde{P}=\frac{1}{2}(P+P')$, μ 为 Z 的跳测度, ν 为 μ 的 $\tilde{P}$ 补偿子,则

$$H(\alpha)=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{1}{Z_-}+\frac{1}{Z'_-}\right)^2.\langle Z^c\rangle+\varphi_{\alpha}(\lambda,\lambda')*\nu \tag{10.1}$$

其中

$$\lambda = 1 + \frac{x}{Z}, \quad \lambda' = 1 + \frac{x}{Z'}. \tag{10.2}$$

证明 在这一情况下 $Z+Z'=2, Z^c+Z'^c=0, \Delta Z+\Delta Z'=0$，于是 $\langle Z'^c\rangle=\langle Z^c\rangle, \langle Z^c, Z'^c\rangle=-\langle Z^c\rangle$. 由于 $t>R'$ 时 $Z_t=2$，故 $I_{\Gamma}\cdot Z=0, I_{\Gamma}\cdot\langle Z^c\rangle=0$ 及 $I_{\Gamma}\cdot\nu=0$. (9.1)成为

$$K(\alpha)=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{Z'}\right)^2\cdot\langle Z^c\rangle+\varphi_\alpha(\lambda,\lambda')*\mu.$$

(10.1)就可由定理14.9得出. □

14.11 引理 设 A, B 为两个零初值可料有限变差过程，$A_0=B_0=0$. 若 A 和 B 为 P-无区别的，则 $I_{[Z_->0]}\cdot A$ 和 $I_{[Z_->0]}\cdot B$ 为 $\tilde{P}$ 无区别的.

证明 对任一 $H\in\mathscr{P}^+$，我们有

$$E[(HI_{[Z_->0]})\cdot A_\infty]=\tilde{E}[Z_\infty[(HI_{[Z_->0]})\cdot A_\infty]]$$
$$=\tilde{E}[(HZ_-I_{[Z_->0]})\cdot A_\infty].$$

同样可得

$$E[(HI_{[Z_->0]})\cdot B_\infty]=\tilde{E}[(HZ_-I_{[Z_->0]})\cdot B_\infty].$$

因而 $Z_-I_{[Z_->0]}\cdot A$ 与 $Z_-I_{[Z_->0]}\cdot B$ 为 $\tilde{P}$ 无区别的，$I_{[Z_->0]}\cdot A$ 和 $I_{[Z_->0]}\cdot B$ 亦是 $\tilde{P}$ 无区别的. □

14.12 定理 假定 $X\in\mathscr{S}(\tilde{P})$ 且在 $\tilde{P}$ 下 X 有弱可料表示性. 设 X 在 P、P' 和 $\tilde{P}$ 下的可料特征分别为 (α,β,ν) 和 (α',β',ν') 及 $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\nu})$ 且

$$\begin{cases}\beta=\beta'=\tilde{\beta}\\ \nu=Y.\tilde{\nu},\ Y\in\tilde{\mathscr{P}}^+,\ [\tilde{a}=1]\subset[a=1],\\ \nu'=Y'.\tilde{\nu},\ \ Y'\in\tilde{\mathscr{P}}^+,\ [\tilde{a}=1]\subset[a'=1],\end{cases} \tag{12.1}$$

其中 $a=(a_t), a_t=\nu(\{t\}\times E)$. 类似定义 $a', \tilde{a}$. 则在 Γ 上有

$$H(\sigma)=\frac{\sigma(1-\sigma)}{2}\tilde{K}^2\cdot\tilde{\beta}+\varphi_\sigma(Y,Y')*\tilde{\nu}+\sum\varphi_\sigma(1-a,1-a'). \tag{12.2}$$

$$\widetilde{K} = \frac{d}{d\widetilde{\beta}}\{I_{\Gamma}\cdot[\alpha' - \alpha + (xI_{[\ \ ]}) * (\nu' - \nu)]\}. \quad (12.3)$$

特别地，在 Γ 上

$$H(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{8}\widetilde{K}^2\cdot\widetilde{\beta} + \frac{1}{2}(\sqrt{Y} - \sqrt{Y'})^2 * \widetilde{\nu}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum(\sqrt{1-\widetilde{a}} - \sqrt{1-\widetilde{a}'})^2.$$

证明 因为 X 在 $\widetilde{P}$ 下有弱可料表示性，故有

$$Z = Z_0 + H\cdot X^c + W * (\mu - \widetilde{\nu}),$$

其中 μ 为 X 的跳测度，

$$H = \frac{d\langle Z, X^c\rangle}{d\widetilde{\beta}}, W = U + \frac{\hat{U}}{1-\widetilde{a}}I_{\{\widetilde{a}<1\}}, U = \widetilde{M}_{\mu}[\Delta Z|\widetilde{\mathscr{P}}].$$

在 P 下我们有

$$\alpha - \widetilde{\alpha} - (xI_{[\ \ ]}) * (\nu - \widetilde{\nu}) = \frac{1}{Z_-}\cdot\langle Z, X^c\rangle.$$

令

$$K = \frac{d}{d\widetilde{\beta}}\{I_{\{Z_->0\}}\cdot[\alpha - \widetilde{\alpha} - (xI_{[\ \ ]}) * (\nu - \widetilde{\nu})]\}.$$

因为 $\langle Z, X^c\rangle = I_{\{Z_->0\}}\cdot\langle Z, X^c\rangle$，由引理 14.11 在 $\widetilde{P}$ 下我们有

$$\langle Z, X^c\rangle = Z_-\cdot(K\cdot\widetilde{\beta}), \quad H = Z_-K.$$

另一方面，$U = \widetilde{M}_{\mu}[\Delta Z|\widetilde{\mathscr{P}}] = Z_-(Y-1)$，$\hat{U} = Z_-(\hat{Y} - \widetilde{a}) = Z_-(a - \widetilde{a})$，故可得

$$Z = Z_0 + (Z_-K)\cdot X^c + \left[Z_-\left(Y - 1 + \frac{a - \widetilde{a}}{1-\widetilde{a}}I_{\{\widetilde{a}<1\}}\right)\right] * (\mu - \widetilde{\nu}).$$

类似地也有

$$Z' = Z'_0 + (Z'_-K')\cdot X^c + \left[Z'_-\left\{Y' - 1 + \frac{a' - \widetilde{a}}{1-\widetilde{a}}I_{\{\widetilde{a}<1\}}\right\}\right] * (\mu - \widetilde{\nu}).$$

其中

$$K' = \frac{d}{d\widetilde{\beta}}[I_{\{Z'_->0\}}\cdot\{\alpha' - \widetilde{\alpha} - (xI_{[\ \ ]}) * (\nu' - \widetilde{\nu})\}].$$

于是 $\langle Z^c\rangle = (Z_-K)^2\cdot\widetilde{\beta}$，$\langle Z'^c\rangle = (Z'_-K')^2\cdot\widetilde{\beta}$，$\langle Z^c, Z'^c\rangle =$

$(Z_-Z'\ KK').\widetilde{\beta}$，且在 Γ 上

$$\frac{1}{Z_-^2}.\langle Z^c\rangle - \frac{2}{Z_-Z'_-}.\langle Z^c,Z'^c\rangle + \frac{1}{Z'^2_-}.\langle Z'^c\rangle$$

$$= (K-K')^2.\widetilde{\beta} = (\widetilde{K})^2.\widetilde{\beta} \tag{12.4}$$

其中 $\widetilde{K}=K-K'$ 在 Γ 上成立.

记 $D=[\Delta X\neq 0]$，$J=[\widetilde{a}>0]$，则

$$1+\frac{\Delta Z}{Z_-}=1+YI_D-I_D+\frac{a-\widetilde{a}}{1-\widetilde{a}}I_D-(a-\widetilde{a}-\frac{a-\widetilde{a}}{1-\widetilde{a}}\widetilde{a}$$

$$=YI_D+\frac{1-a}{1-\widetilde{a}}I_{D^c}, \tag{12.5}$$

$$1+\frac{\Delta Z'}{Z'_-}=Y'I_D+\frac{1-\widetilde{a}'}{1-\widetilde{a}}I_{D^c}. \tag{12.6}$$

在(12.5)和(12.6)中，Y 和 Y' 分别是 $(Y(t,\Delta X_t))$ 和 $(Y'(t,\Delta X_t))$ 的简写，且约定 $\frac{0}{0}=0$. 于是

$$\sum\varphi_\sigma\left(1+\frac{\Delta Z}{Z_-},1+\frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right)$$

$$=\varphi_\sigma(Y,Y')*\mu+\sum\left[\varphi_\sigma\left(\frac{1-a}{1-\widetilde{a}'},\frac{1-a'}{1-\widetilde{a}}\right)I_{D^c_J}\right]. \tag{12.7}$$

(12.7)右端的 $\widetilde{P}$-补偿子为

$$\varphi_\sigma(Y,Y')*\widetilde{\nu}+\sum\left[\varphi_\sigma\left(\frac{1-a}{1-\widetilde{a}'},\frac{1-a'}{1-\widetilde{a}}\right)(1-\widetilde{a})\right]$$

$$=\varphi_\sigma(Y,Y')*\widetilde{\nu}+\sum\varphi_\sigma(1-a,1-a'). \tag{12.8}$$

因而(12.2)可由定理 14.9，(12.4)和(12.8)推出. □

14.13 系 假定 $P'\overset{loc}{\ll}P$，$X\in\mathscr{S}(P)$，在 P 下 X 有弱可料表示性. 又 X 在 P,P' 下的可料特征分别为 (a,β,ν) 和 (a',β',ν') 且满足

$$\beta'=\beta,\nu'=Y.\nu,Y\in\widetilde{\mathscr{P}}^+,[a=1]\subset[a'=1].$$

则在 Γ 上有

$$H(\sigma)=\frac{\sigma(1-\sigma)}{2}K^2\cdot\beta+\varphi_\sigma(1,Y)*\nu+\Sigma\varphi_\sigma(1-a,1-a'). \tag{13.1}$$

其中

$$K=\frac{d}{d\widetilde{\beta}}\{I_{\Gamma}\cdot[\alpha'-\alpha-(xI_{[|x|\leq 1]})*(\nu'-\nu)]\}.$$

证明 若 $P'\ll P$，可取 $\widetilde{P}=P$. 则结论可由定理 14.12 直接得出. 一般情况下，限于 $[\![0,S_n\wedge n]\!]$ (13.1) 成立. 因而在 $\Gamma=\bigcup\limits_n[\![0,S_n\wedge n]\!]$ 上 (13.1) 成立. □

§2. 绝对连续性和奇异性

现在我们在上一节同样的假定下来讨论绝对连续性和奇异性. 我们仍用上一节同样的符号.

14.14 定理 在 $\widetilde{P}$ 下我们有

$$[R>0,Z_{R-}>0]=\Big[R>0,\frac{1}{Z_-^2}\cdot\langle Z^c\rangle_R$$

$$+\left(1-\sqrt{1+\frac{x}{Z_-}}\right)^2*\nu_R<\infty\Big],\qquad(14.1)$$

$$[Z_\infty>0]=\Big[R=\infty,\frac{1}{Z_-^2}\cdot\langle Z^c\rangle_\infty$$

$$+\left(1-\sqrt{1+\frac{x}{Z_-}}\right)^2*\nu_\infty<\infty\Big],\qquad(14.2)$$

其中 μ 为 Z 的跳测度，ν 是 μ 的 $\widetilde{P}$-补偿子.

证明 设 $B=[Z_->0]\cup[\![0]\!]$，则 $L=\frac{1}{Z_-}\cdot Z\in(\mathscr{L}_{\text{loc}}(\widetilde{P}))^B$. 在 $[\![0,R[\![$ 上有 $\Delta L=\frac{Z-Z_-}{Z_-}>-1$. 由指数公式在 $[\![0,R[\![$ 上有

$$Z=Z_0\exp(X),$$

$$X=L-L_0-\frac{1}{2}\langle L^c\rangle-\sum[\Delta L-\log(1+\Delta L)].$$

设 $u(y)=(y\wedge 1)\vee(-1)$. 规定

$$X^n=L-L_0-\frac{1}{2}\langle L^c\rangle-\sum[\Delta L-u(\log(1+\Delta L))]$$

$$= \frac{1}{Z_-}\cdot(Z - Z_0) - \frac{1}{2}\frac{1}{Z_-^2}\cdot\langle Z^c\rangle$$

$$- \sum\left[\frac{\Delta Z}{Z_-} - u\left(\log\left(1+\frac{\Delta Z}{Z_-}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{Z_-}\cdot(Z - Z_0) - A.$$

往证

$$A = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_-^2}\cdot\langle Z^c\rangle + \sum\left[\frac{\Delta Z}{Z_-} - u\left(\log\left(1+\frac{\Delta Z}{Z_-}\right)\right)\right] \in (\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}(\tilde{P}))^R.$$

(若 $\frac{\Delta Z}{Z_-} = -1$, $u\left(\log\left(1+\frac{\Delta Z}{Z_-}\right)\right) = -1$.) 为此,只要证 $K = \sum\left[\frac{\Delta Z}{Z_-} - u\left(\log\left(1+\frac{\Delta Z}{Z_-}\right)\right)\right] \in (\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}(\tilde{P}))^R$. 易见对 $y \geqslant -1$ 有

$$0 \leqslant y - u(\log(1+y)) \leqslant c\frac{|y|^2}{1+|y|},$$

其中 $c>0$ 为一常数. 于是在 $[\![0,R_n[\![$ 上

$$K \leqslant c\sum\left\{\frac{|\Delta Z|^2}{Z_-(Z_-+|\Delta Z|)}\right\} \leqslant cn^2\sum\frac{|\Delta Z|^2}{1+|\Delta Z|}.$$

因为 $Z\in\mathscr{S}_{\mathrm{loc}}(\tilde{P})$, $K\in(\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}(\tilde{P}))^R$.

在 $[\![0,R[\![$ 上

$$\Delta X = \log(1+\Delta L),\ \Delta X^u = u(\log(1+\Delta L)),$$
$$X - X^u = \sum[\log(1+\Delta L) - u(\log(1+\Delta L))]. \tag{14.3}$$

若 X_R (X^u_R)存在且有限,则$\{t: 0\leqslant t<R, |\log(1+\Delta L)|>1\}$至多为一有限集. 于是由(14.3)有

$$[R>0, X_R\ 存在且有限] = [R>0, X^u_R\ 存在且有限]. \tag{14.4}$$

因为$|\Delta X^u|\leqslant 1$,由定理 8.33 可知

$$[R>0, X^u_R\ 存在且有限] = [R>0, \tilde{A}_R + \langle X^u\rangle_R < \infty], \tag{14.5}$$

其中 $\tilde{A}$ 是 A 的$\tilde{P}$-补偿子. 注意

$$A + [X^u] = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{Z_-^2}\cdot\langle Z^c\rangle + \sum[u^2(\log(1+\Delta L))$$

$$u(\log(1+\Delta L))+\Delta L]$$

以及对 $y\geq -1$

$$c_1(1-\sqrt{1+y})^2\leqslant u^2(\log(1+y))-u(\log(1+y))+y$$
$$\leqslant c_2(1-\sqrt{1+y})^2,$$

其中 $c_1>0$ 和 $c_2>0$ 为常数. 因而

$$[R>0,\widetilde{A}_{R-}+\langle X^c\rangle_{R-}<\infty]$$
$$=\left[R>0,\frac{1}{Z^2}\cdot\langle Z^c\rangle_{R-}+\left(1-\sqrt{1+\frac{x}{Z_-}}\right)^2*\nu_{R-}<\infty\right].$$

(14.6)

所以(14.1)可由(14.4)—(14.6)推出. 由于 $Z_\infty>0\Rightarrow R=\infty$. (14.2)可由(14.1)推得. □

14.15 定理 取 $N=\{S<\infty$ 或 $H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)=\infty\}$. 则

1) 在 N 上 $\boldsymbol{P}'\perp\boldsymbol{P}$.

2) 在 N^c 上 $\boldsymbol{P}'\sim\boldsymbol{P}$.

证明 取 $\widetilde{\boldsymbol{P}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}'+\boldsymbol{P})$. 由系 14.10 可知

$$H\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{Z_-}+\frac{1}{Z'_-}\right)^2\cdot\langle Z^c\rangle-\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'})^2*\nu,$$

其中 $\lambda=1+\frac{x}{Z_-}$, $\lambda'=1-\frac{x}{Z'_-}$. 由定理 14.14 有

$$[Z_\infty>0]=[R=\infty,Z_-^{-2}\cdot\langle Z^c\rangle_\infty+(1-\sqrt{\lambda})^2*\nu_\infty<\infty],$$
$$[Z'_\infty>0]=[R'=\infty,Z'^{-2}_-\cdot\langle Z'^c\rangle_\infty+(1-\sqrt{\lambda'})^2*\nu_\infty<\infty].$$

因为 1 介于$\sqrt{\lambda}$和$\sqrt{\lambda'}$之间,故$(1-\sqrt{\lambda})^2\leqslant(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'})^2$, $(1-\sqrt{\lambda'})^2\leqslant(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'})^2$. 因而

$$[S=\infty,H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)<\infty]=[Z_\infty>0,Z'_\infty>0],\quad(15.1)$$

$$[S<\infty\text{ 或 }H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)=\infty]=[Z_\infty=0]\cup[Z'_\infty=0].$$

(15.2)

因为 $P(Z_\infty=0)=0$ 和 $P'(Z'_\infty=0)=0$,定理结论可由(15.1)和

(15.2)直接得到. □

14.16 定理 $P'\ll P$当且仅当下列条件成立:

i) $P'_0\ll P_0$(P'_0和P_0分别为P'和P在$\mathscr{F}_0$上的限制),

ii) $P'\left(H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)<\infty\right)=1$,

iii) $P(I_{[x=-Z_-]}*\nu_\infty>0)=0$.

证明 由定理14.15可知

$$P'\ll P\Leftrightarrow P'\left(S=\infty,\ H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)<\infty\right)=1.$$

必要性. i)和ii)是显然的. 往证iii). 我们有

$$\begin{aligned}E'[I_{[x=-Z_-]}*\nu_\infty]&=\widetilde{E}[Z'_\infty(I_{[x=-Z_-]})*\nu_\infty]\\&=\widetilde{E}[(Z'_-I_{[x=-Z_-]})*\nu_\infty]\\&=\widetilde{E}[(Z'_-I_{[x=-Z_-]})*\mu_\infty]\\&=\widetilde{E}\left[\sum_{t>0}Z'_{t-}I_{[0\neq\Delta Z_t=-Z_{t-}]}\right]\\&=\widetilde{E}[Z'_{R-}I_{[0<R<\infty,Z_{R-}>0]}],\end{aligned}\tag{16.1}$$

这是由于$0\neq\Delta Z_t=-Z_t$仅当$t=R$时才可能. 因为$P(R<\infty)=0$及$P'\ll P$,故$P'(R<\infty)=0$. 因而iii)可由(16.1)推出.

充分性. 为了得到$P'\left(S=\infty,\ H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)<\infty\right)=1$,由ii)及$P'(R'<\infty)=0$只需证明$P'(R<\infty)=0$. 由iii)及(16.1)有

$$\widetilde{E}[Z'_{R-}I_{[0<R<\infty,Z_{R-}>0]}]=0.\tag{16.2}$$

但$\widetilde{P}(R<\infty,R'=\infty)=0$,于是$R<\infty\Rightarrow R'=\infty$及$Z'_{R-}>0$ $\widetilde{P}$-a.s.. 由(16.2)可推出$\widetilde{P}(0<R<\infty,Z_{R-}>0)=0$. 因此$P'(0<R<\infty,Z_{R-}>0)=0$. 由i)可知$P'(R>0)=1$. 由定理4.14

$$[R>0,Z_{R-}>0]=\left[R>0,H_R\left(\frac{1}{2}\right)<\infty\right],$$

所以由ii)$P'(R>0,Z_{R-}>0)=1$. 最后,$P'(R<\infty)=0$. □

14.17 注 若$\widetilde{P}=\frac{1}{2}(P+P')$,定理14.16的条件iii)等价于下述条件

iii)′ 对所有 $A\in\widetilde{\mathscr{P}}$，$(I_A\lambda)*\nu_\cdot=0$ $\boldsymbol{P}'$-a.s. $\Rightarrow(I_A\lambda')*\nu_\cdot=0$ $\boldsymbol{P}'$-a.s..（注意在此情况下 $\lambda*\nu$ 和 $\lambda'*\nu$ 分别为 μ 在 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$ 下的补偿子.）

证明 iii) ⇒ iii)′. 设 $A\in\widetilde{\mathscr{P}}$ 及 $(I_A\lambda)*\nu_\cdot=0$ $\boldsymbol{P}'$-a.s.. 则 $I_{A[\lambda>0]}*\nu_\cdot=0$ $\boldsymbol{P}'$-a.s.. 由 iii)

$$
\begin{aligned}
(I_A\lambda')*\nu_\cdot &= (I_{A[\lambda>0]}\lambda')*\nu_\cdot\\
&=[\lambda'*(I_{A[\lambda>0]}*\nu)]_\cdot=0,\ \boldsymbol{P}'\text{-a.s.}.
\end{aligned}
$$

iii)′ ⇒ iii). 显然我们有 $(\lambda I_{[\lambda=0]})*\nu_\cdot=0$. 由 iii)′

$$
[I_{[\lambda=0]}(\lambda+\lambda')]*\nu_\cdot=(I_{[\lambda=0]}\lambda')*\nu_\cdot=0,\ \boldsymbol{P}'\text{-a.s.}.
\tag{17.1}
$$

但 $I_{[\lambda+\lambda'=0]}*\nu_\cdot=0$，$\widetilde{\boldsymbol{P}}$-a.s. 及 $\boldsymbol{P}$-a.s.，由(17.1) $[I_{[\lambda=0,\lambda+\lambda'>0]}(\lambda+\lambda')]*\nu_\cdot=0$，$\boldsymbol{P}'$-a.s.，因而 $I_{[\lambda=0]}*\nu_\cdot=0$ $\boldsymbol{P}'$-a.s.. □

14.18 定理 $\boldsymbol{P}'\perp\boldsymbol{P}$ 当且仅当

$$
\boldsymbol{P}'\left(Z_0=0\ \text{或}\ H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)=\infty\ \text{或}\ I_{[\lambda=Z_-]}*\nu_\infty>0\right)=1.
\tag{18.1}
$$

证明 我们有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}'\perp\boldsymbol{P}&\Leftrightarrow\boldsymbol{P}'\left(S=\infty\ \text{或}\ H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)<\infty\right)=0\\
&\Leftrightarrow\boldsymbol{P}'\left(R<\infty\ \text{或}\ H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)=\infty\right)=1\\
&\Leftrightarrow\boldsymbol{P}'\Big(Z_0=0\ \text{或}\ 0<R<\infty,\ \text{且}\ H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)<\infty,\\
&\qquad\text{或}\ H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)=\infty\Big)=1\\
&\Leftrightarrow\boldsymbol{P}'\Big(Z_0=0\ \text{或}\ 0<R<\infty\ \text{且}\ Z_{R-}>0,\\
&\qquad\text{或}\ H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)=\infty\Big)=1\\
&\Leftrightarrow\boldsymbol{P}'\Big(Z_0=0\ \text{或}\ I_{[\lambda=-Z_-]}*\mu_\infty>0,\\
&\qquad\text{或}\ H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)=\infty\Big)=1.
\end{aligned}
$$

在上述等价关系中用到了$[Z_n=0]=[R=0]$及如下事实

$$[R>0,H_R\left(\frac{1}{2}\right)<\infty]=[R>0,Z_{R-}>0]$$
$$=[I_{[0,R[}*\mu>0].\square$$

应该指出(18.1)不是可料准则．在一般情况下要找到奇异性的可料准则似乎是困难的．

14.19 定理 假定$P'\overset{loc}{\ll}P$，则

1) $P'\ll P\Leftrightarrow P'(H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)<\infty)=1$,

2) $P'\perp P\Leftrightarrow P'(H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)=\infty)=1$.

证明 在此情况下，$P'(R=\infty)=1$，因而$P'(S=\infty)=1$．这样在定理14.15中可取$N=\left[H_\infty\left(\frac{1}{2}\right)=\infty\right]$，定理结论随之得到．$\square$

14.20 定理 假定$X\in\mathscr{S}(\tilde{P})$且在$\tilde{P}$下$X$有弱可料表示性．又设$X$在$P$，$P'$和$\tilde{P}$下的可料特征分别为$(\alpha,\beta,\nu)$，$(\alpha',\beta',\nu')$和$(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\nu})$，且满足

$$\nu=Y\cdot\tilde{\nu},\ Y\in\tilde{\mathscr{P}}^+,\ [\tilde{a}=1]\subset[a=1],$$
$$\nu'=Y'\cdot\tilde{\nu},\ Y'\in\tilde{\mathscr{P}}^+,\ [\tilde{a}=1]\subset[a'=1].$$

令

$$\tau_1=\inf\{t:\int_0^t|d(\alpha_s-\tilde{\alpha}_s-(xI_{[|x|\leqslant1]})*(\nu-\tilde{\nu}))_s|=\infty\},$$

$$\tau_2=\inf\{t:\int_0^t|d(\alpha'_s-\tilde{\alpha}_s-(xI_{[|x|\leqslant1]})*(\nu'-\tilde{\nu}))_s|=\infty\},$$

$$\tau=\tau_1\wedge\tau_2,$$

$$H=[\alpha'-\alpha-(xI_{[|x|\leqslant1]})*(\nu'-\nu)]I_{[0,\tau[}+(+\infty)I_{[\tau,\infty[}.$$

设K是$\boldsymbol{R}$值可料过程，使得当H在$[0,t]$上关于$\tilde{\beta}$绝对连续时，$H_s=\int_0^s K_u d\tilde{\beta}_u$，$0\leqslant s\leqslant t$；当$H$在$[0,t]$上关于$\tilde{\beta}$不绝对连续时，$K_t=+\infty$．规定

$$A=K^2\cdot\tilde{\beta}+(\sqrt{Y}-\sqrt{Y'})^2*\tilde{\nu}$$
$$+\sum(\sqrt{1-a}-\sqrt{1-a'})^2,$$

$$N' = [Z_t Z'_t = 0] \cup (\bigcup_t [\beta_t \neq \beta'_t])$$
$$\cup [A = \infty] \cup [I_{[Y \neq 1]} * \mu_t > 0]$$
$$\cup \Big[\sum_{s \leq t} I_{[\Delta X_s \neq 0, \, a_s = 1]} > 0\Big].$$

其中μ是X的跳测度．则1)在N'上$\boldsymbol{P}' \perp \boldsymbol{P}$；2)在$N'^c$上$\boldsymbol{P}' \sim \boldsymbol{P}$.

证明 1)令

$H^{(1)} = [a - \hat{a} \cdot (x I_{[\ldots]})] * (\nu - \hat{\nu}) [I_{[\ldots]}] + (1 - \ldots) I_{[\ldots]}$ [illegible]，

$H^{(2)} = [a' - \hat{a} \cdot (x I_{[\ldots]})] * (\nu' - \hat{\nu}) [I_{[\ldots]}] + (1 - \ldots) I_{[\ldots]}$ [illegible].

设$K^{(i)}, i = 1, 2$为R值可料过程，当$H^{(i)}$在$[0, t]$上关于$\tilde{\beta}$绝对连续时，$H_s^{(i)} = \int_0^s K_u^{(i)} d\tilde{\beta}_u, 0 \leq s \leq t$；当$H^{(i)}$在$[0, t]$上关于$\tilde{\beta}$不绝对连续时，$K_s^{(i)} = +\infty$．规定

$$A^{(1)} = (K^{(1)})^2 \cdot \tilde{\beta} + (1 - \sqrt{Y})^2 * \tilde{\nu}$$
$$+ \sum (\sqrt{1 - a} - \sqrt{1 - \tilde{a}})^2,$$
$$A^{(2)} = (K^{(2)})^2 \cdot \tilde{\beta} + (1 - \sqrt{Y'})^2 * \tilde{\nu}$$
$$+ \sum (\sqrt{1 - a'} - \sqrt{1 - \tilde{a}})^2.$$

不难验证$N \subset N_1 \cup N_2$，其中

$$N_1 = [Z_t = 0] \cup (\bigcup_t [\beta_t \neq \tilde{\beta}_t])$$
$$\cup [A^{(1)} = \infty] \cup [I_{[Y = 0]} * \mu_t > 0]$$
$$\cup \Big[\sum_t I_{[\Delta X_t \neq 0, a_t = 1]} > 0\Big],$$
$$N_2 = [Z'_t = 0] \cup (\bigcup_t [\beta'_t \neq \tilde{\beta}_t])$$
$$\cup [A^{(2)} = \infty] \cup [I_{[Y' = 0]} * \mu_t > 0]$$
$$\cup \Big[\sum_t I_{[\Delta X_t \neq 0, a'_t = 1]} > 0\Big].$$

(事实上，若$\beta = \beta' = \tilde{\beta}$且$dA^{(i)} \ll d\tilde{\beta}, i = 1, 2$，则$K^{(2)} - K^{(1)} = K$和$A \leq 2(A^{(1)} + A^{(2)})$.)

由于$\boldsymbol{P} \ll \tilde{\boldsymbol{P}}$，我们有

$$\boldsymbol{P}(Z_t = 0) = 0,$$

$$P(\bigcup_t[\beta_t \neq \tilde{\beta}_t]) = 0,$$

$$P(\Lambda_\infty^{(1)} < \infty) = 1$$

(由定理 14.12,14.16 并比较 $A^{(1)}$ 与P和$\tilde{P}$间的 1/2 阶 Hellinger 过程),

$$E[I_{[Y=0]} * \mu_\infty] = E[I_{[Y=0]} * \nu_\infty]$$
$$= E[(I_{[Y=0]}Y) * \tilde{\nu}_\infty] = 0,$$

$P(\bigcup_t[\Delta X_t = 0, a_t = 1]) = 0$ (在 P 下,$[a=1] \subset [\Delta X \neq 0]$),因而$P(N_1)=0$. 类似地$P'(N_2)=0$. 因而在 N 上$P' \perp P$.

2)往证 $N^C \subset [S=\infty, H_\infty\left(\frac{1}{2}\right) < \infty]$,于是结论可由定理 14.15 推出. 如同定理 14.12 的证明一样,$Z=Z_0\mathscr{E}(L)$,$L \in \mathscr{M}_{loc,0}(\tilde{P})$及

$$\Delta L_t = (Y(t, \Delta X_t) - 1)I_{[\Delta X_t \neq 0]} - \frac{a_t - \tilde{a}_t}{1 - \tilde{a}_t} I_{[\Delta X_t = 0]},$$

(见(12.5)). 按 N 的定义,在 N^C 上对每个 t 若 $\Delta X_t \neq 0$,则有 $Y(t, \Delta X_t) > 0$ 和 $\Delta L_t = Y(t, \Delta X_t) - 1$;若 $\Delta X_t = 0$,则有 $a_t < 1$ 及 $\Delta L_t = -\frac{a_t - \tilde{a}_t}{1 - \tilde{a}_t} > -1$. 总之在 N^C 上 $\Delta L > -1$,因而有 $Z > 0$ 以及 $R_1 = \infty$. 类似地,在 N^C 上还有 $R_2 = \infty$. 所以 $N^C \subset [S=\infty]$. 由定理 14.12 易见 $N^C \subset [H_\infty\left(\frac{1}{2}\right) < \infty]$. □

注 结论 1)并不要求在$\tilde{P}$下 X 有弱可料表示性的假定.

14.21 定理 设 $X = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n I_{[\![T_n, \infty[\![}$ 为一个跳跃过程,其中 $T_n \uparrow \infty$,对每个 $n \geq 0$,$T_n < \infty \Rightarrow T_n < T_{n+1}$ ($T_0 = 0$),且对每个 $n \geq 1$,$[T_n < \infty] = [\xi_n \neq 0]$. 设$F = F^0(X)$,$P'$和$P$为 $\mathscr{F} = \bigvee_t \mathscr{F}_t$ 上两个概率测度. X 在P'和P下的 Lévy 族分别表以 ν' 和 ν. 则$P' \ll P$当且仅当下列条件被满足

i)$P'_0 \ll P_0$,

ii)存在 $W \in \tilde{\mathscr{P}}^+$ 使 $\nu' = W.\nu$,$[a=1] \subset [a'=1]$及$P'(A'_\infty <$

$\infty)=1$，其中 $A'=(1-\sqrt{W})^2*\nu+\sum\left(\sqrt{1-a}-\sqrt{1-a'}\right)^2$．这时，$P'$ 关于 P 的密度过程为

$$\begin{cases}\dfrac{dP'_0}{dP_0}\left(\prod_{T_n\le t}W(T_n,\xi_n)\right)\left(\prod_{s\le t,s\ne T_n}\dfrac{1-a'_s}{1-a_s}\right)e^{(1-W)*\nu^c}, & \text{在}[A'<\infty]\text{上}, \\ 0, & \text{在}[A'=\infty]\text{上}, \end{cases} \tag{21.1}$$

其中 ν^c 为 ν 的连续部分．

证明 充分性．取 $\widetilde{P}=\frac{1}{2}(P+P')$，则定理 14.12 和 14.20 可以用于此．只要验证 $P'(N)=0$，其中 N 按定理 14.20 的定义．事实上，$P'(Z_0Z'_0)=P'(Z'_0=0)=0$，因为 $Z'_0=Z_0\dfrac{dP'_0}{dP_0}$ P'-a.s.；$P'(A_\infty=\infty)=0$，这是因为 $(1-\sqrt{W})^2*\nu=\left(\sqrt{Y}-\sqrt{Y'}\right)^2*\tilde{\nu}$；又因 $Y'=YW$（在 P' 下）

$$\begin{aligned}E'[I_{[YY'=0]}*\mu_\infty] &= E'[I_{[Y'=0]}*\mu_\infty] \\ &= \widetilde{E}[(I_{[Y'=0]}Y')*\tilde{\nu}_\infty] \\ &= 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E'\left[\sum_{t>0}I_{[\Delta X_t=0]}I_{[a_t=1]\cup[a'_t=1]}\right] &= E'\left[\sum_{t>0}I_{[\Delta X_t=0][a'_t=1]}\right] \\ &= E'\left[\sum_{t>0}I_{[a'_t=1]}(1-a'_t)\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

必要性由定理 14.16.（ii）来看是明显的，因为 $H\left(\frac{1}{2}\right)$ 与 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{W})^2+\sum(\sqrt{1-a}-\sqrt{1-a'})^2$ 是 P'-无区别的．由定理 14.20 的证明可知 P' 关于 P 的密度过程 Z' 满足（取 $\widetilde{P}'=P$）：

$$Z'=Z'_0+\left[Z'_-\left(W-1+\frac{a'-a}{1-a}\right)\right]*(\mu-\nu).$$

在 $\bigcup_n[0,R_n]\subset(A'<\infty)$ 上 $L=\left(W-1+\dfrac{a'-a}{1-a}\right)*(\mu-\nu)$ 为 P'-局部鞅，且

$$L_t = (W-1)*(\mu-\nu)_t + \sum_{T_n\le t}\frac{a'_{T_n}-a_{T_n}}{1-a_{T_n}}$$

$$-\sum_{s\le t}\frac{a'_s-a_s}{1-a_s}a_s,$$

$$= -(W-1)*\nu_t + \sum_{s\le t}(a'_s-a_s) + (W-1)*\mu_t$$

$$-\sum_{s\le t}\frac{a'_s-a_s}{1-a_s} + \sum_{T_n\le t}\frac{a'_{T_n}-a_{T_n}}{1-a_{T_n}}$$

$$= -(W-1)*\nu_t + \sum_{T_n\le t}(W(T_n,\xi_n)-1)$$

$$+\sum_{s\le t,\, s\ne T_n}\frac{a_s-a'_s}{1-a_s}$$

$$= -(W-1)*\nu_t + \sum_{s\le t}\Delta L_s.$$

以 Z 记(21.1)中规定的过程. 显然,对每个 n, $Z^{R_n}=Z_0\mathscr{E}(L^{R_n})=(Z')^{R_n}$. 若对某个 n, $R'_n=R'<\infty$, 则 $Z_R=Z_{R_n}=Z'_{R_n}=Z'_R=0$. 若对所有 n, $R'_n<R<\infty$, 则 $Z_R=\lim_n Z_{R_n}=\lim_n Z'_{R_n}=Z'_R=0$. 因而由 Z 的定义可知在 $[\![R',\infty[\![$ 上 $Z=0$. 所以 $Z=Z'$, 定理得证. □

14.22 系 在定理 14.21 的假定下并设 $\boldsymbol{P}'_0\ll\boldsymbol{P}_0$ 且存在 $W\in\tilde{\mathscr{P}}$ 使 $\nu'=W\cdot\nu$, $[a=1]\subset[a'=1]$, 并对每个 $t>0$

$$\boldsymbol{P}'\Big((1-\sqrt{W})^2*\nu_t+\sum_{s\le t}\big(\sqrt{1-a_s}-\sqrt{1-a'_s}\big)^2<\infty\Big)=1.$$

则 $\boldsymbol{P}'\ll\boldsymbol{P}$ 当且仅当

$$\boldsymbol{P}'\Big((1-\sqrt{W})^2*\nu_\infty+\sum_{t>0}\big(\sqrt{1-a_t}-\sqrt{1-a'_t}\big)^2<\infty\Big)=1.$$

证明 由定理 14.21 可知对每个 t, $\boldsymbol{P}'_t\ll\boldsymbol{P}_t$ ($\boldsymbol{P}'_t$ 和 $\boldsymbol{P}_t$ 分别为 $\boldsymbol{P}'$ 和 $\boldsymbol{P}$ 在 $\mathscr{F}_t$ 上的限制). 于是定理的结论可由定理 14.19.2) 推出. □

§ 3. 近邻性、完全可分离性与变差收敛

在这一节我们总假定 $(\Omega^n,\mathscr{F}^n)$, $n\ge1$ 为一列可测空间, 对每

个 $n\geq 1$, P^n 和 P'^n 是 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n)$ 上的两个概率测度.

14.23 定义 称 (P'^n) 是**近邻于** (P^n) 的, 并表为 $(P'^n) \lhd (P^n)$, 若对所有 $A_n\in\mathscr{F}^n$

$$P^n(A_n)\to 0 \Rightarrow P'^n(A_n)\to 0.$$

显然 $\|P'^n - P^n\| \to 0 \Rightarrow (P'^n)\lhd(P^n)$. 称 (P^n) 和 (P'^n) 是**完全可分离的**, 并表以 $(P'^n)\triangle(P^n)$, 若存在子列 (n_k) 及 $A_{n_k}\in\mathscr{F}^{n_k}$ 使

$$P'^{n_k}(A_{n_k})\to 1,\ P^{n_k}(A_{n_k})\to 0, \text{当 } k\to\infty.$$

设 $\xi_n\in\mathscr{F}^n$, $n\geq 1$. 若对所有 $\varepsilon>0$,

$$P^n(|\xi_n|>\varepsilon)\to 0,$$

称 (ξ^n) **依 (P^n) 收敛于零**, 并表示为 $\xi_n \xrightarrow{P^n} 0$. (ξ_n, P^n) 称为**胎紧的**, 若

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P^n(|\xi_n|>N)=0. \qquad (23.1)$$

若 ξ_n, $n\geq 1$ 都是有限值的, (23.1) 等价于

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n P^n(|\xi_n|>N)=0,$$

即 ξ_n 的分布族为胎紧的.

近邻性和完全可分离性的概念分别是绝对连续性和奇异性概念的推广. 事实上, 若 $(\Omega^n,\mathscr{F}^n)=(\Omega,\mathscr{F})$, $P^n=P$ 和 $P'^n=P'$, 则 $(P'^n)\lhd(P^n)$ 就是 $P'\ll P$, $(P'^n)\triangle(P^n)$ 就是 $P'\perp P$. 读者可自行验证这一点.

14.24 定理 下列断言等价

1) $(P'^n)\lhd(P^n)$.

2) 对所有 $\xi_n\in\mathscr{F}^n$, $\xi_n\xrightarrow{P^n}0 \Rightarrow \xi_n\xrightarrow{P'^n}0$.

3) 对所有 $\xi_n\in\mathscr{F}^n$, (ξ_n,P^n) 为胎紧的 $\Rightarrow$ (ξ_n,P'^n) 为胎紧的.

证明 2) $\Rightarrow$ 1). 设 $A_n\in\mathscr{F}^n$ 及 $P^n(A_n)\to 0$. 记 $\xi_n=I_{A_n}$, 则 $\xi_n\xrightarrow{P^n}0$, 因而 $\xi_n\xrightarrow{P'^n}0$, 即 $P'^n(A_n)\to 0$.

1) $\Rightarrow$ 3). 假定存在 $\xi_n\in\mathscr{F}^n$, $n\geq 1$ 使 (ξ_n,P^n) 为胎紧的, 但 (ξ^n, P'^n) 不是胎紧的. 于是存在 $\varepsilon>0$, 子列 (n_k) 和 $b_{n_k}\uparrow\infty$ 使对一切 $k\geq 1$ 有 $P'^{n_k}(|\xi_{n_k}|\geq b_{n_k})\geq\varepsilon$. 定义

$$A_n=\begin{cases}[|\xi_{n_k}|\geq b_{n_k}], & n=n_k, k\geq 1,\\ \varnothing, & n\notin(n_k).\end{cases}$$

则$P^n(A_n)\longrightarrow 0$，但$P'^n(A_n)\not\to 0$. 这是一个矛盾.

3) ⇒ 2). 假定存在$\eta_n\in\mathscr{F}^n$，$n\geqslant 1$，使(η_n)依(P^n)收敛于0，但不依(P'^n)收敛于0. 于是存在$\varepsilon>0$，子列(n_k)和$a_{n_k}\downarrow 0$使得对所有k，$P'^{n_k}(|\eta_{n_k}|\geqslant\varepsilon)\geqslant\varepsilon$，但当$k\to\infty$时$P^{n_k}(|\eta_{n_k}|\geqslant a_{n_k})\to 0$. 令

$$\xi_n=\begin{cases}\eta_{n_k}/a_{n_k}, & n=n_k,k\geqslant 1,\\ 0, & n\notin(n_k).\end{cases}$$

则(ξ_n,P^n)是胎紧的. 事实上我们有$\lim\limits_{n\to\infty}P^n(|\xi_n|\geqslant 1)=0$. 但$(\xi_n,P'^n)$不是胎紧的. 这是因为对每个$N$当$n_k$足够大时我们有$\frac{\varepsilon}{a_{n_k}}>N$及

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}P'^n(|\xi_n|\geqslant N)\geqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}P'^{n_k}\left(|\zeta_{n_k}|\geqslant\frac{\varepsilon}{a_{n_k}}\right)\geqslant\varepsilon.$$

这是一个矛盾. □

记$\bar{P}^n=\frac{1}{2}(P^n+P'^n)$及

$$z_n=\frac{dP^n}{d\bar{P}^n},\quad z'_n=\frac{dP'^n}{d\bar{P}^n},\quad l_n=\frac{z'_n}{z_n}.$$

显然$P^n(l_n<\infty)=1$，而P'^n关于P^n的Lebesgue分解为

$$P'^n(B)=\int_B l_n dP^n+P'^n(B[l_n=\infty]),\ B\in\mathscr{F}^n.$$

如同Lebesgue分解的唯一性，l_n是$P^n+P'^n$-a.s.确定的. 事实上，在l_n的定义中，$\bar{P}^n$可代以任一满足$P^n\ll\mu^n$和$P'^n\ll\mu^n$的σ-有限测度μ^n.

14.25 引理 (l_n,P^n)和$(\frac{1}{z_n},P^n)$是胎紧的.

证明 我们有

$$P^n(l_n>N)=\int_{[z'_n>Nz_n]}z_n d\bar{P}^n\leq\frac{1}{N}\int_{[z'_n>Nz_n]}z'_n d\bar{P}^n\leq\frac{1}{N},$$

$$P^n\left(\frac{1}{z_n}>N\right)=P^n\left(z_n<\frac{1}{N}\right)=\int_{[z_n<\frac{1}{N}]}z_n d\bar{P}^n\leq\frac{1}{N}.\ \square$$

14.26 定理 $(P'^n)\lhd(P^n)$当且仅当(l_n,P^n)为一致可积且

$P'^n(l_n=\infty)\to 0$.

证明 由 Lebesgue 分解可知对任一 $B_n\in\mathscr{F}^n$ 有

$$\int_{B_n} l_n d\,P^n \le P'^n(B_n) \leqslant \int_{B_n} l_n d\,P^n + P'^n(l_n=\infty). \quad (26.1)$$

充分性. 假定$P^n(B_n)\to 0$. 因为(l_n,P^n)一致可积, $\int_{B_n} l_n d\,P^n \longrightarrow 0$（定理 1.9）. 于是由(26.1)可得$P'^n(B_n)\longrightarrow 0$.

必要性. 因为$P^n(l_n=\infty)=0$, 由近邻性$P'^n(l_n=\infty)\longrightarrow 0$. 由(26.1)可知对任意 $B_n\in\mathscr{F}_n$, $n\geqslant 1$, $P^n(B_n)\longrightarrow 0 \Rightarrow P'^n(B_n)\longrightarrow 0 \Rightarrow \int_{B_n} l_n d\,P^n \longrightarrow 0$. 因而$(l_n,P^n)$是一致可积的. □

14.27 定理 下列断言等价:

1) $(P'^n)\lhd(P^n)$,

2) (l_n,P'^n)是胎紧的,

3) $\left(\frac{1}{z_n},P'^n\right)$是胎紧的,

4) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\varliminf\limits_{n\to\infty} h_n(P^n,P'^n)=1$.

证明 1) ⇒ 2)和 1) ⇒ 3)由引理 14.25 和定理 14.24 推得.

2) ⇒ 1). 我们来验证定理 14.26 的两个条件成立. 由(26.1)有

$$\int_{[l_n\geqslant N]} l_n d\,P^n \le P'^n(l_n\geqslant N).$$

并注意到$P^n(l_n<\infty)=1$ 可得(l_n,P^n)是一致可积的. 另一方面, $P'^n(l_n=\infty)\leqslant P'^n(l_n\geqslant N)$. 于是

$$\varlimsup_{n\to\infty} P'^n(l_n=\infty)\leqslant \lim_{N\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty} P'^n(l_n\geqslant N)=0.$$

3) ⇒ 1). 设$P^n(B_n)\longrightarrow 0$, $B_n\in\mathscr{F}^n$. 则注意到 $z_n+z'_n=2$ 有

$$\begin{aligned}
P'^n(B_n) &\leqslant P'^n\left(z_n\leqslant\frac{1}{N}\right)+\int_{B_n[z_n>\frac{1}{N}]} z'_n d\,P^n\\
&\leqslant P'^n\left(z_n\leqslant\frac{1}{N}\right)+\left(2-\frac{1}{N}\right)N\int_{B_n} z_n d\,P^n\\
&= P'^n\left(z_n\leqslant\frac{1}{N}\right)+(2N-1)\,P^n(B_n).
\end{aligned}$$

依次令 $n\to\infty$ 及 $N\to\infty$，有 $P'^n(B_n)\to 1$。

3) $\Rightarrow$ 4)。不难看出在 $]0,1[$ 上存在函数 φ,γ_1 和 γ_2 使 $\varphi>0,\gamma_1>0,\gamma_2>0$，$\lim\limits_{\alpha\to 0}\varphi(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\gamma_1(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\gamma_2(\alpha)=0$，且对 $x\in[0,2]$ 有

$$\varphi(\alpha)-2I_{[0,\gamma_1(\alpha)]}\le x^\alpha(2-x)^{1-\alpha}-(2-x)$$

$$\le\varphi(\alpha)-2I_{[0,\gamma_1(\alpha)]}. \qquad (27.1)$$

以 z_n 代入(27.1)中的 x 并关于 P^n 积分可得

$$\varphi(\alpha)-P^n(z_n\le\gamma_1(\alpha))-P'^n(z_n\le\gamma_2(\alpha))\le h_\alpha(P^n,P'^n)-1$$

$$\le\varphi(\alpha)-P^n(z_n\le\gamma_1(\alpha))-P'^n(z_n\le\gamma_1(\alpha)).$$

由于 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}P^n(z_n\le\gamma_1(\alpha))=0$（引理 14.25），故有

$$\lim_{\alpha\to 0}\lim_{n\to\infty}P'^n(z_n\le\gamma_2(\alpha))\le\lim_{\alpha\to 0}\underline{\lim_{n\to\infty}}h_\alpha(P^n,P'^n)-1$$

$$\le-\lim_{\alpha\to 0}\lim_{n\to\infty}P'^n(z_n\le\gamma_1(\alpha)).$$

这样 3) $\Leftrightarrow$ 4) 就是明显的了。□

14.28 定理 下列断言等价：

1) $(P'^n)\triangle(P^n)$。

2) 对每个 $N>0$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}P'^n(l_n\ge N)=1$。

3) 对每个 $\varepsilon>0$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}P'^n(z_n\ge\varepsilon)=0$。

4) 对某个 $\alpha\in]0,1[$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}h_\alpha(P^n,P'^n)=0$。

5) 对某个 $\alpha\in]0,1[$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}h_\alpha(P^n,P'^n)=0$。

证明 设 1) 成立，则有子列 (n_k) 及 $B_{n_k}\in\mathscr{F}^{n_k}$ 使 $P^{n_k}(B_{n_k})\to 0$，$P'^{n_k}(B_{n_k})\to 1$。对任一 $N>0$

$$P'^{n_k}(B_{n_k})=\int_{B_{n_k}[l_{n_k}<N]}l_{n_k}d\,P^{n_k}+P'^{n_k}(B_{n_k}[l_{n_k}\ge N])$$

$$\le N\,P^{n_k}(B_{n_k})+P'^{n_k}(l_{n_k}\ge N).$$

因而 $\lim\limits_{k\to\infty}P'^{n_k}(l_{n_k}\ge N)=1$ 和 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}P'^n(l_n\ge N)=1$。2) 就成立。

对任一 $\varepsilon>0$

$$P'^{n_k}(z_{n_k}\ge\varepsilon)\le P'^{n_k}(B_{n_k})+\int_{B^c_{n_k}[z_{n_k}\ge\varepsilon]}\frac{z'_{n_k}}{z_{n_k}}d\,P^{n_k}$$

$$\leqslant P'^{n_k}(B_{n_k}) + \frac{2}{\varepsilon} P^{n_k}(B_{n_k}).$$

于是 3)成立.

对任一 $\alpha \in [0,1]$，由 Hölder 不等式

$$h_\alpha(P^{n_k}, P'^{n_k}) \leqslant \left(\int_{B_{n_k}} z_{n_k} d\, \overline{P}^{n_k}\right)^\alpha \left(\int_{B_{n_k}} z'_{n_k} d\, \overline{P}^{n_k}\right)^{1-\alpha}$$

$$+ \left(\int_{B^c_{n_k}} z_{n_k} d\, \overline{P}^{n_k}\right)^\alpha \left(\int_{B^c_{n_k}} z'_{n_k} d\, \overline{P}^{n_k}\right)^{1-\alpha}$$

$$\leqslant (P^{n_k}(B_{n_k}))^\alpha + (P'^{n_k}(B^c_{n_k}))^{1-\alpha} \longrightarrow 0.$$

于是可推出 5)． 5) ⇒ 4)是简单的.

2) ⇒ 1)．存在子列(n_k)使$P'^{n_k}(l_{n_k} \geqslant k) > 1 - \dfrac{1}{k}$．令 $B_{n_k} = [l_{n_k} \geqslant k]$．则$P'^{n_k}(B_{n_k}) \longrightarrow 1$．由引理 14.25

$$\lim_{k\to\infty} P^{n_k}(l_{n_k} \geqslant k) \leqslant \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{k\to\infty}} P^{n_k}(l_{n_k} \geqslant N) = 0.$$

因而$P^{n_k}(B_{n_k}) \to 0$，$P'^{n_k}(B_{n_k}) \to 1$，即$(P^n) \triangle (P'^n)$.

3) ⇒ 1)．存在子列(n_k)使$P'^{n_k}(l_{n_k} \geqslant \dfrac{1}{k}) \leqslant \dfrac{1}{k}$．另一方面，$P^{n_k}(z_{n_k} < \dfrac{1}{k}) \leqslant \dfrac{1}{k}$．令 $B_{n_k} = [z_{n_k} \geqslant \dfrac{1}{k}]$，则$P'^{n_k}(B_{n_k}) \to 0$，$P^{n_k}(B_{n_k}) \to 1$.

4) ⇒ 1)．存在子列(n_k)使$\lim\limits_{k\to\infty} h_\alpha(P^{n_k}, P'^{n_k}) = 0$．令 $B_{n_k} = [z_{n_k} \leqslant z'_{n_k}]$，则

$$P^{n_k}(B_{n_k}) = \int_{B_{n_k}} z_{n_k} d\, \overline{P}^{n_k} \leqslant \int_{B_{n_k}} (z_{n_k})^\alpha (z'_{n_k})^{1-\alpha} d\, \overline{P}^{n_k}$$

$$\leqslant h_\alpha(P^{n_k}, P'^{n_k}),$$

$$P'^{n_k}(B^c_{n_k}) = \int_{B^c_{n_k}} z'_{n_k} d\, \overline{P}^{n_k} \leqslant \int_{B^c_{n_k}} (z_{n_k})^\alpha (z'_{n_k})^{1-\alpha} d\, \overline{P}^{n_k}$$

$$\leqslant h_\alpha(P^{n_k}, P'^{n_k}).$$

因而$P^{n_k}(B_{n_k}) \to 0$，$P'^{n_k}(B_{n_k}) \to 1$． □

14.29 定理 下列断言等价：

1） $\| P^n - P'^n \| \to 0$，

2） $\int |l_n - 1| d P^n \to 0$，

3） $l_n - 1 \xrightarrow{P^n} 0$，

4） $z_n - 1 \xrightarrow{P^n} 0$，

5） 对某个 $\alpha \in]0,1[$，$\lim_{n\to\infty} h_\alpha(P^n, P'^n) = 1$，

6） 对任一 $\alpha \in]0,1[$，$\lim_{n\to\infty} h_\alpha(P^n, P'^n) = 1$.

证明 我们有

$$\| P^n - P'^n \| = \int |z_n - z'_n| d \overline{P}^n$$

$$= \int |l_n - 1| d P^n + P'^n(l_n = \infty).$$

1） $\Rightarrow$ 2）可直接推出．2） $\Rightarrow$ 3） 由 Chebyshev 不等式是明显的．3） $\Rightarrow$ 4）亦是容易的，事实上 $l_n - 1 = 2\left(\frac{1}{z_n} - 1\right)$.

4） $\Rightarrow$ 1）．对任一 $\varepsilon > 0$，若 $0 < \delta < \varepsilon < 1$，则

$$\overline{P}^n(|z_n - 1| \leqslant \varepsilon) = \int_{[|z_n - 1| \leqslant \varepsilon]} \frac{1}{z_n} d P^n$$

$$\geqslant \int_{[|z_n - 1| \leqslant \delta]} \frac{1}{z_n} d P^n$$

$$\geqslant \frac{1}{1+\delta} P^n(|z^n - 1| \leqslant \delta).$$

依次令 $n \to \infty$ 和 $\delta \downarrow 0$ 可得 $z_n - 1 \xrightarrow{P^n} 0$．由于 $|z_n - 1| \leqslant 1$，$\| P^n - P'^n \| = 2\int |z_n - 1| d \overline{P}^n \to 0$.

1） $\Rightarrow$ 6） $\Rightarrow$ 5） $\Rightarrow$ 1） 由定理 14.3 得出．□

以下我们假定对每个 n 给定一个右连续流 $F^n = (\mathscr{F}^n_t)$ 满足 $\mathscr{F}^n = \bigvee_t \mathscr{F}^n_t$．取 $(F^n)^{\overline{P}^n}$ 为参考流．令 Z^n 和 Z'^n 分别为 P^n 和 P'^n 关于 $\overline{P}^n$ 的密度过程．记

$$R^n_k = \inf\left\{t : Z^n_t \leqslant \frac{1}{k}\right\},$$

$$R'^n_k = \inf\left\{t: Z'^n_t \leqslant \frac{1}{k}\right\},$$

$$S^n_k = R^n_k \wedge R'^n_k,$$

$$R^n = \inf\{t: Z^n_t = 0\},$$

$$R'^n = \inf\{t: Z'^n_t = 0\},$$

$$S^n = R^n \wedge R'^n,$$

$$\Gamma^n = \bigcup_k [\![0, S^n_k]\!] = [\![0]\!] \cup [Z^n_- > 0, Z'^n_- > 0],$$

μ^n——Z^n 的跳测度，

ν^n——μ^n 在$\overline{P}^n$ 下的补偿子，

H^n——(P^n, P'^n)的 1/2 阶 Hellinger 过程，

对 $N \geqslant 2$

$$i^n(N) = (\lambda'^n I_{[N\lambda^n < \lambda'^n]}) * \nu^n,$$

其中 $\lambda^n = 1 + \frac{x}{Z^n_-}$，$\lambda'^n = 1 - \frac{x}{Z'^n_-}$. 不难直接验证 $\lambda^n \cdot \nu^n$ 和 $\lambda'^n \cdot \nu^n$ 分别是 μ^n 在P^n 和P'^n 下的补偿子.

以下为方便计，我们省略了指标 n，只有在它必不可少时才出现.

14.30 引理 若$(P^n) \triangleleft (P'^n)$，则

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n(S^n_k < \infty) = 0.$$

证明 我们有

$$P'(R'_k < \infty) \leqslant P'\left(Z'_{R'_k} \leqslant \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k},$$

$$P'(S_k < \infty) \leqslant P'(R_k < \infty) + P'(R'_k < \infty).$$

因而只要证$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n(R^n_k < \infty) = 0$. 若不对，则存在 $\delta > 0$ 及子列 (n_k) 使得对所有 k 有

$$P'^{n_k}(R^{n_k}_k < \infty) \geqslant \delta. \tag{30.1}$$

但同时有$P(R_k < \infty) \leqslant \frac{1}{k}$. 于是$P^{n_k}(R^{n_k}_k < \infty) \to 0$，由近邻性还有 $P'^{n_k}(R^{n_k}_k < \infty) \to 0$，它与(30.1)相矛盾. □

14.31 定理 $(P'^n) \triangleleft (P^n)$当且仅当下列条件被满足：

i) $(P'^n_0) \lhd (P^n_0)$，其中 $P'^n_0 = P'^n|_{\mathcal{F}^n_0}$ 和 $P^n_0 = P^n|_{\mathcal{F}^n_0}$，

ii) (H^n_∞, P'^n) 为胎紧的，即 $\lim\limits_{N\uparrow\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P'^n(H^n_\infty \geqslant N)=0$，

iii) 对任一 $\varepsilon>0$，$\lim\limits_{N\uparrow\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P'^n(i^n_\infty(N)\geqslant\varepsilon)=0$.

证明 必要性. i)是显然的. 注意

$$H_{S_k} \leqslant kY_- \cdot H_{S_k}$$

(按定义 $Y=\sqrt{ZZ'}$) $Y\leqslant 1$ 及 $P'\leqslant 2\bar{P}$，故有

$$\begin{aligned} P'(H_\infty \geqslant N) &\leqslant P'(S_k<\infty) + P'\left(Y_-\cdot H_\infty \geqslant \frac{N}{k}\right) \\ &\leqslant P'(S_k<\infty) + \frac{2k}{N}\bar{E}[Y_-\cdot H_\infty] \\ &= P'(S_k<\infty) + \frac{2k}{N}\bar{E}[Y_0 - Y_\infty] \\ &\leqslant P'(S_k<\infty) + \frac{2k}{N}. \end{aligned} \tag{31.1}$$

依次令 $n\to\infty$，$N\to\infty$ 及 $k\to\infty$ 由引理 14.30 可得 ii). 令

$$j^n(N) = (I_{[N\lambda^n<\lambda'^n]}) * \mu^n.$$

若 $u<\frac{1}{2}v$，$\varphi_{1/2}(u,v)=\frac{1}{2}(u+v)-\sqrt{uv}=\frac{1}{2}(\sqrt{v}-\sqrt{u})^2>cv$，

其中 $c=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. 于是

$$i(N)\leqslant c^{-1}(\varphi_{1/2}(\lambda,\lambda')I_{[N\lambda<\lambda']}) * \nu \leqslant c^{-1}H，\ N\geqslant 2.$$

因而 $i(N)^{S_k}$ 是P可积的，亦是P'可积的. 于是 $i(N)^{S_k}$ 是 $j(N)^{S_k}$ 的 P'-补偿子. 由 Lenglart 不等式，对 $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned} P'(i_{S_k}(N)\geqslant\varepsilon) &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}E'[(\Delta j(N))^*_{S_k}] \\ &\quad + P'(j_{S_k}(N)>0). \end{aligned} \tag{31.2}$$

由于 $\Delta j(N)\leqslant 1$ 且在 $⟦0,S_k⟦$ 上 $\frac{Z}{Z_-}\geqslant\frac{1}{2k}$，$\frac{Z'}{Z'_-}\leqslant 2k$，当 $N\geqslant 4k^2$ 在 $⟦0,S_k⟦$ 上有 $\frac{Z'}{Z'_-}\leqslant 2k\leqslant\frac{N}{2k}\leqslant N\frac{Z}{Z_-}$. 于是

$$j_{S_k}(N)=0，\quad (\Delta j(N))^*_{S_k}\leqslant I_{[S_k<\infty]}.$$

因而，当 $N\geqslant 4k^2$ 时由(31.1)我们有

$$P'(i_n(N)\geqslant\varepsilon)\leqslant P'(i_{S_k}(N)\geqslant\varepsilon)+P'(S_k^n<\infty)$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{\varepsilon}+2\right)P'(S_k<\infty).$$

依次令 $n\to\infty$，$N\to\infty$ 及 $k\to\infty$ 由引理 14.30 可得 iii)

充分性．由指数公式，在 $[\![0,S_k[\![$ 上有

$$\begin{aligned}
\frac{Z'}{Z}=\frac{Z'_0}{Z_0}\exp\Big\{&\frac{I_{]\!]0,\infty[\![}}{Z'_-}.Z'-\frac{1}{2}\frac{1}{(Z'_-)^2}.\langle Z'^c\rangle\\
&+\sum\Big[\log\Big(1+\frac{\Delta Z'}{Z'_-}\Big)-\frac{\Delta Z'}{Z'_-}\Big]\\
&-\frac{I_{]\!]0,\infty[\![}}{Z_-}.Z+\frac{1}{2}\frac{1}{(Z_-)^2}.\langle Z^c\rangle\\
&-\sum\Big[\log\Big(1+\frac{\Delta Z}{Z_-}\Big)-\frac{\Delta Z}{Z_-}\Big]\Big\}\\
=\frac{Z'_0}{Z_0}\exp\Big\{&-\Big(\frac{1}{Z_-}+\frac{1}{Z'_-}\Big).Z^c\\
&-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(Z'_-)^2}-\frac{1}{(Z_-)^2}\Big).\langle Z^c\rangle\\
&+(\lambda'-\lambda)*(\mu-\nu)+[\log\lambda'-(\lambda'-1)]*\mu\\
&-[\log\lambda-(\lambda-1)]*\mu\Big\}\\
=\frac{Z'_0}{Z_0}\exp\Big\{&-\Big(\frac{1}{Z_-}+\frac{1}{Z'_-}\Big).Z^{c,P'}\\
&+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{Z_-}+\frac{1}{Z'_-}\Big)^2.\langle Z^c\rangle\\
&+(\lambda'-\lambda)*\mu+\Big[\log\frac{\lambda'}{\lambda}-(\lambda'-\lambda)\Big]*\mu\Big\}\\
=\frac{Z'_0}{Z_0}\exp\{&A+B\},
\end{aligned}\tag{31.3}$$

其中 $Z^{c,P'}=Z^c-\frac{1}{Z'_-}.\langle Z^c,Z'^c\rangle=Z^c+\frac{1}{Z'_-}.\langle Z^c\rangle$ 是P'下 Z 的连续鞅部分．且

$$A=-\Big(\frac{1}{Z_-}+\frac{1}{Z'_-}\Big).Z^{c,P'}+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{Z_-}+\frac{1}{Z'_-}\Big)^2.\langle Z^c\rangle,$$

$$B=(\lambda'-\lambda)*(\mu-\nu)+\left[\log\frac{\lambda'}{\lambda}-(\lambda'-\lambda)\right]*\mu$$

$$=\left(I_{[|\rho-1|>b]}\log\frac{1}{\rho}\right)*\mu+\left[I_{[|\rho-1|>b]}(\rho-1)\right]*\nu'$$

$$+\left(I_{[|\rho-1|\leqslant b]}\log\frac{1}{\rho}\right)*(\mu-\nu')$$

$$+\left[I_{[|\rho-1|\leqslant b]}\left(\log\frac{1}{\rho}-1+\rho\right)\right]*\nu'$$

$$=B^1+B^2+B^3+B^4,$$

其中 $\rho=\frac{\lambda}{\lambda'}$，$\nu'$ 是 μ 的$\boldsymbol{P}'$-补偿子，而 $b\in]0,1[$ 是一个常数.

下面我们将在$\boldsymbol{P}'$之下进行讨论，逐项地对(3.13)进行估计.

首先，由于$(\boldsymbol{P}'^n_0)\lhd(\boldsymbol{P}^n_0)$，故有

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\boldsymbol{P}'^n(Z'^n_0/Z^n_0\geqslant N)=0. \qquad (31.4)$$

其次，因为$\langle Z^{c,\boldsymbol{P}'}\rangle(\boldsymbol{P}')=\langle Z^c\rangle$，由 Lenglart 不等式

$$\boldsymbol{P}'\left(\left|\left(\frac{1}{Z_-}+\frac{1}{Z'_-}\right)\cdot Z^{c,\boldsymbol{P}'}\right|^*_{S_k}\geqslant N\right)\leqslant L/N^2+\boldsymbol{P}'(8H_\infty\geqslant L),$$

$$\boldsymbol{P}'(A^*_{S_k}\geqslant 2N)\leqslant L/N^2+\boldsymbol{P}'(8H_\infty\geqslant L)+\boldsymbol{P}'(4H_\infty\geqslant N).$$

依次令 $k\to\infty$，$n\to\infty$，$N\to\infty$及 $L\to\infty$产生

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\boldsymbol{P}'^n\left(\lim_{k\to\infty}(A^n)^*_{S^n_k}\geqslant 2N\right)=0. \qquad (31.5)$$

再次，运用当$|x|<1$ 时$|\log(1+x)|\leqslant|x|/(1-|x|)$有

$$\left\langle\left(I_{[|\rho-1|\leqslant b]}\log\frac{1}{\rho}\right)*(\mu-\nu')\right\rangle\leqslant\left(I_{[|\rho-1|\leqslant b]}\log^2\rho\right)*\nu'$$

$$\leqslant\left(I_{[|\rho-1|\leqslant b]}\frac{(\rho-1)^2}{(b-1)^2}\right)*\nu'$$

$$\leqslant\left(\frac{1+\sqrt{1+b}}{1-b}\right)^2(\sqrt{\rho}-1)^2*\nu'$$

$$\leqslant c_bH.$$

其中 c_b 是一个只依赖 b 的常数，由 Lenglart 不等式

$$\boldsymbol{P}'((B^3)^*_{S_k}\geqslant N)\leqslant L/N^2+\boldsymbol{P}'(c_bH_\infty\geqslant L).$$

依次令 $k\to\infty$，$n\to\infty$，$N\to\infty$和 $L\to\infty$可得

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P'^n\left(\lim_{k\to\infty}(B^{n,3})^*_{S^n_k}\geqslant N\right)=0. \tag{31.6}$$

接着，再运用当$|x|<1$时$|\log(1+x)-x|\leqslant x^2/2(1-|x|)$有

$$\begin{aligned}|B^4|&\leqslant (I_{[|\rho-1|\leqslant b]}|-\log\rho+\rho-1|)*\nu'\\&\leqslant\left(I_{[|\rho-1|\leqslant b]}\frac{(\rho-1)^2}{2(1-b)}\right)*\nu'\\&\leqslant\frac{(1+\sqrt{1+b})^2}{2(1-b)}(\sqrt{\rho}-1)^2*\nu'\\&\leqslant c_bH,\end{aligned}$$

$$P'((B^4)^*_{S_k}\geqslant N)\leqslant P'(c_bH_\infty\geqslant N).$$

因而

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P'^n\left(\lim_{k\to\infty}(B^{n,4})^*_{S^n_k}\geqslant N\right)=0. \tag{31.7}$$

此外，还有

$$\begin{aligned}|B^2|&\leqslant\left[I_{[|\rho-1|<b]}\left|\frac{\sqrt{\rho}+1}{\sqrt{\rho}-1}\right|(\sqrt{\rho}-1)^2\right]*\nu'\\&\leqslant\left(1+\frac{2}{\sqrt{1+b}-1}\right)(\sqrt{\rho}-1)^2*\nu'\\&\leqslant c_bH,\end{aligned}$$

$$P'((B^2)^*_{S_k}\geqslant N)\leqslant P'(c_bH_\infty\geqslant N).$$

因而

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P'^n\left(\lim_{k\to\infty}(B^{n,2})^*_{S^n_k}\geqslant N\right)=0. \tag{31.8}$$

最后，取$0<\delta<1-b$，则

$$\begin{aligned}B^1&\leqslant\left(I_{[\delta<\rho<1-b]}\log^+\frac{1}{\rho}\right)*\mu+\left(I_{[\rho\leqslant\delta]}\log^+\frac{1}{\rho}\right)*\mu\\&\leqslant\left(I_{[\rho<1-b]}\log\frac{1}{\delta}\right)*\mu+\left(I_{[\rho\leqslant\delta]}\log^+\frac{1}{\rho}\right)*\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P'((\exp\{B^1\})^*_{S_k}\geqslant N)\\&\leqslant P'\left((I_{[\rho<1-b]}*\mu)_{S_k}\geqslant\frac{\log N}{\log 1/\delta}\right)\\&\quad+P'((I_{[\rho\leqslant\delta]}*\mu)_{S_k}>0).\end{aligned}\tag{31.9}$$

显然，

$$
\begin{aligned}
I_{[|\rho-1|>b]} * \nu' &\leqslant I_{[|\rho-1|>b]} * \nu' \\
&\leqslant \frac{1}{b}(I_{[|\rho-1|>b]}|\rho-1|) * \nu' \\
&\leqslant c_b H.
\end{aligned}
$$

由 Lenglart 不等式

$$
P'\left\{(I_{[\rho<\delta]} * \mu)_{S_k} \geqslant \frac{\log N}{\log 1/\delta}\right\} \leqslant \frac{L\log 1/\delta}{\log N} + P'(c_b H_\infty \geqslant L). \tag{31.10}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
I_{[\rho<\delta]} * \nu' &\leqslant I_{[x>K\delta]} * \nu' + I_{[0<x\leqslant K\delta,\rho<\delta]} * \nu' \\
&\leqslant i(K) + K I_{[x>0,\rho<\delta]} * \nu' \\
&\leqslant i(K) + \frac{K\delta}{(1-\sqrt{\delta})^2}(\sqrt{\rho}-1)^2 * \nu' \\
&\leqslant i(K) + \frac{2K\delta}{(1-\sqrt{\delta})^2}H.
\end{aligned}
$$

由于 μ 是整值的，再用 Lenglart 不等式

$$
\begin{aligned}
P'\{(I_{[\rho<\delta]} * \mu)_{S_k} > 0\} &= P'\{(I_{[\rho<\delta]} * \mu)_{S_k} \geqslant 1\} \\
&\leqslant \eta + P'\{(I_{[\rho<\delta]} * \nu')_{S_k} \geqslant \eta\}, \\
&\eta > 0.
\end{aligned} \tag{31.11}
$$

由(31.9)—(31.11)可得

$$
\begin{aligned}
P'((\exp\{B^1\})_{S_k} \geqslant N) \leqslant & \frac{L\log 1/\delta}{\log N} + P'(c_b H_\infty \geqslant L) \\
& + \eta + P'(i_\infty(K) \geqslant \frac{1}{2}\eta) \\
& + P'(H_\infty \geqslant \eta(1-\sqrt{\delta})^2/4K\delta).
\end{aligned}
$$

依次令 $k\to\infty, n\to\infty, N\to\infty, L\to\infty, \delta\to 0, K\to\infty$ 及 $\eta\to 0$ 产生

$$
\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n\{\lim_{k\to\infty}(\exp\{B^{n,1}\})_{S_k}^n \geqslant N\} = 0. \tag{31.12}
$$

由(31.4)—(31.8)和(31.12)可得

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n\left(\lim_{k\to\infty}\left(\frac{Z'^n}{Z^n}\right)^*_{S_k^n}\geqslant N\right)=0.$$

事实上，不难看出$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{Z'^n}{Z^n}\right)^*_{S_k}=\left(\frac{Z'^n}{Z^n}\right)^*_\infty$，因而

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n\left(\frac{Z'^n}{Z^n_\infty}\geqslant N\right)=0.$$

这就蕴含了$(P'^n)\lhd(P^n)$（定理 14.27）. □

14.32 注 在定理 14.31 中条件 iii)可代以

iii)′ 对所有$A_n\in\mathscr{F}^n$

$$(I_{A_n}\lambda^n)*\nu^n_\infty\xrightarrow{P'^n}0\Rightarrow(I_{A_n}\lambda'^n_n)*\nu^n_\infty\xrightarrow{P'^n}0.$$

证明 iii) ⇒ iii)′.

$(I_{A_n}\lambda'^n)*\nu^n_\infty\leqslant(I_{[N\lambda^n<\lambda'^n]}\lambda'^n)*\nu^n_\infty+(I_{A_n\cap[N\lambda^n\geqslant\lambda'^n]}\lambda'^n)*\nu^n_\infty$

$\leqslant \varepsilon^n(N)+N(I_{A_n}\lambda^n)*\nu^n_\infty.$

iii)′+ ii) ⇒ iii).

$$(I_{[N\lambda^n<\lambda'^n]}\lambda^n)*\nu^n_\infty\leqslant(\sqrt{N}-1)^{-2}H^n_\infty.$$

取$N^n\to\infty$，$A_n=[N^n\lambda^n<\lambda'^n]$，则$\varepsilon^n(N^n)\xrightarrow{P'}0$. □

14.33 定理 若对所有$N>0$，$\underline{\lim}_{n}P'^n(H^n_\infty\geqslant N)=1$，则$(P'^n)\triangle(P^n)$.

证明 由(31.1)

$$\begin{aligned}P'(H_\infty\geqslant N)&\leqslant P'(S_k<\infty)+\frac{2k}{N}\\&\leqslant P'(R_k<\infty)+P'(R'_k<\infty)+\frac{2k}{N}\\&\leqslant P'(R_k<\infty)+\frac{1}{k}+\frac{2k}{N}.\end{aligned}$$

由此$\lim_{k}\overline{\lim_{n}}P'^n(R^n_k<\infty)=1$. 以此与引理 14.25 相比较可得$(P'^n)\triangle(P^n)$. □

显然，若$(P'^n_0)\triangle(P^n_0)$，则$(P'^n)\triangle(P^n)$. 但$(P'^n_0)\triangle(P^n_0)$和定理 14.33 的条件远不是完全可分离的必要条件.

注 自然，定理14.16亦可由定理14.31推出. 由定理14.31也可推出当$P'(H_\infty=\infty)=1$时，则$P'\perp P$. 其细节留给读者.

14.34 引理 下列断言等价：

1) $\|P^n-P'^n\|\to 0$,

2) $(Z^n-1)^*_\infty \xrightarrow{P^n} 0$,

3) $(\sqrt{Z^nZ'^n}-1)^*_\infty \xrightarrow{P^n} 0$.

证明 1) ⇒ 2). 由鞅的最大值不等式，对$\varepsilon>0$有

$$\bar{P}((Z-1)^*_\infty \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\bar{E}|Z_\infty-1| = \frac{1}{2\varepsilon}\|P-P'\|.$$

结论即可由此直接推出.

2) ⇒ 1). 显然，$Z^*_\infty-1 \xrightarrow{P^n} 0$. 对任一给定的$\varepsilon>0$及$0<\delta<\varepsilon<1$

$$P(|Z_\infty-1|\leqslant\varepsilon)\geqslant\int_{[|Z_\infty-1|\leqslant\delta]}\frac{1}{Z_\infty}dP$$

$$\geqslant\frac{1}{1+\delta}P(|Z_\infty-1|\leqslant\delta).$$

依次令$n\to\infty$及$\delta\to 0$可得$Z^n_\infty-1\xrightarrow{\bar{P}^n}0$，又因$|Z^n_\infty-1|\leqslant 1$，$\|P'^n-P^n\|=2\bar{E}^n[|Z^n_\infty-1|]\to 0$.

由$1-(\sqrt{ZZ'})^2=(1-Z)^2$和$0\leqslant\sqrt{ZZ'}\leqslant 1$，有

$$(1-\sqrt{ZZ'})^*\leqslant[(1-Z)^*]^2$$

$$\leqslant 2(1-\sqrt{ZZ'})^*.$$

2) ⇔ 3) 即可推得. □

14.35 定理 下列断言等价：

1) $\|P^n-P'^n\|\to 0$,

2) i) $\|P^n_0-P'^n_0\|\to 0$; ii) $H^n_\infty\xrightarrow{\bar{P}^n}0$.

3) i) $\|P^n_0-P'^n_0\|\to 0$; ii) $H^n_\infty\xrightarrow{P^n}0$.

证明 1) ⇒ 2). i)是明显的. 由$Y=Y_0+M-A$，其中M为零初值鞅，$A=Y_-\cdot H$. 由引理14.34，$(Y^n-Y^n_0)^*\xrightarrow{\bar{P}^n}0$. A被$(Y-$

$Y_0)^*$ 控制，$\Delta(Y-Y_0)^*\leqslant|\Delta Y|\leqslant 1$，由 Lenglart 不等式可知 $A^n_\infty \xrightarrow{P^n} 0$.

在 $\left[\inf_{t\geq 0} Y_t \geqslant \frac{1}{2}\right]$ 上有

$$H_\infty = \left(\frac{1}{Y_-}-1\right)\cdot A_\infty + A_\infty$$

$$\leqslant 2(Y-1)^*_\infty A_\infty + A_\infty,$$

而在 $\left[\inf_{t\geq 0} Y_t < \frac{1}{2}\right]$，$(Y-1)^*_\infty \geqslant \frac{1}{2}$. 所以对任一 $\varepsilon>0$

$$P(H_\infty \geqslant \varepsilon) \leqslant \bar{P}\left((Y-1)^*_\infty \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

$$+ P([2(Y-1)^*_\infty + 1]A_\infty \geqslant \varepsilon).$$

因而 $H^n_\infty \xrightarrow{\bar{P}^n} 0$.

2) ⇒ 3) 是平凡的.

3) ⇒ 1). 首先注意

$$2H_\infty \geqslant (\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'})^2 * \nu_\infty$$

$$\geqslant \lambda\left(\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}-1\right)^2 I_{[N\lambda'<\lambda]} * \nu_\infty$$

$$\geqslant \lambda\left(\sqrt{\frac{1}{N}}-1\right)^2 I_{[N\lambda'<\lambda]} * \nu_\infty.$$

因而

$$(\lambda^n I_{[N\lambda'^n<\lambda^n]}) * \nu^n_\infty \xrightarrow{P^n} 0.$$

运用定理 14.31 及引理 14.30 可知 $(P^n) \lhd (P'^n)$ 及

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P^n(S^n_k < \infty) = 0. \tag{35.1}$$

现定义 $L=\frac{I_{]]0,\infty[[}}{Y_-}\cdot Y=\frac{1}{Y_-}\cdot M-H$. 运用 Itô 公式，在 Γ 上有

$$\frac{1}{Y_-}\cdot M = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{]]0,\infty[[}}{Z_-}\cdot Z + \frac{I_{]]0,\infty[[}}{Z'_-}\cdot Z'\right)$$

$$-\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'})^2 * (\mu-\nu)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_-} - \frac{1}{Z'_-}\right) \cdot Z^c \\
&\quad + \left(\sqrt{\lambda\lambda'} - 1\right) * (\mu - \nu) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_-} - \frac{1}{Z'_-}\right) \cdot Z^{c,P} \\
&\quad + \left(\sqrt{\lambda\lambda'} - 1\right) * (\mu - \lambda.\nu) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{Z_-} - \frac{1}{Z'_-}\right)\frac{1}{Z_-}\right] \cdot \langle Z^c \rangle \\
&\quad + \left[(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda\lambda'} - 1)\right] * \nu,
\end{aligned}
\tag{35.2}
$$

其中 $Z^{c,P}$ 是 Z 在 P 下的连续鞅部分. 易见在 $[\![0, S_k]\!]$ 上有

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{Z_-} - \frac{1}{Z'_-}\right)\frac{1}{Z_-}\right| \cdot \langle Z^c \rangle &\leqslant \left(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\right)^2 \cdot \langle Z^c \rangle \\
&\leqslant 8H,
\end{aligned}
\tag{35.3}
$$

$$
|\sqrt{\lambda\lambda'} - 1| \leqslant |\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}|,
$$

$$
\begin{aligned}
|(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda\lambda'} - 1)| &\leqslant (\sqrt{\lambda} + 1)|\sqrt{\lambda} - 1| \\
&\quad \cdot |\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}|,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda\lambda'} - 1)| * \nu &\leqslant [(\sqrt{\lambda} + 1)(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2] * \nu \\
&\leqslant 2(\sqrt{1 + 2k} + 1)H,
\end{aligned}
\tag{35.4}
$$

由于 1 介于 $\sqrt{\lambda}$ 及 $\sqrt{\lambda'}$ 之间, $|\sqrt{\lambda} - 1| \leqslant |\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}|$, 在 P 下我们有

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_-} - \frac{1}{Z'_-}\right) \cdot Z^{c,P} + (\sqrt{\lambda\lambda'} - 1) * (\mu - \lambda.\nu) \right\rangle(P) \\
&\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\right)^2 \cdot \langle Z^c \rangle + (2k + 1)\left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}\right)^2 * \nu \\
&\leqslant (2 + 4k)H.
\end{aligned}
\tag{35.5}
$$

由 (35.2)—(35.5) 及 Lenglart 不等式可得

$$
\langle L^n \rangle_{S_k^n} \xrightarrow{P^n} 0. \tag{35.6}
$$

另一方面, 由 $\langle L^c \rangle_{S_k} \leqslant 2H_{S_k}$, 有

$$
\langle L^{n,c} \rangle_{S_k^n} \xrightarrow{P^n} 0. \tag{35.7}
$$

由指数公式，在 $[\![0,S_k]\!]$ 上有

$$Y = Y_0\mathscr{E}(L)$$

$$= Y_0\exp\{L - \frac{1}{2}\langle L^c\rangle + \sum(\log(1+\Delta L) - \Delta L)\}.$$

又因当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ 时 $0 \leqslant x - \log(1+x) \leqslant x^2$ 以及

$$\Delta L = \sqrt{\left(1+\frac{\Delta Z}{Z_-}\right)\left(1+\frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right)} - 1,$$

故有

$$0 \leqslant \sum_t (\Delta L_t - \log(1+\Delta L_t))I_{[|\Delta L_t| \leqslant \frac{1}{2}]}$$

$$\leqslant \sum_t (\Delta L_t)^2 I_{[|\Delta L_t| \leqslant \frac{1}{2}]}$$

$$\leqslant (\sqrt{\lambda\lambda'} - 1)^2 * \mu$$

$$\leqslant (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2 * \mu .$$

由于 $[(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2\lambda] * \mu \leqslant 2(1+2k)H$，再用 Lenglart 不等式可得

$$(\sum(\Delta L^n - \log(1+\Delta L^n))I_{[|\Delta L^n| \leqslant \frac{1}{2}]})_{S_k^n} \xrightarrow{P^n} 0. \quad (35.8)$$

对任一 $\varepsilon > 0$，

$$\left[(\sum|\log(1+\Delta L) - \Delta L|)_{S_k} \geqslant \varepsilon\right] \subset \left[(\Delta L)^*_{S_k} \geqslant \frac{1}{2}\right]$$

$$\cup \left[(\sum(\Delta L - \log(1+\Delta L))I_{[|\Delta L| \leqslant \frac{1}{2}]})_{S_k} \geqslant \varepsilon\right]. \quad (35.9)$$

按(35.6)，$(\Delta L^n)^*_{S_k^n} \xrightarrow{P^n} 0$，由(35.7)(35.8)及(35.9)可得

$$(L^n)_{S_k^n}^* \quad \frac{1}{2}\langle L^{nc}\rangle_{S_k} + (\sum|\log(1+\Delta L) - \Delta L|)_{S_k^n} \xrightarrow{P^n} 0.$$

(35.10)

因为由 i) $Y_0^n - 1 \xrightarrow{P^n} 0$ 及

$$Y^n - 1 = Y_0^n - 1 + Y_0^n\{\exp(L^n - \frac{1}{2}\langle L^{nc}\rangle$$

$$+ \sum(\log(1+\Delta L^n) - \Delta L^n)) - 1\},$$

由(35.10)我们有

$$(Y^n-1)_{S_k^n}\xrightarrow{P^n}0. \tag{35.11}$$

对任一给定的 $\varepsilon>0$

$$P^n((Y^n-1)_\infty^*\geqslant\varepsilon)\leqslant P^n(S_k^n<\infty)$$
$$+P^n((Y^n-1)_{S_k^n}^*\geqslant\varepsilon).$$

依次令 $n\to\infty$ 及 $k\to\infty$，由(35.11)及(35.1)可知

$$(Y^n-1)_\infty^*\xrightarrow{P^n}0.$$

最后由引理 14.34 可得 $\|P^n-P'^n\|\to 0$. □

14.36 定理 设$\tilde{P}^n$ 为$\mathscr{F}^n$ 上的概率测度使$P^n\ll\tilde{P}^n$，$P'^n\ll\tilde{P}^n$. 假定 $X^n\in\mathscr{S}(\tilde{P}^n)$且在$\tilde{P}^n$ 下 X^n 有弱可料表示性. 设 X^n 在P^n，P'^n 和$\tilde{P}^n$ 下的可料特征分别为(α^n,β^n,ν^n)，$(\alpha'^n,\beta'^n,\nu'^n)$和$(\tilde{\alpha}^n,\tilde{\beta}^n,\tilde{\nu}^n)$，且满足

$$\nu^n=Y^n.\tilde{\nu}^n,\quad Y^n\in\tilde{\mathscr{P}}^{n+},\quad [\tilde{a}^n=1]\subset[a^n=1],$$
$$\nu'^n=Y'^n.\tilde{\nu}^n,\quad Y'^n\in\tilde{\mathscr{P}}^{n+},\quad [\tilde{a}^n=1]\subset[a'^n=1].$$

令

$$A^n=(K^n)^2\cdot\tilde{\beta}^n+\left(\sqrt{Y^n}-\sqrt{Y'^n}\right)^2*\tilde{\nu}^n$$
$$+\sum\left(\sqrt{1-a^n}-\sqrt{1-a'^n}\right)^2,$$

其中 $K^n=\dfrac{d}{d\tilde{\beta}^n}\{I_{\Gamma^n}\cdot[\alpha'^n-\alpha^n-(xI_{[|x|\leqslant 1]})]*(\nu'^n-\nu^n)\}$，以及

$$I^n(N)=I_{[NY^n<Y'^n]}*\nu'^n+\sum[(1-a'^n)I_{[N(1-a^n)<(1-a'^n)]}],N\geqslant 2.$$

则$(P'^n)\lhd(P^n)$当且仅当下列条件被满足

i) $(P'^n_0)\lhd(P^n_0)$

ii) $\lim\limits_{N\to\infty}\varlimsup\limits_{n\to\infty}P'^n(A^n_\infty\geqslant N)=0$，

iii) 对任意 $\varepsilon>0$ $\lim\limits_{N\to\infty}\varlimsup\limits_{n\to\infty}P'^n(I^n_\infty(N)\geqslant\varepsilon)=0$.

证明 首先，我们要计算 $i^n(N)$. 事实上，$i(N)$是下列过程的 P'-补偿子：

$$I_\Gamma.\sum I_{[N\frac{Z}{Z_-}<\frac{Z'}{Z'_-}]}I_{[\Delta Z\neq 0]}=I_\Gamma.\{I_{[NY<Y']}*\mu$$
$$+\sum I_{[N\frac{1-a}{1-\tilde{a}}<\frac{1-a'}{1-\tilde{a}}]}I_{D'[\tilde{a}>0]}\}，$$

其中 μ 为 X 的跳测度，$D=[\Delta X\neq 0]$. 因而 $i(N)=I_\Gamma\cdot I(N)$. 事实上它与$\widetilde{P}$的选取无关. 以下我们将充分运用定理 14.12 和 14.20.

必要性. 由定理 14.20，在$[S^n=\infty]$上有 $A^n\leqslant 8H^n$. 因而

$$P'^n(A_\infty^n\geqslant N)\leqslant P'^n(S^n<\infty)+P'^n(8H_\infty^n\geqslant N). \quad (36.1)$$

由于$P^n(R^n<\infty)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P'^n(R^n<\infty)=0$，因而$\lim\limits_{n\to\infty}P'^n(S^n<\infty)=0$. 于是由定理 14.31 和(36.1)可得ii). 按同样的理由，对任一 $\varepsilon>0$ $P'^n(I_\infty^n(N)\geqslant\varepsilon)\leqslant P'^n(S^n<\infty)+P'^n(i_\infty^n(N)\geqslant\varepsilon)$，故可得到 ii).

充分性. 在$\bigcap\limits_t[\beta'^n_t=\widetilde{\beta}^n_t]$上有 $H^n\leqslant A^n$. 但$P'^n(\bigcup\limits_t[\beta'^n_t\neq\widetilde{\beta}^n_t])=0$. 由 ii)可得到$\lim\limits_{N\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}P'^n(H_\infty^n\geqslant N)=0$. 类似地，因 $i^n(N)\leqslant I^n(N)$，由 iii)可得到对任一 $\varepsilon>0$ 有$\lim\limits_{N\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}P'^n(i_\infty^n(N)\geqslant\varepsilon)=0$，于是按定理 14.31 有$(P'^n)\lhd(P^n)$. □

14.37 注 如同注 14.32 一样，定理 14.36 的条件 iii)可代以下列条件:

iii)′ 对每个 $A_n\in\mathscr{F}^n$

$$I_{A_n}*\nu_\infty^n\xrightarrow{P'^n}0\Rightarrow I_{A_n}*\nu'^n_\infty\xrightarrow{P'^n}0,$$

$$(I_{A_n}*\sum[(1-a^n)I_{[a^n>0]}])_\infty\xrightarrow{P'^n}0$$

$$\Rightarrow(I_{A_n}*\sum[(1-a'_n)I_{[a'_n>0]}])_\infty\xrightarrow{P'^n}0.$$

事实上，我们有 iii) ⇒ iii)′和 iii)′+ii) ⇒ iii). 其证明留给读者.

14.38 定理 在定理 14.36 的假定下，$\|P^n-P'^n\|\to 0$ 当且仅当下列条件被满足:

i) $\|P_0^n-P'^n_0\|\to 0$，

ii) $A_\infty^n\xrightarrow{P^n}0$.

证明 这是与定理 14.36 的证明类似的，但需用定理 14.35 代替定理 14.31. □

§ 4. Lévy 过程导出的测度

本节我们把一般结果用于由 Lévy 过程导出的测度. 假定 $X=(X_t)$ 为右连左极过程. 设 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_t^0(X)$ 以及 $\mathscr{F}=\bigvee_t \mathscr{F}_t=\bigvee_t \mathscr{F}_t^0(X)$. 又 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$ 为 $\mathscr{F}$ 上两个测度. 假定在 $\boldsymbol{P}$ 或 $\boldsymbol{P}'$ 下 X 都是 Lévy 过程. 则

$$\boldsymbol{E}[e^{iu(X_t-X_0)}]=\exp\{iuf_t-\frac{1}{2}u^2\beta_t$$
$$+(e^{iux}-1-iuxI_{[|x|\leqslant 1]})*\nu_t\},$$

且

$$\boldsymbol{E}'[e^{iu(X_t-X_0)}]=\exp\{iuf'_t-\frac{1}{2}u^2\beta'_t$$
$$+(e^{iux}-1-iuxI_{[|x|\leqslant 1]})*\nu'_t\},$$

其中 (f,β,ν) 和 (f',β',ν') 都是非随机的且关于 t 连续. $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}')$ 是由 $\boldsymbol{P}_0$ 及 (f,β,ν) ($\boldsymbol{P}'_0$ 及 (f',β',ν')) 完全确定. $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{P}'$ 都是由 Lévy 过程导出的测度. 若 X 在 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}')$ 下为半鞅, 设 μ 为 X 的跳测度, X^c (X'^c) 为 X 的连续鞅部分.

14.39 引理 设 g 为 $\boldsymbol{R}_+\times E$ 上(非随机)Borel 函数.

1) 若 $\int_{\boldsymbol{R}_+\times E}|g|\,d\nu<\infty$, 则

$$\boldsymbol{E}\left[\exp\left\{\int_{\boldsymbol{R}_+\times E}g\,d\mu\right\}\right]=\exp\left\{\int_{\boldsymbol{R}_+\times E}(e^g-1)\,d\nu\right\}. \tag{39.1}$$

2) $\int_{\boldsymbol{R}_+\times E}\frac{g^2}{1+|g|}d\nu<\infty$, 则

$$\boldsymbol{E}[\exp\{g*(\mu-\nu)_\infty\}]=\exp\left\{\int_{\boldsymbol{R}_+\times E}(e^g-1-g)\,d\nu\right\}. \tag{39.2}$$

证明 1) 若 g 是一个简单函数, $g=\sum_{i=1}^n a_iI_{B_i}$, $B_i\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(\boldsymbol{E})$, $\nu(B_i)<\infty$, $i=1,\cdots,n$, 且当 $i\neq j$ 时 $B_iB_j=\varnothing$, 则

$$E\left[\exp\left\{\int_{R_+\times E} g d\mu\right\}\right]=E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(B_i)\right\}\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{n} E\left[\exp\{a_i\mu(B_i)\}\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\exp\{(e^{a_i}-1)\nu(B_i)\}$$

$$=\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(e^{a_i}-1)\nu(B_i)\right\}$$

$$=\exp\left\{\int_{R_+\times E}(e^{g}-1)d\nu\right\}.$$

即(39.1)成立．若 $g\geqslant 0$，g 可用递增非负简单函数列逼近，则由单调收敛定理(39.1)保持成立．若 $g\leqslant 0$，g 可用递减非正简单函数列逼近．这时由控制收敛定理及单调收敛定理(39.1)仍成立($\exp\left\{\int_{R_+\times E} g d\nu\right\}\leqslant 1$)．对一般的 g，由于

$$E\left[\int_{R_+\times E} g^+ d\mu\right]=\int_{R_+\times E} g^+ d\nu<\infty,$$

$\int_{R_+\times E} g d\mu$ 有意义．又因 $\int_{R_+\times E} gI_{[g>0]} d\mu$ 和 $\int_{R_+\times E} gI_{[g\leqslant 0]} d\mu$ 独立，故

$$E\left[\int_{R_+\times E} g d\mu\right]=E\left[\int_{R_+\times E} gI_{[g>0]} d\mu\right]E\left[\int_{R_+\times E} gI_{[g\leqslant 0]} d\mu\right]$$

$$=\exp\left\{\int_{R_+\times E}\left[(e^{gI_{[g>0]}}-1)+(e^{gI_{[g\leqslant 0]}}-1)\right]d\nu\right\}$$

$$=\exp\left\{\int_{R_+\times E}(e^{g}-1)d\nu\right\}.$$

2) 我们已经知道，对 $b>0$

$$\int_{R_+\times E}\frac{g^2}{1+|g|}d\nu<\infty$$

$$\Leftrightarrow\int_{R_+\times E}(g^2 I_{[|g|\leqslant b]}+|g| I_{[|g|>b]})d\nu<\infty.$$

对 $gI_{[|g|>b]}$ (39.2)可由(39.1)推得．故可假定 $|g|\leqslant b$．这时存在常

数 c_b 使

$$|e^x-1-x|\leqslant c_b x^2,\quad |x|\leqslant 2b.$$

取简单函数列(g_n)使 $g_n\to g$ 且

$$|g_n|\leqslant|g|,\quad n\geqslant 1,\quad \int_{R_+\times E}|g_n-g|^2 d\nu\to 0.$$

记 $\eta=g*(\mu-\nu)_\infty,\eta_n=g_n*(\mu-\nu)_\infty$. 则

$$E[|\eta_n-\eta|^2]=\int_{R_+\times E}|g_n-g|^2 d\nu\to 0,$$

$$E[\exp\{\eta_n\}]=\exp\left\{\int_{R_+\times E}(e^{g_n}-1-g_n)d\nu\right\}$$

$$\leqslant\exp\left\{c_b\int_{R_+\times E}g^2 d\nu\right\}<\infty,\tag{39.3}$$

$$E[\exp\{2\eta_n\}]=\exp\left\{\int_{R_+\times E}(e^{2g_n}-1-2g_n)d\nu\right\}$$

$$\leqslant\exp\left\{4c_b\int_{R_+\times E}g^2 d\nu\right\}<\infty.$$

这表明$(\exp\{\eta_n\})$是一致可积的. 在(39.3)中令 $n\to\infty$即得(39.2).
□

14.40 引理 假定 $X\in\mathscr{S}(P)$, g 为R_+上 Borel 函数. 若 $\int_0^\infty g_s^2 d\beta_s<\infty$，则 $g.X_\infty^c$为正态随机变量且

$$E[\exp\{g.X_\infty^c\}]=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty g_s^2 d\beta_s\right\}.\tag{40.1}$$

证明 若 $g=\sum_{i=1}^n a_i I_{]t_{i-1},t_i]}$ 为一简单函数, $0<t_1<\cdots<t_n<\infty$，则显然有 $g.X_\infty^c\sim N\left(0,\frac{1}{2}\int_0^\infty g_s^2 d\beta_s\right)$ 且(40.1)成立. 对一般的 g，可用与引理 14.39. 2)证明中类似的逼近手法来证明引理的结论. □

14.41 定理 $P'\ll P$当且仅当下列条件成立

i) $P'_0\ll P_0$,

ii) $\nu'=Y.\nu$, $Y\in(\mathscr{B}(R_+)\times\mathscr{B}(E))^+$, $\int_{R_+\times E}(1-\sqrt{Y})^2 d\nu$

$<\infty$.

iii) $\beta'=\beta$.

iv) $f'-f-xI_{\{|x|\le 1\}}*(\nu'-\nu)=K.\beta$, $K\in\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$,

$\int_0^t K_s^2 d\beta_s<\infty$.

这时,$\boldsymbol{P}'$关于$\boldsymbol{P}$的密度过程是

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}}=\frac{d\boldsymbol{P}'_0}{d\boldsymbol{P}_0}\exp\Big\{&K.X^C-\frac{1}{2}K^2.\beta\\
&+[(\log Y)I_{[|Y-1|\le b]}]*(\mu-\nu)+[(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}]*\mu\\
&+[(1-Y)I_{[|Y-1|>b]}]*\nu\\
&+[(1-Y+\log Y)I_{[|Y-1|\le b]}]*\nu\Big\},
\end{aligned}\tag{41.1}
$$

其中$b\in]0,1[$是一常数.

证明 不失一般性可设$X\in\mathscr{S}(\boldsymbol{P})$,这是因为存在连续函数$g$使$X-g\in\mathscr{S}(\boldsymbol{P})$,$X$可代以$X-g$,流$\boldsymbol{F}$并不改变.

必要性由定理14.12及14.16直接推出.

充分性. 对$t>0$

$$
\begin{aligned}
\int_0^t |d[(xI_{\{|x|\le 1\}})*(\nu'-\nu)_s]|&\le(|x(Y-1)|I_{\{|x|\le 1\}})*\nu_t\\
&\le\{[(x^2I_{\{|x|\le 1\}})*\nu_t][(Y-1)^2I_{[|Y-1|\le b]}*\nu_t]\}^{1/2}\\
&\quad+(|Y-1|I_{[|Y-1|>b]})*\nu_t<\infty.
\end{aligned}
$$

这表明f'是一个有限变差函数,$X\in\mathscr{S}(\boldsymbol{P}')$.

令

$$
L=K.X^c+(Y-1)*(\mu-\nu),
$$

$$
Z=Z_0\varepsilon(L),\quad Z_0=\frac{d\boldsymbol{P}'_0}{d\boldsymbol{P}_0}.
$$

由指数公式及$\Delta L_t=(Y(t,\Delta X_t)-1)I_{[\Delta X_t\neq 0]}$有

$$
\begin{aligned}
Z=Z_0\exp\{&K.X^C+(Y-1)*(\mu-\nu)\\
&-\frac{1}{2}K^2.\beta+(\log Y-Y+1)*\mu\}.
\end{aligned}\tag{41.2}
$$

注意到当$|y-1|>b$时$\log^+y\le c_b|y-1|$,当$|y-1|\le b$时$\log^2y\le$

$c_b|y-1|^2$ 以及当 $|y-1|\leqslant b$ 时 $|\log y-y+1|\leqslant c_b|y-1|^2$，其中 c_b 是一个只依赖于 b 的常数. 故可得

$$
\begin{aligned}
&(Y-1)*(\mu-\nu)+(\log Y-Y+1)*\mu \\
=&[(Y-1)I_{[|Y-1|\leqslant b]}]*(\mu-\nu) \\
&+[(Y-1)I_{[|Y-1|>b]}]*(\mu-\nu) \\
&+[(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}]*\mu \\
&+[(-Y+1)I_{[|Y-1|>b]}]*\mu \\
&+[(\log Y-Y+1)I_{[|Y-1|\leqslant b]}]*(\mu-\nu) \\
&+[(\log Y-Y+1)I_{[|Y-1|\leqslant b]}]*\nu \\
=&[(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}]*\mu \\
&+[(\log Y)I_{[|Y-1|\leqslant b]}]*(\mu-\nu) \\
&-[(Y-1)I_{[|Y-1|>b]}]*\nu \\
&+[(\log Y-Y+1)I_{[|Y-1|\leqslant b]}]*\nu.
\end{aligned}
\tag{41.3}
$$

因为 $K.X^c$，$[(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}]*\mu$ 和 $[(\log Y)I_{[|Y-1|\leqslant b]}]*(\mu-\nu)$ 相互独立，由引理 14.39 和 14.40 可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[\mathscr{E}(L)_\infty]=&\boldsymbol{E}[\exp\{K.X^c_\infty-\frac{1}{2}K^2.\beta_\infty\}] \\
&\cdot\boldsymbol{E}[\exp\{[(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}*\mu_\infty\}] \\
&\cdot\boldsymbol{E}[\exp\{[(\log Y)I_{[|Y-1|\leqslant b]}]*(\mu-\nu)_\infty\}] \\
&\cdot\exp\{[(-Y+1)I_{[|Y-1|>b]}]*\nu_\infty \\
&+[(\log Y-Y+1)I_{[|Y-1|\leqslant b]}]*\nu_\infty\} \\
=&\exp\{[e^{(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}}-1+e^{(\log Y)I_{[|Y-1|\leqslant b]}}-1 \\
&-(\log Y)I_{[|Y-1|\leqslant b]}+(-Y+1)I_{[|Y-1|>b]} \\
&+(\log Y-Y+1)I_{[|Y-1|\leqslant b]}]*\nu_\infty\}=1,
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{E}[Z_0\mathscr{E}(L)_\infty]=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\mathscr{E}(L)_\infty|\mathscr{F}_0]Z_0]=1.
$$

令 $\boldsymbol{P}''=[Z_0\mathscr{E}(L)_\infty].\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{P}''$ 是一个概率测度，$\boldsymbol{P}''_0=\boldsymbol{P}'_0$，且 $\boldsymbol{P}''\ll\boldsymbol{P}$. 由假定的条件容易验证在 $\boldsymbol{P}''$ 下 X 的可料特征就是 (f',β',ν')，因而 X 在 $\boldsymbol{P}''$ 下为 Lévy 过程，于是 $\boldsymbol{P}''=\boldsymbol{P}'$，(41.1) 由 (41.2) 及 (41.3) 推得. □

14.42 定理 $\boldsymbol{P}'$ 和 $\boldsymbol{P}$ 非奇异当且仅当下列条件被满足：

i) P'_0 和 P_0 非奇异.

ii) $\nu'=Y'\cdot\nu$, $(1-\sqrt{Y'})^2*\bar\nu_\infty<\infty$, $\bar\nu=\frac{1}{2}(\nu+\nu')$.

iii) $\beta'=\beta$.

iv) $f'-f-(xI_{[|x|\leqslant 1]})*(\nu'-\nu)=K.\beta$, $K\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$, $K^2.\beta_\infty<\infty$.

证明 设 $\bar P$ 为一概率, 在 $\bar P$ 下 X 为 Lévy 过程且 $\bar P_0=\frac{1}{2}(P_0+P'_0)$.

$$\bar E[e^{iu(X_t-X_0)}]=\exp\{iu\bar f_t-\frac{1}{2}u^2\bar\beta_t+(e^{iux}-1-iuxI_{[|x|\leqslant 1]})*\bar\nu_t\},$$

其中 $\bar f=\frac{1}{2}(f+f')$, $\bar\beta=\frac{1}{2}(\beta+\beta')$, $\bar\nu=\frac{1}{2}(\nu+\nu')$.

必要性. 由定理 14.20.1) 我们有条件 i) iii) iv) 及 $(\sqrt{Y}-\sqrt{Y'})^2*\bar\nu_\infty<\infty$, 其中 $Y\in(\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{B}(E))^+$ 满足 $\nu=Y.\bar\nu$. 由于 $Y+Y'=2$, 1 介于 Y 和 Y' 之间, 故 ii) 成立:

$$(1-\sqrt{Y'})^2*\bar\nu_\infty\leqslant(\sqrt{Y}-\sqrt{Y'})^2*\bar\nu_\infty<\infty.$$

充分性. 易见

$$(1-\sqrt{Y'})^2*\bar\nu_\infty<\infty$$
$$\Leftrightarrow(|Y'-1|^2I_{[|Y'-1|\leqslant b]})*\bar\nu_\infty+(|Y'-1|I_{[|Y'-1|>b]})*\bar\nu_\infty<\infty,$$

其中 $b\in]0,1[$. 由 $Y'-1=1-Y$, 我们也有 $(1-\sqrt{Y})^2*\bar\nu_\infty<\infty$. 因为

$$\beta=\beta'=\bar\beta,$$

$$f-\bar f-(xI_{[|x|\leqslant 1]})*(\nu-\bar\nu)=-\frac{1}{2}K.\beta,$$

$$f'-\bar f-(xI_{[|x|\leqslant 1]})*(\nu'-\bar\nu)=\frac{1}{2}K.\beta.$$

由定理 14.41 可知 $P\ll\bar P$ 及 $P'\ll\bar P$.

再由定理 14.12 可得

$$H(\alpha) = I_{\Gamma}\cdot\left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K^2\cdot\beta + \varphi_\alpha(Y,Y')*\bar{\nu}\right].$$

因而 $Y(\alpha)$ 的 Doob-Meyer 分解(见定理 14.5)为

$$Y(\alpha) = Y_0(\alpha) + M(\alpha)$$
$$- Y_-(\alpha)\cdot\left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K^2\cdot\beta + \varphi_\alpha(Y,Y')*\bar{\nu}\right].$$

记 $h_t = \boldsymbol{E}[Y_t(\alpha)] = h_\alpha(\boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{P}'_t)$. 由 $Y(\alpha)$ 为类(D)的,

$$h = h_0 - h_-\cdot\left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K^2\cdot\beta + \varphi_\alpha(Y,Y')*\bar{\nu}\right],$$

所以

$$h_\alpha(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}') = h_\alpha(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}'_0)\exp\left\{-\left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K^2\cdot\beta_\infty + \varphi_\alpha(Y,Y')*\bar{\nu}_\infty\right]\right\}. \tag{42.1}$$

特别有

$$h_{1/2}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}') = h_{1/2}(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}'_0)\exp\left\{-\left[\frac{1}{8}K^2\cdot\beta_\infty + \frac{1}{2}(\sqrt{Y}-\sqrt{Y'})^2*\bar{\nu}_\infty\right]\right\} > 0.$$

这表明 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$ 是非奇异的. □

14.43 定理 假定 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$ 非奇异. 取

$$N_1 = \left[\frac{d\boldsymbol{P}_0}{d\boldsymbol{P}_0} = 0\right] \cup [I_{[Y=0]}*\mu_\infty > 0],$$

$$N_2 = \left[\frac{d\boldsymbol{P}'_0}{d\boldsymbol{P}_0} = 0\right] \cup [I_{[Y'=0]}*\mu_\infty > 0],$$

$$N = N_1 \cup N_2.$$

则 $\boldsymbol{P}(N_1)=0$, $\boldsymbol{P}'(N_2)=0$, 在 N^c 上 $\boldsymbol{P}'\sim\boldsymbol{P}$, 且有

$$\frac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}} = \frac{d\boldsymbol{P}'_0}{d\boldsymbol{P}_0}\exp\Big\{K\cdot X^c_\infty - \frac{1}{2}K^2\cdot\beta_\infty$$
$$+ \left[\left(\log\frac{Y'}{Y}\right)I_{[|Y-1|>b]}\right]*\mu_\infty$$
$$+ \left[\left(\log\frac{Y'}{Y}\right)I_{[|Y-1|\leqslant b]}\right]*(\mu-\nu)_\infty$$

$$+ I_{[|Y-1|>b]} * (\nu - \nu')_\infty$$

$$+ \left[\left(1 - \frac{Y'}{Y} + \log \frac{Y'}{Y}\right) I_{[|Y-1|\leqslant b]}\right] * \nu_\infty \}.$$

证明 这是定理 14.20 和 14.42 的一个结论. 还只需计算 N^c 上测度的导数. 为此运用(41.1), 在 N^c 上有

$$\frac{d\,\boldsymbol{P}'}{d\,\boldsymbol{P}} = \frac{d\,\boldsymbol{P}'}{d\,\overline{\boldsymbol{P}}} \bigg/ \frac{d\,\boldsymbol{P}}{d\,\overline{\boldsymbol{P}}} = \frac{d\,\boldsymbol{P}'_0}{d\,\boldsymbol{P}_0} \exp\{K.X^c_\infty$$

$$+ \left[\left(\log \frac{Y'}{Y}\right) I_{[|Y-1|>b]}\right] * \mu_\infty$$

$$+ \left[\left(\log \frac{Y'}{Y}\right) I_{[|Y-1|\leqslant b]}\right] * (\mu - \bar{\nu})_\infty$$

$$+ [(Y - Y') I_{[|Y-1|>b]}] * \bar{\nu}_\infty$$

$$+ \left[\left(Y - Y' + \log \frac{Y'}{Y}\right) I_{[|Y-1|\leqslant b]}\right] * \bar{\nu}_\infty \}.$$

由 Girsanov 定理 $X^c = \overline{X}^c - \langle \overline{X}^c, -\frac{K}{2}.\overline{X}^c \rangle = \overline{X}^c + \frac{1}{2} K.\beta.$, 此外

$$\left[\left(\log \frac{Y'}{Y}\right) I_{[|Y-1|\leqslant b]}\right] * (\mu - \bar{\nu})$$

$$= \left[\left(\log \frac{Y'}{Y}\right) I_{[|Y-1|\leqslant b]}\right] * (\mu - \nu)$$

$$+ \left[(Y - 1)\left(\log \frac{Y'}{Y}\right) I_{[|Y-1|\leqslant b]}\right] * \bar{\nu}.$$

由此可得(43.1). □

14.44 定义 令

$$d(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}') = \begin{cases} +\infty, & \text{若}\boldsymbol{P} \perp \boldsymbol{P}', \\ K^2.\beta_\infty + (\sqrt{Y} - \sqrt{Y'})^2 * \bar{\nu}_\infty, & \text{其它}. \end{cases}$$

以下, 我们讨论由 Lévy 过程导出测度的近邻性, 完全可分离性和变差收敛. 仍用前面的记号, 只需在必要时加上指标 n 即可.

14.45 定理 $(\boldsymbol{P}'^n) \lhd (\boldsymbol{P}^n)$ 当且仅当下列条件被满足:

i) $(\boldsymbol{P}'^n_0) \lhd (\boldsymbol{P}^n_0)$,

ii) $(\nu'^n) \lhd (\nu^n)$,

iii) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} d(\boldsymbol{P}^n, \boldsymbol{P}'^n) < \infty$.

证明 若存在无限多个 n 使 $P'^n \perp P^n$，则 $(P^n)\triangle(P'^n)$ 且 $\overline{\lim_n} d(P^n,P'^n)=\infty$. 故不失一般性可认为对每个 n P^n 和 P'^n 非奇异，于是如同定理 14.42 的证明中一样有 $P^n \ll \bar{P}^n$, $P'^n \ll \bar{P}^n$. 因而可以应用定理 14.36 及注 14.37，只需注意此时 $A^n_\infty = d(P^n, P'^n)$ 是非随机的. □

14.46 定理 $(P^n)\triangle(P'^n)$ 当且仅当 $(P^n_0)\triangle(P'^n_0)$ 或

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} d(P^n, P'^n) = +\infty.$$

证明 仍可设对一切 n, P^n 和 P'^n 是非奇异的. 必要性来自 (42.1)；这时

$$0 = \underline{\lim_{n\to\infty}} h_{1/2}(P^n, P'^n)$$

$$= \underline{\lim_{n\to\infty}} h_{1/2}(P^n_0, P'^n_0) \exp\{-[\frac{1}{8}(K^n)^2 \cdot \beta^n$$

$$+ \frac{1}{2}(\sqrt{Y^n} - \sqrt{Y'^n})^2 * \nu^n]\}.$$

于是或者 $\underline{\lim_{n\to\infty}} h_{1/2}(P^n_0, P'^n_0) = 0$，即 $(P^n_0)\triangle(P'^n_0)$，或者 $\overline{\lim_{n\to\infty}} d(P^n, P'^n) = +\infty$.

充分性直接由定理 14.33 可得到. □

14.47 定理 $\|P^n - P'^n\| \to 0$ 当且仅当 $\|P^n_0 - P'^n_0\| \to 0$ 以及 $\lim_{n\to\infty} d(P^n, P'^n) = 0$.

证明 我们也可假定对一切 n, P^n 和 P'^n 非奇异，于是应用定理 14.38 即可. □

问题与补充

14.1 设 P 和 P' 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上两个概率测度，则

$$h_\alpha(P,P') = \inf\left\{\sum_i P(B_i)^\alpha P'(B_i)^{1-\alpha} : \begin{matrix}(B_1,\cdots,B_n) \text{ 为} \\ (\Omega,\mathscr{F}) \text{ 的一有限分割}\end{matrix}\right\}.$$

14.2 规定（用 §1 的记号）

$$\Phi_t(\alpha) = e^{-H_t(\alpha)} \prod_{s\le t} [(1 - \Delta H_s(\alpha)) e^{\Delta H_s(\alpha)}], \quad t \geq 0.$$

则 $Y(\alpha)=N(\alpha)\Phi(\alpha)$，其中 $N(\alpha)$ 满足下列条件：

i）若 T 为停时且 $\Phi_{T-}(\alpha)>0$，则 $N(\alpha)^T\in\mathscr{M}_{loc}(\widetilde{P})$，

ii）$N(\alpha)$ 为 $\widetilde{P}$-上鞅.

14.3 假定 $P'\ll P$，$X\in\mathscr{S}(P)$，设 (α,β,ν) 和 (α',β',ν') 分别为 X 在 P 和 P' 下的可料特征，$\nu'=Y\cdot\nu$，$Y\in\mathscr{P}^+$，$[a=1]\subset[a'=1]$. 则

$$P'\Big(K^2\cdot\beta+(1-\sqrt{Y})^2*\nu+\sum_{s\leq t}\big(\sqrt{1-a_s}-\sqrt{1-a'_s}\big)^2<\infty\Big)=1,$$

其中 $K=\dfrac{d}{d\beta}[I_{F^c}\cdot(\alpha'-\alpha-(xI_{[|x|\leq 1]})*(\nu'-\nu)]$.

14.4 设 X 为一跳跃过程，$X_0=0$，$F=F^0(X)$. 又 P 和 P' 是 $\mathscr{F}=\bigvee\mathscr{F}_t$ 上两个概率测度. 假定 ν 和 ν' 分别为 X 在 P 和 P' 下的 Levy 族，且

$$P(\nu(R_+\times E)<\infty)=1,\quad P'(\nu'(R_+\times E)<\infty)=1.$$

则 $P\ll P'$ 当且仅当下列条件被满足：

i）$\nu'=Y\cdot\nu$，$Y\in\mathscr{P}^+$，和 $[a=1]\subset[a'=1]$，

ii）$P'(\nu(R_+\times E)<\infty)=1$.

14.5 设 X 为点过程且 $F=F^0(X)$. 又 P 和 P' 是 $\mathscr{F}=\bigvee_t\mathscr{F}_t$ 上两个概率测度. 假定在 P 在 X 为参数 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程，Λ 为 X 的 P'-补偿子. 则 $P'\ll P$ 当且仅当 $d\Lambda_t\ll dt$，$\Lambda_t=\int_0^t\lambda_s ds$. 这时 P' 关于 P 的密度过程为

$$\prod_{T_n\leq t}\left(\frac{\lambda_{T_n}}{\lambda}\right)e^{\lambda t-\Lambda_t},$$

其中 T_n 为 X 的第 n 个跳时.

14.6 给出一个例子对每个 n，$P^n\sim P'^n$，但 $(P^n)\triangle(P'^n)$.

14.7 设 $\Omega^n=\Omega$，$\mathscr{F}^n$ 为一递增 σ-域序列，$\mathscr{F}=\bigvee_n\mathscr{F}^n$，$P$ 和 P' 是 $\mathscr{F}$ 上的两个概率测度，$P^n=P|_{\mathscr{F}^n}$，$P'^n=P'|_{\mathscr{F}^n}$. 则 1）$(P'^n)\lhd(P^n)\Leftrightarrow P'\ll P$，2）$(P'^n)\triangle(P^n)\Leftrightarrow P'\perp P$.

14.8 设 P^n 和 P'^n 为 $(\Omega^n,\mathscr{F}^n)$ 上的概率测度，$\bar{P}^n=\dfrac{1}{2}(P^n+$

P'^n), $z'_n=\dfrac{dP'^n}{d\overline{P}^n}$, F_n 为 z'_n 在$\overline{P}^n$ 下于$[0,1]$上的分布律. 则(P'^n) $\triangle(P^n)$当且仅当(F_n)的任一极限点 F 有 $F(\{1\})=0$.

14.9 设P^n 和P'^n 为$(\Omega^n,\mathscr{F}^n)$上的概率测度, $\overline{P}^n=\dfrac{1}{2}(P^n+P'^n)$, $l_n=\dfrac{dP^n}{d\overline{P}^n}\Big/\dfrac{dP'^n}{d\overline{P}^n}$, F_n 及 F'_n 分别为 l_n 在P^n 和P'^n 下于$\overline{R}_+$上的分布律.

1) 下列两断言等价:

a) $(P'^n)\lhd(P^n)$且(F_n)弱收敛于R_+上分布律;

b) (F'_n)弱收敛于R_+上分布律.

2) 若(F_n)弱收敛于R_+上分布律 F, 则

$$(P'^n)\lhd(P^n)\Leftrightarrow\int xF(dx)=1\Leftrightarrow F(\{0\})=0.$$

14.10 设 X 为连续过程, $X_0=0$, $F=F^0_+(X)$. 又P和P' 为$\mathscr{F}=\bigvee_t\mathscr{F}_t$ 上两个概率测度, 在P, P' 下 X 都是 Lévy 过程, 则或者$P\sim P'$或者$P\perp P'$.

14.11 设 X 为右连左极过程, $X_0=0$, $F=F^0_+(X)$. 又P和P'为$\mathscr{F}=\bigvee_t\mathscr{F}_t$ 上两个概率测度, 在P, P' 下 X 都是时齐 Lévy 过程, 则或者$P\sim P'$或者$P\perp P'$. 找出$P\sim P'$的充要条件.

14.12 设X^n 为跳跃过程, $X^n_0=0$, $F^n=F^0(X^n)$. 又P^n 和P'^n 为$\mathscr{F}^n$ 上的两个概率测度, ν^n 和 ν'^n 分别为 X 在P^n 和P'^n 下的 Lévy 族. 则

$$\|\nu^n-\nu'^n\|\xrightarrow{P^n}0\Rightarrow\|P^n-P'^n\|\longrightarrow 0.$$

第十五章 右连左极过程的弱收敛

在本书的最后两章，我们将讨论右连左极过程分布的弱收敛，特别是半鞅分布的弱收敛．在这一章，我们首先介绍关于随机过程分布弱收敛的一些基本事实．在§1 我们证明由 $\boldsymbol{R}_+$ 到 $\boldsymbol{R}^d$ 的右连左极函数全体 $\boldsymbol{D}^d$ 赋于 Skorohod 拓扑是一个 Polish 空间，$\boldsymbol{D}^d$ 上的 Borel σ-域与 $\boldsymbol{D}^d$ 上标准过程产生的 σ-域是一致的．在 Skorohod 拓扑下收敛序列的一些深入的性质将在§2 中讨论．Polish 空间上测度弱收敛的一般结果与随机过程胎紧性的条件将在§3 给出．最后在§4 我们将用跳时和跃度的弱收敛来表征跳跃过程的弱收敛，这一处理是简单而又初等的．

§1. $D[0,\infty[$ 与 Skorohod 拓扑

15.1 定义 对 $a\in]0,\infty[$，以 $\boldsymbol{D}_a^d=D(\boldsymbol{R}^d,[0,a])$ 表 $[0,a]$ 上 $\boldsymbol{R}^d$-值右连左极函数全体，以 $\boldsymbol{D}^d=D(\boldsymbol{R}^d,\boldsymbol{R}_+)$ 表示 $\boldsymbol{R}_+$ 上 $\boldsymbol{R}^d$ 值右连左极函数全体．对 $d=1$，简单地记 $\boldsymbol{D}_a=\boldsymbol{D}_a^1$，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^1$.

类似地，以 $\boldsymbol{C}_a^d=C(\boldsymbol{R}^d,[0,a])$ 表示 $[0,a]$ 上连续函数全体，以 $\boldsymbol{C}^d=C(\boldsymbol{R}^d,\boldsymbol{R}_+)$ 表示 $\boldsymbol{R}_+$ 上连续函数全体．

15.2 定义 对每个 $\boldsymbol{R}_+$ 上 $\boldsymbol{R}^d$ 值函数 x 及 $A\subset\boldsymbol{R}_+$，规定

$$\bar{\omega}(A,x)=\sup\{|x(s)-x(t)|;\quad s,t\in A\},$$

$$\begin{aligned}\omega(\delta,x,a)&=\sup\{\bar{\omega}([t,t+\delta],x);\ 0\leqslant t<t+\delta\leqslant a\}\\&=\sup\{|x(s)-x(t)|;\ 0\leqslant s,t\leqslant a,|t-s|<\delta\}\end{aligned}$$

$$\omega'(\delta,x,a)=\inf\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant r}\bar{\omega}([t_{i-1},t_i[,x):\begin{array}{l}0=t_0<t_1<\cdots<t_r=a,\\ \inf_{1\leqslant i\leqslant r-1}(t_i-t_{i-1})>\delta\end{array}\right\},\quad(2.1)$$

其中 $|\cdot|$ 为 $\boldsymbol{R}^d$ 中的欧氏范数．

显然，$\omega(\delta,x,a)$，$\omega(\delta',x,a)$ 是 δ 的不减函数．

注意.(2.1)与 D_a 中下列 $\bar{\omega}'(\delta,x,a)$ 的定义(见 Billingsley [1])是不同的.

$$\bar{\omega}'(\delta,x,a)=\inf\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant r}\bar{\omega}([t_{i-1},t_i[,x):\begin{array}{l}0=t_0<t_1<\cdots<t_r=a,\\ \inf_{1\leqslant i\leqslant r}(t_i-t_{i-1})>\delta\end{array}\right\}.$$

其差别是来自下列原因:对固定的 a,a 在 D_a 中起一个特殊的作用,而在 D 中,a 不起任何实质性的作用.

15.3 引理 1) $\omega'(\delta,x,a)\leqslant\omega(2\delta,x,a)$.

2) 若 $x\in C_a^d$,则 $\omega(\delta,x,a)\leqslant 2\omega'(\delta,x,a)$.

证明 1)对 $[0,a]$ 的每个满足 $t_j-t_{j-1}>\delta,j=1,\cdots,r$ 的分割 $\{t_i\}$,必要时加入一些分点,可认为它满足 $t_j-t_{j-1}\leqslant 2\delta$,于是 $\bar{\omega}([t_{j-1},t_j[,x)\leqslant\omega(2\delta,x,a)$,因而 $\omega'(\delta,x,a)\leqslant\omega(2\delta,x,a)$.

2) 由于(2.1),对每个 $\eta>0$ 存在 $[0,a]$ 的分割满足 $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant r}(t_j-t_{j-1})>\delta$ 以及 $\bar{\omega}([t_{j-1},t_j[,a)<\omega'(\delta,x,a)+\eta,1\leqslant j\leqslant r$. 对 $0<t-s<\delta$,或者 s,t 属于同一区间 $[t_{j-1},t_j[$ 有

$$|x(t)-x(s)|\leqslant\bar{\omega}([t_{j-1},t_j[,x)<\omega'(\delta,x,a)+\eta.$$

或者 s,t 分别属于相邻的区间 $[t_{j-1},t_j[,[t_j,t_{j+1}[$,则有

$$\begin{aligned}|x(t)-x(s)|&\leqslant|x(t)-x(t_j)|+|x(t_j-)-x(s)|\\&\leqslant 2\omega'(\delta,x,a)+2\eta.\end{aligned}$$

总之 $\omega(\delta,x,a)\leqslant 2\omega'(\delta,x,a)+2\eta$. 由于 η 是任意的,故 2)成立.
□

15.4 定理 1) $x\in D_a^d$ 当且仅当 $\lim_{\delta\to 0}\omega'(\delta,x,a)=0$.

2) $x\in D^d$ 当且仅当对每个 $N\in\mathbf{N}$,$\lim_{\delta\to 0}\omega'(\delta,x,N)=0$.

证明 1)由(2.1),$\lim\limits_{\delta\to 0}\omega'(\delta,x,a)=0$ 等价于下列事实:对每个 $\varepsilon>0$,存在 $[0,a]$ 的分割 $\{t_j\}_{0\leqslant j\leqslant r}$ 满足 $\max_{1\leqslant j\leqslant r-1}|t_j-t_{j-1}|>\delta$ 且

$$\bar{\omega}([t_{j-1},t_j[,x)<\varepsilon,\quad 1\leqslant j\leqslant r. \tag{4.1}$$

必要性. 对 $\varepsilon>0$,令

$$\tau=\tau(\varepsilon)=\sup\left\{t:\begin{array}{l}0=t_0<t_1,\cdots<t_r=t,\\ \max_{1\leqslant j\leqslant r}\bar{\omega}([t_{j-1},t_j[,x)<\varepsilon\end{array}\right\}.$$

由于 $x(0)=x(0+)$，故 $\tau>0$. 又因 $x(\tau-)$ 存在，$[0,\tau[$ 可分解为有限个区间之并，在每个区间上 x 的振幅都小于 ε. 若 $\tau<a$，取 η 足够小，使 $\bar{\omega}([\tau,\tau+\eta[,x)<\varepsilon$，则 $[0,\tau+\eta[$ 也有上述性质. 这与 τ 的定义相矛盾. 所以 $\tau=a$. (4.1)成立.

充分性. 由(4.1)，x 右连续，若 $x\notin D_N^d$，则存在 $t_0\in]0,N]$ 使 $x(t_0-)$ 无限或不存在. 若 $x(t_0-)$ 不存在，有 $\overline{\lim}_{t\uparrow t_0}x(t)-\underline{\lim}_{t\uparrow t_0}x(t)>\varepsilon_0>0$. 对此 ε_0 (4.1)不能成立. 若 $x(t_0-)$ 无限，(4.1)也不能成立.

2) $x\in D^d\Leftrightarrow x\in D_N^d$, $\forall N\in \mathbf{N}\Leftrightarrow\lim_{\delta\to 0}\omega'(\delta,x,N)=0,\forall N\in\mathbf{N}$ □

15.5 定理 $x\in D^d$ 当且仅当它是一列只含有限个跳跃的阶梯函数在每个紧区间上一致收敛的极限.

证明 充分性. 只含有限个跳跃的右连左极函数属于每个 D_a^d，$\forall a>0$，所以其在紧区间上一致收敛极限也属于 D_a^d，$\forall a>0$，因此 $x\in D^d$.

必要性. 由定理 15.4，对 $N\in\mathbf{N}$ 存在 δ_N 使 $\omega'(\delta_N,x,N)<\frac{1}{N}$. 令 $\{t_i^N\}$ 为 $[0,N]$ 满足 $\max_{i\le r}\bar{\omega}([t_{i-1}^N,t_i^N[,x)<\frac{1}{N}$ 的相应的分割. 令[1]

$$x_N(t)=\sum_{i=1}^{r}x(t_{i-1}^N)I(t_{i-1}^N\le t<t_i^N)+x(N)I(t\ge N).$$

则 x_N 是一个只含有限个跳跃的阶梯函数，且

$$\sup_{t\le N}|x_N(t)-x(t)|<\frac{1}{N}$$

所以 (x_n) 在任一紧区间上一致收敛于 x. □

15.6 定义 取

$$\Lambda_0=\left\{\lambda:\begin{array}{l}\lambda \text{ 为 } \mathbf{R}_+ \text{ 到 } \mathbf{R}_+ \text{ 的严格递增函数},\\ \lambda(0)=0\quad \lim_{t\to\infty}\lambda(t)=+\infty\end{array}\right\}$$

---

1) 为排版方便，今后 $I(t_i^n\le t<t_{i+1}^n)$ 和 $I(A)$ 分别与 $I_{[t_i^n,t_{i+1}^n[}$ 和 I_A 通用.

$$\| \lambda \|_{\Lambda} = \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|, \quad \lambda \in \Lambda_0.$$

$$\Lambda = \{\lambda ; \lambda \in \Lambda_0 \| \lambda \|_{\Lambda} < \infty\},$$

以 e 表示 R_+ 到 R_+ 的恒等映照，以 λ^{-1} 表示 λ 的逆映照．

由上述定义，容易推出下列事实

$$\| \lambda \|_{\Lambda} = \| \lambda^{-1} \|_{\Lambda}, \quad \| \lambda \circ \mu \|_{\Lambda} \leqslant \| \lambda \|_{\Lambda} + \| \mu \|_{\Lambda},$$

$$\sup_{t \leqslant a} |\lambda(t) - t| \leqslant a(e^{\| \lambda \|_{\Lambda}} - 1), \tag{6.1}$$

$$\sup_{t \leqslant a} |\mu(|\lambda(t) - t|)| \leqslant \sup_{s} \frac{\mu(s)}{s} \sup_{t \leqslant a} |\lambda(t) - t| \leqslant \sup_{t \leqslant a} |\lambda(t) - t| e^{\| \mu \|_{\Lambda}}.$$

15.7 定义 对 $x, y \in D^d$，令

$$\| x \|_a = \sup_{t \leqslant a} |x(t)|, \quad \| x \| = \sup_{t} |x(t)|,$$

$$\rho(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \| \lambda \|_{\Lambda} + \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} (1 \wedge \| (x k_N) \circ \lambda - y k_N \|) \right\}, \tag{7.1}$$

其中

$$k_N(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant N, \\ N + 1 - t, & N < t < N + 1, \\ 0, & t \geqslant N + 1. \end{cases} \tag{7.2}$$

由(7.1)容易验证 $\rho(x, y)$ 满足：

$$\rho(x, y) \geqslant 0, \ \rho(x, y) = \rho(y, x), \ \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z). \tag{7.3}$$

15.8 引理 若当 $n \to \infty$ 时 $\rho(x_n, x) \to 0$，则存在序列 $(\lambda_n) \subset \Lambda$ 满足

$$\| \lambda_n - e \| \to 0, \quad 当 n \to \infty, \tag{8.1}$$

$$\forall N \in \mathbf{N}, \| x_n \circ \lambda_n - x \|_N \to 0, \quad 当 n \to \infty. \tag{8.2}$$

证明 由定义 15.7，若 $\rho(x_n, x) \to 0$，则存在 $(\mu_n) \subset \Lambda$ 满足

$$\| \mu_n \|_{\Lambda} \to 0, \quad 当 n \to \infty, \tag{8.3}$$

$$\forall N \in \mathbf{N}, \| (x_n k_N) \circ \mu_n - x k_N \| \to 0, \quad 当 n \to \infty. \tag{8.4}$$

记 $m_n = (e^{\| \mu_n \|_{\Lambda}} - 1 + n^{-1})^{-1/2}$，则由(8.3) $m_n \to \infty$．置

$$\lambda_n(t)=\begin{cases}\mu_n(t), & t\leqslant m_n,\\ t-m_n+\mu_n(m_n), & t>m_n.\end{cases}$$

则 $\lambda_n\in\Lambda_0$. 由(6.1)可知

$$\|\lambda_n-e\|=\|\mu_n-e\|_{m_n}\leqslant m_n(e^{\|\mu_n\|_\Lambda}-1)\leqslant\frac{1}{m_n}\to 0. \quad (8.5)$$

于是(8.1)成立. 对固定的 N, 若 n 足够大, 由(8.5), (8.4)可得

$$\begin{aligned}\|x_n\circ\lambda_n-x\|_N&\leqslant\|(k_{N+1}x_n)\circ\lambda_n-k_{N+1}x\|_N\\&\leqslant\|(k_{N+1}x_n)\circ\mu_n-k_{N+1}x\|\to 0.\end{aligned}$$

所以(8.2)成立. □

注 从上述证明可知, 若 $\rho(x_n,x)\to 0$, 则存在序列 $(\lambda_n)\subset\Lambda_0$ 满足

$$\|\lambda_n-e\|\to 0,\quad 当\ n\to\infty,$$

$$\forall\ N\in\boldsymbol{N}\quad\|x_n-x\circ\lambda_n\|_N\to 0,\quad 当\ n\to\infty. \quad (8.6)$$

15.9 定理 ρ 是 $\boldsymbol{D}^d$ 上的距离.

证明 由(7.3)只需证明由 $\rho(x,y)=0$ 可推出 $x=y$. 设 $\rho(x,y)=0$. 由引理 15.8 存在 $(\lambda_n)\subset\Lambda$ 使(8.1)成立且 $\forall\ N\in\boldsymbol{N}$ $\|x\circ\lambda_n-y\|_N\to 0$. 若 x 在 t 连续, 即 $\Delta x(t)=0$, 则

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-x(\lambda_n(t))|+|x(\lambda_n(t))-y(t)|\to 0,$$

于是在 x 的每个连续点 t 有 $x(t)=y(t)$. 由定理 15.5, x 的不连续点至多为可列个, x 的连续点处处稠密. 因而 $x=y$. □

15.10 定理 设 $\{x,x_n,n\geqslant 1\}\subset\boldsymbol{D}^d$, 则下列断言等价:

1) $\rho(x_n,x)\to 0$,

2) 存在 $(\lambda_n)\subset\Lambda$ 使(8.1)(8.2)(或(8.1), (8.6))成立.

3) 对每个 $N\in\boldsymbol{N}$, 存在 $(\lambda_n^N)\subset\Lambda_0$ 使

$$\|\lambda_n^N-e\|_N\to 0, \quad (10.1)$$

$$\|x_n\circ\lambda_n^N-x\|_N\to 0(或\ \|x_n-x\circ\lambda_n^N\|_N\to 0).$$

证明 1)⇒2)是引理 15.8 的结论. 2)⇒3)是明显的.

3)⇒1): 首先, 我们证明对每个固定的 N 存在 $(\mu_n^N)\subset\Lambda$ 使(为简单计我们省写了上标 N):

$$\|\mu_n\|_\Lambda\to 0, \quad (10.2)$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| x_n - x \circ \mu_n \|_N \leqslant \frac{1}{2N}. \tag{10.3}$$

令(t_k)为按下式规定的序列

$$t_0=0,$$

$$t_{k+1}=\begin{cases}\inf\{t>t_k: |x(t)-x(t_k)|>\frac{1}{4N}\}, & 若 t_k<\infty, \\ +\infty, & 若 t_k=\infty,\end{cases} \quad k\geqslant 1.$$

则当 $x\in D^d$ 时，$t_k\to\infty$. 取

$$\overline{\lambda}_n(t)=\begin{cases}\lambda_n(t), & t\leqslant N, \\ \lambda_n(N)+t-N, & t>N,\end{cases}$$

$$u_{nk}=\lambda_n^{-1}(t_k) \quad (\lambda_n(u_{nk})=t_k).$$

令

$$\mu_n(t)=\begin{cases}t_k+(t-u_{nk})\dfrac{t_{k+1}-t_k}{u_{n,k+1}-u_{nk}}, & u_{nk}\leqslant t<u_{n,k+1}\wedge N, u_{n,k+1}<\infty, \\ t_k+t-u_{nk}, & u_{nk}\leqslant t<u_{n,k+1}=\infty, \quad t\leqslant N, \\ \mu_n(N)+t-N, & t>N.\end{cases}$$

则 μ_n 是分段线性的，$\mu_n\in\Lambda$，且由(10.1)

$$u_{nk}\to t_k, \ \|\mu_n\|_\Lambda\to 0, \ \|\mu_n-e\|=\|\mu_n-e\|_N\to 0, \quad 当 n\to\infty,$$

即(10.2)成立．另一方面，若 $t\in[u_{nk},u_{n,k+1}[\cap[0,N]$，则 $\lambda_n(t)$，$\mu_n(t)\in[t_k,t_{k+1}[$ 且

$$|x(\lambda_n(t))-x(\mu_n(t))|\leqslant 1/(2N),$$

$$\begin{aligned}|x_n(t)-x(\mu_n(t))| &\leqslant |x_n(t)-x(\lambda_n(t))|+|x(\lambda_n(t))-x(\mu_n(t))| \\ &\leqslant \|x_n-x\circ\lambda_n\|_N+1/(2N),\end{aligned}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-x\circ\mu_n\|_N\leqslant 1/(2N),$$

即(10.3)成立．

其次，对每个 $N\in\mathbf{N}$，若(μ_n^N)满足(10.2)，(10.3)则存在递增序列(n_N)使当 $n\geqslant n_N$ 时成立

$$\|\mu_n^N\|_\Lambda\leqslant 1/N, \quad \|x_n-x\circ\mu_n^N\|_N\leqslant 1/N.$$

现取 $\overline{\mu}_n=\mu_n^N$，$n_N\leqslant n<n_{N+1}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\|\overline{\mu}_n\|_\Lambda=0, \tag{10.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\| x_n - x\circ\bar{\mu}_n \|_N = 0, \quad \forall N\in\boldsymbol{N}.$$

因而对固定的 $N\in\boldsymbol{N}$，当 n 足够大有

$$\begin{aligned}
&\| k_N x_n - (k_N x)\circ\bar{\mu}_n \| \\
\leqslant\ & \| k_N x_n - k_N(x\circ\bar{\mu}_n)\| + \| k_N(x\circ\bar{\mu}_n) - (k_N x)\circ\bar{\mu}_n \| \\
\leqslant\ & \| x_n - x\circ\bar{\mu}_n \|_{N+1} + \| k_N - k_N\circ\bar{\mu}_n \| \ \| x \|_{N+2} \\
\leqslant\ & \| x_n - x\circ\bar{\mu}_n \|_{N+1} + \| \bar{\mu}_n - e \|_{N+1} \| x \|_{N+2}.
\end{aligned}$$

运用上述不等式和(10.4)容易推出 $\rho(x_n,x)\to 0$. □

注 1)对 $x,y\in\boldsymbol{D}^d$，令

$$\tilde{\rho}(x,y)=\inf_{\lambda\in\Lambda_0}\left\{\|\lambda-e\|+\sum_{N=1}^{\infty}2^{-N}(1\wedge\|(xk_N)\circ\lambda-yk_N\|)\right\}, \tag{10.5}$$

则它也是 $\boldsymbol{D}^d$ 上的距离．按定理15.10，ρ 与 $\tilde{\rho}$ 在 $\boldsymbol{D}^d$ 上规定相同的拓扑，这一拓扑称为 $\boldsymbol{D}^d$ 上的 Skorohod 拓扑．

2) $\boldsymbol{D}^d$ 是线性空间，但在 ρ(或 $\tilde{\rho}$)下，它不是线性拓扑空间．

15.11 例 设 $x_n(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i^n I(t_i^n\leqslant t<t_{i+1}^n)$，其中 $t_0^n=0$ 当 $k\to\infty$ 时 $t_k^n\uparrow\infty$，$x(t)=\sum_{i=j}^{\infty}a_i I(t_i\leqslant t<t_{i+1})$，其中 $t_0=0$，当 $k\to\infty$ 时 $t_k\uparrow\infty$，即 x_n,x 是阶梯函数．若

$$\lim_{n\to\infty}t_i^n=t_i, \qquad i\geqslant 1, \tag{11.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_i^n=a_i, \quad 若\ t_i<\infty,$$

则容易验证 $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$.

事实上，对 $N\in\boldsymbol{N}$，若 $t_k\leqslant N<t_{k+1}$，取

$$\lambda_n^N(t)=\begin{cases} t_j+\dfrac{t_{j+1}-t_j}{t_{j+1}^n-t_j^n}(t-t_j^n), & t_j^n\leqslant t<t_{j+1}^n,\ j\leqslant k-1,\\ t_k+t-t_k^n, & t\geqslant t_k^n. \end{cases}$$

则 $\lambda_n^N\in\Lambda$. 运用(11.1)当 n 足大时有

$$\|\lambda_n^N-e\|_N\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant k}|t_j-t_j^n|,$$

$$\| x_n-x\circ\lambda_n^N\|_N\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant k}|a_j^n-a_j|.$$

因而(10.1),(8.6)成立,由定理 15.10 我们有 $\rho(x_n,x)\to 0$.

15.12 定理 1)Skorohod 拓扑比由在每个紧区间上一致收敛导出的拓扑为弱.

2) 若 $\rho(x_n,x)\to 0$,又 x 在 t_0 连续,则 $x_n(t'_0)\to x(t_0)$.

3) 若 $x\in \boldsymbol{C}^d$,则 $\rho(x_n,x)\to 0$ 当且仅当

$$\| x-x_n \|_a\to 0,\quad \forall\ a>0. \tag{12.1}$$

证明 1)若 $\| x-x_n \|_N\to 0$ 对每 $N\in \boldsymbol{N}$ 成立,则取 $\lambda_n=e$,由定理 15.10 可得 $\rho(x_n,x)\to 0$.

2) 设$(\lambda_n)\subset \Lambda$ 且(8.1),(8.6)成立. 则

$$|x(t_0)-x_n(t_0)|\leqslant |x(t_0)-x(\lambda_n(t_0))|+|x(\lambda_n(t_0))-x_n(t_0)|. \tag{12.2}$$

由于 x 在 t_0 连续及$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(t_0)=t_0$,(12.2) 右端第一项趋于 0. 由(8.6),第二项也趋于 0.

3) 由 1)只要证(12.1)是必要的. 设$(\lambda_n)\subset \Lambda$ 及(8.1),(8.6)成立. 由于

$$\begin{aligned}\| x-x_n \|_a &\leqslant \| x-x\circ\lambda_n \|_a+\| x\circ\lambda_n-x_n \|_a \\ &\leqslant \omega(\| \lambda_n-e \|_a,\ x,a+\| \lambda_n-e \|_a)+\| x\circ\lambda_n-x_n \|_a,\end{aligned} \tag{12.3}$$

由紧集上一致连续性及(8.6)可知(12.3)右端趋于 0,因而(12.1)成立. □

15.13 注 对 $x,y\in \boldsymbol{C}^d$,令

$$\rho_u(x,y)=\sum_{N=1}^{\infty}2^{-N}(1\wedge \| x-y \|_N).$$

则 ρ_u-收敛等价于在每个紧集上一致收敛,且容易直接验证在 ρ_u 下 $\boldsymbol{C}^d$ 为 Polish 空间.

15.14 引理 对 $x\in \boldsymbol{D}^d$ 令

$$x_n(t)=x\left(\frac{[nt]}{n}\wedge n\right), \tag{14.1}$$

其中$[a]$表 a 的整数部分. 则$\lim\limits_{n}\rho(x_n,x)=0$.

证明 显然有 $x_n\in \boldsymbol{D}^d$. 对 $\varepsilon>0$,取 N 及 $\delta>\frac{1}{2}$满足下列条件:

$$2^{-N}<\varepsilon/4, \quad 且 \quad \omega'(\delta, x, N+1)<\varepsilon/4.$$

若$\{t_j, 1\leqslant j\leqslant r+1\}$为$[0, N+1]$的一个分割且满足$t_j-t_{j-1}>\delta, 1\leqslant j\leqslant r, t_r>N+1/2$及

$$\overline{\omega}([t_{j-1}, t_j[, x)<\varepsilon/4. \tag{14.2}$$

取$n>n_0=a\vee(8/\varepsilon\delta)\vee 4/\delta$并令$s_j^n=-[-nt_j]/n$，则$0<s_j^n-t_j<1/n, s_r^n>N$. 取$\lambda_n$为下列分段线性函数：

$$\lambda_n(t)=\begin{cases} t_j+(t-t_j)\dfrac{s_{j+1}^n-s_j^n}{t_{j+1}-t_j}, & t_j\leqslant t<t_{j+1}, j\leqslant r-1, \\ t-t_r+s_r^n, & t>t_r, \end{cases}$$

则

$$\|\lambda_n\|_\Lambda\leqslant\sup_{j\leqslant r}\left|\log\frac{s_j^n-s_{j-1}^n}{t_j-t_{j-1}}\right|\leqslant|\log(1-\frac{2}{n\delta})|\leqslant\frac{4}{n\delta}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

当$t\in[t_{j-1}, t_j[$时，$\lambda_n(t)\in[s_{j-1}^n, s_j^n[$以及$x_n(\lambda_n(t))\in\{x(s): s\in[t_{j-1}, t_j[\}$. 因而由(14.2)$|x_n(\lambda_n(t))-x(t)|<\varepsilon/4$. 所以

$\|x_n\circ\lambda_n-x\|_N\leqslant\varepsilon/4$,

$$\rho(x_n, x)\leqslant\|\lambda_n\|_\Lambda+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}(1\wedge\|x_n\circ\lambda_n-x\|_k)$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\sum_{k=N+1}^{\infty}2^{-k}\leqslant\varepsilon.$$

由此可知命题成立. □

15.15 引理 D^d 在Skorohod拓扑下为可分的.

证明 令

$\mathscr{A}=\{x\in D^d: x$ 是只含有限个跳的阶梯函数$\}$,

$\mathscr{C}=\{x\in\mathscr{A}: x$ 的跳时与取值都是有理数$\}$.

容易验证$\mathscr{C}$是可列的. 若以$\overline{\mathscr{C}}$表示$\mathscr{C}$在D^d中的闭包，则由例15.11可知$\mathscr{A}\subset\overline{\mathscr{C}}\subset D$. 同时，定理15.5表明$\overline{\mathscr{A}}=D^d$，因此$\overline{\mathscr{C}}=\overline{\mathscr{A}}=D^d$，即$D^d$是可分的. □

15.16 引理 D^d 在ρ之下是完备的

证明 若(x_n)为ρ—基本列. 它必包含满足下列条件的子列$(y_l=x_{n_l}, l\geqslant 1)$:

$$\rho(y_l, y_{l+1}) < 2^{-2l}, \quad l \geqslant 1.$$

因而存在序列$(\bar{\lambda}_l) \subset \Lambda$使

$$\|\bar{\lambda}_l^{-1}\|_\Lambda = \|\bar{\lambda}_l\|_\Lambda \leqslant 2^{-2l},$$

$$\|y_l \circ \bar{\lambda}_l - y_{l+1}\|_l \leqslant \|(k_{l+1}y_l) \circ \bar{\lambda}_l - k_{l+1}y_{l+1}\|$$

$$\leqslant 2^{l+1}2^{-2l} = 2^{-l+1}.$$

令

$$\lambda_l(t) = \begin{cases} \bar{\lambda}_l(t), & t \leqslant l, \\ t - l + \bar{\lambda}_l(l), & t > l, \end{cases}$$

则对(λ_l)仍有

$$\|\lambda_l^{-1}\|_\Lambda = \|\lambda_l\|_\Lambda \leqslant 2^{-2l},$$

$$\|y_l \circ \lambda_l - y_{l+1}\|_l \leqslant 2^{-l+1}, \qquad (16.1)$$

于是由(6.1)及(16.1)可得

$\|\lambda_l^{-1} - e\| = \|\lambda_l - e\| = \|\lambda_l - e\|_l \leqslant l(e^{\|\lambda_l\|_\Lambda} - 1) \leqslant 2^{-l}$,

$\|\lambda_{l+k+1}^{-1} \circ \lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1} - \lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1}\| = \|\lambda_{l+k+1}^{-1} - e\| < 2^{-(k+l+1)}$.

这样对每个l存在不减连续函数μ_l使

$$\lim_{k \to \infty} \|\lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1} - \mu_l\| = 0.$$

进而有

$$\left|\log \frac{\lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1}(t) - \lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1}(s)}{t - s}\right| \leqslant \|\lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1}\|_\Lambda$$

$$\leqslant \|\lambda_{l+k}^{-1}\|_\Lambda + \cdots + \|\lambda_l^{-1}\|_\Lambda < 2^{-2(l-1)}.$$

在上述不等式中令$k \to \infty$可得$\|\mu_l\|_\Lambda \leqslant 2^{-2(l-1)}$. 故$\mu_l \in \Lambda$

由μ_l的定义及(16.1)可得

$$\mu_l = \mu_{l+1} \circ \lambda_l^{-1}, \quad \mu_l^{-1} = \lambda_l \circ \mu_{l+1}^{-1},$$

$$\|y_l \circ \mu_l^{-1} - y_{l+1} \circ \mu_{l+1}^{-1}\|_{l-1} \leqslant \|y_l \circ \lambda_l - y_{l+1}\|_l \leqslant 2^{-l+1}.$$

因而在由紧集上一致收敛诱导的拓扑下$(y_l \circ \mu_l^{-1})$是基本列. 所以存在$x \in D^d$使

$$\|y_l \circ \mu_l^{-1} - x\|_l \leqslant 2^{-l+2}.$$

现在运用定理15.10可得$\lim\limits_{l \to \infty} \rho(y_l, x) = 0$, 进而有$\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$.

所以 $\boldsymbol{D}^d$ 是完备的. □

15.17 定理 $\boldsymbol{D}^d$ 赋于距离 ρ 是一个 Polish 空间.

证明 这是定理 15.9,引理 15.15 和 15.16 的直接结论. □

15.18 定理 若以 $\mathscr{D}$ 表示 $\boldsymbol{D}^d$ 赋于 Skorohod 拓扑后的 Borel σ-域,又

$$\mathscr{D}_{\infty}=\sigma\{X_t: X_t(x)=x(t), x\in \boldsymbol{D}^d, t\in \boldsymbol{R}_+\},$$

即 $\mathscr{D}_{\infty}$ 是由 $\boldsymbol{D}^d$ 上标准过程生成的 σ 域,则

$$\mathscr{D}_{\infty}=\mathscr{D}. \tag{18.1}$$

证明 设 g 为 $\boldsymbol{R}^d$ 上的一个有界连续实函数. 对固定的 t 记 $h_k(x)=k\int_t^{t+1/k}g(x(s))ds$. 当 $\rho(x_n,x)\to 0$ 时除了至多可列多个 s 外有 $g(x_n(s))\to g(x(s))$,且 $g(x_n(s))$ 是一致有界的. 因此 $h_k(x_n)\to h_k(x)$,即 h_k 是 $\boldsymbol{D}^d$ 上的连续函数. 于是 $h_k\in\mathscr{D}$. 又因 $x\in\boldsymbol{D}^d$ 是右连续的,故 $\lim\limits_{k\to\infty}h_k(x)=g(x(t))$. 于是对固定的 t, $g(x(t))$ 是 $\boldsymbol{D}^d$ 上的 $\mathscr{D}$ 可测函数. 所以由单调类定理有 $\mathscr{D}_{\infty}\subset\mathscr{D}$.

对 $x,y\in\boldsymbol{D}^d$ 令

$$x_n(t)=x\left(\frac{[nt]}{n}\wedge n\right),\qquad y_n(t)=y\left(\frac{[nt]}{n}\wedge n\right).$$

则 x_n 由 $\{x(\frac{k}{n}),\ k\leqslant n^2\}$ 所确定. 对固定的 $z\in\boldsymbol{D}^d$,定义

$$g(x)=\rho(x_n,z)=h\left\{x(\frac{k}{n}),\ 0\leqslant k\leqslant n^2\right\},$$

其中 h 是 $\boldsymbol{R}^{n^2+1}$ 上的函数. 显然有

$$|g(x)-g(y)|=|\rho(x_n,z)-\rho(y_n,z)|$$
$$\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n^2}\left|x\left(\frac{k}{n}\right)-y\left(\frac{k}{n}\right)\right|.$$

于是对 $x\in\boldsymbol{D}^d$,$g(x)$ 是 $\{x(\frac{k}{n}),0\leqslant k\leqslant n^2\}$ 的连续函数. 这样,对固定的 z 作为 x 的函数,$\rho(x_n,z)\in\mathscr{D}_{\infty}$. 再由引理 15.14 有

$$\rho(x,z)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,z)\in\mathscr{D}_{\infty}.$$

进而

$$O(z,\varepsilon)=\{x:\rho(z,x)<\varepsilon\}\in\mathscr{D}_{\infty}.$$

因为 D^d 是可分的，所以 D^d 中每个开集也是 $\mathscr{D}_\infty$-可测的，因而 $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}_\infty$. □

15.19 定义 在 D^d 上令

$$\mathscr{D}_t^0=\sigma(x(u);u\leqslant t),\quad \mathscr{D}^0=\bigvee_{t\geqslant 0}\mathscr{D}_t^0,\quad \mathscr{D}^0=(\mathscr{D}_t^0)_{t\geqslant 0}.$$

$(D^d,\mathscr{D}^0)$ 称为 D^d 上的**标准可测空间**. 若在 $(D^d,\mathscr{D}^0)$ 上存在概率 P，令

$$\mathscr{D}_t=\bigcap_{s>t}(\mathscr{D}_s^0)^P,\quad \mathscr{D}=\bigvee_t\mathscr{D}_t,\mathbb{D}=(\mathscr{D}_t)_{t\geqslant 0},$$

则 $\Phi_D=(D^d,\mathscr{D},\mathbb{D},P)$ 称为**标准带流概率空间**. 而由下式规定的随机过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$：

$$X_t(x)=x(t),\qquad x\in D^d,\quad t\in R_+,$$

称为**标准过程**.

15.20 引理 1) 对 $x\in D^d$，令

$$\varphi_1(t,x)=x^*(t)=\sup_{s\leqslant t}|x(s)|,$$

$$\varphi_2(t,x)=\sup_{s\leqslant t}|\Delta x(s)|.$$

则对固定的 t，φ_1 和 φ_2 在 D^d 中是 x 的上半连续函数，即

$$\varphi_i(t,x)\geqslant\overline{\lim_{\rho(x,y)\to 0}}\varphi_i(t,y),\quad i=1,2.$$

进而，若 $\Delta x(t)=0$，则 $\varphi_i,i=1,2$ 在 x 连续.

2) $\omega'(\delta,x,N)$ 是 x 的上半连续函数.

证明 1) 由于 $x\in D^d$ 关于 t 右连续，故 φ_1,φ_2 亦然. 若 x 在 t 连续，则 φ_1,φ_2 亦同样在 t 连续.

首先，假定 $\rho(x_n,x)\to 0$ 且 x 在 t 连续，则存在序列 $(\lambda_n)\subset\Lambda$ 满足

$$\|\lambda_n\|_N\to 0,\quad \|\lambda_n-e\|_N\to 0,\quad \|x_n-x\circ\lambda_n\|_N\to 0,\ \forall N\in N$$

同时，

$$|x_n^*(t)-x^*(t)|\leqslant|x_n^*(t)-x^*(\lambda_n(t))|+|x^*(\lambda_n(t))-x^*(t)|$$

$$\leqslant\|x_n-x\circ\lambda_n\|_N+|x^*(\lambda_n(t))-x^*(t)|,\ t\leqslant N.$$

于是 φ_1 在 x 连续. 对一般的情形，取 $\varepsilon>0$ 使 x 在 $t+\varepsilon$ 连续，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^*(t+\varepsilon)=x^*(t+\varepsilon)$. 由于 x^* 关于 t 右连续，令 $t+\varepsilon$ 沿 x 的连续点趋于 t 可得

$$x^*(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}x^*(t+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}x_n^*(t+\varepsilon)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n^*(t).$$

于是 φ_1 是上半连续的．类似地，φ_2 也有同样性质．

2）对 $\varepsilon>0$，存在分割 $\{t_j\}_{1\leqslant j\leqslant r}$ 满足

$$t_j-t_{j-1}>\delta,\qquad 1\leqslant j\leqslant r-1,\tag{20.1}$$

$$\bar{\omega}([t_{j-1},t_j[,x)<\omega'(\delta,x,N)+\varepsilon/2.\tag{20.2}$$

取 $\eta>0$ 满足 $\delta+2\eta<t_j-t_{j-1}$，$1\leqslant j\leqslant r-1$，$\eta<\frac{\varepsilon}{4}\wedge(N-t_{r-1})$．若 $\bar{\rho}(x,y)<\bar{\eta}2^{-N}$，则存在 $\lambda\in\Lambda_0$ 使（见(10.5)）

$$\|\lambda-e\|=\|\lambda^{-1}-e\|<\eta,$$

$$\|x\circ\lambda-y\|_N<\eta.\tag{20.3}$$

令 $s_j=\lambda^{-1}(t_j)$，则 $\{s_1,\cdots,s_{r-1},N\}$ 为 $[0,N]$ 的一个分割．由(18.1)

$$|s_j-s_{j-1}|>-|s_j-\lambda(s_j)|+|t_j-t_{j-1}|$$
$$-|\lambda(s_{j-1})-s_{j-1}|>\delta,\quad 1\leqslant j\leqslant r-1.$$

由(20.3)及(20.2)我们有

$$\begin{aligned}\bar{\omega}([s_{j-1},s_j[,y)&\leqslant\bar{\omega}([\lambda(s_{j-1}),\lambda(s_j)[,x)+2\eta\\&<\omega'(\delta,x,N)+\varepsilon/2+2\eta\\&<\omega'(\delta,x,N)+\varepsilon,\quad 1\leqslant j\leqslant r.\end{aligned}$$

这表明当 $\bar{\rho}(x,y)<\eta2^{-N}$ 时 $\omega'(\delta,y,N)<\omega'(\delta,x,N)+\varepsilon$，所以 $\omega'(\delta,x,N)$ 是一个 x 的上半连续函数． □

15.21 引理 设 Γ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中的相对紧集，且

$$H(\Gamma,\delta)=\left\{x\in\boldsymbol{D}^d:\ \begin{array}{l}\{x(t):t\geqslant 0\}\subset\Gamma,x\text{ 为一阶梯函}\\\text{数，且相邻跳时间隔}>\delta\end{array}\right\},$$

则 $H(\Gamma,\delta)$ 是 $\boldsymbol{D}^d$ 中相对紧集．

证明 只需证明每个序列 $(x_n)\subset H(\Gamma,\delta)$ 都含有收敛子序列．记 $t_k(x_n)$ 为 x_n 的第 k 个跳时．运用对角线手法可选取 (x_n) 的子序列 (y_n)，使对每 k，$(t_k(y_n))$ 满足下列条件之一：

(a) $\lim_{n\to\infty}t_k(y_n)=s_k<\infty$ 及 $\lim_{n\to\infty}y_n(t_k(y_n))=\alpha_k$，

(b) $\lim_{n\to\infty}t_k(y_n)=s_k=\infty$．

若 $t_{k-1}(y_n)<\infty$，则 $t_k(y_n)-t_{k-1}(y_n)>\delta$．这时当 $s_{k-1}<\infty$ 时也有 $s_k-s_{k-1}\geqslant\delta$．令

$$y(t) = \sum_k \alpha_k I(s_k \leqslant t < s_{k+1}).$$

容易直接验证 $\rho(y_n, y) \to 0$. 因此 $H(\Gamma, \delta)$ 是相对紧的. □

15.22 定理 在 Skorohod 拓扑下一个集 $K \subset \boldsymbol{D}^d$ 是相对紧的当且仅当下列条件成立:

$$\sup_{x \in K} \| x \|_N < \infty, \quad \forall N \in \boldsymbol{N} \tag{22.1}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in K} \omega'(\delta, x, N) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}. \tag{22.2}$$

证明 必要性. 对固定的 $N \in \boldsymbol{N}$, 由引理 15.20 知 $\varphi_1(x) = \| x \|_N$ 是一个 $\boldsymbol{D}^d$ 上的上半连续函数, 因而它在紧集 $\overline{K}$ 上有界, (22.1) 成立.

也对固定的 N, 由于引理 15.20, $\omega'(\delta, x, N)$ 对 x 上半连续, 关于 δ 为不减的且 $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega'(\delta, x, N) = 0$. 因而由 Dini 定理当 $\delta \to 0$ 时 $\omega'(\delta, x, N)$ 在紧集 $\overline{K}$ 上一致趋于 0, 故 (2.22) 为真.

充分性. 对每个 $N \in \boldsymbol{N}$, 取 $\Gamma_N = \{x(s): x \in K, s \leqslant N\}$, 由 (22.1) Γ_N 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中相对紧集. 由 (22.2) 存在 $\delta_N \leqslant 1$ 使

$$\sup_{x \in K} \omega'(\delta_N, x, N+1) < \frac{1}{N}. \tag{22.3}$$

运用引理 15.21 的记号, 记 $K_N = H(\Gamma_N, \delta_N)$, 则 K_N 是 $\boldsymbol{D}^d$ 中的相对紧集. 由 (22.3), 对 $x \in K$ 存在 $[0, N+1]$ 的分割 $\{t_j\}_{1 \leqslant j \leqslant r}$ 使

$$t_j - t_{j-1} > \delta, \ 1 \leqslant j \leqslant r, \quad t_r \geqslant N,$$
$$\overline{\omega}([t_{j-1}, t_j[, x) < \frac{1}{N}, \quad 1 \leqslant j \leqslant r+1.$$

令 $\lambda = e \in \Lambda$ 以及

$$y(t) = \sum_{j=1}^{r-1} x(t_{j-1}) I(t_{j-1} \leqslant t < t_j) + x(t_r) I(t \geqslant t_r).$$

则 $y \in K_N$ 且

$$\rho(x, y) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge \| x - y \|_{n+1}) \leqslant \frac{1}{N} + \sum_{j \geqslant N} 2^{-j} < \frac{2}{N}.$$

于是 $x \in K_N^{2/N} = \left\{ z : \rho(z, K_N) < \frac{2}{N} \right\}$. 所以对一切 N, $K \subset K_N^{2/N}$, 因

而

$$K \subset \bigcap_{N \geq 1} \overline{K_N^{2/N}}.$$

同时 $\bigcap_{N \geq 1} \overline{K_N^{2/N}}$ 是紧集，所以 K 相对紧． □

15.23 定义 对 $x \in \boldsymbol{D}^d$，令

$$\omega''(\delta, x, N) = \sup\left\{ |x(t) - x(t_1)| \wedge |x(t_2) - x(t)| : \begin{matrix} 0 \leq t_1 < t < t_2 \leq N, \\ t_2 < t_1 + \delta \end{matrix} \right\} \tag{23.1}$$

15.24 定理 在 Skorohod 拓扑下，集合 $K \subset \boldsymbol{D}^d$ 为相对紧的当且仅当下列条件成立：

$$\sup_{x \in K} \| x \|_N < \infty, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}, \tag{24.1}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in K} \overline{\omega}([0, \delta[, x) = 0, \tag{24.2}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in K} \omega''(\delta, x, N) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}. \tag{24.3}$$

证明 只需证明若(22.1)(即(24.1))成立，(22.2)等价于(24.2)和(24.3)．

必要性．若 $N \geq \delta$，$\overline{\omega}([0, \delta[, x) \leq \omega'(\delta, x, N)$，故(24.2)是必要的．

对给定的 $\varepsilon, \delta > 0$，存在$[0, N]$的分割$\{s_j\}_{1 \leq j \leq r}$使 $s_{j+1} - s_j \geq \delta$，$1 \leq j \leq r-2$，$s_{r-1} \geq N-1$ 以及$\overline{\omega}([s_j, s_{j+1}[, x) < \omega'(\delta, x, N) + \varepsilon$．现对 $0 \leq t_j < t < t_{j+1} \leq N-1$，$t_{j+1} - t_j < \delta$，$[t_j, t[$和$[t, t_{j+1}[$中至少有一个含于某个$[s_i, s_{i+1}[$之中，所以有 $\omega''(\delta, x, N-1) < \omega'(\delta, x, N) + \varepsilon$．因此(24.3)可由(22.2)推出．

充分性．对给定的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta > 0$ 使

$$\omega''(\delta, x, N) < \varepsilon, \ \overline{\omega}([0, \delta[, x) < \varepsilon, \quad \forall x \in K \tag{24.4}$$

往证

$$\omega'(\delta/2, x, N) < 6\varepsilon, \quad \forall x \in K. \tag{24.5}$$

首先，对 $t_1 < s < t_2 < t_1 + \delta$ 必有

$$\overline{\omega}([t_1, s], x) \wedge \overline{\omega}([s, t_2], x) \leq 2\varepsilon. \tag{24.6}$$

事实上，对 $t_1\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant s$，若 $|x(\tau_1)-x(\tau_2)|>\varepsilon$，则由(24.4)对 σ_1，$\sigma_2\in[s,t_2]$ 有 $|x(\sigma_i)-x(\tau_2)|<\varepsilon$，$i=1,2$，进而 $|x(\sigma_1)-x(\sigma_2)|<2\varepsilon$，故(24.6)成立.

其次，从(24.6)可得当 $|\tau_1-\tau_2|<\delta$ 时 $|\Delta x(\tau_1)|\wedge|\Delta x(\tau_2)|\leqslant 2\varepsilon$. 现取序列$(s_j)$满足

$$\delta/2<s_{j+1}-s_j\leqslant\delta \text{ 和 } |\Delta x(s)|\leqslant 2\varepsilon, \text{ 当 } s\notin\{s_j\}.$$

最后，对每个 j 令

$$\sigma_1=\sup\{s:\overline{\omega}([s_{j-1},s[,x)\leqslant 2\varepsilon\},\quad \sigma_2=\inf\{t:\overline{\omega}([t,s_j[,x)\leqslant 2\varepsilon\}$$

由(24.6)我们有 $\sigma_1\geqslant\sigma_2$. 若 $\sigma_1<s_j$，

$$\omega([s_{j-1},s_j[,x)\leqslant\overline{\omega}([s_{j-1},\sigma_1[,x)+|\Delta x(\sigma_1)|+\omega([\sigma_1,s_j[,x)$$
$$\leqslant 2\varepsilon+2\varepsilon+2\varepsilon=6\varepsilon, \tag{24.7}$$

若 $\sigma_1>s_j$，则由 σ_1 的定义(24.7)成立，于是(24.5)也成立，因此(22.2)可由(24.2)及(24.3)推出. □

15.25 系 若 $L\subset \boldsymbol{D}^d$，且

$$\sup_{x\in L}\|x\|_N<\infty, \quad \forall N\in\boldsymbol{N}.$$

则 L 不是相对紧的当且仅当存在序列$(x_n)\subset L$ 使下列两条件至少有一个成立：

a) 存在(t_n^1)，(t_n^2)及 $a_1\neq a_2$ 使

$$\lim_{n\to\infty} t_n^i=0,\quad \lim_{n\to\infty} x_n(t_n^i)=a_i,\quad i=1,2.$$

b) 存在 $t_n^1<t_n^2<t_n^3$ 及 $a_1\neq a_2$，$a_2\neq a_3$ 使

$$\lim_{n\to\infty} t_n^i=t<\infty,\quad \lim_{n\to\infty} x_n(t_n^i)=a_i,\quad i=1,2,3.$$

§2. Skorohod 拓扑下的连续性

在这一节，(x_n)在 $\boldsymbol{D}^d$ 中收敛于 x 总是指在 Skorohod 拓扑下收敛(除非特别证明有其它含义)且简单地表以 $x_n\to x$.

15.26 引理 设在 $\boldsymbol{D}^d$ 中 $x_n\to x$，则对每个 $t>0$ 存在序列(t_n)满足 $t_n\to t$ 及

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{t_n\leqslant s\leqslant t_n+\delta}|x_n(s)-x(t)|=0, \tag{26.1}$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{t_n-\delta\leqslant s<t_n}|x_n(s)-x(t-)|=0. \tag{26.2}$$

特别地，

$$x_n(t_n)\to x(t),\quad x_n(t_n-)\to x(t-), \tag{26.3}$$

$$\Delta x_n(t_n)\to\Delta x(t), \tag{26.4}$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}|\bar\omega([t_n-\delta,t_n+\delta],x_n)-|\Delta x(t)||=0,$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \omega([t_n-\delta,t_n[,x_n)\vee\bar\omega([t_n,t_n+\delta],x_n)=0. \tag{26.5}$$

此外，令 $y_n(s)=x_n(s)-\Delta x_n(t_n)I(s\geqslant t_n)$，$y(s)=x(s)-\Delta x(t)I(s\geqslant t)$，$t_n=\lambda_n(t)$，则 $y_n\to y$.

证明 设$(\lambda_n)\subset\Lambda$ 满足(8.1)、(8.2)．取 $t_n=\lambda_n(t)$，则当 $s\in[t_n,t_n+\delta]$时 $\lambda_n^{-1}(s)\in[t,t+\delta_n']$，其中 $\delta_n'=\lambda_n^{-1}(t_n+\delta)-\lambda_n^{-1}(t_n)$．按(8.1)若 n 足够大有 $t_n+\delta<t+2\delta$，$\delta_n'\leqslant 2\delta$，且对 $s\in[t_n,t_n+\delta]$有

$$\begin{aligned}|x_n(s)-x(t)|&\leqslant|x_n(s)-x(\lambda_n^{-1}(s))|+|x(\lambda_n^{-1}(s))-x(t)|\\&\leqslant|x_n(s)-x(\lambda_n^{-1}(s))|+\bar\omega([t,t+\delta_n'],x)\\&\leqslant\|x_n-x\circ\lambda_n^{-1}\|_{t+2\delta}+\bar\omega([t,t+2\delta],x),\end{aligned}$$

现由(8.2)及 x 的右连续性可得(26.1)．类似地(26.2)也成立．(26.3)－(26.5)可由(26.1)及(26.2)推出．最后，我们有

$$\begin{aligned}&|y_n(\lambda_n(s))-y(s)|\\&=|x_n(\lambda_n(s))-x(s)+(\Delta x_n(t_n)-\Delta x(t))I(s\geqslant t)|\\&\leqslant|x_n(\lambda_n(s))-x(s)|+|\Delta x_n(t_n)-\Delta x(t)|.\end{aligned}$$

因而由(26.4)知(λ_n)对(y_n)也满足(8.1)及(8.2)，故 $y_n\to y$. □

注 由(26.5)容易看出，若 $\Delta x(t)\neq 0$，则满足(26.4)的(t_n)本质上是唯一的，即若 $t_n'\to t$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}\Delta x_n(t_n')\neq 0$，则当 n 足够大后必有 $t_n'=t_n$．但若 $\Delta x(t)=0$，则对每个满足 $t_n\to t$ 的(t_n)(26.3)和(26.4)都成立．

15.27 定理 假定 $x_n\to x$，$y_n\to y$，又对每个 $t>0$，存在序列 $t_n\to t$ 且使 $\Delta x_n(t_n)\to\Delta x(t)$及 $\Delta y_n(t_n)\to\Delta y(t)$，则

$$x_n+y_n\to x+y, \tag{27.1}$$

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad (\text{在 } D^{2d} \text{ 中}). \tag{27.2}$$

证明 只需证明(x_n+y_n)是相对紧的，因为(x_n+y_n)在x和y的公共连续点上的收敛性保证了(x_n+y_n)极限点的唯一性.

由于$x_n \to x$，$y_n \to y$，对每个$N\in \mathbf{N}$我们有$\sup_n \|x_n+y_n\|_N<\infty$. 若$(x_n+y_n)$不相对紧，则系 15.25 中的 a)和 b)必有一成立. 若 a)成立，则有$t_n^i \to 0$，$i=1,2$使

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)(t_n^1) \neq \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)(t_n^2).$$

但$\lim_{n\to\infty}x_n(t_n^i)=x(0)$，$\lim_{n\to\infty}y(t_n^i)=y(0)$，所以 a)不可能发生.

若 b)发生，则有$t_n^1<t_n^2<t_n^3$，$t_n^i \to t$以及$(x_n+y_n)(t_n^i)\to a_i$，但$a_1 \neq a_2 \neq a_3$. 令t_n为定理假定中的序列. 由引理 15.26 及其注，(x_n) (y_n)满足(26.5)，而对(x_n+y_n)我们有

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \omega([t_n-\delta,t_n[,x_n+y_n) \vee \bar{\omega}([t_n,t_n+\delta],x_n+y_n)=0 \tag{27.3}$$

现在必有无限个n使$t_n^2\leqslant t$或者$t_n^2>t$. 对前一情况我们有

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \bar{\omega}([t_n-d,t_n[,x_n+y_n)\geqslant |a_1-a_2|\neq 0.$$

对后一情况我们有

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \bar{\omega}([t_n,t_n+\delta],x_n+y_n)\geqslant |a_2-a_3|\neq 0.$$

这都与(27.3)矛盾. 因此 b)也不可能发生. 所以$(\mathrm{x}_n+\mathrm{y}_n)$相对紧且(27.1)成立.

记$\tilde{x}_n=(x_n,0)\in D^{2d}$，$\tilde{y}_n=(0,y_n)\in D^{2d}$，则$\tilde{x}_n \to (x,0)=\tilde{x}$，$\tilde{y}_n \to (0,y)=\tilde{y}$. 由(27.1)可得$(x_n,y_n)=\tilde{x}_n+\tilde{y}_n \to \tilde{x}+\tilde{y}=(x,y)$. □

15.28 系 设$x_n \to x\in C^d$，$y_n \to y$，则$x_n+y_n \to x+y$，$(x_n,y_n)\to (x,y)$.

证明 因为$x\in C^d$，故对每个收敛于t的(t_n)有$x_n(t_n)\to x(t)$. 于是由定理 15.26 可知(x_n)，(y_n)满足定理 15.27 的假定，所以系的结论成立. □

15.29 对$x\in D^d$，定义

$$J(x)=\{t>0;\Delta x(t)\neq 0\}, \tag{29.1}$$

$$U(x)=\{u>0;|\Delta x(t)|=u,\text{对某个 } t\}. \tag{29.2}$$

则 x 的所有不连续点全体 $J(x)$ 至多是可列的．

对 $u>0$，记

$$t^0(x,u)=0,$$
$$t^p(x,u)=\inf\{t>t^p(x,u):|\Delta x(t)|>u\},$$
$$x^u(t)=x(t)-\sum_{p\geq 1}\Delta x(t^p(x,u))I(t\geq t^p(x,u)).$$

$t^p(x,u)$ 为 x 的第 p 个跃度的模大于 u 的跳时．因为 $x\in \boldsymbol{D}^d$，故 $\lim_{p\to\infty} t^p(x,u)=+\infty$.

15.30 定理　对 $u>0$ 及 $p\geq 1$，规定

$$\left.\begin{array}{ll} f_1(x)=t^p(x,u), & f_2(x)=x(t^p(x,u)), \\ f_3(x)=x(t^p(x,u)-), & f_4(x)=\Delta x(t^p(x,u)). \end{array}\right. \text{若 } t^p(x,u)<\infty,$$

以及

$$f_5(x)=x^u,$$

则 $\boldsymbol{D}^d$ 上的这些映照当 $u\in U(x)$ 时在 x 连续．

证明　设 $x_n\to x$，$u\in U(x)$．记 $t_n^p=t^p(x_n,u)$，$t^p=t^p(x,u)$．我们将用关于 p 的归纳法来证明 f_i，$1\leq i\leq 4$ 的连续性．

假定对 p 已建立了 f_i，$1\leq i\leq 4$ 的连续性．则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{p+1}\geq \lim_{n\to\infty} t_n^p=t^p$．若 $t^p=\infty$，则立即有 $\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{p+1}=\infty=t^{p+1}$．以下设 $t^p<\infty$．若 $\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{p+1}=t^p$，则有子列 (n') 满足 $t_{n'}^{p+1}\to t^p$，同时有 $\Delta x_{n'}(t_{n'}^p)>u$．由引理 15.26 的注可知当 n' 足够大后有 $t_{n'}^{p+1}=t_{n'}^p$．这与 $t_n^{p+1}>t_n^p$ 矛盾，所以 $\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{p+1}>t^p$．另一方面，对任一闭区间 $I\subset]t^p,t^{p+1}[$，$\sup_{t\in I}|\Delta x(t)|\leq u$．由引理 15.20.1)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{t\in I}|\Delta x_n(t)|\leq u.$$

因此 $\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{p+1}\geq t^{p+1}$．再由引理 15.26 及 $u\in U(x)$ 若 $t^{p+1}<\infty$ 我们有 $t_n^{p+1}\to t^{p+1}$，$x_n(t_n^{p+1})\to x(t^{p+1})$，$x_n(t_n^{p+1}-)\to x(t^{p+1}-)$ 和 $\Delta x_n(t_n^{p+1})\to\Delta x(t^{p+1})$．这表明对所有的 $p\geq 1$，$f_i(x)$，$1\leq i\leq 4$ 是 x 的连续函数．

运用上述结果及引理 15.26.3)，容易用归纳法证明对 $q\geq 1$

$$x_n^{uq}(\cdot)=x_n(\cdot)-\sum_{p=1}^{q}\Delta x_n(t_n^p)I(\cdot\geq t_n^p)$$

$$\to x(\cdot) - \sum_{p=1}^{q}\Delta x(t^p)I(\cdot \geq t^p) = x^{nq}.$$

另一方面，在$[0,t_n^q[$，$x_n^n=x_n^{nq}$，在$[0,t^q[$，$x^n=x^{nq}$. 同时，对每个$N\in \boldsymbol{N}$，当n,q足够大时有$t_n^q>N$，$t^q>N$，于是按定理15.10 $x_n^n\to x^n$. □

15.31 系 设g是$\boldsymbol{R}^d$到$\boldsymbol{R}^h$的连续映照且对某个$u>0$

$$g(x)=0, \quad |x|\leqslant u.$$

记

$$\bar{x}(t) = \sum_{s\leq t} g(\Delta x(s)),$$

则$x\mapsto(x,\bar{x})$是$\boldsymbol{R}^d$到$\boldsymbol{R}^{d+h}$的连续映照.

证明 取正数$u\in U(x)$使当$|x|<u$时$g(x)=0$. 假定$x_n\to x$. 利用定理15.30的记号，记

$$\bar{x}_n^q = \sum_{p=1}^{q} g(\Delta x_n(t_n^p))I(t\geqslant t_n^p),$$

$$\bar{x}^q = \sum_{p=1}^{q} g(\Delta x(t^p))I(t\geqslant t^p).$$

于是类似于定理15.30的证明我们有

$$\bar{x}_n^q\to\bar{x}^q, \quad \bar{x}_n\to\bar{x}, \quad 当 n\to\infty.$$

此外，因为$\bar{x}_n$、$\bar{x}$的跳时分别就是x_n、x的跳时，由定理15.27可得$(x_n,\bar{x}_n)\to(x,\bar{x})$，因此定理得证. □

15.32 注 回顾前面已提到的，若x是一个阶梯函数，则它有下列典则表示：

$$x(t) = \sum_{i\geqslant 0} x(t_i)I_{[t_i,t_{i+1}[}(t), \quad t\geqslant 0,$$

其中 i) $0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_i\leqslant\cdots$, $t_n\uparrow\infty$,

ii) $t_i<\infty\Rightarrow t_i<t_{i+1}$,

iii) $t_i<\infty\Leftrightarrow x(t_i)\neq x(t_{i-1})$, $\quad i\geqslant 1$.

若$n=\inf\{k: t_k=+\infty\}<\infty$，则对$k\geqslant n$，$x(t_k)=x(t_{n-1})$. t_j，$j\geqslant 1$，为x的跳时.

15.33 定理 假定x，x^n，$n\geqslant 1$为阶梯函数，(t_j)、(t_j^n)分别为

x, x^n 的跳时，$t_0 = t_0^n = 0$，则下列断言等价：

1）对所有 $j \geqslant 1$

$$f(t_j^n, x^n(t_j^n)) \to f(t_j, x(t_j)), \quad \text{当 } n \to \infty \tag{33.1}$$

其中 $f(t,x)$ 为由下式规定的 $\bar{\boldsymbol{R}}_+ \times \boldsymbol{R}$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}_+ \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ 的映照：

$$f(t,x) = \left(t, \frac{\operatorname{arctg} x}{2^t} \right). \tag{33.2}$$

2）当 $n \to \infty$ 时 $x^n \to x$ 且对所有 $N > 0$

$$\inf\{|\Delta x^n(t_j^n)| : 0 < t_j^n \leqslant N, n \geqslant 1\} > 0. \tag{33.3}$$

证明 显然对由(33.2)规定的 f，(33.1)等价于下列事实：

$$t_i^n \to t_i, \quad i \geqslant 1, \tag{33.4}$$

$$x^n(t_i^n) \to x(t_i), \quad i \in \{j \geqslant 0 : t_j < \infty\}. \tag{33.5}$$

同时(33.3)等价于下列事实：对所有 $N > 0$，存在 $\varepsilon_N > 0$，当 $0 < t_j^n \leqslant N$ 时有

$$|\Delta x^n(t_j^n)| \geqslant \varepsilon_N. \tag{33.6}$$

1)⇒2）定义分段线性函数 $\lambda_n(t)$ 如下：

$$\lambda_n(t) = t_j^n + (t - t_j^n)\frac{t_{j+1}^n - t_j^n}{t_{j+1} - t_j}, \quad t_j^n \leqslant t < t_{j+1}^n.$$

于是由(33.4)，(33.5)容易验证对每个 $N > 0$ 有

$$\| \lambda_n - e \|_N \to 0, \quad \| x^n \circ \lambda_n - x \|_N \to 0.$$

因而按照定理 15.10，$\rho(x^n, x) \to 0$. 另一方面，x 在 $[0, N]$ 至多只含有限个不连续点，故

$$\min_{0 < t_j \leqslant N} |\Delta x(t_j)| > 0. \tag{33.7}$$

(33.3)可由(33.4)，(33.5)和(33.7)推出.

2)⇒1）对 $N > 0$，设 ε_N 满足(33.6). 取 $\delta < \varepsilon_N \wedge \inf\{|\Delta x(t_j)| : 0 < t_j \leqslant N\}$. 运用(29.3)的记号，记 $t_j = t^j(x, \delta)$，$t_j^n = t^j(x^n, \delta)$，则当 $t_j < N$ 且 n 足够大时有 $t_j^n < N$，因而定理 15.30 产生

$$t_j^n = t^j(x^n, \delta) \to t^j(x, \delta) = t_j,$$

$$x^n(t_j^n) = x^n(t^j(x^n, \delta)) \to x(t^j(x, \delta)) = x(t_j).$$

由于 N 可以是任意正数，(33.4)和(33.5)成立，1)也就正确. □

注 若(33.3)不对，则(33.1)一般不能由 $x^n \to x$ 推出．例如 $x(t) \equiv 0, x^n(t) = \frac{1}{n} I_{[1/n,\infty[}(t), \rho(x^n, x) \to 0$．但 $t_1^n = \frac{1}{n}, t_1 = \infty$，(33.1)并不成立．

§3. 弱收敛与胎紧性

15.34 在这一节我们假定 S 是一个 Polish 空间：即在 S 上有一个距离 ρ，在 ρ 之下 S 是一个完备可分距离空间．以 $\mathscr{B} = \mathscr{B}(S)$ 表示 S 上的 Borel σ-域．令

$C_b(S)$：S 上的有界连续函数全体，

$C_u(S)$：S 上的有界一致连续函数全体，

$\mathscr{P}(S)$：$(S, \mathscr{B})$ 上的概率测度全体．

对 $f \in C_b(S)$，记

$$\| f \| = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

则 $\| \cdot \|$ 是一个模，在此模之下 $C_b(S)$ 为 Banach 空间，$C_u(S)$ 是可分的．对 $f \in C_b(S)$ 及 $\mu \in \mathscr{P}(S)$ 记

$$\mu(f) = \int_S f(x) \mu(dz).$$

易知，对 $\mu, \nu \in \mathscr{P}(S)$，若对所有闭集 F，$\mu(F) = \nu(F)$，则 $\mu = \nu$；若对一切 $f \in C_u(S)$，$\mu(f) = \nu(f)$，则 $\mu = \nu$.

15.35 定义 假定 $\mu_n, \mu \in \mathscr{P}(S)$，若

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(f) = \mu(f), \quad \forall f \in C_b(S), \tag{35.1}$$

则称 (μ_n) **弱收敛**于 μ 且表以 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

15.36 定义 设 $\mu \in \mathscr{P}(S)$，f 为 S 到另一 Polish 空间 S' 的映照，D_f 是 f 的不连续点全体．若 $\mu(D_f) = 0$，则 f 称为 μ-a.s.（**或** a.s.）**连续**．对 $A \subset S$，以 ∂A 表示 A 的边界．若 I_A 为 μ-a.s. 连续的，即 $\mu(\partial A) = 0$，称 A 为 μ-**连续集**．

注 若 $S' = \boldsymbol{R}$，则 $D_f \in \mathscr{B}$．一般情形下，$\mu(D_f) = 0$ 意味着 $D_f \subset A \in \mathscr{B}$ 且 $\mu(A) = 0$．于是一个 μ-a.s. 连续映照未必是 $\mathscr{B}$ 可测

的，但它关于 $\mathscr{B}$ 的 μ-完备化 $\mathscr{B}^{\mu}$ 是可测的．

下列定理给出了弱收敛的若干等价命题(见 Billingsley[1])．

15.37 定理 假设 $\mu_n,\mu\in\mathscr{P}(S)$，则 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$ 与下列任一个断言等价：

1) 对每个有界 μ-a.s. 连续 f 有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\mu(f), \tag{37.1}$$

2) $\forall f\in C_u(S)$，(37.1)成立．

3) $\overline{\lim}_n\mu_n(F)\leqslant\mu(F)$，$\forall$ 闭集 F，

4) $\underline{\lim}_n\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$，$\forall$ 开集 G，

5) $\lim_n\mu_n(A)=\mu(A)$，$\forall$ μ-连续集 A．

特别地，若 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$，h 为 S 到另一个 Polish 空间 S' 的 μ-a.s. 连续映照，则 $\mu_n\circ h^{-1}\xrightarrow{w}\mu\circ h^{-1}$．

从上述定理容易验证下列事实：设 $(\varphi_k)_{k\geq1}$ 为 $C_u(S)$ 中单位球面上的稠密子集，令

$$d(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}|\mu(\varphi_n)-\nu(\varphi_n)|,$$

则 d 是 $\mathscr{P}(S)$ 上的距离，且由 d 规定的拓扑与弱收敛规定的拓扑是一致的．

15.38 定义 设 $A\subset\mathscr{P}(S)$．若对每个 $\varepsilon>0$ 存在紧集 $K_\varepsilon\subset S$ 使

$$\inf_{\mu\in A}\mu(K_\varepsilon)>1-\varepsilon, \tag{38.1}$$

则称 A 为胎紧的

15.39 定理 设 $A\subset\mathscr{P}(S)$，则在弱收敛拓扑下 A 为相对紧的充要条件是 A 为胎紧的．

这是距离空间测度论的一个基本结果，它属于 Y. V. Prohorov，它的证明可在很多书中找到(参见 Billingsley [1])．

15.40 定理 $\mathscr{P}(\boldsymbol{D}^d)$ 中的一个子集 A 为胎紧的当且仅当下

列条件同时成立：

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{\mu\in A}\mu(\{x:\|x\|_N\geqslant a\})=0,\ \forall N\in\boldsymbol{N},\tag{40.1}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\mu\in A}\mu(\{x:\omega'(\delta,x,N)\geqslant\eta\})=0,\ \forall N\in\boldsymbol{N},\ \eta>0.\tag{40.2}$$

证明 必要性．由于 A 是胎紧的，对任一给定的 $\varepsilon>0$ 存在一个紧集 K_ε 使 $\inf_{\mu\in A}\mu(K_\varepsilon)>1-\varepsilon$．故按定理 15.22 有 $\sup\limits_{x\in K_\varepsilon}\|x\|_N<\infty$ 以及

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in K_\varepsilon}\omega'(\delta,x,N)=0.\tag{40.3}$$

这样对 $a>\sup\limits_{x\in K_\varepsilon}\|x\|_N$ 我们有 $\{x:\|x\|_N\geqslant a\}\subset K_\varepsilon^c$，

$$\sup_{\mu\in A}\mu(\{x:\|x\|_N\geqslant a\})\leqslant\sup_{\mu\in A}\mu(K_\varepsilon^c)<\varepsilon,$$

即(40.1)成立．

由(40.3)对任一 $\eta>0$ 存在 δ_η 使 $\sup\limits_{x\in K_\varepsilon}\omega'(\delta_\eta,x,N)<\eta$，因此 $\{x:\omega'(\delta_\eta,x,N)\geqslant\eta\}\subset K_\varepsilon^c$ 且

$$\sup_{\mu\in A}\mu(\{x:\omega'(\delta_\eta,x,N)\geqslant\eta\})\leqslant\sup_{\mu\in A}\mu(K_\varepsilon^c)<\varepsilon,$$

即(40.2)成立．

充分性．由(40.1)(40.2)对任一给定的 $\varepsilon>0$，$N\in\boldsymbol{N}$ 及 $k\geqslant 1$ 有 a_N 及 δ_{Nk} 使

$$\sup_{\mu\in A}\mu(\{x:\|x\|_N>a_N\})\leqslant\varepsilon 2^{-N-1},$$

$$\sup_{\mu\in A}\mu(\{x:\omega'(\delta_{Nk},x,N)\geqslant 1/k\})<\varepsilon 2^{-N-k-1}.$$

取

$$C_{N\varepsilon}=\{x:\|x\|_N\leqslant a_N\}\cap\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x:\omega'(\delta_{Nk},x,N)\leqslant 1/k\},$$

$$C_\varepsilon=\bigcap_{N=1}^{\infty}C_{N\varepsilon},$$

则定理 15.22 蕴含 C_ε 为相对紧的．但我们有

$$\inf_{\mu\in A}\mu(C_{N\varepsilon})\geqslant 1-\varepsilon 2^{-N},\ N\geqslant 1,\ \inf_{\mu\in A}\mu(C_\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon.$$

所以 A 是胎紧的． □

15.41 定义 假定对每个 n，X^n 是概率空间 $(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\boldsymbol{P}^n)$ 上的 S-值随机元，$\mathscr{L}(X^n)=\boldsymbol{P}^n\circ(X^n)^{-1}$ 是 X^n 的分布．X 是概率空间

$(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$上的$S$-值随机元，$\mathscr{L}(X)=\boldsymbol{P}\circ X^{-1}$是$X$的分布．若$\mathscr{L}(X^n)\xrightarrow{w}\mathscr{L}(X)$，则称$(X^n)$**按分布收敛于$X$**并表以$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$．若$\mathscr{L}(X^n)$是胎紧的，我们称$(X^n)$的分布集是**胎紧的**或简称$(X^n)$是**胎紧的**．

由弱收敛的定义容易看出$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$等价于对每个$f\in C_b(S)$

$$\boldsymbol{E}^n[f(X^n)]\to\boldsymbol{E}[f(X)],$$

其中$\boldsymbol{E}^n, \boldsymbol{E}$分别表示对应于$\boldsymbol{P}^n$，$\boldsymbol{P}$的期望．由定理15.39，$\{\mathscr{L}(X^n)\}$是相对紧的当且仅当$\{\mathscr{L}(X^n)\}$是胎紧的．

在上述定义中，对不同的n概率空间$(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \boldsymbol{P}^n)$可以是不同的．但不难看出我们可以找到一个概率空间$(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, \overline{P})$及其上的$S$-值随机元序列$(Y^n)$使$\mathscr{L}(X^n)=\mathscr{L}(Y^n), n\geqslant 1$．所以今后为简单计我们总假定随机元是定义在一个公共概率空间上．

15.42 定理 (Skorohod 表示定理) 假定$(\mu_0, \mu_n, n\geqslant 1)\subset\mathscr{P}(S)$且$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，则存在一个概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$及其上的一列$S$-值随机元$(X_n, n\geqslant 0)$使$\mu_n=\mathscr{L}(X_n), n\geqslant 0$以及

$$\lim_{n\to\infty}\rho(X_n, X_0)=0, \text{a.s.}.$$

证明 取$\Omega=[0,1]$，$\mathscr{F}=\mathscr{B}([0,1])$，并以$\boldsymbol{P}$表示$[0,1]$上的Lebesgue测度．首先，对$S$作如下分割：

$$S=\sum_i S_i,\quad S_{i_1\cdots i_k}=\sum_{j=1}^{\cdots}S_{i_1\cdots i_k j},\quad k\geqslant 1,$$

(这里$\sum$表示不相交集合的并)且满足

$$\operatorname{dia}(S_{i_1,\cdots,i_k})=\sup\{\rho(x,y): x,y\in S_{i_1\cdots i_k}\}\leqslant 2^{-k},\ k\geqslant 1,$$

$$\mu_n(\partial S_{i_1,\cdots,i_k})=0,\quad n\geqslant 0.$$

由于S是可分的，这样的分割是存在的(例如可用中心在S的可列稠密集上半径小于2^{-k-1}的μ_n连续球出发来分割)．

其次，对$[0,1]$作如下分割：

$$[0,1]=\sum_i\Delta_i^{(n)},\ \Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}=\sum_{j=1}^{\cdots}\Delta_{i_1\cdots i_k j}^{(n)},\ k\geqslant 1,\ n\geqslant 0,$$

$$|\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}|=\mu_n(S_{i_1\cdots i_k}),$$

其中$|\Delta|$表示区间Δ的长度且$\Delta^{(n)}_{i_1\cdots i_k}$按词典字序法排列．

再次，我们定义随机元X_n如下．令

$$X_n^{(k)}(\omega)=\begin{cases}x_{i_1\cdots i_k}, & \text{若 } \omega\in\Delta^{(n)}_{i_1\cdots i_k},\ S^0_{i_1\cdots i_k}\neq\varnothing,\\ x, & \text{若 } \omega\in\Delta^{(n)}_{i_1\cdots i_k},\ S^0_{i_1\cdots i_k}=\varnothing,\end{cases}$$

其中x是S中固定的一点，$x_{i_1\cdots i_k}$是$S_{i_1\cdots i_k}$的核$S^0_{i_1\cdots i_k}$中的一点．于是每个$X_n^{(k)}$是一个随机元．由于$x_{i_1\cdots i_{k+p}}\in S^0_{i_1\cdots i_{k+p}}\subset S^0_{i_1\cdots i_k}$，故有$\rho(X_n^{(k)}(\omega),X_n^{(k+p)}(\omega))\leqslant 2^{-k}$，$p\geqslant 1$．由$S$的完备性，存在$S$-值随机元$X_n$使

$$\lim_{k\to\infty}X_n^{(k)}(\omega)=X_n(\omega),\quad \omega\in\Omega,\quad n\geqslant 0.$$

往证$X_n\to X_0$ $\boldsymbol{P}$-a.s.．对任一$\varepsilon>0$，取k使$2^{-k}<\varepsilon/2$．若$\omega\in(\Delta^{(0)}_{i_1\cdots i_k})^0$，由于

$$|\Delta^{(n)}_{i_1\cdots i_j}|=\mu_n(S_{i_1\cdots i_j})\to\mu_0(S_{i_1\cdots i_j})=|\Delta^{(0)}_{i_1\cdots i_j}|,\quad j\geqslant 1,$$

同时由$\Delta^{(n)}_{i_1\cdots i_k}$的排列方法，存在$n_k$使当$n>n_k$时$\omega\in\Delta^{(n)}_{i_1\cdots i_k}$及

$$X_n^{(k)}(\omega)=x_{i_1\cdots i_k},\ X_0^{(k)}(\omega)=x_{i_1\cdots i_k},\quad n\geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}\rho(X_n,X_0)&\leqslant\rho(X_n,X_n^{(k)})+\rho(X_n^{(k)},X_0^{(k)})+\rho(X_0^{(k)},Z_0)\\&\leqslant 2\cdot 2^{-k}<\varepsilon.\end{aligned}$$

于是在$\bigcap_{k\geqslant 1}(\bigcup_{i_1\cdots i_k}(\Delta^{(0)}_{i_1\cdots i_k})^0)$上$X_n\to X$．

最后，我们证明$\mathscr{L}(X_n)=\mu_n$．记$\mathscr{C}=\{S_{i_1\cdots i_k},i_j\geqslant 1,1\leqslant j\leqslant k,k\geqslant 1\}$，则$\mathscr{C}$为$\pi$类且

$$\boldsymbol{P}(X_n^{(k+p)}\in S_{i_1\cdots i_k})=|\Delta^{(n)}_{i_1\cdots i_k}|=\mu_n(S_{i_1\cdots i_k}),\quad p\geqslant 1,$$

$$\boldsymbol{P}(X_n\in S_{i_1\cdots i_k})=\mu_n(S_{i_1\cdots i_k}).$$

这样$\mathscr{L}(X_n)$和μ_n在$\mathscr{C}$上一致，由单调类定理可得$\mathscr{L}(X_n)=\mu_n$．
□

15.43 定义　在这一节的其余部分我们只考虑右连左极过程，它们的分布是$\boldsymbol{D}^d$上的概率测度．以下X^n，X都表示$\boldsymbol{R}^d$-值右连左极过程，除非另有说明．

类似于(29.1)和(29.2)，规定

$$J(X)=\{t>0;P(\Delta X_t\neq 0)>0\},\tag{43.1}$$

$$U(X)=\{u>0;P(|\Delta X_t|=u\text{, 对某个 } t>0)>0\},\tag{43.2}$$

$$T_0(X,u)=0,$$

$$T_{p+1}(X,u)=\inf\{t>T_p(X,u):|\Delta X_t|\geqslant u\},p\geqslant 0.\tag{43.3}$$

15.44 引理 $J(X)$和$U(X)$至多为可列的.

证明 引理结论容易由下式推得:

$$J(X)=\bigcup_{n,p\geqslant 1}\left\{t;P\left(T_p\left(X,\frac{1}{n}\right)=t\right)>0\right\},$$

$$U(X)=\bigcup_{n,p\geqslant 1}\left\{u:P\left(|\Delta X_{T_p(X,\frac{1}{n})}|=u,T_p\left(X,\frac{1}{n}\right)<\infty\right)>0\right\}.\quad \square$$

15.45 定理 假定$X_n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$,则

1) 沿$D=\mathbf{R}_+\setminus J(X)X^n$的有限维分布收敛于$X$的有限维分布,即

$$(X^n_{t_1},\cdots,X^n_{t_p})\xrightarrow{\mathscr{L}}(X_{t_1},\cdots,X_{t_p})\quad t_i\in D,\ p\geqslant 1.$$

(我们也表以$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}_f(D)}X$.)

2)假定g是$\overline{\mathbf{R}}_+\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$上的连续函数,且满足$g(\infty,x,y)=0$,又$u\in U(X)$,则

$$(g(T_i(X^n,u),X^n_{T_i(X^n,u)},\Delta X^n_{T_i(X^n,u)}),\ 1\leqslant i\leqslant k)$$

$$\xrightarrow{\mathscr{L}}(g(T(X,u),X_{T_i(X,u)},\Delta X_{T_i(X,u)}),1\leqslant i\leqslant k).$$

3) 若g是$\mathbf{R}^d$上连续函数且在0的某邻域为零,则

$$(X^n,\Sigma_g(\Delta X^n))\xrightarrow{\mathscr{L}}(X,\Sigma_g(\Delta X)).$$

证明 按定理15.37,若h是$\mathscr{L}(X)$-a.s.连续,则$h(X^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}h(X)$.

1)取$h(x)=(x(t_1),\cdots x(t_p)),t_i\in D$,则由定理15.12.2)$h$是$\mathscr{L}(X)$-a.s.连续的.

2)运用(29.3)的记号,令

$$h(x)=(g(t^i(x,u),x(t^i(x,u)),(\Delta x(t^i(x,u)),1\leqslant i\leqslant k).$$

则由关于g的假定及定理15.30,h是$\mathscr{L}(X)$-a.s.连续的.

3) 取 $h(x)=\{x,\sum_{s\leq\cdot}g(\Delta x(s))\}$. 则由系 15.31,$h$ 是 $\mathscr{L}(X)$-a.s. 连续的. □

15.46 引理 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$ 当且仅当下列条件同时成立:

i) (X^n) 是胎紧的.

ii) $(\mathscr{L}(X^n))$ 可能的极限点是唯一的.

证明 由于 Prokhorov 定理这是明显的. □

由于上面的定理,为了建立$(\mathscr{L}(X^n))$的弱收敛,我们可分别地验证$(\mathscr{L}(X^n))$的胎紧性和极限点的唯一性.

设 D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 中的一个稠子集,若 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}_f(D)}X$,则容易知道其极限点是唯一的.

由定理 15.40,我们还有下列定理.

15.47 定理 (X^n)为胎紧的充要条件是

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{n\geq1}\boldsymbol{P}\{\sup_{t\leq N}|X_t^n|\geq a\}=0,\ \forall\ N\in\boldsymbol{N},\tag{47.1}$$

$$\lim_{\delta\to0}\sup_{n\geq1}\boldsymbol{P}(\omega'(\delta,X^n,N)\geq\eta)=0,\ \forall\ N\in\boldsymbol{N},\ \eta>0,\tag{47.2}$$

或等价地

$$\lim_{a\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\boldsymbol{P}\{\sup_{t\leq N}|X_t^n|\geq a\}=0,\ \forall\ N\in\boldsymbol{N},\tag{47.3}$$

$$\lim_{\delta\to0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\boldsymbol{P}(\omega'(\delta,X^n,N)\geq\eta)=0,\ \forall\ N\in\boldsymbol{N},\ \eta>0.\tag{47.4}$$

15.48 定义 若$(\mu_n)\subset\mathscr{P}(\boldsymbol{D}^d)$为胎紧的,且对$(\mu_n)$的每个可能的极限点 μ 有 $\mu(\boldsymbol{C}^d)=1$,则(μ_n)称为是 **C-胎紧的**. 若$(\mathscr{L}(X^n))$为 C-胎紧的,(X^n)也称为是 **C-胎紧的**.

15.49 引理 下列断言等价:

1) (X^n)是 C 胎紧的,

2) (X^n)是胎紧的且

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}\{\sup_{t\leq N}|\Delta X_t^n|\geq\varepsilon\}=0,\quad\forall\ N\in\boldsymbol{N},\varepsilon>0,\tag{49.1}$$

3)

$$\lim_{a\to\infty}\overline{\lim_{n}}\boldsymbol{P}\{\sup_{t\leq N}|X_t^n|\geq a\}=0,\ \forall\ N\in\boldsymbol{N},\tag{49.2}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n}}\boldsymbol{P}(w(\delta,X^n,N)\geqslant\eta)=0,\ \forall\ N\in\boldsymbol{N},\ \eta>0.$$

(49.3)

证明 1)⇒2). 在1)之下(X^n)是胎紧的. 因而只需对(X^n)的任一收敛子列证明(49.1). 为简单计就假定$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$,则$X$是连续过程且$J(X)=\emptyset$. 这样由引理15.20及定理15.37可引出

$$\sup_{t\leqslant N}|\Delta X_t^n|\xrightarrow{\mathscr{L}}\sup_{t\leqslant N}|\Delta X_t|,\quad \forall\ N>0.$$

但因X连续,$\sup_{t\leqslant N}|\Delta X_t|=0$,故(49.1)成立.

2)⇒3). 由(X^n)的胎紧性,(47.3)即(49.2)是必要的. (49.3)可由(47.4),(49.1)及下列不等式推出:

$\omega(\delta,x,N)\leqslant 2\omega'(\delta,x,N)+\sup_{t\leqslant N}|\Delta x(t)|.$

3)⇒1). 显然,(49.2)和(49.3)蕴含了(X^n)的胎紧性. 若$(X^{n'})$为(X^n)的收敛子列且$X^{n'}\xrightarrow{\mathscr{L}}X$,则引理15.20和定理15.37引出

$$\sup_{s\leqslant t}|\Delta X_s^{n'}|\xrightarrow{\mathscr{L}}\sup_{s\leqslant t}|\Delta X_s|,\quad \forall\ t\notin J(X).$$

但$\sup_{s\leqslant t}|\Delta X_s^n|\leqslant\omega(\delta,X^n,t)$,因而当$t\in J(X)$时由(49.3)可得$\sup_{s\leqslant t}|\Delta X_s|=0$ a.s.. 所以X是连续的,(X^n)为C-胎紧的. □

15.50 引理 假定对所有$n,q\in\boldsymbol{N}$,过程X^n有下列分解:

$$X^n=U^{nq}+V^{nq}+W^{nq},$$

其中 i) 对每个q,$(U^{nq})_{n\geqslant 1}$是胎紧的,ii) 对每个q,$(V^{nq})_{n\geqslant 1}$是胎紧的,且有实数列(a_q)满足$\lim_{q\to\infty}a_q=0$以及

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}(\sup_{t\leqslant N}|\Delta V_t^{nq}|>a_q)=0,\quad \forall\ N\in\boldsymbol{N},\tag{50.1}$$

iii)

$$\lim_{q\to\infty}\overline{\lim_{n}}\boldsymbol{P}(\sup_{t\leqslant N}|W_t^{nq}|>\eta)=0,\quad \forall\ N\in\boldsymbol{N},\ \eta>0.\tag{50.2}$$

则(X^n)是胎紧的.

证明 由$(U^{nq})_{n\geqslant 1}$,$(V^{nq})_{n\geqslant 1}$的胎紧性和(50.2),(X^n)满足(47.3). 运用下列易证的不等式

$$\omega(\delta,x,N)\leqslant 2\sup_{t\leqslant N}|x(t)|,$$

$$\omega'(\delta, x+y, N) \leqslant \omega'(\delta, x, N) + \omega(2\delta, y, N),$$
$$\omega(\delta, x, N) \leqslant 2\omega'(\delta, x, N) + \sup_{t\leqslant N} |\Delta x(t)|,$$

可得

$$\begin{aligned}\omega'(\delta, X^n, N) &\leqslant \omega'(\delta, U^{nq}+V^{nq}, N) + \omega(2\delta, W^{nq}, N) \\ &\leqslant \omega'(\delta, U^{nq}, N) + 2\omega'(2\delta, V^{nq}, N) \\ &\quad + \sup_{t\leqslant N} |\Delta V_t^{nq}| + 2\sup_{t\leqslant N} |W_t^{nq}|.\end{aligned}$$

对任意的 $\varepsilon>0, \eta>0$，由(50.2)存在 q 使 $a_q \leqslant \eta$ 且

$$\overline{\lim_n} \boldsymbol{P}(\sup_{t\leqslant N} |W_t^{nq}| > \eta) \leqslant \varepsilon.$$

现由假定 i)、ii)可选 n_0 及 $\delta>0$ 使当 $n\geqslant n_0$ 时有

$$\boldsymbol{P}(\omega'(\delta, U^{nq}, N) > \eta) < \varepsilon, \quad \boldsymbol{P}(\omega'(2\delta, V^{nq}, N) > \eta) < \varepsilon,$$
$$\boldsymbol{P}(\sup_{t\leqslant N} |\Delta V^{nq}| > \eta) < \varepsilon, \quad \boldsymbol{P}(\sup_{t\leqslant N} |W_t^{nq}| > \eta) < 2\varepsilon.$$

于是 $\boldsymbol{P}(\omega'(\delta, X^n, N) > 6\eta) < 5\varepsilon$，$(X^n)$ 满足(47.4)，故 (X^n) 为胎紧的． □

注 若对每个 q (V^{nq}) 为 C-胎紧的，则 ii)成立．

15.51 系 设 (Y^n) 和 (Z^n) 为两列右连左极 $\boldsymbol{R}^d$-值过程．若 (Y^n) 为 C-胎紧的，(Z^n) 为胎紧的(C-胎紧的)，则 $(Y^n - Z^n)$，(Y^n, Z^n) 为胎紧(C-胎紧)的．

证明 对于 (Y^n+Z^n) 只需取 $U^{nq}=Z^n, V^{nq}=Y^n, W^{nq}=0$ 及 $a_q = \dfrac{1}{q}$ 运用引理 15.50 即可．应用定理 15.27 的同样做法可得关于 (Y^n, Z^n) 的结论． □

15.52 引理 若 X^n 允许有分解式 $X^n = Y^{nq} + Z^{nq}$ 满足

i) $\lim_{q\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \boldsymbol{P}(\sup_{t\leqslant N} |Z_t^{nq}| > \eta) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}, \eta > 0.$ (52.1)

ii) 对每个 $q>1$，当 $n\to\infty$ 时，$Y^{nq} \xrightarrow{\mathscr{L}} W^q$ 且

$$W^q \xrightarrow{\mathscr{L}} W \quad q\to\infty. \tag{52.2}$$

则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} W$.

证明 对 $x, y \in \boldsymbol{D}^d$，由(7.1)可推出 $\rho(x,y) \leqslant \|x-y\|_N + 2^{-N+1}$. 对任一 ε 取 N 满足 $2^{-N+1} < \varepsilon$. 于是对任一闭集 F 有

$$P(X^n \in F) \leqslant P(Y^{nq} \in F^{2\varepsilon}) + P(\sup_{t \leqslant N} |Z^{nq}| > \varepsilon),$$

其中 $F^{2\varepsilon} = \{y : \rho(x,y) < 2\varepsilon\}$. 应用定理 15.37 可得

$$\begin{aligned}\overline{\lim_n} P(X^n \in F) &\leqslant \overline{\lim_n} P(Y^{nq} \in F^{2\varepsilon}) + \overline{\lim_n} P(\sup_{t \leqslant N} |Z^{nq}| > \varepsilon) \\ &\leqslant P(W^q \in \overline{F^{2\varepsilon}}) + \overline{\lim_n} P(\sup_{t \leqslant N} |Z^{nq}| > \varepsilon).\end{aligned}$$

令 $q \to \infty$, 由(52.1)和(52.2)得到

$$\overline{\lim_n} P(X^n \in F) \leqslant \overline{\lim_q} P(W^q \in \overline{F^{2\varepsilon}}) \leqslant P(W \in \overline{F^{2\varepsilon}}).$$

由于 $F = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{F^\varepsilon}$, 令 $\varepsilon \downarrow 0$ 有

$$\overline{\lim_n} P(X^n \in F) \leqslant P(W \in F).$$

现在引理的结论可由定理 15.37 推出. □

15.53 定义 设 A, B 为两个增过程. 若 $A - B$ 也是增过程, 则称 A **强控制** B 并表以 $B \prec A$.

15.54 定理 1) 设 $(X^n)(Y^n)$ 为两列增过程, $X^n \prec Y^n, n \geqslant 1$. 若 (Y^n) 是胎紧(C-胎紧)的, 则 (X^n) 亦然.

2) 设 (X^n) 是实有限变差过程序列, $Y^n = \mathrm{Var}(X^n)$ 是 X^n 的变差过程. 若 (Y^n) 是胎紧(C-胎紧)的, 则 (X^n) 亦然.

证明 1) 由于

$$|X_t^n - X_s^n| \leqslant |Y_t^n - Y_s^n|, \quad X_t^n \leqslant Y_t^n, \tag{54.1}$$

我们有 $\sup_{t \leqslant N} |X_t^n| \leqslant \sup_{t \leqslant N} |Y_t^n|$, $\omega'(\delta, X^n, N) \leqslant \omega'(\delta, Y^n, N)$, $\omega(\delta, X^n, N) \leqslant \omega(\delta, Y^n, N)$. 应用定理 15.47 和引理 15.49, (X^n) 的胎紧性(C-胎紧性)可由 (Y^n) 的胎紧性(C-胎紧性)推出.

2) 因为(54.1)仍成立, 1)的证明保持有效. □

下列胎紧性准则属于 D. Aldous.

15.55 定理 设 (X^n) 是带流概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t), \boldsymbol{P})$ 上的适应右连左极 $\boldsymbol{R}^d$-值过程序列, 则 (X^n) 为胎紧的充分条件是下列两个条件同时成立:

$$\lim_{a \to \infty} \overline{\lim_n} P(\sup_{t \leqslant N} |X_t^n| \geqslant a) = 0, \ \forall\, N \in \boldsymbol{N}, \tag{55.1}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_n} \sup_{S, T \in \mathscr{T}_N, S \leqslant T \leqslant S + \delta} P(|X_T^n - X_S^n| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

$$\forall\, N \in \boldsymbol{N}, \quad \varepsilon > 0, \tag{55.2}$$

其中 $\mathscr{T}_N$ 为不超过 N 的停时全体.

证明 由于(55.1)就是(47.3),只要由(55.2)推出(47.4)即可.

对固定的 $N\in\boldsymbol{N}$, $\varepsilon>0$ 及 $\eta>0$,由于(55.2)对每个 $\tau>0$ 有 $\delta(\tau)>0$ 及 $n(\tau)\in\boldsymbol{N}$ 满足

$$n\geqslant n(\tau), S,T\in\mathscr{T}_N, S\leqslant T\leqslant S+\delta(\rho)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{P}(|X_T^n-X_S^n|\geqslant\eta)\leqslant\tau. \tag{55.3}$$

令 $\qquad S_0^n=0,\ S_{k+1}^n=\inf\{t>S_k^n: |X_t^n-X_{S_k^n}^n|\geqslant\eta\}.$

应用(55.3)于 $\tau=\varepsilon$, $S=S_k^n\wedge N$, $T=S_{k+1}^n\wedge(S_k^n+\delta(\tau))\wedge N$,并注意到当 $S_{k+1}^n<\infty$ 时 $|X_{S_{k+1}^n}^n-X_{S_k^n}^n|\geqslant\eta$,我们有

$$n\geqslant n(\varepsilon), k\geqslant 1\Rightarrow \boldsymbol{P}(S_{k+1}^n\leqslant N, S_{k+1}^n\leqslant S_k^n+\delta(\varepsilon))\leqslant\varepsilon.$$

选取 $q\in N$ 满足 $q\delta(\varepsilon)>2N$. 于是应用(55.3)可得出

$$n\geqslant n_0=n(\varepsilon)\vee n\left(\frac{\varepsilon}{q}\right), k\geqslant 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{P}\left(S_{k+1}^n\leqslant N, S_{k+1}^n\leqslant S_k^n+\delta\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{q}. \tag{55.4}$$

因为 $S_q^n=\sum_{k=1}^q(S_k^n-S_{k-1}^n)$,我们有

$$\frac{\delta(\varepsilon)q}{2}\boldsymbol{P}(S_q^n\leqslant N)>N\boldsymbol{P}(S_q^n\leqslant N)\geqslant\boldsymbol{E}(S_q^nI_{[S_q^n\leqslant N]})$$
$$=\boldsymbol{E}\left(\sum_{k=1}^q(S_k^n-S_{k-1}^n)I_{[S_q^n\leqslant N]}\right)$$
$$\geqslant\sum_{k=1}^q\boldsymbol{E}((S_k^n-S_{k-1}^n)I(S_q^n\leqslant N, S_k^n-S_{k-1}^n>\delta(\varepsilon)))$$
$$\geqslant\sum_{k=1}^q\delta(\varepsilon)[\boldsymbol{P}(S_q^n\leqslant N)-\boldsymbol{P}(S_q^n\leqslant N, S_k^n-S_{k-1}^n\leqslant\delta(\varepsilon))]$$
$$\geqslant\delta(\varepsilon)q\boldsymbol{P}(S_q^n\leqslant N)-\delta(\varepsilon)q\varepsilon,\quad n\geqslant n(\varepsilon).$$

因此

$$\boldsymbol{P}(S_q^n\leqslant N)<2\varepsilon,\quad 当\ n\geqslant n(\varepsilon). \tag{55.5}$$

再令 $A^n=[S_q^n>N]\cap\left(\bigcap_{k=1}^q\left[S_k^n-S_{k-1}^n>\delta\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)\right]\right)$. 由(55.4)和(55.5)得到

$$P(A^n)>1-3\varepsilon,\quad 当 n\geqslant n_0. \tag{55.6}$$

现在若 $\omega\in A^n$，取 $r=\inf(i:S_i^n>N)$，$t_i=S_i^n$，$i\leqslant r-1$ 并考虑 $[0,N]$ 的分割：$0=t_0<t_1<\cdots<t_r=N$. 由 A^n 及 S_i^n 的定义可得

$$\overline{\omega}([t_{i-1},t_i[,X^n)\leqslant 2\eta,\ 1\leqslant i\leqslant r,$$

$$t_i-t_{i-1}\geqslant\delta\left(\frac{\varepsilon}{q}\right),\ 1\leqslant i\leqslant r-1,$$

因此 $\omega'\left(\delta\left(\frac{\varepsilon}{q}\right),X^n(\omega),N\right)\leqslant 2\eta$. 于是由(55.6)推出

$$P\left(\omega'\left(\delta\left(\frac{\varepsilon}{q}\right),X^n,N\right)>2\eta\right)<3\varepsilon,\ 当 n\geqslant n_0.$$

所以(47.4)成立，(X^n) 是胎紧的． □

15.56 定理 设 (X^n) 为局部平方可积鞅序列．若 $(\langle X^n\rangle)$ 是 C-胎紧的，则 (X^n) 是胎紧的．

证明 由于 $(X^n)^2$ 被可料增过程 $\langle X^n\rangle$ 控制，对 $a,b>0$ 由 Lenglart 不等式(系 9.24)有

$$P\left(\sup_{t\leqslant N}|X_t^n|>a\right)\leqslant\frac{b}{a^2}+P(\langle X^n\rangle_N\geqslant b),$$

$$\overline{\lim_n}P\left(\sup_{t\leqslant N}|X_t^n|>a\right)\leqslant\frac{b}{a^2}+\overline{\lim_{n\to\infty}}P(\langle X^n\rangle_N\geqslant b).$$

依次令 $n\to\infty$ 和 $b\to\infty$ 可得(55.1)． □

其次，对 $S,T\in\mathscr{T}_N$，$S\leqslant T\leqslant S+\delta$，考虑 $N^n=X^n-(X^n)^S$，$(N^n)^2$ 被 $\langle X^n\rangle-\langle X^n\rangle^S$ 所控制．对 $\varepsilon>0$ 及 $\eta>0$，再用 Lenglart 不等式有

$$P(|X_T^n-X_S^n|>\varepsilon)\leqslant\frac{\eta}{\varepsilon^2}+P(\langle X^n\rangle_T-\langle X^n\rangle_S\geqslant\eta)$$

$$\leqslant\frac{\eta}{\varepsilon^2}+P(\omega(\delta,\langle X^n\rangle,N)\geqslant\eta).$$

由 $(\langle X^n\rangle)$ 的 C-胎紧性及(49.3)可推出

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_n}\sup_{S,T\in\mathscr{T}_N,S\leqslant T\leqslant S+\delta}P(|X_T^n-X_S^n|>\varepsilon)\leqslant\frac{\eta}{\varepsilon^2}.$$

因为 η 可是任意正数，(55.2)成立．(X^n) 的胎紧性就由定理 15.55 推得． □

§ 4. 跳跃过程的弱收敛

在下一章讨论半鞅弱收敛的一般条件之前，我们先在这一节给出跳跃过程弱收敛的条件，因为对跳跃过程我们可用跳时和跃度的弱收敛来刻划其弱收敛．这一处理法的优越性在于它可避免直接验证胎紧性并得到弱收敛的必要条件．Markov 跳跃过程的弱收敛与由 Markov 序列逼近 Markov 跳跃过程的问题也将在这一节讨论．

15.57 引理 设 $X, X^n, n \geqslant 1$ 为跳跃过程，$\rho(X^n, X) \xrightarrow{P} 0$（对应地$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$）且有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} P(0 < |\Delta X^n_{T_1^n} I_{[T_1^n \leqslant N]}| \leqslant \varepsilon) = 0, \ \forall\ N > 0, \qquad (57.1)$$

其中 T_1^n 是 X^n 的第一个跳时，则对 $f(t, x) = (t, 2^{-t}\operatorname{arctg} x)$ 有

$$f(T_1^n, X^n_{T_1^n}) \xrightarrow{P} (\text{对应地} \xrightarrow{\mathscr{L}}) f(T_1, X_{T_1}). \qquad (57.2)$$

证明 由定理 15.42，只需对概率收敛的情况加以证明．取 $u_k \downarrow 0, u_k \in U(X)$．则定理 15.30 包含了 $X_0^n \xrightarrow{P} X_0$，

$$T_1(X^n, u_k) \xrightarrow{P} T_1(X, u_k), \forall\ k \geqslant 1, \qquad (57.3)$$

且在$[T_1(X, u_k) < \infty]$上有

$$\Delta X^n(T_1(X^n, u_k)) \xrightarrow{P} \Delta X(T_1(X, u_k))^{1)}, \ \forall\ k \geqslant 1. \quad (57.4)$$

对给定的 $\varepsilon > 0, \eta > 0$，由(57.1)存在 t, k 使对所有 n 有

$$P(t \leqslant T_1 < \infty) + P(0 < |\Delta X(T_1)| I_{[T_1 \leqslant t]} < u_k)$$
$$+ P(0 < |\Delta X^n(T_1^n)| I_{[T_1^n \leqslant t]} < u_k) < \eta.$$

于是

$$P(|T_1^n - T_1| \geqslant \varepsilon \text{ 或 } |\Delta X^n(T_1^n) - \Delta X(T_1)| \geqslant \varepsilon, T_1 < \infty)$$
$$\leqslant P(t \leqslant T_1 < \infty) + P(0 < |\Delta X^n(T_1^n)| I_{[T_1^n < t]} < u_k)$$

---

1) 为排版方便，我们以 $\Delta X(t)$ 代替 ΔX_t.

$$
\begin{aligned}
&+\boldsymbol{P}(0<|\Delta X(T_1)|I_{[T_1<t]}<u_k)\\
&+\boldsymbol{P}(T_1<t,T_1^n\geqslant t,|\Delta X(T_1)|I_{[T_1<t]}\geqslant u_k)\\
&+\boldsymbol{P}(|T_1^n-T_1|\geqslant\varepsilon\text{ 或 }|\Delta X^n(T_1^n)-\Delta X(T_1)|\geqslant\varepsilon,\\
&|\Delta X^n(T_1^n)|I_{[T_1^n\leqslant t]}\geqslant u_k,|\Delta X(T_1)|I_{[T_1\leqslant t]}\geqslant u_k)\\
&\leqslant\eta+\boldsymbol{P}(T_1^n\geqslant t,T_1(X,u_k)<t)\\
&+\boldsymbol{P}(|T_1(X^n,u_k)-T_1(X,u_k)|\geqslant\varepsilon,T_1(X,u_k)\leqslant t)\\
&+\boldsymbol{P}(|\Delta X^n(T_1(X^n,u_k))-\Delta X(T_1(X,u_k))|\geqslant\varepsilon,T_1(X,u_k)\leqslant t).
\end{aligned}
\tag{57.5}
$$

由(57.3)可得

$$
\boldsymbol{P}(T_1^n\geqslant t,T_1(X,u_k)<t)\leqslant\boldsymbol{P}(T_1(X^n,u_k)\geqslant t,T_1(X,u_k)<t)\to 0.
\tag{57.6}
$$

由(57.3),(57.4)和(57.6),在(57.5)右端依次令 $n\to\infty$ 和 $\eta\to 0$ 导出

$$
\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}(|T_1^n-T_1|\geqslant\varepsilon\text{ 或 }|\Delta X^n(T_1^n)-\Delta X(T_1)|\geqslant\varepsilon,T_1<\infty)=0.
\tag{57.7}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}(T_1^n<t,T_1=\infty)\\
\leqslant&\boldsymbol{P}(0<|\Delta X^n(T_1^n)|I_{[T_1^n\leqslant t]}<u_k)\\
&+\boldsymbol{P}(|\Delta X^n(T_1^n)|I_{[T_1^n\leqslant t]}\geqslant u_k,T_1=\infty)\\
\leqslant&\eta+\boldsymbol{P}(T_1(X^n,u_k)\leqslant t,T_1(X,u_k)=\infty).
\end{aligned}
$$

依次令 $n\to\infty$ 和 $\eta\to 0$ 还有

$$
\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}(T_1^n<t,T_1=\infty)=1.
\tag{57.8}
$$

(57.7)(57.8)和 $X_0^n\xrightarrow{P}X_0$ 即表明 $f(T_1^n,X^n(T_1^n))\xrightarrow{P}f(T_1,X(T_1))$. □

15.58 定理 假定 $X,X^n,n\geqslant 1$ 为跳跃过程,(T_j),(T_j^n)分别是 X,X_j^n 的跳时,则下列命题等价

1) 对 $f(t,x)=(t,2^{-t}\mathrm{arctg}x)$,

$$
(f(T_j^n,X_{T_j^n}^n),j\geqslant 0)\xrightarrow{\mathscr{L}}(f(T_j,X_{T_j}),j\geqslant 0).
\tag{58.1}
$$

2) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P(0<|\Delta X^n_{T^n_j}|I_{[T^n_j\leqslant t]}<\varepsilon)=0 \quad \forall\ j\geqslant 1,\ t>0. \tag{58.2}$$

证明 1) 1)⇒2). 由定理 15.42,无损一般性可认为

$$f(T^n_j, X^n_{T^n_j})\to f(T_j, X_{T_j}) \text{ a.s.},\ \forall\ j>0.$$

则由定理 15.33 可知 $\rho(X^n, X)\to 0$ a.s. 且

$$\inf\{|\Delta X^n_{T^n_j}|: 0<T^n_j\leqslant t, n\geqslant 1\}>0 \quad \text{a.s.},\quad \forall\ t>0.$$

因而 2)成立.

2)⇒1). 也由定理 15.42 可认为 $\rho(X^n, X)\to 0$ a.s.. 于是由引理 15.57 可得 $f(T^n_1, X^n_{T^n_1})\xrightarrow{P} f(T_1, X_{T_1})$.

取 $\widetilde{X}^n = X^n - X_{T^n_1}1_{[T^n_1,\infty[}$, $\widetilde{X}=X-X_{T_1}1_{[T_1,\infty[}$. 则由定理 15.30 知 $\rho(\widetilde{X}_n, \widetilde{X})\xrightarrow{P} 0$. 由此 $f(T^n_2, \Delta X^n_{T^n_2})\xrightarrow{P} f(T_2, \Delta X_{T_2})$, 所以 $f(T^n_2, X^n_{T^n_2})\xrightarrow{P} f(T_2, X_{T_2})$. 再由归纳法易得

$$f(T^n_j, X^n_{T^n_j})\xrightarrow{P} f(T_j, X_{T_j}),\ \forall\ j\geqslant 1,$$

所以(58.1)成立(参见问题 15.8). □

15.59 系 设 $X, X^n, n\geqslant 1$ 为计数过程, $X_0=X^n_0=0$, (T_j) (T^n_j)分别为 X, X^n 的逐次跳时, 则下列命题等价:

1) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,

2) $(T^n_j, j\geqslant 1)\xrightarrow{\mathscr{L}}(T_j, j\geqslant 1)$,

3) 对 $\boldsymbol{R}_+$中稠密集 D

$$X^n_t \xrightarrow{\mathscr{L}_1(D)} X_t,\quad t\in D \tag{59.1}$$

证明 1)⇔2)是明显的, 因为对计数过程 X, X^n 在$[T^n_j<\infty]$上 $X^n_{T^n_j}=j$, 在$[T_j<\infty]$上 $X_{T_j}=j$.

1)⇒3)也是明显的. 反之, 对 $t_j\in D, j\in \boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{P}(T^n_j\leqslant t_j, 1\leqslant j\leqslant k)=\boldsymbol{P}(X^n_{t_j}\geqslant j, 1\leqslant j\leqslant k)$$

$$=\boldsymbol{P}(X^n_{t_j}\geqslant j-\frac{1}{2}, 1\leqslant j\leqslant k)\to \boldsymbol{P}(X_{t_j}\geqslant j-\frac{1}{2}, 1\leqslant j\leqslant k)$$

$$= P(X_{t_j} \geqslant j, 1 \leqslant j \leqslant k) = P(T_j \leqslant t_j, 1 \leqslant j \leqslant k),$$

因而 2)和 1)也成立. □

为了讨论 Markov 跳跃过程的弱收敛，我们先叙述有关 Markov 序列弱收敛的一些基本结果.

15.60 定义 假定 S 为 Polish 空间，ε 是 S 上的 Borel σ-域. 设 $N(x,A)$，$N^n(x,A)$，$n \geqslant 1$ 为 (S,ε) 上的转移概率核，g，g_n，$n \geqslant 1$ 为 S 上的函数.

i) 若对所有 $f \in C_b(S)$，$N(\cdot, f) \in C_b(S)$，则 N 称为 Feller 的.

ii) 若对所有 $f \in C_b(S)$ 及紧集 $K \subset S$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |N^n(x,f) - N(x,f)| = 0,$$

则称 (N^n) **在紧集上一致收敛于** N 并记为 $N^n \xrightarrow{uc} N$. 若 (g_n) 在紧集上收敛于 g，我们也表以 $g_n \xrightarrow{uc} g$.

iii) 若对一切 $f \in C_b(S)$ 及满足 $x_n \to x$ 的序列 $(x_n) \subset S$ 有

$$\lim_{n\to\infty} N^n(x_n, f) = N(x,f),$$

我们就表以 $N^n \Rightarrow N$. 若对所有满足 $x_n \to x$ 的 $(x_n) \subset S$ 有 $\lim_{n\to\infty} g_n(x_n) = g(x)$，则表以 $g_n \Rightarrow g$.

下列引理的证明是容易的，其证明留给读者.

15.61 引理 设 N，N^n，$n \geqslant 1$ 为转移概率核，g，g_n，$n \geqslant 1$ 为 Polish 空间 S 上的函数. 则

1) $N^n \Rightarrow N$ 当且仅当 N 为 Feller 的且 $N^n \xrightarrow{uc} N$.

2) $g^n \Rightarrow g$ 当且仅当 g 为连续的且 $g^n \xrightarrow{uc} g$.

15.62 引理 设 $X = (X_k, k \geqslant 0)$，$X^n = (X_k^n, k \geqslant 0)$，$n \geqslant 1$ 为 S-值时齐 Markov 序列，μ，μ^n 分别为初始分布，p，p^n 分别为 X，X^n 的一步转移概率核. 下列命题等价：

1) $p^n \Rightarrow p$

2) 对所有满足 $\mu^n \xrightarrow{w} \mu$ 的 μ^n，$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ 成立.

此外，在此情况下若$\mu^n \xrightarrow{w} \mu$，则对每个$S$到$S$的连续函数$f$有

$$(f(X_k^n), k\geqslant 0)\xrightarrow{\mathscr{L}}(f(X_k), k\geqslant 0).$$

设$X=(X_t)$为一个实 Markov 跳跃过程，$(T_k, k\geqslant 1)$为它的跳时序列，$T_0=0$. 则由强 Markov 性不难推出$(T_k, X_{T_k})_{k\geqslant 0}$为一个$\overline{\boldsymbol{R}}_+\times\overline{\boldsymbol{R}}$-值时齐 Markov 序列．它也称为$X$的**跳跃链**．由于$X$的分布由$X$的初始分布$\mu$和$(T_k, X_{T_k})$的一步转移概率$R(s,x;dt,dy)$所唯一确定，所以也记为$\mathscr{L}(X)\sim(\mu,R)$.

15.63 引理　假定X、X^n，$n\geqslant 1$为 Markov 跳跃过程，$\mathscr{L}(X^n)\sim(\mu^n,R^n)$，$\mathscr{L}(X)\sim(\mu,R)$，又$(T_k, X_{T_k}, k\geqslant 0)$为$X$的跳跃链．若

i) $\mu_k^n \xrightarrow{w} \mu$.

ii) 对$f(t,x)=(t, 2^{-1}\mathrm{arctg}x)$，$s_n\to s<\infty$，$x_n\to x$及所有$g\in C_b(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R})$

$$\iint g\circ f(t,y)R^n(s_n x_n;dt,dy)\to\iint g\circ f(t,y)R(s,x;dt,dy). \tag{63.1}$$

则$(f(T_k^n, X_{T_k^n}), k\geqslant 0)\xrightarrow{\mathscr{L}}(f(T_k, X_{T_k}), k\geqslant 0)$和$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

证明　首先我们证明对$s=\infty$(63.1)也成立．事实上由R的定义有

$$\iint g\circ f(t,y)R(\infty,x;dt,dy)=g(\infty,0).$$

当$s_n\to\infty$时，对$\varepsilon>0$存在$N>0$使

$$\left|\iint g\circ f(t,y)R^n(s_n,x_n;dt,dy)-g(\infty,0)\right|$$

$$=\left|\int_{s_n}^{\infty}\int_R[g(t,2^{-1}\mathrm{arctg}y)-g(\infty,0)]R^n(s_n,x_n;dt,dy)\right|$$

$$<\varepsilon, n\geqslant N.$$

因而(63.1)对$s=\infty$成立．再由引理 15.62 知

$$(f(T_k^n, X_{T_k^n}^n), k\geqslant 0)\xrightarrow{\mathscr{L}}(f(T_k, X_{T_k}), k\geqslant 0),$$

这样由定理 15.58 可推出$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.　□

设 $X=(X_t)$ 为时齐实 Markov 跳跃过程，它以 $(p_t(x,A))$ 为转移概率，对应的无穷小特征为

$$Q(x,A)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{-I_A(x)+p_t(x,A)}{t}, \tag{64.1}$$

$$q(x)=-Q(x,\{x\}), \tag{64.2}$$

$$N(x,A)=\begin{cases}\dfrac{Q(x,A\setminus\{x\})}{q(x)}, & 若\ q(x)\neq 0,\\ I_A(x), & 若\ q(x)=0.\end{cases} \tag{64.3}$$

在此情形下，X 的跳跃链 (T_j,X_{T_j}) 的一步转移概率 R 有下列表示式（参见 He and Wang [3]）

$$R(s,x;dt,A)=\begin{cases}e^{-q(x)(t-s)}q(x)N(x,A)dtI_{[t>s]}, & q(x)>0,s<\infty,\\ \delta_{\infty}(dt)\delta_x(A).\end{cases} \tag{64.4}$$

同时不难求得 X 的 Lévy 族 ν 为

$$\nu(dt,dx)=q(X_{t-})N(X_{t-},X_{t-}+dx)dt. \tag{64.5}$$

上面提到 X 的分布由其初始分布 μ，q 和 N 唯一确定，故也常记 $\mathscr{L}(X)\sim(\mu,q,N)$.

15.64 引理 设 (q,N)，(q^n,N^n)，$n\geqslant 1$ 分别为时齐 Markov 跳跃过程 X，X^n，$n\geqslant 1$ 的无穷小特征，R，R^n 分别与 (q,N)，(q^n,N^n) 以(63.4)相联系．若 $q^n\circ\rightrightarrows q$，且对 $x_n\to x\in\{y:q(y)>0\}$ 有

$$N^n(x_n,g)\to N(x,g),\quad \forall\, g\in C_b(\boldsymbol{R}),$$

则对 $s_n\to s$，$x_n\to x$ 及一切 $g\in C_b(\overline{\boldsymbol{R}}_+\times\boldsymbol{R})$

$$\iint g\circ f(t,y)R^n(s_n,x_n;dt,dy)\to\iint g\circ f(t,y)R(s,x;dt,dy), \tag{64.6}$$

其中 $f(t,x)=(t,2^{-t}\operatorname{arctg}x)$.

证明 对 $g\in C_b(\overline{\boldsymbol{R}}_+\times\boldsymbol{R})$，$g\circ f$ 是 $\overline{\boldsymbol{R}}_+\times\boldsymbol{R}$ 上的有界连续函数，且对任一 $t_0\in\overline{\boldsymbol{R}}_+$ 有

$$\lim_{t\to t_0}\sup_y|g\circ f(t,y)-g\circ f(t_0,y)|=0.$$

若 $q(x)>0$，则

$$\int g\circ f(t,y)\boldsymbol{R}^n(s_n,x_n;dt,dy)$$

$$=\int N^n(x_n,dy)\int_{s_n}^{\infty} g\circ f(t,y)q^n(x_n)e^{-q^n(x_n)(t-s_n)}dt$$

$$=\int N^n(x_n,dy)h_n(y), \qquad (64.7)$$

$$h_n(y)=\int_{s_n}^{\infty} g\circ f(t,y)q^n(x_n)e^{-q^n(x_n)(t-s_n)}dt$$

$$=\int_0^{\infty} g\circ f\left(s_n+\frac{t}{q^n(x_n)},y\right)e^{-t}dt$$

$$\to\int_0^{\infty} g\circ f\left(s+\frac{t}{q(x)},y\right)e^{-t}dt \quad (\text{当 } n\to\infty \text{ 关于 } y \text{ 为一致地})$$

$$=\int_s^{\infty} g\circ f(t,y)q(x)e^{-q(x)(t-s)}dt=h(y).$$

于是

$$\left|\int N^n(x_n,dy)h_n(y)-\int N(x,dy)h(y)\right|$$

$$\leqslant \sup_y|h_n(y)-h(y)|+|N^n(x_n,h)-N(x,h)|\to 0.$$

故(64.6)成立．

假定 $q(x)=0$．当 $q^n(x_n)=0$，我们有

$$R^n(s_n,x_n;g\circ h)=g\circ f(\infty,x_n)=g(\infty,0)=R(s,x;g\circ f).$$

当 $q^n(x_n)>0$，(64.7)仍然成立，而当 $n\to\infty$ 时

$$h_n(y)=\int_0^{\infty} g\circ f\left(s_n+\frac{t}{q^n(x_n)},y\right)e^{-t}dt\to g(\infty,0)\,(\text{对 } y \text{ 为一致的})$$

于是

$$R^n(s_n,x_n;g\circ f)=\int h_n(y)N^n(x_n,dy)\to g(\infty,0)$$

$$=R(s,x;g\circ h).$$

总之，(64.6)成立． □

15.65 定理 设 $X, X^n, n\geqslant 1$ 为时齐 Markov 跳跃过程，$\mathscr{L}(X)\sim(\mu,q,N)$，$\mathscr{L}(X^n)\sim(\mu^n,q^n,N^n)$，则下列命题等价：

i) i) $q^n \rightrightarrows q$，

ii) 对所有 $x_n \to x \in \{y: q(y)>0\}$,

$$\int g(y)N^n(x_n,dy) \to \int g(y)N(x,dy), \quad \forall g \in C_b(\mathbf{R}). \tag{65.1}$$

2) 对所有满足 $\mu^n \xrightarrow{w} \mu$ 的初始分布,成立 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 且

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \boldsymbol{P}(0<|\Delta X^n_{T^n_1} I_{[T^n_1 \le N]}|<\varepsilon)=0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}. \tag{65.2}$$

证明 1)⇒2). 由引理 15.64,(64.6)成立. 于是可由引理 15.63 推出 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 及$(f(T^n_k, X^n_{T^n_k}), k \geqslant 0) \xrightarrow{\mathscr{L}} (f(T_k, X_{T_k}), k \geqslant 0)$. 因此(65.2)可由定理 15.58 推出.

2)⇒1). 若 $x_n \to x$,取 $\mu^n=\delta_{x_n}, \mu=\delta_x$,则 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. 由假定 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 以及(65.2)成立. 再由引理 15.57 可知 $T^n_1 \xrightarrow{\mathscr{L}} T_1$. 但是

$$\boldsymbol{P}(T^n>t)=\exp[-q^n(x_n)t], \quad \boldsymbol{P}(T>t)=\exp[-q(x)t],$$

于是 $q^n(x_n) \to q(x)$. 若 $q(x)>0$,则 $T_1<\infty$ a.s.. 由引理 15.57 还可得 $X^n_{T^n_1} \xrightarrow{\mathscr{L}} X_{T_1}$ 且对 $g \in C_b(\mathbf{R})$ 有

$$\int g(y)N^n(x_n,dy) = \boldsymbol{E}[g(X^n_{T^n_1})] \to \boldsymbol{E}[g(X_{T_1})] = \int g(y)N(x,dy).$$

故(65.1)成立. □

注 下列例子表明对 2)⇒1)(65.2)不能任意放宽.

设 X, Y 为两个相互独立的时齐 Poisson 过程,强度都是 1. $X^n = X + \frac{1}{n}Y$,则 $X, X^n, n \geqslant 1$ 为时齐 Markov 跳跃过程且

$$q(x)\equiv 1, \quad N(x,dy)=\delta_{x+1}(dy),$$

$$q^n(x)\equiv 2, \quad N^n(x,dy)=\frac{1}{2}\delta_{x+1}(dy)+\frac{1}{2}\delta_{x+1/n}(dy).$$

显然 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,但 1)并不成立.

15.66 系 设 $X, X^n, n \geqslant 1$ 是以$\{0,1,2,\cdots\}$为状态空间的时齐 Markov 跳跃过程. X, X^n 的 Q 矩阵分别为$(q_{ij})(q^n_{ij})$,则下列断言等价:

1) 对所有 $i, j, q^n_{ij} \to q_{ij}$.

2）对所有满足 $\mu^n \xrightarrow{w} \mu$ 的初始分布，都有 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

3）对所有 i，若 $\mu^n = \mu = \delta_i$，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

15.67 定理 假定对每个 n $Y^n = (Y_k^n)_{k\geq 0}$ 为一个以 μ^n 为初始分布以 $p^n(x,dy)$ 为转移概率的时齐实 Markov 序列．设 $\varepsilon_n \downarrow 0$．定义

$$X_t^n = Y^n_{\left[\frac{t}{\varepsilon_n}\right]} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^n I(k\varepsilon_n \leqslant t < (k+1)\varepsilon_n),\ t > 0. \tag{67.1}$$

设 X 是一个时齐 Markov 跳跃过程，$\mathscr{L}(X) \sim (\mu, q, N)$．则下列断言等价：

1）对所有满足 $x_n \to x$ 的 x_n, x 有 i)

$$\frac{1}{\varepsilon_n}(p^n(x_n, \{x_n\}) - 1) \to -q(x). \tag{67.2}$$

ii）若 $q(x) > 0$，对所有 $g \in C_b(\boldsymbol{R})$

$$\frac{1}{\varepsilon_n}\int g(y) 1_{[y \neq x_n]} p^n(x_n, dy) \to q(x)\int g(y) N(x, dy). \tag{67.3}$$

2）对所有满足 $\mu^n \to \mu$ 的初始分布都有 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 且(65.2)成立．

证明 注意 X^n 是 Markov 跳跃过程，但可以不是时齐的．X^n 跳跃链的转移概率为

$$R^n(k\varepsilon_n, x; \{l\varepsilon_n\}, dy) = \begin{cases} [p(x,\{x\})]^{l-k-1} I_{[y \neq x]} p^n(x, dy), & p^n(x,\{x\}) \neq 1, \\ & k < l \\ I_{[l=\infty]}\delta_x(dy), & \text{其它} \end{cases}$$

1)⇒2)．类似于定理 15.65 的证明，只要验证(63.1)．假定 $s_n = k\varepsilon_n \to s < \infty$，$x_n \to x$，$g \in C_b(\overline{\boldsymbol{R}}_+ \times \boldsymbol{R})$ 和 $f(t, x) = (t, 2^{-1}\text{arctg}x)$，则有

$$\iint g \circ f(t, y) R^n(s_n, x_n; dt, dy)$$

$$= \int \sum_{k=1}^{\infty} g \circ f(s_n + k\varepsilon_n, y)(P^n(x_n, \{x_n\}))^{k-1} I_{[y \neq x]} p^n(x_n, dy)$$

$$= \int h_n(y) \frac{1}{\varepsilon_n} I_{[y \neq x_n]} p^n(x_n, dy),$$

$$h_n(y) = \int_{s_n}^{\infty} g \circ f\left(s_n + \left[\frac{t - s_n}{\varepsilon_n}\right]\varepsilon_n + \varepsilon_n, y\right)$$

$$(p^n(x_n, \{x_n\}))^{\left[\frac{t - s_n}{\varepsilon_n}\right]} dt.$$

若 $q(x) > 0$，则

$$h_n(y) \to \int_s^{\infty} g \circ f(t, y) \exp[-q(x)(t - s)] dt,$$

且上述收敛关于 y 是一致的．因而

$$\iint g \circ f(t, y) R^n(s_n, x_n; dt, dy)$$

$$\to \iint_s^{\infty} g \circ f(t, y) \exp[-q(x)(t - s)] dt q(x) I_{[y \neq x]} N(x, dy)$$

$$= \iint g \circ f(t, y) R(s, x; dt, dy).$$

若 $q(x) = 0$，则

$h_n(y) \dfrac{1 - p^n(x_n, \{x_n\})}{\varepsilon_n} \to g(\infty, 0)$，关于 y 为一致的

于是

$$\iint g \circ f(t, y) R^n(s_n, x_n; dt, dy)$$

$$= \int h_n(y) \frac{1 - p^n(x_n, \{x_n\})}{\varepsilon_n} \frac{I_{[y \neq x_n]}}{1 - p^n(x_n, \{x_n\})} p^n(x_n, dy)$$

$$\to g(\infty, 0) = \iint g \circ f(t, y) R(s, x; dt, dy).$$

2) ⇒ 1)．假定 $x_n \to x_0$．取 $\mu^n = \delta_{x_n}$，$\mu = \delta_{x_0}$，$u > 0$．记 $p_n = p^n(x_n, \{x_n\})$．若 (T_j^n) 和 (T_j) 分别为 X^n，X 的跳时，引理 15.57 蕴含 $T_1^n \xrightarrow{\mathscr{L}} T_1$ 及

$$E[\exp(-uT_1^n)] = \frac{1 - p_n}{1 - p_n \exp(-u\varepsilon_n)} \exp(-u\varepsilon_n)$$

$$\to E[\exp(-uT_1)] = \frac{q(x)}{q(x) + u}.$$

不难由此关系推出 $p_n \to 1$ 和 $\frac{1}{\varepsilon_n}(1-p_n) \to q(x)$，因而(67.2)为真．

若 $q(x)>0$ 则 $T_1<\infty$ a.s.，引理 15.57 也包含了 $X^n_{T^n_1} \xrightarrow{\mathscr{D}} X_{T_1}$ 以及对所有 $g \in C_b(\boldsymbol{R})$

$$\boldsymbol{E}[g(X^n_{T^n_1})] = \frac{1}{1-p_n}\int g(y) I_{[y \neq x_n]} p^n(x_n, dy)$$

$$\to \boldsymbol{E}[g(X_{T_1})] = \int g(y) N(x, dy). \qquad (67.4)$$

(67.1)及(67.2)包含了(67.3)． □

15.68 系 假定对每个 n，Y^n 是以$\{0,1,2,\cdots\}$为状态空间，以(p^n_{ij})为一步转移概率的时齐 Markov 序列，X 是以$\{0,1,2,\cdots\}$为状态空间和以(q_{ij})为 Q-矩阵的时齐 Markov 跳跃过程．设 $\varepsilon_n \downarrow 0$．若 X^n 由(66.1)规定，则下列断言等价：

(1) 对所有 i, j，$(p_{ij}-\delta_{ij})/\varepsilon_n \to q_{ij}$．

(2) 对所有满足 $\mu^n \to \mu$ 的初始分布有 $X^n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$．

(3) 对所有 i 若 $\mu^n=\mu=\delta_i$，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$．

问题与补充

15.1 考虑下列函数

$$x_n(t)=I_{[1-1/2n,\infty)}, \quad y_n(t)=I_{[1-1/n,\infty)}.$$

说明 $\boldsymbol{D}^1$ 不是线性拓扑空间，$\boldsymbol{D}^2$ 不是 $\boldsymbol{D}^1$ 与 $\boldsymbol{D}^1$ 的乘积拓扑空间．

15.2 考虑 $\boldsymbol{D}^1$ 中的元素 $x_n(t)=I_{[1,1+\frac{1}{n})}$．说明在由(10.5)规定的 $\tilde{\rho}$ 之下 $\boldsymbol{D}^1$ 不是完备的．

15.3 令 $\rho_u(x,y)=\sup\limits_t|x(t)-y(t)|$．说明 $\boldsymbol{D}^d$ 在 ρ_u 下不是可分的，但在 $\boldsymbol{D}^d_a$ 中由 ρ_u-开球产生的 σ-域与 $\sigma(x(u), u\leqslant a)$ 是一致的．

15.4 证明在由(7.1)定义的 ρ 之下，$\boldsymbol{C}^d$ 是 $\boldsymbol{D}^d$ 的闭子集．

15.5 设 $x, x_n, n\geqslant 1$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上零初值递增右连续函数，则下列断言等价：

1）在 Skorokhod 拓扑下 $x_n \to x$.

2）存在 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠密子集 D 使 i）当 $t \in D$ 时，$x_n(t) \to x(t)$，ii）对所有 $t>0$ 存在序列 (t_n) 满足 $t_n \to t$，$x_n(t_n) \to x(t)$，进而当 $t \in D$ 时，还有 $t_n < t$.

3）存在 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠密子集 D 使当 $t \in D$ 时，$x_n(t) \to x(t)$，$\sum_{s \leq t}(\Delta x_n(s))^2 \to \sum_{s \leq t}(\Delta x(s))^2$.

15.6 设 S 为 Polish 空间. 1）若 N 为 $(S, \mathscr{B}(S))$ 上的 Feller 转移概率核，则对每个 $\varepsilon > 0$ 及紧集 $K \subset S$ 存在集 $C_{\varepsilon,K} \subset K$ 使得 $\sup_{x \in K} N(x, C^c_{\varepsilon,K}) < \varepsilon$.

2）若 N，N^n，$n \geq 1$ 为转移概率核且 $N^n \Rightarrow N$，则对每个 $\varepsilon > 0$ 及紧集 $K \subset S$ 存在紧集 $C_{\varepsilon,K} \subset S$ 使 $\overline{\lim_{n}} \sup_{x \in K} N^n(x, C^c_{\varepsilon,K}) < \varepsilon$.

15.7 设 M，N，M^n，N^n，$n \geq 1$ 为 Polish 空间 S 上的转移概率核. 若 $M^n \Rightarrow M$，$N^n \Rightarrow N$，则 $M^n * N^n \Rightarrow M * N$，其中 $M * N(x, f) = \int_S M(x, dy) N(y, f)$.

15.8 设 $\boldsymbol{R}^\infty = \prod_{i=1}^\infty \boldsymbol{R}_i$，$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}$ 在 $\boldsymbol{R}^\infty$ 上赋予乘积拓扑，证明

i）$\boldsymbol{R}^\infty$ 为 Poish 空间.

ii）令 $\mathscr{B}^\infty$ 为 $\boldsymbol{R}^\infty$ 上的 Borel σ-域，π_k 为 $\boldsymbol{R}^\infty$ 到 $\boldsymbol{R}^k = \prod_{i=1}^k \boldsymbol{R}_i$ 的投影，μ，μ_n 为 $\boldsymbol{R}^\infty$ 上的概率测度. 则 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ 当且仅当对所有 $k \geq 1$ 有 $\mu_n \circ \pi_k^{-1} \xrightarrow{w} \mu \circ \pi_k^{-1}$.

15.9 设 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}_n$ 为 $(\boldsymbol{R}, \mathscr{B}(\boldsymbol{R}))$ 上的概率测度，$\boldsymbol{P}_n \xrightarrow{w} \boldsymbol{P}$. 令

$$G_n(x) = \inf\{y \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{P}_n(]-\infty, y]) \geq x\},$$

$$G(x) = \inf\{y \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{P}(]-\infty, y]) \geq x\}.$$

设 ξ 为 $[0,1]$ 上均匀分布随机变量. 试证 $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{P})$ 是 $G_n(\xi)(G(\xi))$ 的分布律，且 $\lim_{n \to \infty} G_n(\xi) = G(\xi)$，a.s..

15.10 假定 S 为 Polish 空间，$\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(S)$，$\mathscr{A}$ 关于有限交是封闭的，且 S 中每个开集都可表为 $\mathscr{A}$ 中集合的可列并. 若 $\boldsymbol{P}$，

$P_n, n\geqslant 1$ 为概率测度且 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A)=P(A), \forall A\in\mathscr{A}$，则 $P_n \xrightarrow{w} P$.

15.11 假定 $\mathscr{C}$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上实连续函数族，对任意的 $a,b,c\in\boldsymbol{R}^d$ 存在 $f\in\mathscr{C}$ 使 $f(a),f(b),f(c)$ 不相同．试证 $\boldsymbol{R}^d$-值右连左极过程为胎紧的充要条件是 i) 对所有 $\varepsilon>0, t>0$ 存在紧集 $K_{\varepsilon,t}\subset\boldsymbol{R}^d$ 使

$$P(X_s^n\in K_{\varepsilon,t}, s\leqslant t)>1-\varepsilon,\quad \forall n\geqslant 1,$$

ii) $\forall f\in\mathscr{C}, (f(X^n), n\geqslant 1)$ 为胎紧的．

15.12 试证一列右连左极过程 (X^n) 为胎紧的充要的是

i) $\lim_{a\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty} P(|X_t^n|>a)=0, \forall t>0$,

ii) $\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim}_{n\to\infty} P(\omega'(\delta,X^n,N)>\eta)=0, \forall \eta>0, N\in\boldsymbol{N}$.

15.13 假定右连左极过程列 (X^n) 满足

i) (X_0^n) 为胎紧的

ii) $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant N}\sup\limits_{n\geqslant 1} P(|X_{t+h}^n - X_t^n| > \eta_N(h)) < \varepsilon_N(h)$, $\forall h>0, N>0$，其中 $\varepsilon_N(h), \eta_N(h)$ 满足对某个 $a>0$ $\int_{]0,a]}\frac{\eta_N(h)}{h}dh<\infty$, $\int_{]0,a]}\frac{\varepsilon_N(h)}{h^2}dh<\infty$，则 (X^n) 为 C-胎紧的．特别，若 (X^n) 满足 i) 及

$$P(|X_t^n - X_s^n|>\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^r}(F(t)-F(s))^{1+a}, 0\leqslant s<t, \lambda>0,$$

其中 $r\geqslant 0, a>0$, F 为不减连续函数，则 (X^n) 为 C 胎紧的．

15.14 试证可测右连左极过程为 C-胎紧的当且仅当 i) (X_0^n) 为胎紧的，ii)

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup\nolimits_{S,T\in\mathscr{T}_N, S\leqslant T\leqslant S+\delta} P(|X_T^n - X_S^n|>\varepsilon)=0$$

其中 $\mathscr{T}_N$ 为不超过 N 的非负随机变量全体．

15.15 假定 X^n 为时齐右连续 Markov 过程，以 μ^n 为初始分布，且转移概率 $p_t^n(x,A)$ 为 Feller 的，若 (μ^n) 为胎紧的且

$$\lim_{t\to 0}\sup_{x,n} p_t^n(x,O_\varepsilon(x))=0,$$

其中 $O_\varepsilon(x)=\{y:|y-x|>\varepsilon\}$，则 (X^n) 为胎紧的．进而，若

$$\lim_{t\to 0}\sup_{x,n} p_t^n(x,O_\varepsilon(x))/t=0,$$

则 (X^n) 为 C-胎紧的．

15.16 设$(T_j^n)_{j\geq 1}$为计数过程 X^n 的跳时序列，$W_j^n=T_j^n-T_{j-1}^n, j\geq 1, T_0^n=0$. 试用$(W_j^n, j\geq 1, n\geq 1)$来表征$(X^n)$的胎紧性.

15.17 假定 $X, X^n, n\geq 1$ 为更新过程，且分别以$m(t)=E[X_t], m^n(t)=E[X_t^n]$为更新过程，$F, F^n$ 分别为 X, X^n 的跳时间隔的(次)分布函数. 试证下列条件是等价的：

i) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$，

ii) $m^n \xrightarrow{v} m$，即 $\int_{R_+} f(t)dm^n(t) \to \int_{R_+} f(t)dm(t)$ 对每有紧支撑的连续函数 f 成立，

iii) $F^n \xrightarrow{v} F$.

15.18 对 $x\in \boldsymbol{D}^d$，令 $S_a(x)=\inf\{t: |x(t-)|\geq a$ 或 $|x(t)|\geq a\}$.

1) 若 $a\notin V(x)=\{b: S_b(x)<S_{b+}(x)\}$，则 $x\mapsto S_a(x)$ 为 $\boldsymbol{D}^d$ 上连续函数.

2) 令 $V'(x)=\{a>0: S_a(x)\in J(x)$ 及 $|x(S_a(x))|=a\}$，$x^{S_a}(t)=x(t\wedge S_a)$. 则 $x\mapsto (x, x^{S_a})$ 在每个满足 $a\notin V(x)\cup V'(x)$ 的 x 处是 $\boldsymbol{D}^d\to \boldsymbol{D}^{2d}$的连续函数.

15.19 假定 $X, X^n, n\geq 1$ 为适应右连左极 $\boldsymbol{R}^d$-值过程. 则 $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ 当且仅当存在至多为可列的集合 $A\subset \boldsymbol{R}_+$ 使

$$(X^n)^{S(a,X^n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X^{S(a,X)}, \quad \forall\, a\in \boldsymbol{R}_+\backslash A,$$

其中 $S(a,X)=\inf\{t: |X_t|\geq a$ 或 $|X_{t-}|\geq a\}$，$X_t^S=X_{t\wedge S}$.

15.20 假定 $X, X^n, \alpha^n, n\geq 1$ 为右连左极过程，α 为连续决定性函数. 若 $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$，$\sup_{s\leq t}|\alpha_s^n-\alpha_s| \xrightarrow{P} 0, \forall\, t>0$. 则 $X^n+\alpha^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X+\alpha$.

第十六章　半鞅的弱收敛

在这一章我们将讨论半鞅弱收敛的条件及其某些应用．向拟左连续半鞅弱收敛的充分条件在§1给出．在§2和§3中将一般条件用于极限过程为一般Lévy过程和连续Lévy过程的情形．特别它包括了独立增量过程的弱收敛．最后，一般条件将在§4中用于向广义扩散收敛的情形．关于经验过程弱收敛的结果也在§4中给出．

为简单计，本章只考虑实值过程．其实大部分结果对$\boldsymbol{R}^d$值过程仍然是有效的．这里的基本配置是一个带流的概率空间$\Phi=(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\boldsymbol{P})$．除非另有说明，所有半鞅都是定义在$\Phi$上的．

§1．收敛于拟左连续半鞅

16.1 定义　设h为有界实函数．若对某个$a>0$它满足

$$h(x)=\begin{cases}x, & |x|<1/a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases}\qquad |h(x)|\leqslant a, \tag{1.1}$$

则h称为一个**截断函数**．记$\mathscr{T}$为全体截断函数的集合，$\mathscr{T}_c$为全体连续截断函数的集合．令$h_1(x)=xI_{[|x|\leqslant 1]}$，则$h_1\in\mathscr{T}$．

16.2 定义　设X为一个半鞅，(α,β,ν)为X的可料特征，μ为X的跳测度．运用一个截断函数h，类似于定理11.25可得到X的积分表示．若h满足(1.1)，则当$|x|<1/a$时，$x-h(x)=0$．取

$$\check{X}(h)=\sum(\Delta X-h(\Delta X))=(x-h(x))*\mu, \tag{2.1}$$

$$X(h)=X-\check{X}(h). \tag{2.2}$$

因为$|\Delta X(h)|=|\Delta X-\Delta\check{X}(h)|=|h(\Delta X)|\leqslant a$，$X(h)\in\mathscr{S}_p$，有下列典则分解：

$X(h) = X_0 + M(h) + \alpha(h), M(h) \in \mathscr{M}_{loc,0}, \alpha(h) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{V}_0.$

另一方面，定理 11.25 给出

$$
\begin{aligned}
X(h) &= X - \check{X}(h) \\
&= X_0 + \alpha + X^c + (xI_{[|x| \leq 1]}) * (\mu - \nu) \\
&\quad + (xI_{[|x|>1]}) * \mu - (x - h) * \mu \\
&= X_0 + X^c + h * (\mu - \nu) + \alpha + (h(x) - xI_{[|x| \leq 1]}) * \nu.
\end{aligned}
$$

所以

$$M(h)^d = h * (\mu - \nu), \tag{2.3}$$

$$\alpha(h) = \alpha + (h(x) - xI_{[|x| \leq 1]}) * \nu, \tag{2.4}$$

$$
\begin{aligned}
X = X_0 &+ X^c + h * (\mu - \nu) \\
&+ \alpha(h) + (x - h(x)) * \mu.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

若 $h(x) = h_1(x) = xI_{[|x| \leq 1]}$，则 $\alpha(h_1) = \alpha$. 记 $\hat{h}(= \Delta\alpha(h)$ 及 $\tilde{\beta}(h) = \langle M(h) \rangle$. 由(2.4)及(2.3)我们有

$$\hat{h}_t = \int h(x) \hat{\nu}_t(dx), \tag{2.6}$$

$$\langle M(h) \rangle = \beta + h^2 * \nu - \sum (\Delta\alpha(h))^2. \tag{2.7}$$

下面我们将看到，对 $h \in \mathscr{L}$，运用$(\alpha(h), \tilde{\beta}(h), \nu)$来描述半鞅弱收敛的条件较为方便．由于$(\alpha(h), \tilde{\beta}(h), \nu)$和$(\alpha, \beta, \nu)$相互唯一确定，$(\alpha(h), \beta, \nu)$或$(\alpha(h), \tilde{\beta}(h), \nu)$也都称为 X 的**可料特征**(或**可料三元体**)，而 α 或 $\alpha(h)$ 为**第一特征**，β 或 $\tilde{\beta}(h)$ 为**第二特征**．

对 $h, g \in \mathscr{L}$，容易推出

$$\alpha(h) - \alpha(g) = (h - g) * \nu, \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta}(h) - \tilde{\beta}(g) &= (h^2 - g^2) * \nu - \sum ((\Delta\alpha(h))^2 - (\Delta\alpha(g))^2) \\
&= (h^2 - g^2) * \nu - (\hat{h}h - \hat{g}g) * \nu
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

假定 X 为局部平方可积半鞅(见定理 11.31)，它的典则分解为

$$X = X_0 + M' + \alpha', M' \in \mathscr{M}^2_{loc,0}, \alpha' \in \mathscr{V}_0 \cap \mathscr{P}.$$

则

$$\alpha' = \alpha(h) + (x - h(x)) * \nu, \tag{2.10}$$

$$\langle M' \rangle = \tilde{\beta}(h) + (x^2 - h^2(x)) * \nu - \sum((\hat{x}^2 - (\hat{h})^2)$$
$$= \beta + x^2 * \nu - \sum(\hat{x})^2. \tag{2.11}$$

$\langle M' \rangle$也表以β'.

16.3 定理 设$(X^n)_{n\geq 1}$为半鞅序列,对每个n,$(\alpha^n(h), \tilde{\beta}^n(h), \nu^n)$是$X^n$的可料特征.

1)若下列条件成立

i)(X_0^n)为胎紧的,

ii)$\forall\ N>0,\ \varepsilon>0$

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(\nu^n([0,N]\times\{x: |x|>a\})>\varepsilon) = 0, \tag{3.1}$$

iii)$(\alpha^n(h))_{n\geq 1}$,$(\tilde{\beta}^n(h))_{n\geq 1}$为$C$-胎紧的,对所有$p\in \boldsymbol{N}$,$g_p(x) = (p|x|-1)^+ \wedge 1$ $(g_p * \nu^n)_{n\geq 1}$为C-胎紧的,

则$(X^n)_{n\geq 1}$为胎紧的.

2)反之,若$(X^n)_{n\geq 1}$为胎紧的,则1)中的i)和ii)成立.

为了证明这一定理,我们需要下列两个引理.

16.4 引理 若定理16.3中条件1)iii)对某个$h\in\mathscr{Z}$成立,则它对一切$h\in\mathscr{Z}$成立.

证明 若$h, \bar{h}\in\mathscr{Z}$,则它对某个$a>0$满足(2.1). 取$p\in\boldsymbol{N}$,$p>2a$,则

$$|h(x) - \bar{h}(x)| \leq 2ag_p(x),\ |h^2(x) - \bar{h}^2(x)| \leq a^2 g_p(x),$$

$$\mathrm{Var}[\alpha^n(h) - \alpha^n(\bar{h})] \prec |h - \bar{h}| * \nu^n \prec 2ag_p * \nu^n,$$

$$\mathrm{Var}[\sum((\Delta\alpha^n(h))^2 - (\Delta\alpha^n(\bar{h}))^2)] \prec \sum[|\Delta\alpha^n(h) + \Delta\alpha^n(\bar{h})|$$
$$\times |\Delta\alpha^n(h - \bar{h})|] \prec 4a|h - \bar{h}| * \nu^n \prec 8a^2 g_p * \nu^n,$$

$$\mathrm{Var}[\tilde{\beta}^n(h) - \tilde{\beta}^n(\bar{h})] = \mathrm{Var}[(h^2 - \bar{h}^2) * \nu^n - \sum((\Delta\alpha^n(h))^2$$
$$- (\Delta\alpha^n(\bar{h}))^2)] \prec a^2 g_p * \nu^n + 8a^2 g_p * \nu^n = 9a^2 g_p * \nu^n,$$

因此由定理 15.54 及系 15.51 可推出要证的结论． □

16.5 引理 1)对 $N>0, a>0$，下列两条件等价：

i) $\lim\limits_n \boldsymbol{P}(\sup\limits_{s\leqslant N}|\Delta X_s^n|>a)=0$，

ii) $\lim\limits_n \boldsymbol{P}(\nu^n([0,N]\times\{x: |x|>a\})>\varepsilon)=0, \ \forall\ \varepsilon>0$.

2)对 $N>0$，下列两条件等价：

i) $\lim\limits_{a\to\infty}\overline{\lim\limits_n}\ \boldsymbol{P}(\sup\limits_{s\leqslant N}|\Delta X_s^n|>a)=0$，

ii) $\lim\limits_{a\to\infty}\overline{\lim\limits_n}\ \boldsymbol{P}(\nu^n([0,N]\times\{x: |x|>a\})>\varepsilon)=0, \ \forall\ \varepsilon>0$.

证明 1)令

$$A^n=I_{[|x|>a]}*\mu^n=\sum I_{[|\Delta X^n|>a]},$$

$$\tilde{A}_t^n=I_{[|x|>a]}*\nu_t^n=\nu^n([0,t]\times\{x: |x|>a\}).$$

则 $\tilde{A}^n$ 为 A^n 的补偿子，$A^n, \tilde{A}^n$ 相互控制．由 Lenglart 不等式

$$\boldsymbol{P}(\sup_{s\leqslant N}|\Delta X_s^n|>a)\leqslant \boldsymbol{P}(A_N^n\geqslant 1)\leqslant \varepsilon+\boldsymbol{P}(\tilde{A}_N^n\geqslant\varepsilon),$$

这样 1)ii)⇒1)i)和 2)ii)⇒2)i)就可得到．

另一方面，再用 Lenglart 不等式，

$$\boldsymbol{P}(\tilde{A}_N^n\geqslant\varepsilon)\leqslant\eta+\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{E}(\sup_{s\leqslant N}\Delta A_s^n)+\boldsymbol{P}(A_N^n>\varepsilon\eta).$$

因为 $|\Delta A^n|\leqslant 1$ 以及 $[\sup\limits_{s\leqslant N}\Delta A_s^n>0]=[A_N^n\geqslant\varepsilon\eta\wedge 1]=[\sup\limits_{s\leqslant N}|\Delta X_s^n|>a]$，

$$\boldsymbol{P}(\tilde{A}_N^n\geqslant\varepsilon)\leqslant\eta+(\frac{1}{\varepsilon}+1)\boldsymbol{P}(\sup_{s\leqslant N}|\Delta X_s^n|>a).$$

现在依次令 $n\to\infty(a\to\infty)$ 及 $\eta\to 0$，即推出 1)i)⇒1)ii)及 2)i)⇒2)ii)． □

16.6 定理 16.3 的证明 对固定的 $h\in\mathscr{L}$，令 $h_q(x)=qh(x/q)$，则 $h_q\in\mathscr{L}$．我们将利用引理 15.50 及(2.5)来证明(X^n)的胎紧性．对每个 n 有

$$\begin{aligned}X^n&=X_0^n+M^n(h_q)+\alpha^n(h_q)+\check{X}^n(h_q)\\&=U^{nq}+V^{nq}+W^{nq},\end{aligned}$$

其中 $U^{nq}=X_0^n+M^n(h_q), V^{nq}=\alpha^n(h_q), W^{nq}=\check{X}^n(h_q)$．由引理 16.4

对所有 q，$(V^{nq})_{n\geq 1}$ 为 C-胎紧的．对 $a_q=1/q$，第十五章的(50.2)成立．也由引理 16.4($\tilde{\beta}^{(n)}(h_q)=\langle M^n(h_q)\rangle)_{n\geq 1}$ 对所有 q 都是 C-胎紧的．因此由系 15.51，对所有 q，$(U^{nq})_{n\geq 1}$ 是胎紧的．最后，若 $h\in\mathscr{Z}$，它对某个 a 满足(1.1)，则当 $|x|<aq$ 时 $h_q(x)=x$ 以及

$$\Delta\check{X}^n(h_q)=\Delta X^n-h_q(\Delta X^n)=0,\text{在}[|\Delta X^n|<aq]\text{上}.$$

所以

$$P(\sup_{s\leq N}|W_s^{nq}|>0)\leqslant P(\sup_{s\leq N}|\Delta X_s^n|\geqslant aq).$$

现由引理 16.5.2)及(3.1)可知第十五章(50.2)成立．因而引理 15.50 所有条件成立，$(X^n)_{n\geq 1}$ 为胎紧的．

2）反之，若 $(X^n)_{n\geq 1}$ 为胎紧的，1)i）明显也成立．同时 $\sup_{t\leq N}|\Delta X_t^n|\leqslant 2\sup_{t\leq N}|X_t^n|$，因此由第十五章(47.3)有

$$\lim_{a\uparrow\infty}\overline{\lim_n}P(\sup_{t\leq N}|\Delta X_t^n|>a)=0.$$

现在容易由引理 16.5.2)知道(3.1)是必要的．□

16.7 定义 设 $\Phi_D=(D^1,\mathscr{D},\mathbb{D},P_D)$ 为带流标准概率空间且流 $\mathbb{D}=(\mathscr{D}_t)_{t\geq 0}$ 满足通常条件．令 X 为标准过程．假定 α 为 Φ_D 上可料有限变差过程，$\alpha_0=0$，而 $\alpha(h)$ 与 α 以(2.4)相联系；β 为 Φ_D 上连续增过程，$\beta_0=0$，$\tilde{\beta}(h)$ 与 β 以(2.7)相联系；ν 为 Φ_D 上可料随机测度，今后把满足上述条件的(α,β,ν)(或 $\alpha(h)$，$\tilde{\beta}(h)$，ν))称为 Φ_D **上的可料三元体**．

本节主要讨论下列问题：若(X^n)是以(α^n,β^n,ν^n)为可料特征的 Φ 上的半鞅序列，用(α^n,β^n,ν^n)和(α,β,ν)来描述，什么是 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$ 的充分条件，这里 X 是以(α,β,ν)为可料特征的半鞅．

假定 Y 为 Φ_D 上的随机变量，X^n 为 Φ 上的半鞅，则 $Y\circ X^n$ 是 Φ 上的一个随机变量．

在叙述主要结果之前，先引进一些条件和记号．设 $D\subset\boldsymbol{R}_+$ 并令

$$[\alpha\text{-}D]:\alpha_t^n(h)-\alpha_t(h)\circ X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}0,\forall t\in D,\qquad h\in\mathscr{Z}_c.$$

$$[\beta\text{-}D]:\tilde{\beta}_t^n(h)-\tilde{\beta}_t(h)\circ X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}0,\forall t\in D,\qquad h\in\mathscr{Z}_c.\quad(7.1)$$

$$[\nu\text{-}D]: |g*\nu_t^n-(g*\nu_t)\circ X^n|\xrightarrow{\mathscr{P}}0,\ \forall t\in D,\ g\in J_1. \tag{7.2}$$

$$[\sup\alpha]: \sup_{t\le N}|\alpha_t^n(h)-\alpha_t(h)\circ X^n|\xrightarrow{\mathscr{P}}0,\ \forall N>0,\ h\in\mathscr{C}_1.$$

$$[\sup\tilde{\beta}]: \sup_{t\le N}|\tilde{\beta}_t^n(h)-\tilde{\beta}_t(h)\circ X^n|\xrightarrow{\mathscr{P}}0,\ \forall N>0,\ h\in\mathscr{C}_1.$$

$$[\sup\nu]: \sup_{t\le N}|g*\nu_t^n-(g*\nu_t)\circ X^n|\xrightarrow{\mathscr{P}}0,\ \forall N>0,\ g\in J_1. \tag{7.3}$$

其中

$$J_1=\left\{f\in C_b(\mathbf{R}_+):\ \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\text{ 存在有限}\\ f\text{ 在零的某邻域为 }0\end{array}\right\}. \tag{7.4}$$

$[C]$：对 $g\in J_1, h\in\mathscr{C}_1$，$\alpha(h)$，$\tilde{\beta}$，$g*\nu$ 为连续过程.

容易看出，对 $h,g\in\mathscr{C}_1$，必有 $h\text{-}g\in J_1$ 及 $h^2\text{-}g^2\in J_1$，因而由(2.8)(2.9)容易推出在$[\nu\text{-}D]$($[\sup\ \nu]$)和$[C]$之下，若$[\alpha\text{-}D]$或$[\tilde{\beta}\text{-}D]$($[\sup\ \alpha]$或$[\sup\ \tilde{\beta}]$)对某个$h\in\mathscr{C}_1$成立，则对一切$h\in\mathscr{C}_1$成立.

若我们涉及到局部平方可积鞅，我们也需要下列条件：

$$[\sup\alpha']: \sup_{t\le N}|\alpha_t'^n-\alpha'_t\circ X^n|\xrightarrow{\mathscr{P}}0,\ \forall N>0. \tag{7.5}$$

$$[\beta'\text{-}D]: |\beta_t'^n-\beta'_t\circ X^n|\xrightarrow{\mathscr{P}}0,\ \forall t\in D. \tag{7.6}$$

类似地，也可定义$[\alpha'-D]$和$[\sup\ \beta']$.

16.8 引理 假定 $G^n\in\mathscr{V}^+(\Phi)$，$G\in\mathscr{V}^+(\Phi_0)$，$H^n\in\mathscr{V}^+(\Phi)$，$H\in\mathscr{V}^+(\Phi_0)$，同时 F 是一个连续决定性函数，$\mathrm{Var}(G^n)\prec H^n$，$\mathrm{Var}(G)\prec H\prec F$. 若 D 为 $\mathbf{R}_+$ 的稠密子集以及

$$|G_t^n-G_t\circ X^n|\xrightarrow{\mathscr{P}}0,\ \forall t\in D. \tag{8.1}$$

$$|H_t^n-H_t\circ X^n|\xrightarrow{\mathscr{P}}0,\ \forall t\in D. \tag{8.2}$$

则

$$\sup_{s\le t}|G_s^n-G_s\circ X^n|\xrightarrow{\mathscr{P}}0,\ \forall t>0. \tag{8.3}$$

证明 对 $\varepsilon>0$，取 $t_0=0$，$t_i<t_{i+1}$，$t_i\to\infty$ 和 $F(t_{i+1})-F(t_i)<\varepsilon$.

则对 $S\in[t_i,t_{i+1}]$ 有

$$\begin{aligned}|G_s^n-G_s\circ X^n|&\leqslant|G_s^n-G_{t_i}^n|+|G_{t_i}^n-G_{t_i}\circ X^n|+|G_{t_i}\circ X^n-G_s\circ X^n|\\&\leqslant H_{t_{i+1}}^n-H_{t_i}^n+|G_{t_i}^n-G_{t_i}\circ X^n|+\varepsilon\\&\leqslant|H_{t_{i+1}}^n-H_{t_{i+1}}\circ X^n|+\varepsilon+|H_{t_i}\circ X^n-H_{t_i}^n|\\&\quad+|G_{t_i}^n\circ-G_{t_i}\circ X^n|+\varepsilon,\end{aligned}$$

和

$$\sup_{s\leqslant t}|G_s^n-G_s\circ X^n|\leqslant 2\varepsilon+\sup_{i:t_{i+1}\leqslant t}\{2|H_{t_i}^n-H_{t_i}\circ X^n|$$
$$+|G_{t_i}^n-G_{t_i}\circ X^n|\},$$

所以(8.3)可由(8.1)和(8.2)推出. □

16.9 系 若 D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 的稠子集且下列强控制条件成立:存在一个连续(决定性)增函数 F 使

$$\mathrm{Var}(\alpha)+\beta+(1\wedge x^2)*\nu\prec F,\tag{9.1}$$

则 $[\tilde{\beta}\text{-}D]\Leftrightarrow[\sup\tilde{\beta}]$, $[\nu\text{-}D]\Rightarrow[\sup\ \nu]$.

证明 只要在引理 16.8 中取 $G^n=H^n=\tilde{\beta}^n$(对应地 $g*\nu^n$), $G=H=\tilde{\beta}$(对应地 $g*\nu$)即可. □

16.10 引理 假定 $G^n\in\mathscr{V}_0(\Phi^n)$, $G\in\mathscr{V}_0(\Phi_D)$, $\mathrm{Var}(G)\prec F$ 且 F 为右连续(决定性)增函数.

1)若 $\rho(G^n,G\circ X^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}0$,则$(G^n)$为胎紧的.

2)若 $\sup_{s\leqslant t}|G_s^n-G_s\circ X^n|\xrightarrow{\mathscr{L}}0$ 对所有 t 成立且 F 为连续的,则(G^n)为 C 胎紧的.

证明 因为 $\mathrm{Var}(G)\prec F$,定理 15.54 包含了序列$(G\circ X^n)$为胎紧的. 进而,若 F 连续,则$(G\circ X^n)$为 C-胎紧的. 现设$(G\circ X^{n'})$为$(G\circ X^n)$的子序列且满足

$$G\circ X^{n'}\xrightarrow{\mathscr{L}}Y,$$

则 1)中的假定包含了 $G^{n'}\xrightarrow{\mathscr{L}}Y$,这表明$(G^n)$是胎紧的. 此外,若 F 是连续的,则(G^n)是 C-胎紧的. □

16.11 定理 假定(X^n)是 Φ 上的半鞅序列,(α,β,ν)是 Φ_D 上的可料三元体. 若

i) (X_0^n) 为胎紧的 .

ii) 对 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠子集 D, $[\sup\alpha]$, $[\beta-D]$, $[\nu-D]$ 成立,

iii) 强控制条件成立:存在连续增函数 F 使

$$\mathrm{Var}(\alpha)+\beta+(x^2\wedge 1)*\nu \prec F, \tag{11.1}$$

iv) 大跳一致小条件成立:

$$\lim_{a\to\infty}\sup_y \nu(y,[0,t]\times\{x:|x|>a\})=0, \tag{11.2}$$

则 (X^n) 是胎紧的 .

证明 我们将验证 (X^n) 满足定理 16.3.1) 的条件 . 假定 i) 就是定理 16.3.1) 的 i)

对 $p>0$, 考虑

$$g_p(x)=(p|x|-1)^+\wedge 1\in J_1.$$

则 $g_p(x)\leqslant(p^2\vee 1)(x^2\wedge 1)$. 对固定的 $t\in D$, $\varepsilon>0$, $\eta>0$, (11.2) 包含了存在 $a>0$ 使

$$\sup_y g_{2/a}*\nu_t(y)\leqslant\sup_y \nu_t(y,[0,t]\times\{x:|x|>\frac{a}{2}\})<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.3}$$

由于 $[\nu\text{-}D]$, 若 n 足够大有

$$\boldsymbol{P}(|g_{2/a}*\nu_t^n-(g_{2/a}*\nu_t)\circ X^n|>\frac{\varepsilon}{2})\leqslant\eta. \tag{11.4}$$

因为 $\nu^n([0,t]\times\{x:|x|>a\})\leqslant g_{2/a}*\nu_t^n$, (11.3) 和 (11.4) 蕴含了

$$\boldsymbol{P}(\nu^n([0,t]\times\{x:|x|>a\})\geqslant\varepsilon)\leqslant\eta.$$

于是定理 16.3.1) 的条件 ii) 成立 .

对 $h\in\mathscr{Z}$, 应用 (2.4) 和 (11.1) 有

$$\mathrm{Var}(\alpha(h))\prec kF. \tag{11.5}$$

其中 k 为一常数 . 于是 $(\alpha^n(h))$ 的 C-胎紧性可由 $[\sup\alpha]$ 及引理 16.10.2) 推出 . 由于系 16.9, $[\sup\tilde{\beta}]$ 及 $[\sup\nu]$ 成立 . 这样, 对 $g\in J_1$, $(\tilde{\beta}^n(h))$ 和 $(g*\nu^n)$ 的 C-胎紧性也由引理 16.10.2) 推出 . 总之, 定理 16.3.1) 的条件 iii) 成立, 所以 (X^n) 的胎紧性就是定理 16.3 的结论 . □

注 由 (2.8) 可见对任一 $h\in\mathscr{Z}$, 在 (1.1) 中若以 $\alpha(h)$ 代 α, 以

kF 代替 F(k 为一依赖于 h 的常数)，则(1.1)仍然是对的．

16.12 引理 假定随机变量族$(Z_i^n, i\in I, n\geqslant 1)$满足下列条件：

i) $(Z_i^n, i\in I, n\geqslant 1)$为一致可积的

ii) $\forall\, i\in I$，当 $n\to\infty$ 时 $Z_i^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Z_i$．

则$(Z_i, i\in I)$一致可积，且

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}[Z_i^n] = \boldsymbol{E}[Z_i],\ i\in I. \qquad (12.1)$$

证明 由$(Z_i^n, i\in I, n\geqslant 1)$一致可积对任一 $\varepsilon>0$ 存在 N 使

$$\boldsymbol{E}[|Z_i^n| I(|Z_i^n|>N)] < \varepsilon,\ i\in I,\ n\geqslant 1.$$

事实上按 Skorokhod 定理我们可假定 $Z_i^n\to Z_i$ a.s.．由 Fatou 引理可得

$$\boldsymbol{E}[|Z_i| I(|Z_i|>N)] \leq \varliminf_n \boldsymbol{E}[|Z_i^n| I(|Z_i^n|>N)] < \varepsilon,\ i\in I.$$

所以$(Z_i, i\in I)$一致可积且(12.1)成立． □

16.13 引理 假定(N^n)，(Y^n)为 Φ 上两列适应右连左极过程，N, Y 为 Φ_D 上两个适应右连左极过程．$\boldsymbol{G}=(\mathscr{G}_t)$为$(N, Y)$的自然流．若下列条件成立：

i) $(N^n, n\geqslant 1)$为鞅序列且对每个 t，$(N_s^n, s\leqslant t, n\geqslant 1)$一致可积，

ii) D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 中一稠密子集且$(N^n, Y^n)\xrightarrow{\mathscr{L}_f(D)}(N, Y)$

则 N 为$\boldsymbol{G}$-鞅．

证明 取 $u_1<\cdots<u_k<s<t$，$u_i, s, t\in D$，$f\in C_b(\boldsymbol{R}^{2K})$．因为 N^n 为鞅，

$$\boldsymbol{E}[(N_t^n - N_s^n) f(Y_{u_1}^n,\cdots,Y_{u_k}^n, N_{u_1}^n,\cdots,N_{u_k}^n)] = 0. \quad (13.1)$$

由于$(N_s^n, s\leqslant t, n\geqslant 1)$是一致可积的，在(13.1)中令 $n\to\infty$，用引理 16.12 可得

$$\boldsymbol{E}[(N_t - N_s) f(Y_{u_1},\cdots,Y_{u_k}, N_{u_1},\cdots,N_{u_k})] = 0.$$

再由单调类定理对 $\xi\in b\mathscr{G}_{s-}$ 有

$$\boldsymbol{E}[(N_t - N_s)\xi] = 0,\ t>s,\ t, s\in D,$$

其中 $\mathscr{G}_t=\sigma(N_s, Y_s, s\leqslant t)$．对任意的 $s<t$，取 $s_k<t_k$ 满足 $s_k, t_k\in D$，$s_k\downarrow\downarrow s$，$t_k\downarrow\downarrow t$．因为 $\mathscr{G}_{s+}\subset\mathscr{G}_{s_k-}$，$N$ 是右连续的，且$(N_s, s\leqslant t)$是

一致可积的，故对 $\xi\in b\mathscr{G}_{s+}^n$ 有

$$E[(N_t - N_s)\xi] = 0.$$

所以 N 是一个 $\boldsymbol{G}$ 鞅． □

16.14 引理　假定 (X^n) 和 (M^n) 为 Φ 上两列右连左极过程，对每个 n，M^n 是鞅．又 X 为 Φ_D 上标准过程，M 为 Φ_D 上的右连左极过程，D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 的稠密子集，$D\subset \boldsymbol{R}\setminus J(X)$．若下列条件成立：

i) 对每个 $t>0$，$(M_s^n, s\leqslant t, n\geqslant 1)$ 是一致可积的，

ii) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，

iii) 对每个 $t\in D$，$x\mapsto M_t(x)$ 是 $\boldsymbol{D}$ 上 $\mathscr{L}(X)$-a.s. 连续映照，

iv) 对每个 $t\in D$，$M_t^n - M_t\circ X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} 0$，

则 M 为 Φ_D 上的鞅．

证明　在引理 16.13 中，若以 M^n、X^n、M 和 X 分别代替 N^n、Y^n、N 和 Y，则引理 16.13 的条件 i) 成立，而 $\mathscr{G}_t$ 就是 $\mathscr{D}_t$．条件 ii) 和 iii) 产生

$$\begin{aligned}(M_{t_j}\circ X^n, X_{t_j}^n)_{1\leqslant j\leqslant k} &\xrightarrow{\mathscr{L}} (M_{t_j}\circ X, X_{t_j})_{1\leqslant j\leqslant k} \\ &= (M_{t_j}, X_{t_j})_{1\leqslant j\leqslant k}, t_j\in D.\end{aligned}$$

此外由 iv) 可得

$$(M_{t_j}^n, X_{t_j}^n)_{1\leqslant j\leqslant k} \xrightarrow{\mathscr{L}} (M_{t_j}, X_{t_j})_{1\leqslant j\leqslant k}, t_j\in D.$$

这样引理 16.13 的条件 ii) 也成立，故可知 M 是 Φ_D 上的鞅． □

16.15 引理　假定 $M\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}^2$，$|\Delta M|\leqslant a$，则存在与 M 无关的常数 k_1、k_2 使

$$E[M_t^{*4}]\leqslant k_1 a^2 (E[\langle M\rangle_t^2])^{1/2} + k_2 E[\langle M\rangle_t^2]. \qquad (15.1)$$

证明　首先，我们假定 M 和 $\langle M\rangle$ 是有界的．记 $N=[M]-\langle M\rangle\in\mathscr{M}_{\text{loc},0}$，则 $|\Delta N| = |(\Delta M)^2 - {}^p((\Delta M)^2)|\leqslant 2a^2$ 且

$$[N] = \sum(\Delta N)^2 \prec a^2\operatorname{Var}(N) \prec a^2([M]+\langle M\rangle).$$

因而 $\langle N\rangle\prec 2a^2\langle M\rangle$．现由 B-D-G 不等式（定理 10.36）可得

$$E[M_t^{*4}]\leqslant kE[M]_t^2 \leqslant 2kE[\langle M\rangle_t^2] + 2kE[N_t^2]$$

$$= 2kE[\langle M\rangle_t^2] + 2kE[\langle N\rangle_t]$$
$$\leqslant 2kE[\langle M\rangle_t^2] + 4a^2k(E[\langle M\rangle_t^2])^{1/2}.$$

于是对 $k_1=4k, k_2=2k$ (15.1)成立. 最后对任一 $M\in\mathscr{M}^2_{loc,0}$, 令

$$T_n = \inf\{t: |M_t|, \geqslant n\ \langle M\rangle_t \geqslant n\},$$

则由 $|\Delta M|\leqslant a$ 可知 $|M^{T_n}|\leqslant n+a$, $\langle M\rangle^{T_n}\leqslant n+a^2$. 所以(15.1)对 M^{T_n} 成立. 再令 $n\to\infty$ 可知(15.1)对 M 也成立. □

16.16 定理 假定对每个 n, X^n 是以 (α^n,β^n,ν^n) 为可料特征的半鞅. 设 X 为 Φ_D 的标准过程. 若 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$, 且存在关于 t 连续的 Φ_D 上的三元体 (α,β,ν) 和 $\mathbf{R}_+$ 中稠密子集 D, $D\subset\mathbf{R}_+\setminus J(X)$ ($J(X)$ 按第十五章(43.1)规定)使下列条件成立:

i) $[\alpha-D]$, $[\tilde\beta-D]$, $[\nu-D]$ 成立.

ii) 对某个 $h\in\mathscr{Z}_c$,

$$\sup_{y\in D}|\tilde\beta_t(y,h)|<\infty, \sup_{y\in D}|g*\nu_t(y)|<\infty,\ t\geqslant 0,\ g\in J_1, \tag{16.1}$$

iii) 连续性条件成立: 对每个 $t\in D$, $g\in J_1$ 及某个 $h\in\mathscr{Z}_c$, 下列 D 上映照按照 Skorohod 拓扑是 $\mathscr{L}(X)$-a.s. 连续的:

$$y\mapsto\alpha_t(y,h),\ y\mapsto\tilde\beta_t(y,h),\ y\mapsto g*\nu_t(y), \tag{16.2}$$

则 X 是以 (α,β,ν) 为可料特征的 Φ_D 上的半鞅.

注 由于 (α,β,ν) 的连续性, (2.8), (2.9)分别为

$$\alpha(h)-\alpha(g)=(h-g)*\nu,$$
$$\tilde\beta(h)-\tilde\beta(g)=(h^2-g^2)*\nu.$$

若 $h,g\in\mathscr{Z}_c$, 则 $h-g$, $h^2-g^2\in J_1$; 若(16.1), (16.2)对某个 $h\in\mathscr{Z}_c$ 成立, 则它们对一切 $h\in\mathscr{Z}_c$ 都成立.

证明 对固定的 $g\in J_1$, $h\in\mathscr{Z}_c$, 令

$$X^n(h)=X^n-\sum(\Delta X^n-h(\Delta X^n)),\qquad X(h)=X-\sum(\Delta X-h(\Delta X)),$$
$$V^n=X^n(h)-\alpha^n(h)-X_0^n,\qquad V=X(h)-\alpha(h)-X_0,$$
$$Z^n=V^{n2}-\tilde\beta^n(h),\qquad Z=V^2-\tilde\beta(h),$$
$$N^{ng}=\sum g(\Delta X^n)-g*\nu^n,\qquad N^g=\sum g(\Delta X)-g*\nu,$$

则

$$X^n(h) = X(h) \circ X^n. \tag{16.3}$$

由于(2.4)和(2.7)，对每个 n；V^n, Z^n, N^{nK} 为 Φ 上的局部鞅，往证 V, Z, N^K 是 Φ_D 上的局部鞅．为此运用引理 16.14.

a)取 $T \in D$. 若$\sup\limits_y \tilde{\beta}_T(y,h) \leqslant K$，令

$$T_n = \inf\{t : \tilde{\beta}_t^n(h) \geqslant K+1\},\ M_t^n = V_{t\wedge T_n\wedge T}^n,\ M = V^T.$$

欲证 $M = V^T$ 为一个鞅．若$|h| \leqslant a$，则

$$E[\sup_t |M_t^n|^2] \leqslant 4E[(M_\infty^n)^2] \leqslant 4E[\tilde{\beta}_{T_n}^n(h)] \leqslant 4(K+1+4a^2).$$

于是引理 16.14 条件 i)成立．假定 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 保证了引理 16.14 条件 ii)成立．对 $t \in D \subset \mathbf{R} \backslash J(X)$，系 15.31 蕴含了映照$X| \rightarrow X_t(h)$在 $\boldsymbol{D}$ 上连续．进而 $X \mapsto V_t(x)$和 $X \mapsto M_t(x) = V_{t\wedge T}(X)$也在 $\boldsymbol{D}$ 上连续，引理 16.14 条件 iii)也被满足．最后由(16.3)

$$V_t^n - V_t \circ X^n = \alpha_t(h) \circ X^n - \alpha_t^n(h),$$

$$\begin{aligned} P(|M_t^n - M_t \circ X^n| > \varepsilon) &= P(|V_{t\wedge T_n\wedge T}^n - V_{t\wedge T} \circ X^n| > \varepsilon) \\ &\leqslant P(T_n < T) + P(|\alpha_{t\wedge T}(h) \circ X^n - \alpha_{t\wedge T}^n(h)| > \varepsilon. \end{aligned} \tag{16.4}$$

由于 $\tilde{\beta}(h) \circ X^n \leqslant K, \tilde{\beta}_T^n(h) - \tilde{\beta}_T(h) \circ X^n \xrightarrow{P} 0$，

$$\begin{aligned} P(T_n < T) &= P(\tilde{\beta}_T^n(h) \geqslant K+1) \\ &\leqslant P(|\tilde{\beta}_T^n(h) - \tilde{\beta}_T(h) \circ X^n| > 1) \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{16.5}$$

所以由[α-D]及(16.4)可知 16.14.iv)成立，这样由引理 16.14 可推出 $M = V^T$ 是一个鞅，$V \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$.

b)设 T, T_n 与 a)中一样，而

$$M_t^n = Z_{t\wedge T\wedge T_n}^n,\ M = Z^T.$$

由引理 16.15 存在仅依赖于 h, K 的常数 k' 使

$$E[\sup_t |V_{t\wedge T_n}^n|^4] \leqslant k'.$$

因此$(Z_{t\wedge T\wedge T_n}^n, t \geqslant 0, n \geqslant 1)$是一致可积的．条件 16.14.ii)和 16.14.iii)可像 a)中一样验证．此外

$$M_t^n - M_t \circ X^n = (V^n_{t\wedge T\wedge T_n})^2 - (V_{t\wedge T} \circ X^n)^2$$

$$- (\tilde{\beta}^n_{t\wedge T\wedge T_n} - \tilde{\beta}_{t\wedge T} \circ X^n)$$

$$= (V^n_{t\wedge T\wedge T_n} - V_{t\wedge T} \circ X^n)(V^n_{t\wedge T\wedge T_n} + V_{t\wedge T} \circ X^n)$$

$$- (\tilde{\beta}^n_{t\wedge T\wedge T_n} - \tilde{\beta}_{t\wedge T} \circ X^n).$$

从上式可见$(V_{t\wedge T\wedge T_n}, V_{t\wedge T} \circ X^n, n\geqslant 1)$是一致可积的且$V^n_{t\wedge T\wedge T_n} - V_{t\wedge T} \circ X^n \xrightarrow{P} 0$. 于是类似于 a)可由$[\tilde{\beta}-D]$及(16.5)推出 16.14.iv). 这样$M=Z^T$是一个鞅,而$Z\in\mathscr{M}_{loc}$.

c)取 $T\in D$. 若$\sup_y g*\nu_T(y)\leqslant K$,令

$$T_n = \inf\{t: g*\nu_t^n(y) \geqslant K+1\},\ M_t^n = N^{ng}_{t\wedge T\wedge T_n},\ M_t = N^g_{t\wedge T}.$$

因为

$$\langle M^n\rangle_t \leqslant g^2 * \nu^n_{t\wedge T_n} \leqslant K' = (K+1+\|g\|)\|g\|,$$

可有

$$E[\sup_t |M_t^n|^2] \leqslant 4E[\langle M^n\rangle_\infty] \leqslant 4K'.$$

因而$(M_t^n, t\geqslant 0, n\geqslant 1)$是一致可积的,16.14.i)被满足. 16.14.ii)和 16.14.iii)像 a)一样验证. 最后,

$$M_t^n - M_t \circ X^n = g*\nu^n_{t\wedge T\wedge T_n} - (g*\nu_{t\wedge T})\circ X^n$$

类似于 a)可由$[\nu\text{-}D]$推出 16.14.iv)也成立. 由此$M=(N^g)^T$是一个鞅,而$N^g\in\mathscr{M}_{loc}$.

因为对每$g\in J_1$,V, Z, N^g是局部鞅,所以X是半鞅且以(α,β,ν)为可料特征. □

16.17 定理 假定对每n X^n是Φ上的半鞅,X^n以(α^n,β^n,ν^n)为可料特征. 设X是Φ_D上的标准过程. 若在Φ_D上存在可料三元体(α,β,ν)及$\boldsymbol{R}_+$的稠密子集D使下列条件成立:

i)$\mathscr{L}(X_0^n) \xrightarrow{w} \lambda_0$,

ii)$[\sup\alpha]$,$[\beta\text{-}D]$,$[\nu\text{-}D]$成立,

iii)强控制条件成立:存在连续(决定性)函数F使

$$\mathrm{Var}(\alpha) + \beta + (x^2\wedge 1)*\nu \prec F, \qquad (17.1)$$

iv)大跳一致小条件成立：

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{y\in D}\nu(y,[0,t]\times\{x:|x|>a\})=0,\forall t>0,\qquad(17.2)$$

v)连续性条件成立：对每个 $t\in D,g\in J_1$ 及某个 $h\in\mathscr{L}_c$，下列映照在 D 上连续：

$$x\mapsto\alpha_t(x,h),x\longmapsto\tilde{\beta}_t(x,h),x\longmapsto g*\nu_t(x).\qquad(17.3)$$

vi)P_D 是半鞅问题$(X,D^0;\lambda_0,\alpha,\beta,\nu)$的唯一解，则 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

注 vi)表明 X 是以(α,β,ν)为可料特征的半鞅而(17.1)保证了 X 是拟左连续的.

证明 首先，由(17.1)可知若 $g\in J_1,\alpha,\beta,g*\nu$ 都对 t 连续且对任一 $h\in\mathscr{L}$ 存在常数 k 使

$$\mathrm{Var}(\alpha(h))+\tilde{\beta}(h)+(1\wedge x^2)*\nu<kF.$$

由条件 i)—iv)定理 16.11 的所有条件都被满足，故由定理 16.11 可知(X^n)是胎紧的.

假定$(\mathscr{L}(X^n))$有一收敛子列，为简单计就设为$(\mathscr{L}(X^n))$本身，若

$$\mathscr{L}(X^n)\xrightarrow{w}P'.\qquad(17.4)$$

P' 为$(D,\mathscr{D})$上分布．往证

$$J'(X)=\{t>0:P'(\Delta X_t\neq0)>0\}=\varnothing.$$

对 $t>0,\varepsilon>0$，由(17.1)有 $s<t<s'$ 使

$$g_{2/\varepsilon}*\nu_{s'}(y)-g_{2/\varepsilon}*\nu_s(y)<\varepsilon,\ y\in D,\qquad(17.5)$$

其中 $g_p(x)=(p|x|-1)^+\wedge1$. 于是还存在 $r,r'\in R\backslash J'(X)$ 且 $s\leqslant r<t<r'\leqslant s'$. 类似于引理 15.20 有

$$\mathscr{L}(\sup_{r<u\leqslant r'}|\Delta X_u^n|)\xrightarrow{w}\mathscr{L}(\sup_{r<u\leqslant r'}|\Delta X_u||P'),$$

其中 $\mathscr{L}(\cdot|P')$为 P' 之下的分布．此外

$$P'(|\Delta X_t|>\varepsilon)\leqslant P'(\sup_{r<u\leqslant r'}|\Delta X_u|>\varepsilon)\leqslant\varliminf_n P(\sup_{r<u\leqslant r'}|\Delta X_u^n|>\varepsilon)$$

$$\leqslant\varliminf_n P(\sup_{s<u\leqslant s'}|\Delta X_u^n|>\varepsilon)\leqslant\varliminf_n P(\sum_{s<u\leqslant s'}g_{2/\varepsilon}(\Delta X_u^n)\geqslant1).$$

由于$(\sum_{s<u\leqslant\cdot}g_{2/\varepsilon}(\Delta X_u^n))^p=(I_{]s,\cdot]}g_{2/\varepsilon})*\nu^n$，Lenglart 不等式包含

了

$$P'(|\Delta X_t| > \varepsilon) \leqslant 2\varepsilon + \overline{\lim_n} P(g_{\varepsilon/2} * \nu_s^n - g_{\varepsilon/2} * \nu_s^n \geqslant 2\varepsilon).$$

但由[ν-D]有

$$\begin{aligned} g_{2/\varepsilon} * \nu_s^n - (g_{2/\varepsilon} * \nu_s) \circ X^n \xrightarrow{P} 0, \\ g_{2/\varepsilon} * \nu_s^n - (g_{2/\varepsilon} * \nu_s) \circ X^n \xrightarrow{P} 0. \end{aligned} \tag{17.6}$$

因而由(17.6)及(17.5)可引出

$$P'(|\Delta X_t| > \varepsilon) \leqslant 2\varepsilon.$$

由于 ε 可以是任意的正数，故 $P'(|\Delta X_t| \neq 0) = 0, J'(X) = \varnothing$.

还要验证定理 16.16 的诸条件被满足．因为 $J'(X) = \varnothing$，故定理假定中 D 在 $\mathscr{L}(X|P')$ 之下亦适用于定理 16.16，即定理 16.16 的条件 i)成立．定理 16.16 的条件 ii)由定理 16.17 的条件 iii)推出，定理 16.16 的条件 iii)就是定理 16.17 的条件 v)．因此定理 16.16 蕴含了 X 是$(\mathbf{D}, D, \mathbb{D}, P')$上的以$(\alpha, \beta, \nu)$为可料特征的半鞅，即 P' 是半鞅问题$(X, \mathbb{D}; \lambda_0, \alpha, \beta, \nu)$的解．现在由条件 vi)可知 $P' = P_D$，这意味着$(\mathscr{L}(X^n))$的极限点是唯一的且

$$\mathscr{L}(X^n) \xrightarrow{w} P_D = \mathscr{L}(X). \quad \square$$

定理 16.17 的条件 iii)－vi)是附加在 Φ_D 上的可料三元体(α, β, ν)之上的，而条件 i)对 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 是必要的．条件 ii)要求 X^n 的可料特征$(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$按一种特殊的方式依概率收敛于$(\alpha, \beta, \nu)$．它并不很自然，因为定理的结论只是关于分布收敛的．因而很自然地为期望把条件 ii)代以$(\alpha^n, \beta^n, \nu^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (\alpha, \beta, \nu)$．但下列例子表明即便对计数过程，补偿子的按分布收敛不能保证过程本身按分布收敛．

16.18 例 假定 $N = (N_t)$是 Φ 上强度为 1 的 Poisson 过程，随机变量 $\nu \in \mathscr{F}_0$ 与 N 独立且 $P(\theta = 0) = P(\theta = 1) = 1/2$. 令

$$A_t = \log 2(t - \theta(t-1)^+),$$

$$X_t = N_{A_t}, \quad \mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{t \log 2},$$

$$Y_t = X_t I_{[0,1]}(t) + I_{[X_1 > 0]} N_{t \log 2} I_{]1,\infty[}(t).$$

则 X,Y 为计数过程．由于 $A=(A_t)$ 为连续的且$(\mathscr{G}_t)$-适应，X 和 Y 关于$(\mathscr{G}_t)$的补偿子分别为

$$X_t^p = A_t,$$

$$Y_t^p = A_t^1 + I_{[X_1>0]}(t-1)\log 2 I_{]1,\infty[} = \ln 2(t - I_{[X_1=0]}(t-1)^+).$$

因为 $A_1=\ln 2$，X_1 与 θ 和 A 独立，

$$\boldsymbol{P}(X_1=0)=e^{-\ln 2}=1/2, \boldsymbol{P}(X_1>0)=1/2.$$

因而 $\mathscr{L}(X^p)=\mathscr{L}(Y^p)$．但

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(X_2=0) &= \boldsymbol{P}(X_2=0,\theta=0)+\boldsymbol{P}(X_2=0,\theta=1)\\ &= e^{-2\log 2}/2+e^{-\log 2}/2=3/8,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{P}(Y_2=0)=\boldsymbol{P}(X_1=0)=e^{-\log 2}=1/2.$$

这样 X 和 Y 有不同的分布．

下面我们给出局部平方可积半鞅分布弱收敛的定理，并以由(2.10)(2.11)定义的 α'，β' 和 ν 来表述这些条件．

16.19 定理 假定对每个 n，X^n 为局部平方可积半鞅，X^n 以(α^n,β^n,ν^n)为可料特征，且

$$\lim_{a\to\infty}\overline{\lim_{n}}\boldsymbol{P}((x^2 I_{[|x|>a]})*\nu_t^n>\varepsilon)=0, \forall t>0. \quad (19.1)$$

设 X 为 Φ_D 上的标准过程．若在 Φ_D 上存在可料三元体(α,β,ν)及 $\boldsymbol{R}_+$的稠密子集 D 使下列条件成立：

i) $\mathscr{L}(X_0^n)\xrightarrow{w}\lambda_0$，

ii) $[\sup\alpha']$，$[\beta'\text{-}D]$，$[\nu\text{-}D]$成立，

iii) 存在连续(决定性)增函数 F 使

$$\mathrm{Var}(\alpha')+\beta+x^2*\nu\prec F, \quad (19.2)$$

iv)

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{y\in D}(x^2 I_{[|x|>a]})*\nu_t(y)=0, \forall t>0, \quad (19.3)$$

v) 对每个 $t\in D$，$g\in J_1$，下列映照在 $\boldsymbol{D}$ 上连续：

$$x\longmapsto\alpha_t^{\prime}(x),\ x\longmapsto\beta_t^{\prime}(x),\ x\longmapsto g*\nu_t(x),$$

vi) $\boldsymbol{P}_D$ 是半鞅问题$(X,\mathscr{D};\lambda_0,\alpha,\beta,\nu)$的唯一解，

则 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

证明 我们将验证这里的假设包含了定理 16.17 的假设成立．比较这些假设，只需说明(17.1)—(17.3)、[sup α]和[$\tilde{\beta}$-D]是成立的．

对 $h\in\mathscr{H}$，由(2.11)可知存在常数 k 使

$$|\alpha(h)-\alpha'|=|(h(x)-x)*\nu|\leqslant kx^2*\nu,$$
$$\mathrm{Var}(\alpha(h))\leqslant\mathrm{Var}(\alpha')+kx^2*\nu\leqslant kF.$$

所以(17.1)成立，且对 $g\in J_1$、$\alpha(h)$，$\tilde{\beta}$，$g*\nu$ 关于 t 连续．

对 $h\in\mathscr{H}_c$，令

$$k_a(x)=(h(x)-x)(1-g_{1/a}(x))\in J_1,$$
$$\tilde{k}_a(x)=(h^2(x)-x)(1-g_{1/a}(x))\in J_1$$

其中 $g_p(x)=(p|x|-1)^+\wedge 1$．(2.10)(2.11)保证了

$$\alpha(h)-\alpha'=(h(x)-x)*\nu$$
$$=k_a(x)*\nu+((h(x)-x)g_{1/a}(x))*\nu,\quad(19.4)$$

$$\tilde{\beta}(h)-\tilde{\beta}=x^2*\nu-h^2(x)*\nu$$
$$=\tilde{k}_a(x)*\nu+((h^2(x)-x^2)g_{1/a}(x))*\nu,\quad(19.5)$$

并有常数 k 使

$$|h(x)-x|g_{1/a}(x)\leqslant kx^2I_{\{|x|\leqslant a\}},\quad(19.6)$$
$$|h^2(x)-x^2|g_{1/a}(x)\leqslant kx^2I_{\{|x|\leqslant a\}}.$$

由於(19.3)，若 a 足够大，(19.4)及(19.5)中的第二项小于任一给定的正数．所以定理 16.17 的连续性条件可由定理 16.19 的条件 v)推出．

类似于(19.4)，我们有

$$\alpha^n(h)-\alpha'^n=k_a(x)*\nu^n+R_a^n,$$
$$|R_a^n|\leqslant kx^2I_{\{|x|\leqslant a\}}*\nu^n.$$

因而[sup α]可由(19.1)—(19.3)，[ν-D]及[sup α']推出．

最后，由(2.12)

$$\tilde{\beta}^n(h)-\tilde{\beta}'^n=\tilde{k}_a(x)*\nu^n-R^n(a)-\sum\gamma^n,\quad(19.7)$$

$$|R^n(a)|=|(h^2(x)-x^2)*\nu^n|$$
$$\leqslant k(x^2I_{\{|x|\leqslant a\}})*\nu^n,\quad(19.8)$$

$$\gamma_s^n = (\Delta\alpha_s^n(h))^2 - (\Delta\alpha'^n_s)^2.$$

所以，若能证明$\sum_{s\leqslant t}\gamma_s^n \xrightarrow{P} 0$，则$[\tilde{\beta}\text{-}D]$可由(19.8)，(19.1)(19.3)和$[\beta\text{-}D]$推出．但是

$$\sum_{s\leqslant t}\gamma_s^n \leqslant \sum_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h) - \Delta\alpha'^n_s|(|\Delta\alpha_s^n(h)| + |\Delta\alpha'^n_s|), \quad (19.9)$$

$$\sum_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h) - \Delta\alpha'^n_s| \leqslant k_a(x) * \nu_t^n + k(x^2 I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n.$$

对固定的t，由(19.2)，$[\nu\text{-}D]$及(19.1)$(k_a(x) * \nu_t^n + k(x^2 I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n, n\geqslant 1)$是胎紧的．由$[\sup\alpha]$和$[\sup\alpha']$

$$\sup_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h)| - \sup_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h) - \Delta\alpha_s(h)\circ X^n| \xrightarrow{P} 0, \quad (19.10)$$

$$\sup_{s\leqslant t}|\Delta\alpha'^n_s| - \sup_{s\leqslant t}|\Delta\alpha'^n_s - \Delta\alpha'_s\circ X^n| \xrightarrow{P} 0. \quad (19.11)$$

现在由(19.9)－(19.11)可得$\sum_{s\leqslant t}\gamma_s^n \xrightarrow{P} 0$，定理16.17所有假设都成立．故有$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$．

§2. 收敛于Lévy过程

16.20 引理　假定X是一个以(α,β,ν)为可料三元体的半鞅(独立增量过程)，$\tilde{\alpha}$是一个可料有限变差过程(非随机右连续函数)，则$\tilde{X}=X-\tilde{\alpha}$也是半鞅(独立增量过程)且其可料三元体$(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\nu})$可表为：

$$\bar{\alpha}_t(h) = \alpha_t(h) - \tilde{\alpha}_t + \sum_{s\leqslant t}\int_R V(s,x)\nu(\{s\}\times dx)$$
$$+ \sum_{s\leqslant t} V(s,0)(1-a_s),$$

$$\bar{\beta} = \beta,$$

$$\bar{\nu}([0,t]\times A) = \int_0^t\int_R I_A(x-\Delta\tilde{\alpha}_s)I_{[x\neq\Delta\tilde{\alpha}_s]}\nu(ds,dx)$$
$$+ \sum_{s\leqslant t}(1-a_s)I_{[\Delta\tilde{\alpha}_s\neq 0]}I_A(-\Delta\tilde{\alpha}_s) \quad (20.1)$$

其中$a_s=\nu(\{s\}\times \boldsymbol{R})$．

$$V(t,x) = \Delta\tilde{\alpha}_t + h(x - \Delta\tilde{\alpha}_t) - h(x). \tag{20.2}$$

特别地，若 $\tilde{\alpha}$ 连续，则

$$\bar{\alpha}(h) = \alpha(h) - \tilde{\alpha}, \bar{\beta} = \beta, \bar{\nu} = \nu. \tag{20.3}$$

证明 首先，假定 X 为半鞅，$\bar{X}^c = X^c$ 包含了 $\bar{\beta} = \beta$. 设 $\mu^X, \mu^{\bar{X}}$ 分别为 $X, \bar{X}$ 的跳测度，$W \in \tilde{\mathscr{P}}^+$ 以及 $W'(s,x) = W(s, x - \Delta\tilde{\alpha}_s) I_{[x \neq \Delta\tilde{\alpha}_s]}$，则

$$W * \mu_t^{\bar{X}} = \sum_{s \leqslant t} W(s, \Delta X_s - \Delta\tilde{\alpha}_s) I_{[\Delta X_s \neq \Delta\tilde{\alpha}_s]}$$

$$= W' * \mu_t^X + \sum_{s \leqslant t} W(s, -\Delta\tilde{\alpha}_s) I_{[\Delta\tilde{\alpha}_s \neq 0, \Delta X_s = 0]}.$$

由定理 5.42 存在图不相交的可料时序列使 $\bigcup_n [\![T_n]\!]$ 为稀疏集 $[\Delta X \neq 0] \cup [\Delta\tilde{\alpha} \neq 0]$ 的可料支集．记 $D = [\Delta X \neq 0]$，则 $a = {}^p(I_D)$ 且

$$\boldsymbol{E}[W * \mu_\infty^{\bar{X}}]$$

$$= \boldsymbol{E}(W' * \mu_\infty^X) + \sum_{p \geqslant 1} \boldsymbol{E}[W(T_p, -\Delta\tilde{\alpha}_{T_p}) I_{[\Delta\tilde{\alpha}(T_p) \neq 0]} I_{D^c}(T_p) I_{[T_p < \infty]}]$$

$$= \boldsymbol{E}(W' * \nu_\infty^X) + \sum_{p \geqslant 1} \boldsymbol{E}[\tilde{W}(T_p, -\Delta\tilde{\alpha}_{T_p}) I_{[\Delta\tilde{\alpha}(T_p) \neq 0]} (1 - aT_p) I_{[T_p < \infty]}]$$

$$= \boldsymbol{E}[W * \bar{\nu}_\infty],$$

其中 $\bar{\nu}$ 由(20.1)规定．于是 $(\mu^{\bar{X}})^p = \bar{\nu}$.

其次，设 $h \in \mathscr{C}_c$，由(2.2)及直接计算可得

$$\bar{X}(h) = \bar{X} - \sum[\Delta\bar{X} - h(\Delta\bar{X})]$$

$$= X_0 + M(h) + \alpha(h) - \tilde{\alpha} + V * \mu^X + \sum V(\cdot, 0) I_{D^c}.$$

因为当 $|x| < c$ 时 $h(x) = x$，当 $|x| + |\Delta\alpha_t| < c$ 时 $V(t,x) = 0$，容易看出

$$V * \mu^X \in \mathscr{A}_{\text{loc}}, (V * \mu^X)^p = V * \nu,$$

$$\sum V(\cdot, 0) I_{D^c} \in \mathscr{A}_{\text{loc}}, (\sum V(\cdot, 0) I_{D^c})^p = \sum V(\cdot, 0)(1 - a).$$

因而

$$X(h) - (V * \nu + \sum V(\cdot, 0)(1 - a) + \alpha(h) - \tilde{\alpha})$$

$$= X_0 + M(h) + V * (\mu - \nu) + \sum V(\cdot,0)(I_{D^c} - (1 - a))$$

$$\in \mathscr{M}_{loc}.$$

所以由(20.1)给出的 $\tilde{\alpha}(h)$是 $\overline{X}$ 的第一特征.

最后,若 X 为独立增量过程,计算 $\overline{X}$ 的特征函数就可得出(20.1)和(20.2). □

注 为方便计算,我们引入 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}$ 上下列可料随机测度:

$$\nu^*([0,t] \times A) = \nu([0,t] \times A)$$

$$+ \sum_{s \leqslant t} (1 - a_s)\delta_0(A) I_{[a_s > 0] \cup [\bar{a}_s > 0]}(s),$$

$$\bar{\nu}^*([0,t] \times A) = \nu([0,t] \times A)$$

$$+ \sum_{s \leqslant t} (1 - \bar{a}_s)\delta_0(A) I_{[\bar{a}_s > 0] \cup [\bar{a}_s > 0]}(s),$$

其中 $\bar{a}_s = \nu(\{s\} \times \boldsymbol{R})$. 对满足 $f(s,o) = 0$ 的非负 $f(s,x)$可有

$$f * \nu^* = f * \nu, \ f * \bar{\nu}^* = f * \nu.$$

运用这些记号,(20.1)可改写为

$$\alpha_t(h) = \alpha_t(h) - \tilde{\alpha}_t + \sum_{s \leqslant t} \int_R V(s,x)\nu^*(\{s\} \times dx), \tag{20.4}$$

$$\bar{\beta} = \beta,$$

$$\int_0^t \int_R W(s,x)\bar{\nu}^*(ds,dx) = \int_0^t \int_R W(s,x - \Delta a_s)\nu^*(ds,dx), \tag{20.5}$$

其中 $W \in \widetilde{\mathscr{P}}^+$. 此外,由(2.7)可得到

$$\tilde{\beta}(h) = \langle M(h) \rangle = \beta + (h - \hat{h}) * \nu^*, \tag{20.6}$$

其中 $\hat{h}_s = \int h(x)\nu(\{s\} \times dx) = \int h(x)\nu^*(\{s\} \times dx)$. $\overline{X}$ 的第二特征 $\tilde{\beta}(h)$为

$$\tilde{\bar{\beta}}(h) = \beta + (h - k)^2 * \nu^*, \tag{20.7}$$

$$k_s = \int h(x)\bar{\nu} * (\{s\} \times dx)$$

$$= \int h(x - \Delta\bar{a}_s)\nu^*(\{s\} \times dx)$$

$$= \int h(x - \Delta\tilde{\alpha}_s)\nu(\{s\} \times dx) + (1 - a_s)h(-\Delta\tilde{\alpha}_s). \quad (20.8)$$

特别

$$\tilde{\beta}(h) - \bar{\beta}(h) = (h - k)^2 * \nu^* - (h - \hat{h}) * \nu^*$$

$$-[(h(x - \Delta\tilde{\alpha}) - k)^2 - (h(x) - \hat{h})^2] * \nu^*. \quad (20.9)$$

16.21 引理 设 $h \in \mathscr{Z}$，满足 $|h(x)| \leqslant K$（K 为一常数），当 $|x| \leqslant c$ 时 $h(x) = x$。若 $\tilde{\alpha} = \alpha(h)$ 且

$$\sup_{s \leqslant t} |\Delta\tilde{\alpha}_s(h)| \leqslant \varepsilon < c/2 \text{ a.s.}, \quad (21.1)$$

则对(20.1)、(20.7)和(20.8)给出的 $\alpha, \tilde{\beta}, \nu$ 有

$$\mathrm{Var}_t[\tilde{\alpha}(h)]$$

$$\leqslant [\varepsilon + \omega(\varepsilon, h)]\nu([0,t] \times \{x: |x| > c/2\}), \quad (21.2)$$

$$\sup_{s \leqslant t} |\tilde{\beta}_s(h) - \bar{\beta}_s(h)|$$

$$\leqslant 4K[\varepsilon + 3\omega(\varepsilon, h)]\nu([0,t] \times \{x: |x| > c/2\}), \quad (21.3)$$

$$\sup_{s \leqslant t} |g * \nu_s - g * \tilde{\nu}_s|$$

$$\leqslant \omega(\varepsilon, g)\nu([0,t] \times \{x: |x| > 2\varepsilon\}), \quad (21.4)$$

其中 $\omega(\delta, h) = \sup_{|x - x'| \leqslant \delta} |h(x) - h(x')|$，$g \in J_1$ 且当 $|x| \leqslant 2\varepsilon$ 时 $g(x) = 0$。

证明 若 $|x| < c/2$，则(21.1)包含了 $|x| + |\Delta\tilde{\alpha}_s| < c$ 及 $V(t, x) = 0$。同时 $|V(s,x)| = |\Delta\tilde{\alpha}_s + h(x - \Delta\tilde{\alpha}_s) - h(x)| < \varepsilon + \omega(\varepsilon, h)$。因此

$$\mathrm{Var}_t(\tilde{\alpha}(h))$$

$$\leqslant \sup_{s \leqslant t} \sum_{r \leqslant s} \left| \int_{\{|x| > c\}} V(r, x)\nu(\{r\} \times dx) \right|$$

$$\leqslant [\varepsilon + \omega(\varepsilon, h)]\nu([0,t] \times \{x: |x| > c/2\}),$$

$$\sup_{s \leqslant t} |g * \nu_s - g * \tilde{\nu}_s|$$

$$= \sup_{s \leqslant t} \left| \int_0^s \int_{\{|x| > 2\varepsilon\}} [g(x - \Delta a_r) - g(x)]\nu(dr \times dx) \right|$$

$$\leqslant \omega(\varepsilon, g)\nu([0,t] \times \{x: |x| > 2\varepsilon\}).$$

若 $|x|<c/2$，对(20.8)给出的 k 和 h 有

$$|h(x-\Delta\alpha_s(h))-k_s-h(x)+\hat{h}_s|$$
$$=|-\Delta\alpha_s(h)+\left(\int_{[|x|<c/2]}+\int_{[|x|\geq c/2]}\right)$$
$$[h(x)-h(x-h(x-\Delta\tilde{\alpha}_s(h))]\nu^*(\{s\}\times dx)|$$
$$\leqslant[\varepsilon+\omega(\varepsilon,h)]\nu(\{s\}\times\{|x|\geqslant c/2\})；$$

若 $|x|\geqslant c/2$

$$|h(x-\Delta\alpha_s-k_s-h(x)+\hat{h}_s|$$
$$\leqslant\omega(\varepsilon,h)+|\int_R[h(x)-h(x-\Delta\alpha_s(h))]\nu^*(\{s\}\times dx)$$
$$\leqslant 2\omega(\varepsilon,h).$$

于是

$$\sup_{s\leq t}|\tilde{\beta}_t^n(h)-\beta_t(h)|$$
$$\leqslant\sum_{s\leqslant t}\int_R|h(x-\Delta\tilde{\alpha}_s)-k_s)^2-(h(x)-\hat{h}_s)^2|\nu^*(\{s\}\times dx)$$
$$\leqslant 4K\sum_{s\leqslant t}\int_{[|x|<\frac{c}{2}]}+\int_{[|x|\geqslant\frac{c}{2}]}|h(x-\Delta\tilde{\alpha}_s)-k_s-h(x)+\hat{h}_s|\nu^*(\{s\}\times dx)$$
$$\leqslant 4K[\varepsilon+3\omega(\varepsilon,h)]\nu^*([0,t]\times\{|x|>\frac{c}{2}\}).$$

故(21.2)—(21.4)成立. □

16.22 定理 设对每个 n，X^n 为 Φ 上的半鞅，X^n 以 (α^n,β^n,ν^n) 为可料特征，又 X 是以 (α,β,ν) 为可料特征的 Lévy 过程. 若下列条件成立 i) $X_0^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X_0$，ii) [sup α]，[$\tilde{\beta}$-D]，[ν-D]成立，D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 中一个稠密子集，则 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

证明 因为 X 为 Lévy 过程，无损一般性，我们可假定 X 是带流概率概率空间 Φ_D 上以 (α,β,ν) 为可料特征的 Lévy 过程，且 $(\alpha、\beta、\nu)$ 对 t 连续.

首先，假定对某个 $h\in\mathscr{L}_c$，$\alpha(h)=0$，则 X 是一个半鞅. 我们将验证定理 16.17 的所有假设都被满足. 定理 16.17 的条件 i) 和 ii) 分别就是定理 16.22 的条件 i) 和 ii). 取 $F=\beta+(x^2\wedge 1)*\nu$，则条件 iii) 也成立. 因为 α,β,ν 是非随机的，故(17.2)及条件 v) 成

立，而系 11.37 使条件 vi)也成立．所以由定理 16.17 有 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

其次，若 $\alpha(h)\neq 0$，令

$$Y = X - \alpha(h),\quad Y^n = X^n - \alpha^n(h).$$

由引理 16.20，Y 是以下列$(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\nu})$为可料三元体的 Lévy 过程：

$$\bar{\alpha}(h) = 0,\ \bar{\beta} = \beta,\ \tilde{\bar{\beta}}(h) = \tilde{\beta}(h),\ \bar{\nu} = \nu. \tag{22.1}$$

Y^n 是以下列$(\bar{\alpha}^n,\bar{\beta}^n,\bar{\nu}^n)$为可料特征的半鞅：

$$\bar{\alpha}_t^n(h) = \sum_{s\leqslant t}\int_R V(s,x)\nu^{n*}(\{s\},dx), \tag{22.2}$$

$$\tilde{\bar{\beta}}^n(h) = \beta^n + (h - k^n)^2 * \bar{\nu}^{n*}, \tag{22.3}$$

$$k_s^n = \int h(x)\bar{\nu}^{n*}(\{s\},dx),$$

$$g * \bar{\nu}_t^{n*} = \int_0^t\int_R g(x - \Delta\alpha_s^n(h))\nu^{n*}(ds\times dx). \tag{22.4}$$

往证定理的诸条件对 Y^n 和 Y 也成立．由于 $\mathscr{L}(Y_0^n)=\mathscr{L}(X_0^n)\xrightarrow{w}\mathscr{L}(X_0)=\mathscr{L}(Y_0)$，条件 i)对 Y^n 和 Y 成立．由于[sup α]及 $\alpha(h)$ 的连续性，对一切 $t>0$有

$$\sup_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h)|\xrightarrow{P} 0 \text{ 当 } n\to\infty.$$

同时对 $h\in\mathscr{X}_c$，必存在 $c>0$及 K 使$|h(x)|\leqslant K$ 以及当$|x|\leqslant c$ 时 $h(x)=x$．由[ν-D]，$(\nu^n[0,t]\times\{x:|x|>c/2\}))_{n\geqslant 1}$为胎紧的．所以引理16.21和定理16.22条件 ii)蕴含了

$$\sup_{s\leqslant t}|\bar{\alpha}_s^n(h)|\xrightarrow{P} 0,\ \tilde{\bar{\beta}}^n_t(h) - \tilde{\beta}_t(h)\xrightarrow{P} 0,\ \forall\, t>0,$$

$$g*\bar{\nu}_t^n - g*\nu_t\xrightarrow{P} 0,\ \forall\, t>0, g\in J.$$

所以定理诸假定对 Y^n 和 Y 也成立，上面对 $\alpha(h)=0$证明结论用于 Y 即得 $Y^n\xrightarrow{\mathscr{L}} Y$．现在，利用[sup α]及 $\alpha(h)$为连续非随机的（参见问题15.20）可得

$$X^n = Y^n + \alpha^n(h)\xrightarrow{\mathscr{L}} Y + \alpha(h) = X.\quad \square$$

16.23系 设对每个 n，X^n 为 Φ 上的右连左极独立增量过程，

其可料特征为(α^n,β^n,ν^n)，又 X 是以(α,β,ν)为可料特征的 Lévy 过程. 若下列条件成立：i) $X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$，ii) 对 $\boldsymbol{R}_+$ 中的稠密子集 D，$[\sup \alpha][\beta\text{-}D]$和$[\nu\text{-}D]$成立，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

证明 因为 X^n 和 X 为独立增量过程，(α^n,β^n,ν^n)和(α,β,ν)是非随机的.

若对每个 n，X^n 是半鞅（即 $\alpha(h)$是有限变差的），则定理16.22已表明 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 一般，可令

$$Y^n = X^n - \alpha^n(h), Y = X - \alpha.$$

则 Y 是以$(0,\beta,\nu)$为可料特征的 Lévy 过程，Y^n 是以由(22.2)—(22.4)给出的$(\bar{\alpha}^n,\bar{\beta}^n,\bar{\nu}^n)$为可料特征的独立增量过程. 由(21.2)，$\bar{\alpha}^n(h)$是有限变差函数，故 Y^n 为半鞅. 用定理 16.22一样的论证有 $Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$ 以及 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. □

16.24定理 假定对每个 n，X^n 是以(α^n,β^n,ν^n)为可料特征的 Φ 上的半鞅，X 是以 (α,β,ν)为可料特征的 Lévy 过程. 若

$$\lim_{a\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\boldsymbol{P}((x^2I_{[|x|>a]} * \nu_t^n > \eta) = 0, \ \forall \eta > 0, t > 0, \tag{24.1}$$

且 i) $X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$，ii) 对 $\boldsymbol{R}_+$ 的一个稠密子集 D，$[\sup \alpha']$，$[\beta'\text{-}D]$，$[\nu\text{-}D]$（可参见(7.5)(7.6)(7.2)）成立，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

证明 由定理16.19的证明可知，(24.1)和$[\sup \alpha'][\beta'\text{-}D]$ $[\nu\text{-}D]$保证了$[\sup \alpha]$，$[\tilde{\beta}\text{-}D]$成立. 因而由定理16.22有 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.
□

16.25系 假定对每个 n，X^n 是独立增量过程，其可料特征为(α^n,β^n,ν^n)，X 是以(α,β,ν)为可料特征的 Lévy 过程. 若

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{n}(x^2I_{|x|>a}) * \nu_t^n = 0, \ \forall t > 0, \tag{25.1}$$

且 i) $X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$，ii) 对 $\boldsymbol{R}_+$ 的一个稠密子集 D，$[\sup \alpha']$，$[\tilde{\beta}\text{-}D]$，$[\nu\text{-}D]$成立，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

证明 由定理16.19的证明可知，(25.1)及$[\sup \alpha']$，$[\beta'\text{-}D]$，

$[\nu\text{-}D]$保证$[\sup \alpha]$,$[\beta\text{-}D]$成立. 因而由系16.23有 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. □

注 定理16.22和16.24给出了半鞅按分布收敛于 Lévy 过程的充分条件. 较之于定理16.17和16.19,定理16.22和16.24的条件比较简单和自然. 虽然它们不是必要的,但当 X^n 是独立增量过程时,定理16.23的条件 i)和 ii)(在假定(25.1)之下定理16.24的条件 i)和 ii))都是必要的(参见 Jacod 和 Shiryaev[1]第七章定理3.4和3.7).

16.26 假定 $\tilde{\Phi}=(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0},\boldsymbol{P})$为一带时间离散流的概率空间. 前面已提到,这时 $\tau=(\tau_t)_{t\geqslant 0}$称为是 $\tilde{\Phi}$ 上的一个时变,若 τ 的每个轨道是 $\boldsymbol{N}$-值右连左极函数,而对每个 t,τ_t 是 $\boldsymbol{F}$-停时.

对每个 n,设 $U^n=(U_k^n)_{k\geqslant 1}$是 $\tilde{\Phi}$ 上的适应随机变量序列,$\tau^n=(\tau_t^n)$为 $\tilde{\Phi}$ 上的时变. 令

$$\mathscr{G}_t^n = \mathscr{F}_{\tau_t^n},$$

则 $\boldsymbol{G}^n=(\mathscr{G}_t^n)$是$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$上的流. 取

$$X_t^n = \sum_{k\leqslant \tau_t^n} U_k^n,\ t \geqslant 0, \tag{26.1}$$

则 X^n 是 $\Phi^n=(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{G}^n,\boldsymbol{P})$上的半鞅. 对 $h\in\mathscr{X}$,X^n 的可料特征(α^n,β^n,ν^n)为:

$$\alpha_t^n(h) = \sum_{k\leqslant \tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[h(U_k^n)], \tag{26.2}$$

$$\tilde{\beta}_t^n(h) = \sum_{k\leqslant \tau_t^n} \boldsymbol{D}_{k-1}[h(U_k^n)],\ \beta_t^n = 0. \tag{26.3}$$

$$\nu^n(dt,dx) = \sum_{k} I_{[x\neq 0,k\leqslant \tau_t^n]} \boldsymbol{P}_{k-1}[U_k^n \in dx]\delta_k(dt),$$

$$g * \nu_t^n = \sum_{k\leqslant \tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[g(U_k^n) I_{[U_k^n\neq 0]}], \tag{26.4}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{k-1}[\xi]=\boldsymbol{E}[\xi|\mathscr{F}_{k-1}]$,$\boldsymbol{D}_{k-1}[\xi]=\boldsymbol{E}_{k-1}[\xi]^2-(\boldsymbol{E}_{k-1}[\xi])^2$. 此外,若 $\boldsymbol{E}[(U_k^n)^2]<\infty$,则 X^n 是一个局部平方可积半鞅,且

$$X_t^n = \sum_{k\leqslant \tau_t^n} U_k^n = \sum_{k\leqslant \tau_t^n} (U_k^n - \boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n]) + \sum_{k\leqslant \tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n],$$

$$\alpha'^n_t = \sum_{k\leq\tau^n_t} \boldsymbol{E}_{k-1}[U^n_k], \tag{26.5}$$

$$\beta'^n_t = \sum_{k\leq\tau^n_t} \boldsymbol{D}_{k-1}[U^n_k]. \tag{26.6}$$

16.27定理 假定对每个 $n\in \boldsymbol{N}$，$U^n=(U^n_k,k\geqslant 1)$ 为 $\tilde{\Phi}$ 上适应随机变量序列，$\tau^n=(\tau^n_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $\tilde{\Phi}$ 上时变，$\tau^n_0=0$ 且

$$X^n_t = \sum_{k\leq\tau^n_t} U^n_k. \tag{27.1}$$

又设 X 为以 (α,β,ν) 为可料特征的 Lévy 过程，$X_0=0$.

1）对 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠密子集 D 下列条件成立：

$[\sup\alpha]$：$\sup\limits_{s\leq t}\left|\sum\limits_{k\leq\tau^n_t}\boldsymbol{E}_{k-1}[h(U^n_k)]-\alpha_s(h)\right|\xrightarrow{P}0$，$\forall\, t>0$ 及某个 $h\in\mathscr{Z}_c$，

$[\beta\text{-}D]$：$\sum\limits_{k\leq\tau^n_t}\boldsymbol{D}_{k-1}[h(U^n_k)]\xrightarrow{P}\tilde{\beta}_t(h)$，$\forall\, t\in D$ 及某个 $h\in\mathscr{Z}_c$，

$[\nu\text{-}D]$：$\sum\limits_{k\leq\tau^n_t}\boldsymbol{E}_{k-1}[g(U^n_k)]\xrightarrow{P}g*\nu_t$，$\forall\, t\in D$，$g\in J_1$，

则 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

2）若 (U^n_k) 满足下列条件

$$\lim_{a\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\boldsymbol{P}\Big(\sum_{k\leq\tau^n_t}\boldsymbol{E}_{k-1}[(U^n_k)^2 I_{[|U^n_k|>a]}]>\eta\Big)=0\ \forall\,\eta>0,t>0,$$

且对 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠密子集 D 成立

$[\sup\alpha']$：$\sup\limits_{s\leq t}\left|\sum\limits_{k\leq\tau^n_t}\boldsymbol{E}_{k-1}[U^n_k]-\alpha'_s\right|\xrightarrow{P}0$，$\forall\, t>0$，

$[\beta'\text{-}D]$：$\sum\limits_{k\leq\tau^n_t}\boldsymbol{D}_{k-1}[U^n_k]\xrightarrow{P}\beta'_t$，$\forall\, t\in D$，

$[\nu\text{-}D]$：$\sum\limits_{k\leq\tau^n_t}\boldsymbol{E}_{k-1}[g(U^n_k)]\xrightarrow{P}g*\nu_t$，$\forall\, t\in D$，$g\in J$，

则 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

证明 因为对每个由(27.1)规定的半鞅 X^n，其可料特征由(26.2)—(26.6)给出，故1）和2）可分别由定理16.22及16.24推出.

□

特别，将上述的结果用于独立随机变量序列，即可得到下列系.

16.28系 假定对每个 n，$U^n=(U_k^n,k\geqslant 1)$ 为 $\tilde{\Phi}$ 上 F-独立随机变量序列，$\tau^n=(\tau_t^n)$ 为 $\tilde{\Phi}$ 上时变，$\tau_0^n=0$ 且 (X_t^n) 由(27.1)规定. 又 X 是以 (α,β,ν) 为可料特征的 Lévy 过程.

1)若对 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠密子集 D 下列条件成立：

$[\sup\ \alpha]$：$\sup\limits_{s\leqslant t}\left|\sum\limits_{k\leqslant\tau_s^n}\boldsymbol{E}[h(U_k^n)]-\alpha_s(h)\right|\to 0$，$\forall\ t>0$ 及某个 $h\in\mathscr{Z}_c$，

$[\tilde{\beta}\text{-}D]$：$\sum\limits_{k\leqslant\tau_t^n}\boldsymbol{D}[h(U_k^n)]\to\tilde{\beta}_t(h)$，$\forall\ t\in D$ 及某个 $h\in\mathscr{Z}_c$，

$[\nu\text{-}D]$：$\sum\limits_{k\leqslant\tau_t^n}\boldsymbol{E}[g(U_k^n)]\to g*\nu_t$，$\forall\ t\in D,g\in J_2$，

则 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

2)若 (U_k^n) 满足下列条件：

$$\lim_{a\to\infty}\overline{\lim_{n}}\boldsymbol{P}\Big(\sum_{k\leqslant\tau_t^n}\boldsymbol{E}[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|>a]}>\eta\Big)=0,\forall\ \eta>0,t>0,$$

且对 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠密子集 D 成立

$[\sup\ \alpha']$：$\sup\limits_{s\leqslant t}\left|\sum\limits_{k\leqslant\tau_s^n}\boldsymbol{E}[U_k^n]-\alpha'_s\right|\to 0$，$\forall\ t>0$，

$[\beta'\text{-}D]$：$\sum\limits_{k\leqslant\tau_t^n}\boldsymbol{D}[U_k^n]\to\beta'_t$，$\forall\ t\in D$，

$[\nu\text{-}D]$：$\sum\limits_{k\leqslant\tau_t^n}\boldsymbol{E}[g(U_k^n)]\to g*\nu_t$，$\forall\ t\in D,g\in J_1$，

则 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

16.29引理 假定对每个 n，X^n 是 Φ 上跳跃过程，μ^n 为 X^n 的跳测度，$\nu^n=(\mu^n)^p$. X 为一跳跃 Lévy 过程，ν 为 X 跳测度 μ 的可料对偶投影. 若下列条件成立：

i)$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$，

ii)对 $\boldsymbol{R}_+$ 中一稠密子集 D

$$g * \nu_t^n \xrightarrow{P} g * \nu_t, \ \forall\, t \in D, g \in J_2, \tag{29.1}$$

其中 $J_2=\{g: g(x)$ 及 $g(x)/x$ 为 $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$ 上有界连续函数$\}$，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$

证明 设(α^n,β^n,ν^n)为 X^n 的可料特征，则

$$\alpha^n(h)=h(x)*\nu^n,\ \beta^n=0,\ \tilde{\beta}^n(h)=h^2*\nu^n-\sum(\triangle\alpha^n(h))^2.$$

而 X 的可料特征(α,β,ν)为

$$\alpha(h)=h*\nu,\ \beta=0,\tilde{\beta}(h)=h^2*\nu.$$

因为 $J_2\supset J_1$，(29.1)包含了$[\nu-D]$. 对每个 $f\in J_2$，$f*\nu_t$ 对 t 连续. 于是由引理16.8有

$$\sup_{s\leqslant t}|f*\nu_s^n-f*\nu_s|\xrightarrow{P}0,\forall\, t>0,f\in J_2.$$

因为 $\mathscr{Z}_2\subset J_2$，(29.1)也包含了[sup α]. 若 $h\in\mathscr{Z}_t$，则 $h^2\in J_2$且由于 $\alpha(h)$的连续性及[sup α]我们有$\sup\limits_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n|\xrightarrow{P}0,\forall\ t>0$，以及

$$|\tilde{\beta}_t^n(h)-\tilde{\beta}_t(h)|\leqslant|h^2*\nu_t^n-h^2*\nu_t|+\sum_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h)|^2$$

$$\leqslant|h^2*\nu_t^n-h^2*\nu_t|+\sup_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h)|\,|h*\nu^n|\xrightarrow{P}0,$$

即$[\tilde{\beta}-D]$成立. 所以定理16.22包含了 $X^n\xrightarrow{L}X$. □

16.30定理 假定对每个 n，X^n 为一适应计数过程，$(X^n)^p=A^n$，X 为一 Poisson 过程，$X^p=A$ 为连续的. 若对 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠密子集 D 有

$$A_t^n\xrightarrow{P}A_t,\ \forall\, t\in D, \tag{30.1}$$

则 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

证明 X^n 是一个半鞅且其可料特征(α^n,β^n,ν^n)为

$$\alpha_t^n(h)=h(1)A_t^n,\tilde{\beta}_t^n(h)=h^2(1)(A_t^n-\sum_{s\leqslant t}(\Delta A_s^n)^2),g*\nu_t^n=g(1)A_t^n.$$

类似的，X 的可料特征(α,β,ν)为

$$\alpha_t^n(h)=h(1)A_t,\ \tilde{\beta}_t(h)=h(1)A_t,\ g*\nu_t^n=g(1)A_t.$$

由于 A 关于 t 连续不减，容易由(30.1)推出[sup α]，$[\tilde{\beta}\text{-}D]$，

$[\nu\text{-}D]$. 于是定理16.22包含了 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. □

注 下列例子表明对计数过程收敛于 Poisson 过程(30.1)不是必要的.

假定 X 是时齐 Poisson 过程, $E[X_t]=\lambda t$, (T_k) 为 X 的跳时序列. F 为 X 的完备自然流. 令

$$X_t^n = \sum_{k\geq 1} I_{[t\geq T_k+1/n]},$$

则 X^n 是计数过程. 由于 $(T_k+1/n)_{k\geq 1}$ 是可料时序列, $X^n\in\mathscr{P}$ 且 $(X^n)^p=X^n$. 因为当 $n\to\infty$ 时 $T_k+\frac{1}{n}\to T_k$, 由系15.59有 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 但 $(X^n)_t^p=X_t^n \not\to \lambda t=(X)_t^p$.

§ 3. 收敛于连续 Lévy 过程

在这一节我们将半鞅分布收敛的一般结果应用极限过程是连续 Lévy 过程的特殊情形. 特别, 我们将给出局部平方可积鞅或半鞅向连续 Lévy 过程收敛的充分条件. 顺便地对这些情形下条件的必要性也进行讨论.

16.31引理 若对每个 n, X^n 是以 μ^n 为跳测度以 (α^n,β^n,ν^n) 为可料特征的半鞅, 则下列断言等价:

1) $(\Delta X^n)_t^*=\sup_{s\leq t}|\Delta X_s^n| \xrightarrow{P} 0$, 当 $n\to\infty$, $\forall\ t>0$.

2) $(x^2 I_{[|x|>\varepsilon]})*\mu_t^n \xrightarrow{P} 0$, 当 $n\to\infty$, $\forall\ t>0, \varepsilon>0$,

3) $[\Delta_0]$: $I_{[|x|\geq\varepsilon]}*\nu_t^n \xrightarrow{P} 0$, 当 $n\to\infty$, $\forall\ t>0, \varepsilon>0$,

4) $f*\nu_t^n \xrightarrow{P} 0$, 当 $n\to\infty$, $\forall\ t>0, f\in J_1$.

这时, 对任意的 $h,h'\in\mathscr{Y}$ 有

$$\sup_{s\leq t}|\alpha_s^n(h)-\alpha_s^n(h')| \xrightarrow{P} 0,\ \sup_{s\leq t}|\tilde{\beta}_s^n(h)-\tilde{\beta}_s^n(h')| \xrightarrow{P} 0, \tag{31.1}$$

$$(\check{X}^n(h))_t^* = |\sup_{s\leq t}\check{X}_s^n(h)| \xrightarrow{P} 0, \tag{31.2}$$

$$(\Delta M^n(h))_t^* = \sup_{s\leqslant t}|\Delta M_s^n(h))| \xrightarrow{P} 0, \tag{31.3}$$

其中 $\check{X}^n(h)=\sum(\Delta X^n-h(\Delta X^n))$, $X^n(h)=X^n-\check{X}^n(h)=X_0^n+M^n(h)+\alpha^n(h)$, 且 $M^n(h)\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$.

证明 对 $\varepsilon>0$ 及 $0<\delta\leqslant 1$ 注意下列关系式

$$[(\Delta X^n)_t^* \geqslant \varepsilon]=[\sum_{s\leqslant t} I_{[|\Delta X_s^n|\geqslant\varepsilon]}\geqslant\delta]=[I_{[|x|\geqslant\varepsilon]}*\mu_t^n\geqslant\delta]$$

$$=[(x^2 I_{[|x|\geqslant\varepsilon]})*\mu_t^n\geqslant\varepsilon^2]. \tag{31.4}$$

因而1)⇔2). 由于 $(I_{[|x|\geqslant\varepsilon]}*\mu^n)^p=I_{[|X|\geqslant\varepsilon]}*\nu^n$ 和 $\Delta(I_{[|x|\geqslant\varepsilon]}*\mu^n)\leqslant 1$, Lenglart 不等式包含了2)与3)的等价性.

对 $f\in J_1$ 必有常数 a 使 $|f(x)|\leqslant a$ 且当 $|x|<1/a$ 时 $f(x)=0$. 取 $g(x)=(\frac{2}{\varepsilon}|x|-1)^+\wedge 1\in J_1$. 则

$$|f*\nu_t^n|\leqslant aI_{[|x|\geqslant 1/a]}*\nu_t^n,\quad I_{[|x|\geqslant\varepsilon]}*\nu_t^n\leqslant g*\nu_t^n.$$

因而3)和4)等价. 若 $h,h'\in\mathscr{X}$, 存在常数 a 使

$$h(x)=h'(x)=x,\ |x|\leqslant 1/a,\ |h(x)|\leqslant a,\ |h'(x)|\leqslant a.$$

于是 $|h(x)-h'(x)|\leqslant 2aI_{[|x|\geqslant 1/a]}$. 由(2.8)及(2.9)可得

$$|\alpha_t^n(h)-\alpha_t^n(h')|=|(h-h')*\nu_t^n|\leqslant 2aI_{[|x|\geqslant 1/a]}*\nu_t^n,$$

$$|\tilde{\beta}_t^n(h)-\tilde{\beta}_t^n(h')|=|(h^2-h'^2)*\nu_t^n$$

$$-\sum_{s\leqslant t}[(\Delta\alpha_s^n(h))^2-(\Delta\alpha_s^n(h'))^2]|$$

$$\leqslant 8a^3 I_{[|x|\geqslant 1/a]}*\nu_t^n.$$

所以3)包含(31.1).

最后, 由于 $[((\check{X}^n(h))_t^*\neq 0]\subset[(\Delta X^n(h))_t^*\geqslant 1/a]$, (31.2)成立. 同时, 若 $0<\varepsilon<1/a$, 则有

$$|\Delta M_t^n(h)|=|\Delta X_t^n(h)-\Delta\alpha_t^n(h)|$$

$$\leqslant|\Delta X_t^n|+|\Delta\check{X}_t^n(h)|$$

$$+\left|\int_{[|x|\geqslant\varepsilon]} h(x)\nu^n(\{t\},dx)\right|+\varepsilon,$$

$$(\Delta M^n(h))_t^*\leqslant(\Delta X^n)_t^*+2(\check{X}^n(h))_t^*+aI_{[|x|\geqslant\varepsilon]}*\nu_t^n+\varepsilon.$$

因而(31.3)为真. □

16.32引理 假定 $M^n \in \mathscr{M}^2_{loc}$ 且 $t>0$ 是固定的.

1）若 $(\langle M^n\rangle_t, n\geqslant 1)$ 是胎紧的，则 $([M^n]_t, n\geqslant 1)$，$(\sup\limits_{s\leqslant t}|M^n_s|, n\geqslant 1)$ 也是胎紧的.

2）若 $E\sup\limits_{s\leqslant t}|\Delta M^n_s|^2\leqslant C<\infty$，则 $([M^n]_t, n\geqslant 1)$，$(\sup\limits_{s\leqslant t}|M^n_s|, n\geqslant 1)$ 和 $(\langle M^n\rangle_t, n\geqslant 1)$ 的胎紧性相互等价.

证明 1）由于 $\langle M^n\rangle=[M^n]^p$，$(M^n)^2-\langle M^n\rangle\in\mathscr{M}_{loc}$，且 $\langle M^n\rangle$ 是可料的，1）可由 Lenglart 不等式推出.

2）因为 $\langle M^n\rangle$ 被 $[M^n]$ 所控制且 $(\Delta[M^n])^*_t=(\Delta M^n)^{*2}_t\in L^1$，用 Lenglart 不等式可由 $([M^n]_t)$ 的胎紧性推出 $(\langle M^n\rangle_t)$ 的胎紧性. 同时，由 Davis 不等式，$\sqrt{[M^n]}$ 被 $k(M^n)^*$ 所控制，其中 $k>0$ 是常数，$\Delta(M^{n*})\leqslant(\Delta M^n)^*$. 因而 $([M^n]_t, n\geqslant 1)$ 的胎紧性也可由 $((M^n)^*_t, n\geqslant 1)$ 的胎紧性推出. □

16.33引理 假定 $M^n\in\mathscr{M}^2_{loc}$，$|\Delta M^n|\leqslant c$ 且对所有 $t>0$，$(\Delta M^n)^*_t\xrightarrow{P}0$.

1）我们有

$$(\Delta\langle M^n\rangle)^*_t\xrightarrow{P}0,\ \forall\, t>0. \tag{33.1}$$

2）若 $([M^n]_t, n\geqslant 1)$ 是胎紧的，则

$$\sup_{s\leqslant t}|[M^n]_s-\langle M^n\rangle_s|\xrightarrow{P}0,\ \forall\, t>0. \tag{33.2}$$

证明 1）由于 $\Delta[M^n]=(\Delta M^n)^2\leqslant c^2$，由控制收敛定理 $E(\Delta[M^n])^{*2}_t\to 0$. 但 $\Delta\langle M^n\rangle={}^p(\Delta[M^n])$，且由 Doob 不等式（定理2.15））

$$E[(\Delta\langle M^n\rangle)^{*2}_t]\leqslant 4E[(\Delta[M^n])^{*2}_t]\to 0,$$

因而 $(\Delta\langle M^n\rangle)^*_t\xrightarrow{P}0$.

2）令 $Y^n=[M^n]-\langle M^n\rangle$，则 $|\Delta Y^n|\leqslant c^2$，$Y^n\in\mathscr{M}^{2,d}_{loc}$，且

$$\begin{aligned}[Y^n]_t&=\sum_{s\leqslant t}(\Delta[M^n]_s-\Delta\langle M^n\rangle_s)^2\leqslant\\&2\sum_{s\leqslant t}[(\Delta[M^n]_s)^2+(\Delta\langle M^n\rangle_s)^2]\\&\leqslant 2(\Delta[M^n])^*_t[M^n]_t+2(\Delta\langle M^n\rangle)^*_t\langle M^n\rangle_t.\end{aligned}$$

由于$(\langle M^n\rangle_t, n\geq 1)$的胎紧性，(33.1)及定理的假定，我们有$[Y^n]_t \xrightarrow{P} 0$. 进而由$|\Delta Y|$的有界性及 Lenglart 不等式可得

$$\sup_{s\leq t}|[M^n]_s - \langle M^n\rangle_s| = (Y^n)_t^* \xrightarrow{P} 0.$$

故(33.2)成立. □

16.34系 若$M^n\in\mathscr{M}^2_{loc}$，$|\Delta M^n|\leq c$，$\beta$为连续(非随机)函数，$D$为$\boldsymbol{R}_+$的稠密子集，则下列断言等价.

1) $[M^n]_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall\, t\in D$,

2) $(\Delta M^n)_t^* \xrightarrow{P} 0$, $\forall\, t>0$ 以及

$$\langle M^n\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t, \ \forall\, t\in D. \tag{34.1}$$

证明 1)⇒2). 由引理16.8,1) 等价于

$$\sup_{s\leq t}|[M^n]_s - \beta_s| \xrightarrow{P} 0.$$

则$((M^n)^2)_t^* = (\Delta[M^n])_t^* \xrightarrow{P} 0$，而(34.1)由(33.2)推得.

2)⇒1). 由引理16.32.1)可知$([M^n]_t, n\geq 1)$是胎紧的. 现在1)可由(33.2)得到. □

16.35引理 设$M^n\in\mathscr{M}^n_{loc}$，$|\Delta M^n|\leq c$ 且 $M\in\mathscr{M}_{loc}$. 若

$$M^n \xrightarrow{\mathscr{L}} M, \tag{35.1}$$

则

$$[M^n] \xrightarrow{\mathscr{L}} \langle M\rangle. \tag{35.2}$$

进而，若$\langle M\rangle$是决定性的，则

$$\sup_{s\leq t}|[M^n]_s - \langle M\rangle_s| \xrightarrow{P} 0, \ \forall\, t>0. \tag{35.3}$$

证明 设对每个k，$0=t_0^n<t_1^n<\cdots$为$\boldsymbol{R}_+$的一个分割，且

$$\lim_{k\to\infty}\sup_j|t_j^k - t_{j-1}^k| = 0.$$

由 Itô 公式

$$(M_{t_j}^n - M_{t_{j-1}}^n)^2 = 2\int_{]t_{j-1}^k, t_j^k]}(M_{u-}^n - M_{t_{j-1}}^n)dM_u^n$$

$$+([M^n]_{t_j^k}-[M^n]_{t_{j-1}^k}),$$

$$[M^n]_t=\sum_{j\geq 1}(M^n_{t_j^k\wedge t}-M^n_{t_{j-1}^k\wedge t})^2$$

$$-2\sum_{j\geq 1}\int_{]t_{j-1}^k\wedge t,t_j^k\wedge t]}(M^n_{u-}-M^n_{t_{j-1}^k})dM^n_u$$

$$=Y_t^{nk}+Z_t^{nk}, \tag{35.4}$$

$$\langle Z^{nk}\rangle_t\leqslant 4[\omega(\max_j(t_j^k-t_{j-1}^k),M^n,t)]^2\langle M^n\rangle_t. \tag{35.5}$$

由定理的假定，(M^n)是C-胎紧的，因而引理15.49包含

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_n}P(\omega(\max_j(t_j^k-t_{j-1}^k),M^n,t)\geqslant\eta)=0,\forall\ \eta>0,t>0. \tag{35.6}$$

也由定理的假定和引理16.32，对每$t>0$（$(\langle M^n\rangle_t,n\geqslant 1)$都是胎紧的. 因而(35.5)，(35.6)及 Lenglart 不等式蕴含了

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_n}P((Z^{nk})_t^*\geqslant\eta)=0,\forall\ t>0,\eta>0. \tag{35.7}$$

其次，记$Y_t^k=\sum_{j\geq 1}(M_{t_j^k\wedge t}-M_{t_{j-1}^k\wedge t})^2$. 则(35.1)及定理19.33的注有

$$Y^{nk}\xrightarrow{\mathscr{L}}Y^k,\text{当 }n\to\infty,\forall\ k\geqslant 1, \tag{35.8}$$

$$Y^k\xrightarrow{\mathscr{L}}\langle M\rangle,\text{当 }k\to\infty. \tag{35.9}$$

最后，由于(35.4)，(35.7)　(35.9)并应用引理15.52可得(35.2). 若$\langle M\rangle$是连续决定性的，则(35.2)蕴含了(35.3). □

16.36定理　假定对每个n，X^n是以(α^n,β^n,ν^n)为可料特征的Φ上的半鞅，X是以$(\alpha,\beta,0)$为可料特征的连续 Lévy 过程. 若[sup α]成立，则下列断言等价：

1) $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$,

2) i) $X_0^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X_0$,

ii) 对$\mathbf{R}_+$中一稠密子集D，$[M^n(h)]_t\xrightarrow{P}\beta_t,\forall\ t\in D$,

iii) $[\Delta_0]$: $I_{[|x|\geqslant\varepsilon]}*\nu_t^n\xrightarrow{P}0,\ \forall\ t>0,\varepsilon>0$,

3) i) $X_0^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X_0$,

ii）对 $\boldsymbol{R}_+$ 中一稠密子集 D，$[\beta\text{-}D]$成立，

iii）$f*\nu_t^n \xrightarrow{P} 0$，$\forall\ t>0, f\in J_1$.

证明 1)⇒2)．2)i)成立是明显的．由于(X^n)是C-胎紧的，引理15.49蕴含了$(\Delta X^n)_t^* \xrightarrow{P} 0$．因而由引理16.31，2)iii)成立且$(\check{X}^n(h))_t^* \xrightarrow{P} 0$．进而，由$[\sup\alpha]$可得

$$
\begin{aligned}
M^n(h) &= X^n - X_0^n - \check{X}^n(h) - \alpha^n(h)\\
&= X^n - X_0^n - \check{X}^n(h) - \alpha - (\alpha^n(h) - \alpha)\\
&\xrightarrow{\mathscr{L}} X - X_0 - \alpha = M \in \mathscr{M}_{\text{loc},0}^c.
\end{aligned}
$$

注意到$\langle M\rangle=\beta$ 是决定性的，M 是正态分布的，所以(35.2)推出2)ii).

2)⇔3)．由引理16.31，2)iii)与3)iii)等价且它们包含了(31.4)．因而在2)iii)或3)iii)之下由系16.34可知2)ii)与3)ii)等价．

3)⇒1)．这就是定理16.22的结论． □

16.37例 假定 W 是 Φ 上的 Brown 运动，$b=(b_t)$是适应过程，$|b|\leqslant 1$．设

$$Y_t = \int_0^t b_s ds + W_t,$$

且$\boldsymbol{G}$ 为 Y 的自然流．若${}^\circ b$ 是 b 的 $\boldsymbol{G}$-可选投影，取

$$X_t^n = X_t = \int_0^t (b_s - {}^\circ b_s) ds + W_t,$$

则在 Φ^n 上 X^n 的可料特征(α^n,β^n,ν^n)为

$$\alpha_t^n = \int_0^t (b_s - {}^\circ b_s) ds,\ \beta_t^n = t,\ \nu^n = 0.$$

但 X^n 为一个 $\boldsymbol{G}$-Brown 运动（参见问题16.4），因而$\mathscr{L}(X^n)=\mathscr{L}(W)$.

这个例子表明$[\sup\alpha]$对 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 并不是必要的．

16.38引理 假定对每个 n，X^n 是 Φ 上以(α^n,β^n,ν^n)为可料特征的半鞅．对 $\delta\geqslant 0$，记

$[\Delta_\delta]$：$(|x|^\delta I_{[|x|>\varepsilon]})*\nu_t^n \xrightarrow{P} 0$，当 $n\to\infty$，$\forall\ t>0$，$\varepsilon>0$.

1）若 $\delta>0$ 且对每个 $t>0$，$((\Delta X^n)_t^{*\delta}, n\geqslant 1)$ 是一致可积的，则

$$\lim_{a\to\infty}\varlimsup_{n}P((|x|^\delta I_{[|x|>a]})*\nu_t^n>\eta)=0,\ \forall\ t>0,\eta>0. \quad (38.1)$$

2）对 $\delta>0$，$[\Delta_\delta]$ 成立当且仅当 $[\Delta_0]$ 和(38.1)同时成立.

3）若 $X^n\in\mathscr{M}_{loc}$ 且 $[\Delta_1]$ 成立，则对 $h\in\mathscr{Z}$ 有

$$\operatorname{Var}(\alpha^n(h))_t\xrightarrow{P}0,\ \forall\ t>0, \quad (38.2)$$

4）若(38.2)成立，$\alpha^{n\prime}(h)=\alpha^n(h)-\sum\Delta\alpha^n(h)$，则

$$(\alpha^{n\prime}(h))_t^* + \sum_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h)|\xrightarrow{P}0,\ \forall\ t>0. \quad (38.3)$$

5）若(38.3)成立，则

$$(\alpha^n(h))_t^*\xrightarrow{P}0,\ \forall\ t>0. \quad (38.4)$$

证明 1）记 $V_t^n(a)=(|x|^\delta I_{[|x|>a]})*\mu_t^n=\sum_{s\leqslant t}|\Delta X_s^n|^\delta I_{[|\Delta X_s^n|>a]}$，则 $\Delta V_t^n(a)=|\Delta X_t^n|^\delta I_{[|\Delta X_t^n|>a]}$，$(V^n(a))^p=(|x|^\delta I_{[|x|>a]})*\nu^n$. 由 Lenglart 不等式我们有.

$$\begin{aligned}&P((|x|^\delta I_{[|x|>a]})*\nu_t^n>\eta)\\&\leqslant\frac{1}{\eta}(\varepsilon+E[\sup_{s\leqslant t}|\Delta X_s^n|^\delta I_{[|\Delta X_s^n|>a]}])+P(V_t^n(a)\geqslant\varepsilon)\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{\eta}+\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{a^\delta}\right)E((\Delta X^n)_t^{*\delta}I_{[(\Delta X^n)_t^*\geqslant a]}).\end{aligned}$$

依次令 $n\to\infty$，$a\to\infty$，$\varepsilon\to0$ 可得(38.1).

2）对 $a>\varepsilon>0$

$$(|x|^\delta I_{[|x|>\varepsilon]})*\nu_t^n\leqslant(|x|^\delta I_{[|x|>a]})*\nu_t^n+a^\delta I_{[|x|\geqslant\varepsilon]}*\nu_t^n.$$

依次令 $n\to\infty$，$a\to\infty$，$\varepsilon\to0$，$[\Delta_\delta]$ 可由 $[\Delta_0]$ 及(38.1)推出. 相反的包含关系是明显的.

3）若 $X^n\in\mathscr{M}_{loc}$，则 $\alpha^n(h)=(h(x)-x)*\nu^n$. 对 $h\in\mathscr{Z}$ 存在常数 a 当 $|x|<1/a$ 时 $h(x)=x$，因而

$$\operatorname{Var}(\alpha^n(h))_t\leqslant|h(x)-x|*\nu_t^n\leqslant a(|x|I_{[|x|>1/a]})*\nu_t^n\xrightarrow{P}0.$$

因而(38.2)为真.

4）和5）是明显的，这是因为

$$(\alpha^n(h))_t^* \leqslant (\alpha^{n\epsilon}(h))_t^* + \sum_{s\leqslant t} |\Delta\alpha_s^n(h)| \leqslant \mathrm{Var}(\alpha^n(h))_t. \quad \square$$

16.39引理 设 $X^n \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，$|\Delta X^n| \leqslant K$（$K$ 为一常数），$X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 且具有决定性的 $\langle X\rangle = \beta$，又 D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠密子集，则下列断言等价：

1）$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，

2）$[X^n]_t \xrightarrow{P} \beta_t$，$\forall\ t \in D$，

3）$[\Delta_0]$ 和 $\langle X^n\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t$，$\forall\ t \in D$.

证明 注意2）包含 $(\Delta X^n)_t^{*2} = (\Delta[X^n])_t^* \xrightarrow{P} 0$. 若取 $h \in \mathscr{C}$，且当 $|x| \leqslant K$ 时 $h(x) = x$，则 $\overline{X}^n(h) = 0$，$\alpha^n(h) = 0$，$M^n(h) = X^n$. 因而欲证的等价性就是定理16.36的结论. $\square$

16.40定理 设 $X^n \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 且具有可料特征 $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$，$X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ 具有决定性 $\langle X\rangle = \beta$，又 D 是 $\boldsymbol{R}_+$ 的稠密子集. 若对某个 $h \in \mathscr{C}$

$$(\alpha^{n\epsilon}(h))_t^* + \sum_{s\leqslant t} |\Delta\alpha_s^n(h)| \xrightarrow{P} 0,\ \forall\ t > 0, \qquad (40.1)$$

则下列断言等价：

1）$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，

2）$[X^n]_t \xrightarrow{P} \beta_t$，$\forall\ t \in D$，

3）$[\Delta_0]$ 以及对某个（每个）$h \in \mathscr{C}$，$[M^n(h)]_t \xrightarrow{P} \beta_t$，$\forall\ t \in D$，

4）$[\Delta_0]$ 以及对某个（每个）$h \in \mathscr{C}$，$[\tilde{\beta}\text{-}D]$ 成立：

$$\tilde{\beta}_t^n(h) = \langle M^n(h)\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t,\ \forall\ t \in D.$$

证明 首先，1）或2）都包含 $[\Delta_0]$. 由引理16.38.5)，(40.1) 可引出 $[\sup \alpha]$. 于是由定理16.36，1)，3）和4）相互等价.

若 $h \in \mathscr{C}$ 且满足

$$h(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1/a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \qquad |h(x)| \leqslant a, \qquad (40.2)$$

则

$$|[X^n]_t-[M^n(h)]_t|$$
$$=|\sum_{s\leqslant t}(\Delta X_s^n)^2-\sum_{s\leqslant t}(h(\Delta X_s^n)-\Delta\alpha_s^n(h))^2|$$
$$\leqslant\sum_{s\leqslant t}|(\Delta X_s^n)^2-(h(\Delta X_s^n))^2|$$
$$+3a\sum_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h)|,$$
$$[|[X^n]_t-[M^n(h)]_t|>\varepsilon]$$
$$\subset\left[(\Delta X^n)_t^*>\frac{1}{a}\right]\cup\left[\sum_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h)|>\frac{\varepsilon}{3a}\right].$$
由于$[\Delta_0]$和(40.1),2)和3)等价. □

16.41定理 设$X^n\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}^2$,$X\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}^{2,c}$且具有决定性$\langle X\rangle=\beta$,又$D$为$\boldsymbol{R}_+$的稠密子集.记

$$[\Delta_2]:\qquad(x^2I_{[|x|>\varepsilon]})*\nu_t^n\xrightarrow{P}0,\ \forall\ t>0,\ \varepsilon>0.$$
则下列断言等价:

1) $[\Delta_2]$和$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$,

2) $[\Delta_2]$和$\langle X^n\rangle_t\xrightarrow{P}\beta_t,\forall\ t\in D$,

3) $[\Delta_2]$和$[X^n]_t\xrightarrow{P}\beta_t,\forall\ t\in D$,

4) $[\Delta_2]$和$\langle M^n(h)\rangle_t\xrightarrow{P}\beta_t,\forall\ t\in D$及对某个$h\in\mathscr{X}$,

5) $[\Delta_2]$和$[M^n(h)]_t\xrightarrow{P}\beta_t,\forall\ t\in D$及对某个$h\in\mathscr{X}$,

6) $\langle X^n\rangle\xrightarrow{P}\beta_t,[X^n]_t\xrightarrow{P}\beta_t,\forall\ t\in D$,

7) $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$和$\langle X^n\rangle_t\xrightarrow{P}\beta_t,\forall\ t\in D$.

证明 由引理16.38,$[\Delta_2]$包含$[\Delta_0]$及(40.1),故由定理16.40可知1),3),4)和5)相互等价.若$[\Delta_2]$成立且$h\in\mathscr{X}$满足(40.2),则

$$|\langle X^n\rangle_t-\langle M^n(h)\rangle_t|=\left|(x^2-h^2(x))*\nu_t^n+\sum_{s\leqslant t}(\Delta\alpha_s^n(h))^2\right|$$
$$\leqslant(a^4+1)(x^2I_{[|X|>\frac{1}{a}]})*\nu_t^n+a\sum_{s\leqslant t}|\Delta\alpha_s^n(h)|\xrightarrow{P}0.$$
因而2)和4)等价.

由2)和3)推出6)是明显的.反之,若6)成立,则$[\Delta_0]$成立且

$$(|x|I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n \leqslant \frac{1}{a}(x^2 I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n \leqslant \frac{1}{a}\langle X^n\rangle_t.$$

因而(38.1)对$\delta=1$成立. 而引理38.1包含了(38.3). 于是对满足(40.2)的h由定理46.40有

$$\begin{aligned}
&\langle X^n\rangle_t - \langle M^n(h)\rangle_t \\
&= \langle X^n\rangle_t - \beta_t - (\langle M^n(h)\rangle_t - \beta_t) \xrightarrow{P} 0, \ \forall t>0, \\
&|(x^2 - h^2(x)) * \nu_t^n| \\
&= |\langle X^n\rangle_t - \langle M^n(h)\rangle_t - \sum_{s\leqslant t}(\Delta\alpha_s^n(h))^2| \\
&\leqslant |\langle X^n\rangle_t \langle M^n(h)\rangle_t| + a\mathrm{Var}(\alpha^n(h))_t \xrightarrow{P} 0. \\
&(x^2 I_{[|x|\geqslant\epsilon]}) * \nu_t^n \\
&\leqslant (x^2 I_{[|x|\geqslant a]}) * \nu_t^n + a^2 I_{[|x|\geqslant\epsilon]} * \nu_t^n \\
&\leqslant |(x^2 - h^2(x)) * \nu_t^n| + 2a^2 I_{[|x|\geqslant\epsilon\wedge(1/a)]} * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0.
\end{aligned}$$

故[Δ_2]成立,6)等价于2).

若7)成立,[Δ_0]也成立. 用同样的论证,[Δ_2]可由[Δ_0]及$\langle X^n\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t, \forall t\in D$. 因而7)也与2)等价. □

16.42 先回顾一下16.26中的记号. 对每个n若$U^n=(U_k^n, k\geqslant 1)$为$\tilde{\Phi}=(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_k)_{k}\geqslant 0,\boldsymbol{P})$上适应随机变量序列,$\tau^n=(\tau_t^n)$为$\tilde{\Phi}$上的时变. 记

$$X_t^n = \sum_{k\leqslant\tau_t^n} U_k^n. \tag{42.1}$$

则对X^n运用引理16.38可得到下列事实:

1) $\max_{1\leqslant k\leqslant\tau_t^n}|U_k^n| \xrightarrow{P} 0$等价于[$\Delta_0$]: $\sum_{j=1}^{\tau_t^n}\boldsymbol{P}_{k-1}(|U_k^n|>\epsilon) \xrightarrow{P} 0$,

2) 若$U^n=(U_k^n, k\geqslant 1)$为鞅差序列,即$\boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n]=0$,[$\Delta_0$]成立且$(\max_{1\leqslant k\leqslant\tau_t^n}|U_k^n|, n\geqslant 1)$一致可积,则$\sum_{k=1}^{\tau_t^n}|\boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n I_{|U_k^n|<a]}]| \xrightarrow{P} 0$,

3) 若[Δ_2]成立: $\sum_{k=1}^{\tau_t^n}\boldsymbol{E}_{k-1}[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|>\epsilon]}] \xrightarrow{P} 0, \forall \epsilon>0$,则

$[\Delta_0]$也成立.

把以前的结果用于(42.1)中的 X^n,我们可获得阵列$(U_k^n, k \geqslant 1, n \geqslant 1)$行和收敛的不同条件,下列定理就是一例.

16.43 定理 假定对每个 n,$(U_k^n, k \geqslant 1)$是$\tilde{\Phi}$上的鞅差序列,$\tau^n = (\tau_t^n)$为$\tilde{\Phi}$上的时变.设 $X \in \mathscr{M}_{loc,0}^{2,c}$ 且具有非随机$\langle X \rangle = \beta$,又 D 是 $\boldsymbol{R}_+$ 中的稠密子集.若下列诸条件之任一个成立:

1) 当 $n \to \infty$ 时,$\boldsymbol{E}[\max_{1 \leqslant k \leqslant \tau_t^n} |U_k^n|] \to 0$,$\sum_{k=1}^{\tau_t^n} (U_k^n)^2 \xrightarrow{P} \beta_t$,$\forall\, t \in D$,

2) 当 $n \to \infty$ 时,$\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant \tau_t^n} |U_k^n| \xrightarrow{P} 0$,$\sum_{k=1}^{\tau_t^n} (U_k^n)^2 \xrightarrow{P} \beta_t$,$\sum_{k=1}^{\tau_t^n} |E_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|>1]}]| \xrightarrow{P} 0, \forall\, t \in D$,

3) 当 $n \to \infty$ 时,$\sum_{k=1}^{\tau_t^n} E_{k-1}[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n| \geqslant \varepsilon]}] \xrightarrow{P} 0$,

$$\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[(U_k^n)^2] \xrightarrow{P} \beta_t, \forall\, t \in D, \varepsilon > 0,$$

则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,其中 X^n 由(42.1)规定.

下一个系通常称为 **Donsker 不变原理**.

16.44 系 假定$(Y_k, k \geqslant 1)$为独立同分布随机变量序列,$\boldsymbol{E}[Y_k] = 0$,$\boldsymbol{D}[Y_k] = 1$. 令

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} Y_k,$$

则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} W$,这里 W 是标准 Brown 运动.

证明 取 $\mathscr{F}_k = \sigma\{Y_j, j \leqslant k\}$,$U_k^n = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_k$,$\tau_t^n = [nt]$,则

$$\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{E}[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n| > \varepsilon]}] = \frac{[nt]}{n} \boldsymbol{E}[Y_1^2 I_{[|Y_1| > \sqrt{n}\varepsilon]}] \to 0, \text{当 } n \to \infty.$$

因而$[\Delta_2]$成立.同时

$$\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{D}[(U_k^n)] = \frac{[nt]}{n} \to t, \text{当 } n \to \infty.$$

故条件16.43.3)被满足,由定理16.43可得 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} W$.□

§4. 收敛于广义扩散

16.45定义 若 X 为带流概率空间 $\Phi=(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{F},\boldsymbol{P})$ 上的一个半鞅，对某个 $h\in\mathscr{C}_c$，它的可料特征 (α,β,ν) 可表为

$$\alpha_t(h)=\int_0^t b(s,X_s)ds,\quad \beta_t=\int_0^t a(s,X_s)ds,\qquad (45.1)$$

$$\nu(dt,dx)=K(t,X_t,dx)dt,\qquad (45.2)$$

其中 $a\geqslant 0$ 和 b 为 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}$ 上 Borel 函数，K 为 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的转移核且满足

$$K(t,x,\{0\})=0,\int(1\wedge y^2)K(t,x,dy)<\infty,\forall\, t>0,$$

则称 X 为**广义扩散或带跳扩散**，称 (b,a,K) 为 X 的**无穷小特征**. 特别地，若 $\nu=0$，称 X 为**扩散**，这时 X 的轨道几乎必然是连续的. 若 $b(s,x)$，$a(s,x)$ 和 $K(s,x,dy)$ 不依赖于 s，称 X 为**时齐(广义)扩散**.

若 $\lambda_0=\mathscr{L}(X_0)$，则 $\boldsymbol{P}$ 是半鞅问题 $\Gamma_s(X,\boldsymbol{F};\lambda_0,\alpha,\beta,\nu)$ 的一个解.

由(2.8)易知对每个 $h\in\mathscr{C}$，$\alpha(h)$ 仍有(45.1)的形式但其 $b(s,x)$ 随 h 不同而改变，且有

$$\widetilde{\beta}_t(h)=\int_0^t\widetilde{a}(s,X_s,h)ds,$$

$$\widetilde{a}(s,x,h)=a(s,x)+\int K(s,x,dy)h^2(y).\qquad (45.3)$$

设 X 是以 (b,a,K) 为无穷小特征的时齐广义扩散. 对 $f\in C^2(\boldsymbol{R})$ 取

$$Af(x)=b(x)f'(x)+\frac{1}{2}a(x)f''(x)$$
$$+\int K(x,dy)[f(x+y)-f(x)-h(y)f'(y)].$$

则由 Ito 公式易知下列 (Y_t) 是一个局部鞅.

$$Y_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s)ds,\ t \geqslant 0,$$

16.46定义 假定 X 是以(α,β,ν)为可料特征的广义时齐扩散. 若

i)对每个 $x \in \boldsymbol{R}$, $\Gamma_s(X,F;\delta_x,\alpha,\beta,\nu)$有唯一解 $\boldsymbol{P}_x$.

ii) 对每个 $A \in \mathscr{F}$, $x \mapsto \boldsymbol{P}_x(A)$是 Borel 函数,

则称对 X 成立**唯一性可测性假设**.

若 X 满足这一假设,对 $\boldsymbol{R}$ 上每个分布 λ 半鞅问题 $\Gamma_s(X,F;\lambda,\alpha,\beta,\nu)$有唯一解.

保证唯一性可测性假设成立的条件可在Jacod- Shiryaev [1] § Ⅲ 2.c 中找到.

容易验证对 Brown 运动和 Ornstein-Uhlenbeck 过程唯一性可测性假设成立.

16.47定理 假定对每个 n 及某个 $h \in \mathscr{Z}_c$, X^n 是 Φ 上以(b^n, a^n, K^n)为无穷小特征的时齐广义扩散,而 X 对某个 $h \in \mathscr{Z}_c$ 是以(b,a,K)为无穷小特征的 Φ_D 的时齐广义扩散. 若

i) $X_0^n \Rightarrow X_0$,

ii) $b^n \Rightarrow b$, $a^n \Rightarrow a$, $K^n(\cdot,g) \Rightarrow K(\cdot,g)$, $\forall\ g \in J_1$,

iii) 对 X 成立唯一性可测性假设,

则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

证明 为简单计,我们只在附加下列一致性限制下来证明这一定理:

$$\sup_x |b^n(x) - b(x)| \to 0, \sup_x |a^n(x) - a(x)| \to 0, \tag{47.1}$$

$$\sup_x |K^n(x,g) - K(x,g)| \to 0, \text{当} n \to \infty, \forall\ g \in J_1, \tag{47.2}$$

$$\sup_x [|b(x)| + a(x) + \int K(x,dy)(1 \wedge y^2)] \leqslant L < \infty, \tag{47.3}$$

$$\lim_{b \to \infty} \sup_x K(x,\{y: |y| \geqslant b\}) = 0. \tag{47.4}$$

对一般情形，其证明需要用到停止技巧，留作读者自行完成(参见问题16.2或Jacod-Shiryaev[1])。

现在来验证定理16.17所有条件都被满足. 定理16.17的条件i)就是定理16.47的条件i). 由(45.1)及(47.1)有

$$|\alpha_t^n(h) - \alpha_t(h) \circ X^n| = \left|\int_0^t b^n(X_s^n) - b(X_s^n)ds\right|$$
$$\leqslant t\sup_x|b^n(x) - b(x)| \to 0.$$

因而[sup α]成立. 类似地，[β-$\boldsymbol{R}_+$]，[ν-$\boldsymbol{R}_+$]也成立，故定理16.17条件ii)也被满足. 若取$F(t)=Lt$，则(47.3)包含(17.3). 定理16.17的条件iv)由(47.4)推出.

由定理16.47条件ii)及引理15.61，$b,a,K(\cdot,g)$关于x连续，又由(47.3)它们是有界的. 因而由(45.1)—(45.4)，定理16.17的条件v)也成立.

最后，定理16.17的条件vi)由定理16.47的条件iii)推出，所以由定理16.17可知$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. □

设X是以(b,a,K)为无穷小特征的广义时齐扩散. 若$\int y^2K(x,dy)<\infty$，则X是局部平方可积鞅. 令

$$b'(x)=b(x)+\int K(x,dy)(y-h(y)),$$

$$a'(x)=a(x)+\int K(x,dy)y^2,$$

则

$$\alpha'_t=\int_0^t b'(X_s)ds,$$

$$\beta'_t=\int_0^t a'(X_s)ds.$$

16.48定理 假定对每个n及某个$h\in\mathscr{C}$，X^n是Φ上以(b^n,a^n,K^n)为无穷小特征的时齐广义扩散，

$$\lim_{b\to\infty}\overline{\lim_n}\sup_{|x|\leqslant a}\int K^n(x,dy)y^2I_{[|y|\geqslant b]}=0, \tag{48.1}$$

对$h\in\mathscr{C}$，X是以(b,a,ν)为无穷小特征的Φ_D上的时齐广义扩散.

若

i) $X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$,

ii) $b'^n \Rightarrow b, a'^n \Rightarrow a', K^n(\cdot, g) \Rightarrow K(\cdot, g), \forall\ g \in J_1$,

iii) 对 X 成立唯一性可测性假定，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

证明 容易验证(48.1)及 $b'^n \Rightarrow b', a'^n \Rightarrow a'$ 蕴含 $b^n \Rightarrow b, a^n \Rightarrow a$. 故由定理16.47推出 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. □

16.49系 假定时齐广义扩散 X^n 的无穷小特征为$(b^n, 0, K^n)$,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\leq a}\int K^n(x, dy) y^2 I_{[|y|>\varepsilon]} = 0, \ \forall\ \varepsilon > 0,\ a > 0. \tag{49.1}$$

又 X 是 Φ_D 上以$(b, a, 0)$为无穷小特征的时齐扩散. 若

i) $X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$,

ii) $b'^n \Rightarrow b, a'^n \Rightarrow a$,

iii) X 满足唯一性可测性假定,

则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

16.50例 假设 Y^n 是以 $\mathbf{Z}$ 为状态空间的简单时齐生灭过程，生长率为 λ_n，死亡率为 μ_n，即 Y^n 是一个跳跃 Markov 过程且具有无穷小特征(见第十五章(64.1))

$$Q^n(x, A) = \lambda_n \delta_{x+1}(A) + \mu_n \delta_{x-1}(A).$$

因而 Y^n 也是带跳时齐扩散. 令 $X_t^n = h_n Y_t^n$，这里 h_n 是实数，则 X^n 也是带跳时齐扩散，其无穷小特征为

$$K^n(x, dy) = \lambda_n \delta_{h_n}(dy) + \mu_n \delta_{-h_n}(dy),$$

$$b'^n(x) = \int y K^n(x, dy) = (\lambda_n - \mu_n) h_n,$$

$$a'^n(x) = \int y^2 K^n(x, dy) = (\lambda_n + \mu_n) h_n^2. \tag{50.1}$$

若 λ_n, μ_n 和 h_n 满足下列条件:

$$h_n \downarrow 0, (\lambda_n - \mu_n) h_n \to m, (\lambda_n + \mu_n) h_n^2 \to \sigma^2, \text{当 } n \to \infty, \tag{50.2}$$

则(50.1)中的 K^n 满足(49.1). 设 X 是以$(mt, \sigma^2 t, 0)$为可料特征

的连续半鞅，即 X 是带漂移 mt 的 Brown 运动. 若 $X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$，则由系16.49有 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 特别取

$$h_n = 2^{-n}, \lambda_n = 2^{2n-1}, \mu^n = 2^{2n-1}a^{1/2^n},$$

则 $(\lambda_n - \mu_n)h_n \to -\frac{1}{2}\log a$，$(\lambda_n + \mu_n)h_n^2 \to 1$，且有 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 当 $a=1$ 时 X 为标准 Brown 运动.

现在来讨论用 Markov 序列逼近扩散的问题.

16.51定理 假定对每个 n，$Y^n = (Y_k^n, k \geqslant 0)$ 是一个以 $p^n(x, A)$ 为转移概率的时齐 Markov 序列. X 是以 $(b, a, 0)$ 为无穷小特征的 Φ_D 上的时齐扩散. 设 $\epsilon_n \downarrow 0$，取

$$X_t^n = Y_{[t/\epsilon_n]}^n,$$

$$b^n(x) = \frac{1}{\epsilon_n}\int (y-x)p^n(x,dy),$$

$$a^n(x) = \frac{1}{\epsilon_n}\int (y-x)^2 P^n(x,dy).$$

若 i) $X_0^n = Y_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$，ii) $b^n \Rightarrow b$，$a^n \Rightarrow a$ 且

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_x \frac{1}{\epsilon_n}\int_R (y-x)^2 I_{[|y-x|\geqslant\delta]}p^n(x,dy) = 0, \forall\, \delta > 0,$$

(51.1)

iii) 对 X 唯一性可测性假设成立，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

证明 为简单计，我们也只在下列附加的一致性假定下来证明定理：

$$\sup_x |b^n(x) - b(x)| \to 0, \sup_x |a^n(x) - a(x)| \to 0, \text{当 } n \to \infty,$$

(51.2)

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_x \frac{1}{\epsilon_n}\int (y-x)^2 I_{[|y-x|\geqslant\delta]}p^n(x,dy) = 0, \forall\, \delta > 0,$$

(51.3)

$$\sup_x [|b(x)| + a(x)] \leqslant L < \infty. \qquad (51.4)$$

令 $U_k^n = Y_k^n - Y_{k-1}^n$，则

$$X_t^n - X_0^n = Y_{[t/\varepsilon_n]}^n - Y_0^n = \sum_{k=1}^{[t/\varepsilon_n]} U_k^n.$$

X^n 为一局部平方可积鞅，其可料特征(α^n,β^n,ν^n)为

$$\nu^n(dt,dx) = \sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k\varepsilon_n}(dt)p^n(Y_{k-1}^n, Y_{k-1}^n + dx)I_{[x\neq 0]}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k\varepsilon_n}(dt)p^n(X_{t-}^n, X_{t-}^n + dx)I_{[x\neq 0]},$$

$$(x^2 I_{[|x|\geq\delta]}) * \nu_t^n = \frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_n[t/\varepsilon_n]}\int_R x^2 I_{[|x|\geq\delta]}p^n(X_s^n, X_s^n + dx)ds,$$

$$\alpha'^n_t = \sum_{k=1}^{[t/\varepsilon_n]} \boldsymbol{E}[U_k^n|\mathscr{F}_{k-1}] = \int_0^{\varepsilon_n[t/\varepsilon_n]} b^n(X_s^n)ds$$

$$\beta'^n_t = \sum_{k=1}^{[t/\varepsilon_n]}(\boldsymbol{E}[(U_k^n)^2|\mathscr{F}_{k-1}] - (\boldsymbol{E}[U_k^n|\mathscr{F}_{k-1}])^2)$$

$$= \int_0^{\varepsilon_n[t/\varepsilon_n]}[a^n(X_s^n) - \varepsilon_n(b^n(X_s^n))^2]ds.$$

于是(51.2)—(51.4)蕴含[sup α']，[β'-$\boldsymbol{R}_+$]和[ν-$\boldsymbol{R}_+$]. 类似于定理16.47的证明可验证定理16.19的假定都被满足，因而 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. □

16.52例 假定对每个 n，$\eta^n = (\eta_k^n, k\geq 1)$为$\tilde{\Phi}$上独立同分布随机变量序列

$$\boldsymbol{P}(\eta_k^n = 1) = p_n,\ \boldsymbol{P}(\eta_k^n = -1) = q_n,\ p_n + q_n = 1.$$

令

$$Y_k^n = \sum_{j=1}^{k} h_n\eta_j^n,\ X_t^n = Y_{[t/\varepsilon_n]}^n = \sum_{k=1}^{[t/\varepsilon_n]} h_n\eta_k^n.$$

则 b^n，a^n 及 Y^n 的转移概率 p^n 为

$$p^n(x,dy) = p_n\delta_{x+h_n}(dy) + q_n\delta_{x-h_n}(dy),$$

$$b^n(x) = \varepsilon_n^{-1}\int(y-x)p^n(x,dy) = h_n(p_n - q_n)/\varepsilon_n,$$

$$a^n(x) = \varepsilon_n^{-1}\int(y-x)^2 p^n(x,dy) = h_n^2/\varepsilon_n.$$

且

$$\int (y-x)^2 I_{[|y-x|>h_n]} p^n(x,dy) = 0.$$

若 ε_n, h_n, p_n 及 q_n 满足下列条件

$$\varepsilon_n \downarrow 0,\ h_n^2/\varepsilon_n \to \sigma^2, (p_n - q_n)/h_n \to m/\sigma^2,$$

则 $b^n \Rightarrow m, a^n \Rightarrow \sigma^2$ 且由定理16.51 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，其中 X 是以$(mt, \sigma^2 t, 0)$为可料特征的连续 Lévy 过程，$X_0 = 0$.

16.53例 若对每个 n，$\eta^n = (\eta_k^n, k \geqslant 0)$服从 Ehrenfest 模型，即 η^n 是具有下列转移概率的 Markov 序列：

$$p^n(x,dy) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l_n}\right)\delta_{x+1}(dy) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{l_n}\right)\delta_{x-1}(dy),\ |x| \leqslant l_n.$$

令 $Y_k^n = h_n \eta_k^n, X_t^n = Y_{[t/\varepsilon]}^n$，则$(Y_k^n)$的转移概率 p^n 和 a^n, b^n 为

$$p^n(x,dy) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l_n}\right)\delta_{x+h_n}(dy) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{l_n}\right)\delta_{x-h_n}(dy),\ |x| \leqslant l_n h_n,$$

$$b^n(x) = \varepsilon_n^{-1}\int (y-x) p^n(x,dy) = -\frac{x}{l_n \varepsilon_n} I_{[|x| \leqslant h_n l_n]},$$

$$a^n(x) = \varepsilon_n^{-1}\int (y-x)^2 p^n(x,dy) = \frac{h_n^2}{\varepsilon_n} I_{[|x| \leqslant h_n l_n]},$$

且

$$\int (y-x)^2 I_{[|y-x|>h_n]} p^n(x,dy) = 0.$$

若 h_n, ε_n 和 l_n 满足下列条件：

$$\varepsilon_n \downarrow 0, \quad \frac{1}{\varepsilon_n l_n} \to k, \quad \frac{h_n^2}{\varepsilon_n} \to \sigma^2,$$

则 $b^n(x) \Rightarrow -kx, a^n \Rightarrow \sigma^2$. 设 X 是连续半鞅且 $\alpha_t = -kX_t, \beta_t = \sigma^2 t$, $\nu = 0$以及 $X_0 = 0$，即 X 是一个 Ornstein-Uhlenbeck 过程，则由定理16.51可得 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

最后我们以经验过程弱收敛的研究来结束这一节.

16.54定义 设$(Z_i, i\geqslant 1)$为独立同分布随机变量序列

$$F_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{[Z_i\leqslant t]},\quad t\in \boldsymbol{R}, \tag{54.1}$$

称为(Z_i)容量为n的**经验过程**.

16.55引理 设$(Z_i, i\geqslant 1)$为非负独立同分布随机变量序列. 假定$P(Z_i\leqslant t)=F(t)$是连续的,$F_n(t)$是(Z_i)容量为n的经验过程. 则

1) $Y_t^n=nF_n(t), t\geqslant 0$, 为计数过程,它关于自然流的补偿子为

$$(Y^n)_t^p=\int_0^t (n-Y_{s-}^n)\frac{dF(s)}{1-F(s)} \tag{55.1}$$

2) $V_t^n=\sqrt{n}\,(F_n(t)-F(t)), t\geqslant 0$, 是一个半鞅. 若$h\in\mathscr{L}$且当$|x|\leqslant 1$时$h(x)=x$,则$V^n$的可料特征$(\alpha^n,\beta^n,\nu^n)$为

$$\alpha_t^n(h)=-\int_0^t V_{s-}^n\frac{dF(s)}{1-F(s)}, \tag{55.2}$$

$$\beta_t^n(h)=\int_0^t\left(1-\frac{V_{s-}^n}{\sqrt{n}\,(1-F(s))}\right)dF(s), \tag{55.3}$$

$$\nu^n(dt,dx)=\left[n-\sqrt{n}\,\frac{V_{t-}^n}{1-F(t)}\right]dF(t)\delta_{1/n}(dx). \tag{55.4}$$

证明 1)对每个i, $A_t=I_{[t\geqslant Z_i]}$是一个单跳过程,它关于自然流的补偿子为

$$A_t^p=\int_0^t I_{[0,Z_i]}(s)\frac{dF(s)}{1-F(s)}=\int_0^t (1-A_{s-})\frac{dF(s)}{1-F(s)}.$$

因为$(Z_i, i\geqslant 1)$相互独立, $(Y_n)^p=\left(\sum_{i=1}^{n} I_{[Z_i\leqslant t]}\right)^p$可表为(55.1).

2) 因为当$|x|\leqslant 1$时$h(x)=x$,而$\Delta V^n\leqslant 1/\sqrt{n}$,故有$h(\Delta V^n)=\Delta V^n$. 由于

$$V_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_t^n-(Y^n)_t^p)+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(Y^n)_t^p-\sqrt{n}\,F(t)\right),$$

因而

$$\alpha_t^n(h)=\frac{1}{\sqrt{n}}(Y^n)_t^p-\sqrt{n}\,F(t)=-\int_0^t V_{s-}^n\frac{dF(s)}{1-F(s)}.$$

设 μ^n 为 V^n 的跳测度，$g\in J_1$，则

$$g*\mu_t^n=\sum_{s\leqslant t}g(\Delta Y_s^n/\sqrt{n})=\sum_{s\leqslant t}g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)I_{[\Delta Y_s^n=1]}=g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)Y_t^n,$$

$$g*\nu_t^n=g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(Y^n)_t^p=g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\int_0^t\left[n-\sqrt{n}\frac{V_{t-}^n}{1-F(s)}\right]dF(s)$$

于是(55.4)成立.

最后，$(Y^n-(Y^n)^p)/\sqrt{n}$ 是一个局部平方可积鞅. 而 $\beta^n=0$ 且

$$\tilde{\beta}_t^n(h)=h^2*\nu_t^n=\int_0^t\left(1-\frac{V_{s-}^n}{\sqrt{n}(1-F(s))}\right)dF(s).$$

所以(55.2)—(55.4)成立. □

16.56定义 $X=(X_t,0\leqslant t\leqslant 1)$ 称为 Brown 桥，若它是一个零均值正态过程且其协方差函数 $c(s,t)=s\wedge t(1-s\vee t)$，$s,t\in[0,1]$（参见问题2.16）. 一个 Brown 桥也是一个连续半鞅，关于其自然流的可料特征 (α,β,ν) 为（见问题16.10）：

$$\alpha_t=-\int_0^t\frac{X_s}{1-s}ds,\ \beta_t=t,\ \nu=0. \tag{56.1}$$

16.57定理 设 $(Z_i,i\geqslant 1)$ 为独立同分布随机变量序列，Z_1 为 $(0,1)$ 上均匀分布，$F_n(t)$ 为由(54.1)规定的经验过程，$V_t^n=\sqrt{n}(F_n(t)-t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则

$$V^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X,$$

其中 X 是 Brown 桥.

证明 设 $T\in(0,1)$ 为固定数. 考虑在 T 停止的过程 X 和 V^n：

$$X_t(T)=X_{t\wedge T},\quad V_t^n(T)=V_{t\wedge T}^n.$$

由(56.1)，$X(T)$ 的可料特征 $(\alpha(T),\beta(T),\nu(T))$ 为：

$$\alpha(T)_t=-\int_0^{t\wedge T}\frac{X_s}{1-s}ds,\beta(T)_t=t\wedge T,\nu(T)=0.$$

不难验证它们满足定理16.17条件 iii)，iv)的局部化版本（见问题16.3）. 同时，由引理16.55 $V^n(T)$ 的可料特征 $(\alpha^n(T),\beta^n(T),\nu^n(T))$ 为：

$$\alpha^n(h,T)_t = \int_0^{t\wedge T} V_s^n(T)\,\frac{1}{1-s}ds,$$

$$\beta^n(h,T)_t = \int_0^{t\wedge T}\left(1-\frac{V_s^n}{\sqrt{n}\,(1-s)}\right)ds,$$

$$g*\nu^n(T)_t = \int_0^{t\wedge T} g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[n-\frac{\sqrt{n}}{1-s}V_s^n(T)\right]ds.$$

对 $g\in J_1$，当 n 足够大 $g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$. 因而 $g*\nu^n(T)=0$且

$$g*\nu^n(T)-(g*\nu(T))\circ V^n(T)=0,$$

$$\alpha^n(h,T)-\alpha(h,T)\circ V^n(T)=0,$$

$$\beta^n(h,T)-\beta(h,T)\circ V^n(T)=-\int_0^{t\wedge T}\frac{V_s^n}{\sqrt{n}\,(1-s)}ds.$$

由于

$$E\left|\int_0^{t\wedge T}\frac{V_s^n}{\sqrt{n}\,(1-s)}ds\right|\leqslant\int_0^{t\wedge T}\frac{(E(V_s^n)^2)^{1/2}}{\sqrt{n}\,(1-s)}ds$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{T\wedge t}\sqrt{\frac{s}{1-s}}ds\to 0,\text{当}\, n\to\infty,$$

我们有

$$\beta^n(h,T)-\beta(h,T)\circ V^n(T)\xrightarrow{P}0.$$

所以对每个 $T\in(0,1)$，$V^n(T)\xrightarrow{\mathscr{L}}X(T)$(参见问题16.3).

设 $U_t^n=V_{1-t}^n$，$U_t^n(T)=U_{t\wedge T}^n=V_{1-t\wedge T}^n$，$t\in(0,1)$，因为 Z_i 与$1-Z_i$ 同分布，故 V^n 和 U^n 亦同分布. 于是 $U^n(T)\xrightarrow{\mathscr{L}}X(T)$.

现在我们把 V^n 和 X 延拓到 $\boldsymbol{R}_+$ 上. 当 $t>1$时令 $V_t^n=X_t=0$. 对 $N\geqslant 1$有

$$\sup_{s\leqslant N}|V_s^n|\leqslant\sup_{s\leqslant N}\left|V_s^n\left(\frac{2}{3}\right)\right|+\sup_{s\leqslant N}\left|U_s^n\left(\frac{2}{3}\right)\right|,$$

$$\omega'(\delta,V^n,N)\leqslant\omega'\left(\delta,V^n\left(\frac{2}{3}\right),N\right)+\omega'\left(\delta,U^n\left(\frac{2}{3}\right),N\right),\text{当}\,\delta<\frac{1}{3}.$$

因而由定理15.47可得(V^n)为胎紧的.

最后，对 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_p$（若对某个 $i,t_{i-1}<1\leqslant t_i$），由 $V^n(t_{i-1})\xrightarrow{\mathscr{L}}X(t_{i-1})$ 可导出 $(V^n_{t_1},\cdots,V^n_{t_{i-1}})\xrightarrow{\mathscr{L}}(X_{t_1},\cdots,X_{t_{i-1}})$. 此外 $V^n_{t_i}=\cdots=V^n_{t_p}=X_{t_i}=\cdots=X_{t_p}=0$，故有 $(V^n_{t_i},\cdots,V^n_{t_p})\xrightarrow{\mathscr{L}}(X_{t_1},\cdots,X_{t_p})$. 又因 (V^n) 是胎紧的，故可得 $V^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$. □

问题与补充

16.1 在标准可测空间 $(\boldsymbol{D},\mathscr{D}^0,\mathbb{D}^0)$ 上，令 $\mathscr{T}^0=\{T:T$ 为 $\mathbb{D}^0$ 停时$\}$. 若对每个 $T\in\mathscr{T}^0$，"停止"半鞅问题 $\Gamma_s(X,\mathbb{D}^0;\lambda,\alpha^T,\beta^T,\nu^T)$ 的任意两个解 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}'$ 在 $\mathscr{D}^0_T$ 上一致，则称半鞅问题 $\Gamma_s(X,\mathscr{D}^0;\lambda,\alpha,\beta,\nu)$ 有局部唯一性，在此 $\nu^T=I_{[0,T]}\cdot\nu$. 试证若半鞅问题 $\Gamma_s(X,\mathbb{D}^0;\lambda,\alpha,\beta,\nu)$ 有解 $\boldsymbol{P}$ 且局部唯一性成立，则对每个 $T\in\mathscr{T}^0$，$\Gamma_s(X,\mathbb{D}^0;\lambda,\alpha^T,\beta^T,\nu^T)$ 有唯一解 $\boldsymbol{P}\circ(X^T)^{-1}$.

16.2 假定对每个 $n\in\boldsymbol{N}$，X^n 是以 (α^n,β^n,ν^n) 为可料特征的 Φ 上的半鞅，X 是 φ_D 上的标准过程，(α,β,ν) 为 Φ_D 上的可料三元体，D 是 $\boldsymbol{R}_+$ 中的稠密子集且 $S(a)=\inf\{t:|X_t|\geqslant a$ 或 $|X_{t-}|\geqslant a\}$，$S^n(a)=\inf\{t:|X^n_t|\geqslant a$ 或 $|X^n_{t-}|\geqslant a\}$. 若对某个 $h\in\mathscr{X}_c$ 下列条件成立：

i) $\mathscr{L}(X^n_0)\xrightarrow{w}\lambda_0$,

ii)

$[\sup\alpha_{\rm loc}]$: $\sup_{s\leqslant t}|\alpha^n_{s\wedge S^n(a)}(h)-\alpha_{s\wedge S(a)}(h)\circ X^n|\xrightarrow{P}0,\forall\ t,a>0$,

$[\tilde{\beta}_{\rm loc}\text{-}D]$: $\tilde{\beta}^n_{t\wedge S^n(a)}(h)-\tilde{\beta}_{t\wedge S(a)}(h)\circ X^n\xrightarrow{P}0,\forall\ t\in D,a>0$,

$[\nu\text{-}D]$: $g*\nu^n_{t\wedge S^n(a)}-g*\nu_{t\wedge S(a)}\circ X^n\xrightarrow{P}0,\forall\ t\in D,a>0,g\in J$,

iii) $\forall\ a>0$ 存在非随机连续增函数 $F(a)$ 使

$$\mathrm{Var}(\alpha^{S(a)})+\beta^{S(a)}+(x^2\wedge1)*\nu^{S(a)}<F(a),$$

iv) $\lim\limits_{b\to\infty}\sup\limits_{y\in\boldsymbol{D}}\nu(y,[0,t\wedge S(a)]\times\{x:|x|>b\})=0,\ \forall\ a,t>0$,

v) $\forall\ t\in D,\ g\in J_1\ x\mapsto\alpha_t(x,h),x\mapsto\tilde{\beta}_t(x,h),x\mapsto g*\nu_t(x)$ 是

D 上按 Skorohod 拓扑的连续函数.

vi) P_D 是 $\Gamma_s(X,\mathbb{D}^\circ;\lambda_0,\alpha,\beta,\nu)$ 的局部唯一解,

则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

16.3 假定对每个 $n\in N$, X^n 是以 (α^n,β^n,ν^n) 为可料特征的 Φ 上的局部平方可积半鞅, X, $S(a)$, $S^n(a)$, (α,β,ν) 和 D 与上一问题中一样规定, 若

$$\lim_{b\to\infty}\overline{\lim_n} P((x^2 I_{[|x|>b]}) * \nu^n_{t\wedge S^n(a)} > \eta) = 0, \forall\, t,a,\eta>0,$$

且下列条件成立:

i) $\mathscr{L}(X_0^n) \xrightarrow{w} \lambda_0$,

ii) $[\sup \alpha'_{\text{loc}}]$: $\sup_{s\leqslant t}|\alpha'^n_{s\wedge S^n(a)} - \alpha'_{s\wedge S(a)}\circ X^n| \xrightarrow{P} 0, \forall\, t,a>0$,

$[\beta'\text{-}D]$: $\beta'^n_{t\wedge S^n(a)} - \beta'_{t\wedge S(a)}\circ X^n \xrightarrow{P} 0, \forall\, t\in D, a>0$,

$[\nu\text{-}D]$: 同上一问题,

iii) iv) v): 同上一问题,

试证 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

16.4 证明例16.37中的 X^n 为 G-Brown 运动.

16.5 设 $M^n\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$, $|\Delta M^n|\leqslant c$, 证明

1) 若 (M^n) 是 C-胎紧的, 则 $([M^n])$ 是胎紧的,

2) 若 $M^n \xrightarrow{\mathscr{L}} M$ 且 $M\in\mathscr{M}^c_{\text{loc}}$, 则 $(M^n,[M^n]) \xrightarrow{\mathscr{L}} (M,\langle M\rangle)$.

16.6 假定对每个 n, $U^n=(U^n_k, k\geqslant 1)$ 是 $\tilde\Phi$ 上的适应随机变量序列, $\tau^n=(\tau^n_t)$ 是 $\tilde\Phi$ 上的时变, $X^n_t=\sum_{k=1}^{\tau^n_t}U^n_k$, 又 X 是以 $(\alpha,\beta,0)$ 为可料特征的连续 Lévy 过程, $X_0=0$. 若

$$\sup_{s\leqslant t}\left|\sum_{k=1}^{\tau^n_s} E_{k-1}[U^n_k I_{[|U^n_k|\leqslant 1]}] - \alpha_s\right| \xrightarrow{P} 0, \forall\, t>0,$$

D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠密子集. 证明下列断言是等价的:

1) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,

2) $\sum_{k=1}^{\tau^n_t} P_{k-1}[|U^n_k|>\varepsilon] \xrightarrow{P} 0, \forall\, t>0, \varepsilon>0$,

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \tau_t^n}(U_k^n I_{[|U_k^n|\leqslant 1]} - \boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|\leqslant 1]}])^2 \xrightarrow{P} \beta_t, \forall\, t \in D,$$

3) $\sum_{1\leqslant k\leqslant \tau_t^n}\boldsymbol{P}_{k-1}[|U_k^n| > \varepsilon] \xrightarrow{P} 0, \forall\, t > 0, \varepsilon > 0,$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \tau_t^n}\boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|\leqslant 1]}] \xrightarrow{P} \beta_t, \forall\, t \in D.$$

16.7 假定对每个 $n, U^n = (U_k^n)$ 为 $\tilde{\Phi}$ 上的鞅差序列，X 是以 $(0,\beta,0)$ 为可料特征的 Lévy 过程. 此外，D、X^n 如上一问题中规定. 又设

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \tau_t^n}|\boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|\leqslant a]}]| \xrightarrow{P} 0, \forall\, t > 0.$$

证明下列断言是等价的：

1) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,

2) $\sum_{1\leqslant k\leqslant \tau_t^n}(U_k^n)^2 \xrightarrow{P} \beta_t, \forall\, t \in D,$

3) $\sum_{1\leqslant k\leqslant \tau_t^n}\boldsymbol{P}_{k-1}[|U_k^n| > \varepsilon] \xrightarrow{P} 0, \forall\, t > 0, \varepsilon > 0,$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \tau_t^n}(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|\leqslant 1]} \xrightarrow{P} \beta_t, \forall\, t \in D,$$

4) $\sum_{1\leqslant k\leqslant \tau_t^n}\boldsymbol{P}_{k-1}[|U_k^n| > \varepsilon] \xrightarrow{P} 0, \forall\, t > 0, \varepsilon > 0,$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \tau_t^n}\boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|\leqslant 1]}] \xrightarrow{P} \beta_t, \forall\, t \in D.$$

16.8 用上一问题中的记号. 记

$$[\Delta_2]: \sum_{k=1}^{\tau_t^n}\boldsymbol{E}_{k-1}[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|\geqslant\varepsilon]}] \xrightarrow{P} 0, \forall\, t > 0, \varepsilon > 0.$$

证明下列断言的等价性：

1) $[\Delta_2]$ 及 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,

2) $[\Delta_2]$ 及 $\sum_{k=1}^{\tau_t^n}(U_k^n)^2 \xrightarrow{P} \beta_t, \forall\, t \in D,$

3) $[\Delta_2]$ 及 $\sum_{k=1}^{\tau_t^n}\boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n] \xrightarrow{P} \beta_t, \forall\, t \in D,$

4) $\sum_{k=1}^{\tau_t^n}(U_k^n)^2 \xrightarrow{P} \beta_t$, $\sum_{k=1}^{\tau_t^n}\boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n] \xrightarrow{P} \beta_t, \forall\, t \in D$,

5) $\sum_{k=1}^{\tau_t^n}\boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n] \xrightarrow{P} \beta_t, \forall\, t \in D$ 及 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

16.9 设 W 是标准 Brown 运动. 则下列过程为 Brown 桥:

$$X_t = \begin{cases}(1-t)W(t/(1-t)), & 0 \leqslant t < 1, \\ 0, & t = 1,\end{cases}$$

16.10 设 $X=(X_t, 0\leqslant t\leqslant 1)$ 为 Brown 桥. 证明1) X 关于其自然流为半鞅;其可料特征为

$$\alpha_t = -\int_0^t \frac{X_s}{1-s}ds,\ \beta_t = t,\ \nu = 0,$$

2) X 是扩散,其无穷小特征为: $b(t,x)=\frac{x}{1-t}$, $\alpha(t,x)=1$,

3) X 满足下列随机微分方程:

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dW_t,\ X_0 = 0.$$

其中 W 为标准 Brown 运动.

16.11 设$(Z_i, i\geqslant 1)$为独立同分布随机变量序列, Z_i 的分布为 F. $V_t^n=\sqrt{n}\,(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_{\{Z_i\leqslant t\}}-F(t))$. 证明 $V^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,这里 X 是一个右连左极正态过程且 $\boldsymbol{E}[X_t]=0$, $\boldsymbol{E}[X_sX_t]=F(s\wedge t)(1-F(s\vee t))$.

16.12 设$(Z_i)_{i\geqslant 1}$为独立同分布随机变量序列, Z_i 以 F 为分布且有连续分布密度 f, $(F_n(t), t\geqslant 0)$ 为由(54.1)规定的经验过程, $P_t^n=nF_n(t/n)$. 若 X 为以 $f(0)$ 为强度的时齐 Poisson 过程,则 $P^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

参考文献

Aldous, D.

[1] Stopping times and tightness. Ann. Probab., **6**(1987), 335—340.

Arnold, L.

[1] *Stochastic Differential Equations, Theory and Applications*, Wiley, 1974.

Bichteler, P.

[1] Stochastic integration theory and L^p theory of semimartingales, Ann. Probab., **9** (1981), 49—89.

Billingsley, P.

[1] *Convergence of Probability Measures*, Wiley and Sons, 1968.

Brémand, P.

[1] *Point Processes and Queues; Martingale Dynamics*, Springer, 1981.

Brémand, P., Yor, M.

[1] Changes of filtrations and of probability measures, Z. W., **45**(1978), 269—296.

Bretagnolle, J. L.

[1] Processus à accroissements indépendants, Ecole d'Eté de St. Flour, LN in Math., **307**, 1973, 1—26.

Brown, T.

[1] A martingale approach to the Poisson convergence of simple point processes, Ann. Probab., **6**(1978), 615—628.

Burkholder, D., Davis, B., Gundy, R. F.

[1] Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. 6th Berkely Symp. **2**, 1972, 223—240.

Chou, C. S.

[1] Le Processus des sauts d'une martingale locale, Sém. Probab. XI, LN in Math., **581**, 1977, 351—361.

Chou, C. S., Meyer, P. A.

[1] Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels, Sém. Probab. IX, LN in Math., **465**, 1975, 1561—1563.

Chung, K. L., Williams, R. J.

[1] *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhäuser, 1983.

Cinlar, E., Jacod, J., Protter, P., Sharpe, M.

[1] Semimartingales and Markov processes, Z. W., **54**(1980), 161—220.

Courrège, P.

[1] Integrale stochastique par rapport à une martingale de carré intégrable, Sém. Brelot-Choquet-Deny, 7(1962—1963), Institute Henri-Poincaré, 623—638.

Davis, M. H. A.

[1] The representation of martingales of jump processes, SIAM J. Contr., **14**(1976), 623—638.

Dellacherie, C.

[1] *Capacités et Processus Stochastiques*, Springer, 1972.

[2] Intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener et de Poisson, Sém. Probab. VIII, LN in Math., **381**, 1974, 25 26. (Correction, Sém. Probab. IX, LN in Math. **465**, 1975, 494.)

[3] Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartin gales, Sém. Probab. XII, LN in Math., **649**, 1978, 742—745.

[4] Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique, Stoch. Proc. Appl., **10** (1980), 115—144.

[5] Mesurabilité des débuts et théorème de section, Sém. Probab. XV, LN in Math., **850**, 1981, 351—360.

Dellacherie, C., Meyer, P. A.

[1] *Probabilités et Potentiel*, 2e édition, chapitres I-IV. Hermann, 1975.

[2] *Probabilités et Potentiel*, 2e édition, chapitres V-VIII. Hermann, 1980.

Dellacherie, C., Meyer, P. A. Yor, M.

[1] Sur certains Propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO, Sém. Probab. XII, LN in Math., **649**, 1978, 98—113.

De Sam Lazaro, J., Meyer, P. A.

[1] Méthodes de martingales et théorie des flots, Sém. Probab. IV, LN in Math., **465**, 1975, 1—96.

Doléans-Dade, C.

[1] Existence du Processus croissant naturel associé à un potentiel de classe (D), Z. W., **9**(1968), 309—314.

[2] Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales, Z. W., **16**(1970), 181 194.

[3] Existence and unicity of solutions of stochastic differential equations, Z. W., **36** (1976), 93—101.

Doléans-Dade, C., Meyer, P. A.

[1] Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Sém. Probab. IV, LN in Math., **124**, 1970, 77—107.

[2] Equations différentielles stochastiques, Sém. Probab. XI, LN in Math., **581**, 1977, 376—382.

Donsker, M.

[1] Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems, Ann. Math. Statistics, **23**(1952), 277—281.

Doob, J. L.

[1] *Stochastic Processes*, Wiley and Sons, 1954.

Dubin, L. E., Schwarz, G.

[1] On continuous martingales, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **53**(1965), 913—916.

Dudley, R. M.

[1] Wiener functionals as Ito integrals, Ann. Probab, **5**(1977), 140—141.

Durret, R.

[1] *Browman Motion and Martingles in Analysis*, Wadsworth Inc., 1984.

Eagleson, G. K., Memin, J.

[1] Sur la contiguite de deux suites de mesures, généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptser-Shiryaev, Sém. Probab. XVI, LN in Math., **920**, 1982, 319—337.

El Karoui, N., Meyer, P. A.

[1] Les changements de temps en théorie générale des processus, Sém. Probab. XI, LN in Math., **581**, 1977, 65—78.

El Karoui, N., Weidenfeld, G.

[1] Théorie générale et changement de temps, ibid, 79—108.

Elliott, R. J.

[1] *Stochastic Calculus and Applications*, Springer, 1981.

[2] Double martingales, Z. W., **34**(1976), 17—28.

Emery, M.

[1] Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques, application aux intégrales multiplicatives stochastiques, Z. W., **41**(1978), 241—262.

[2] Une topologie sur l'espace des semimartingales, Sém. Prob. XIII, LN in Math., **721**, 1979, 260—280.

[3] Equations différentielles stochastiques lipschitziennes: étude de la stabilité, ibid, 281—293.

[4] Une propriété des temps prévisibles, Sém. Probab. XIV, LN in Math., **784**, 1980, 316—317.

Emery, M., Stricker, C., Yan, J. A. (严加安)

[1] Valeurs prises par les martingales locales continues à un instant donné, Ann. Probab., **11**(1983), 635—641.

Ethier, S. N., Kurtz, T. G.

[1] *Markov Processes, Characterization and Convergence*, Wiley and Sons, 1986.

Fisk, D. L.

[1] Quasi-martingales, Trans. Amer. Math. Soc., **120**(1965), 369—389.

Fujisaki, M., Kallianpur, G., Kunita, H.

[1] Stochastic differential equations for the non-linear filtering problem, Osaka J. Math., **9**(1972), 19—40.

Gihman, I. I., Skorohod, A. V.

[1] *The Theory of Stochastic Processes* III, Springer, 1979.

Girsanov, I. V.

[1] On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, Theory Probab. Appl., **5** (1960), 285—301 (in Russian).

Gong, G. L. (龚光鲁)

[1] 随机微分方程引论,北京大学出版社,1987.

Greenwood, P., Shiryaev, A. N.

[1] *Contiguity and the Statistical Invariance Principle*, Gordon and Breach, 1985.

Grigelionis, B.

[1] On the representation of integer-valued measures by means of stochastic integrals with respect to Poisson measure, Litovsk. Mat. Sb., **11** (1971), 93—108 (in Russian).

[2] On the absolute continuity of measures corresponding to stochastic processes, Litovsk. Math. Sb., **11**(1971), 783—794(in Russian).

[3] The characterization of stochastic processes with conditionally independent increments, Litovsk. Math. Sb., **15**(1975), 53—60(in Russian).

[4] Stochastic point processes and martingales, Litovsk. Math. Sb., **15** (1975), 101—114.

[5] Martingale characterization of stochastic process with independent increments, Litovsk. Math. Sb., **17**(1977), 75—86(in Russian).

Hajek, J., Sidak, Z.

[1] *Theory of Rank Tests*, Academic Press, 1967.

Hall, W. J., Loynes, R. M.

[1] On the concept of contiguity, Ann. Probab., **5**(1977), 278—282.

He, S. W.(何声武)

[1] Some remark on single jump processes, Sém. Probab. XVII, LN in Math., **986**, 1983, 347—348.

[2] The representation of Poisson functionals, Sém. Probab. XVII, LN in Math., **986**, 1983, 349—352.

[3] Optimization applications of compensators of Poisson random measures, Prob. Engin. Inf. Sci., **3**(1989), 149—155.

He, S. W.(何声武), Wang, J. G.(汪嘉冈)

[1] The total continuity of natural filtrations and the strong property of predictable representation of jump processes and processes with independent increments, Sém. Probab. XVI, LN in Math., **920**, 1982, 348—354.

[2] The property of predictable representation of the sum of independent semimartingales, Z. W., **61**(1982), 141—152.

[3] Two results on jump processes, Sém. Probab. XVIII, LN in Math., **1059**, 1984, 256—267.

[4] Remarks on ablsolute continuity, contiguity and convergence in variation of probability measures, Sém. Probab. XXII, LN in Math., **1321**, 1988, 260-270.

[5] Chaos decomposition and the property of predictable representation, Science in China, Ser. A., **32**(1989), 397—407.

He, S. W.(何声武), Wang, J. G.(汪嘉冈), Xia, A. H.(夏爱华)

[1] 马尔可夫跳过程的弱收敛,应用概率统计, **7**(1991), 73—81.

He, S. W.(何声武), Yan, J. A.(严加安), Zheng, W. A.(郑伟安)

[1] Sur la convergence des semimartingales continues dans R^n et des martingales dans une variété, Sém. Probab. XVII, LN in Math., **986**, 1983, 179—184.

Huang, Z. Y.(黄志远)

[1] 随机分析学基础,武汉大学出版社,1988.

Ikeda, N., Watanabe, S.

[1] *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland, Kodansha, 1981.

Itmi, M.

[1] Processus ponctuéls marques stochastiques. Représentation des mártingales et filtration naturelle quasi-continue à gauche, Sém. Probab. XV, LN in Math., **850**, 1981, 618—626.

Itô, K.

[1] Stochastic integrals, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20**(1944), 519—524.

[2] On a formula concerning stochastic integrales, Nagoya Math. J., **3**(1951), 55—65.

[3] On stochastic differential equations, Mem. Am. Math. Soc., **4**(1951), 1—51.

Jacod, J.

[1] Multivariate point process: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. W., **31**(1975), 235—253.

[2] Un théorèm de représentation pour les martingales discontinues. Z. W., **34**(1976), 225—244.

[3] Sur la construction des intégrales stochastiques et les sous-espaces stables de martingales, Sém. Probab. XI, LN in Math., **581**, 1977, 390—410.

[4] *Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales*, LN in Math., **714**, 1979.

[5] Processus à accroissements indépendents, une condition nécessaire et suffisante de convergence en loi, Z. W., **63**(1983), 109—136.

[6] Processus de Hellinger, absolulte continuité, contiguité, Sém. Probab. de Rennes, 1984.

[7] Théorème limite pour les processus, Ecole d'été de St-Flour XIII, LN in Math., **117**, 1985.

[8] Sur la convergence des processus ponctuels, Probab. Th. Rel. Fields, **76**(1987), 573—586.

Jacod, J., Mémin, J.

[1] Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales, Z. W., **35**(1976), 1—37.

Jacod, J., Shiryaev, A. N.

[1] *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, 1987.

Jacod, J., Yor, M.

[1] Etude des solutions extrémales et représentation integrale des solutions pour certains problèmes de martingales. Z. W., **38**(1977), 83—125.

Jeulin, T.

[1] *Semi-martingales et Grossissement d'une Filtration*, LN in Math., **873**, 1980.

Kabanov, Yu., Liptser, R. S.

[1] On convergence in variation of the distributions of multivariate point processes, Z. W., **63**(1983), 475—485.

Kabanov, Yu., Liptser, R. S., Shiryaev, A. N.

[1] Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability

distributions, Math. Sb., **35**(1978) 631—680 (Part I), **36**(1980), 31—58(Part II) (English transl.).

[2] Some limit theorems for simple point processes (martingale approach), Stochastics, **3**(1981), 203—216.

[3] Weak and strong convergence of the distributions of counting processes, Theory Probab. Appl., **28**(1983), 303—336(in Russian).

[4] On the variation distance for probability measures defined on a filtered space, Probab. Theory Rel. Fields, **71**(1986), 19—36.

Kakutani, S.

[1] On equivalence of infinite product measures, Ann. Math., **49**(1948), 214—224.

Kallianpur, G.

[1] *Stochastic Filtering Theory*, Springer, 1980.

Karandikar, R. L.

[1] On Métivier-Pellaumail inequality, Emery topology and pathwise formulae in stochastic calculus, Sankhyā, Ser. A, **51**(1989), 121—143.

Karatzas, I, Shreve, S. E.

[1] *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1987.

Kazamaki, N.

[1] Krickeberg's decomposition for local martingales, Sém. Probab. VI, LN in Math., **258**, 1972, 101—103.

Kopp, E.

[1] *Martingales and Stochastic Integrals*, Cambridge, 1984.

Kunita, H., Watanabe, S.

[1] On square integrable martingales, Nagoya Math. J., **30**(1967), 209—245.

Kussmaul, A. V.

[1] *Stochastic Integration and Generalized Martingales*, Pitman, 1977.

Lenglart, E.

[1] Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilités, Z. W., **39**(1977), 65—70.

[2] Sur la convergence presque sur des martingales locales, C. R. A. S, Paris, **284** (1977), 1085—1088.

[3] Relation de domination entre deux processus, Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B, **13**(1977), 171—179.

[4] Sur la localisation des intégrales stochasliques, Sém. Probab. XII, LN in Math., **649**, 1978, 53—56.

[5] Sur l'inégalité de Métivier-Pellaumail, Sém. Probab. XIV, LN in Math., **784**,

1980, 125—127.

Le Jan, Y.

[1] Temps d'arret stricts et martingales de sauts, Z. W., **44**(1978), 213—226.

Lépingle, D.

[1] Sur la représentation des sauts des martingales, Sém. Probab. XI, LN in Math., **581**, 1977, 418—434.

[2] Sur le comportement asymptotique des martingales locales, Sém. Probab. XII, LN in Math., **649**, 1978, 148—161.

Letta, G.

[1] *Martingales et Integration Stochastique*, Scoula Normale Superiore, 1984.

Lévy, P.

[1] *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*, *Guthier-villars*, 1948.

Lin, C. D. (林成德)

[1] Quand l'inegalité de Kunita-Watanabe est-elle une égalité? Sém. Probab. XX, LN in Math., **1204**, 1986, 140—147.

Liptser, R. S.

[1] A strong law of large numbers for local martingales, Stochastics, **3**(1980), 217—228.

Liptser, R. S., Shiryaev, A. N.

[1] *Statistics of Stochastic Processes*, Springer, 1977.

[2] A functional central limit theorem for semimartingales, Theory Probab. Appl., **25** (1980), 667—688(in Russian).

[3] On necessary and sufficient conditions in the functional central limit theorem for semimartingales, Theory Probab. Appl., **26**(1981), 130—135(in Russian).

[4] Weak convergence of semimartingales to stochastically continuous processes with independent and conditionally independent increments, Math. Sb., **116**(1981), 331—358(in Russian).

[5] On a problem of necessary and sufficient conditions in the functional central limit theorem for local martingales, Z. W., **59**(1982), 311—318.

[6] On the problem of "predictable" criteria of contiguity, Proc. 5th Japan-USSR Symp. LN in Math., **1021**, 1983, 384—418.

[7] Weak convergence of a sequence of semimartingales to a process of diffusion type, Math. Sb., **121**(1983), 176—200(in Russian).

[8] On contiguity of probability measures corresponding to semimartingales, Analysis Mathematicae, **11**(1985), 93—124.

[9] *Theory of Martingales*, Nauka, 1986(in Russian).

Loève, M.

[1] *Probability Theory*, Springer, 1977.

Maisonneuve, B.

[1] Une mise au point sur les martingales locales continues définies sur un intervalle stochastique. Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math., **581**, 1977, 435—445.

McKean, H. P.

[1] *Stochastic Integrals*, Academic Press, 1969.

Mémin, J.

[1] Distance en variation et conditions de contiguité pour les processus ponctuels. Sém. Probab. de Rennes, 1982.

[2] Sur la contiguité relative de deux suites de processus, Sém. Probab. XVII, LN in Math., **986**, 1983, 371—376.

Memin, J., Shiryaev, A. N.

[1] Distance de Hellinger-Kakutani des lois correspondant à deux processus à accroisements independants, Z. W., **70**(1985), 67—90.

Métivier, M.

[1] *Semimartingales: A Course on Stochastic Processes*, de Gruyter, 1982.

Métivier, M., Pellaumail, J.

[1] On a stopped Doob's inequality and general stochastic equations. Rapport interne n° 28, Ecole Polytechnique, 1978.

[2] *Stochastic Integration*, Academic Press, 1980.

Meyer, P. A.

[1] *Probabilités et Potentiels*, Hermann, 1966.

[2] Une Présentation de la théorie des ensembles sousliniens. Applications aux processus stochastiques, Séminaire Brelot-Choquet-Deny (théorie du potentiel), 7ème année, 1962—1963, 17 pages.

[3] Démonstration simplifiée d'un théorème de Knight, Sém. Probab. V, LN in Math., **191**, 1971, 191—195.

[4] Sur un problème de filtration, Sém. Probab. VII, LN in Math., **321**, 1973, 223—238.

[5] Le dual de $\mathscr{H}^1$ set $\mathscr{BMO}$(cas continu), ibid., 237—238.

[6] Un cours sur les intégrales stochastiques, ibid. Sém. Probab. X, LN in Math., **511**, 1976, 246—400.

[7] Notes sur les intégrales stochastiques, I-VI. Sém. Probab. XI, LN in Math., 581, 1977, 446—481.

[8] Sur un théorème de C. Stricker, ibid., 482—489.

[9] Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques, Sém. Probab. XII, LN in Math., **649**, 1978, 757--762.

[10] Caractérisation des semimartingales, d'après Dellacherie, Sém. Probab. XIII, LN in Math., **721**, 1979, 620—623.

[11] Sur la méthode de L. Schwartz pour les e.d.s., Sém. Probab. XXV, LN in Math., **1485**(1991), 108--112.

Meyer, P. A., Zheng, W. A. (郑伟安)

[1] Tightness criteria for laws of semimartingales, Ann. Inst. Henri Poincaré (Probab. Stat.), **20**(1984), 353—372.

Neveu, J.

[1] *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, Masson, 1964.

[2] *Martingales à Temps Discret*, Masson, 1972.

[3] Processus ponctuels, Ecole d'eté de Saint Flour, LN in Math., **598**, 1977.

Novikov, A. A

[1] On an identity for stochastic integrals, Theory Probab. Appl., **17**(1972), 717—720(in Russian).

Orey, S.

[1] F-processes, Proc. Fifth Berkeley Symp., **2**, 1966, 301—313.

Pollard, D.

[1] *Convergence of Stochastic Processes*, Springer, 1984.

Pratelli, M.

[1] La classe des semimartingales qui permettent d'integrer les processus optionels, Sém. Probab. XVII, LN in Math., **986**, 1983.

Protter, P. E.

[1] On the existence, uniqueness, convergence, and explosions of solutions of systems of stochastic integral equations, Ann. Prob., **5**(1977), 243—261.

[2] Stochastic integration without tears, Stochastics, **16**(1986), 295—325.

[3] *Stochastic Integration and Differential Equation: A New Approach*, Springer, 1989.

Rao, K. M.

[1] On decomposition theorems of Meyer, Math. Scand., **24**(1969), 66—78.

[2] Quasi-martingales, Math., Scand., **24**(1969), 79—92.

Rebolledo, R.

[1] *La méthode de martingales appliquée à la convergence en loi des processus*, Mém. Soc. Math. France, **62**, 1979.

Revuz, D., Yor, M.

[1] *Continuous Martingale and Brownian Motion*, Springer, 1991.

Rogers, L. C. G., Williams, D.

[1] *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, Vol. 2, *Itô Calculus*, Wiley & Sons, 1987.

Skorohod, A. V.

[1] *Studies in the Theorey of Random Processes*, Addison-Wesley, Reading, 1965.

Stratonovich, R. L.

[1] A new representation for stochastic integrals and equations, SIAM Control, **4** (1966), 362-371.

Stricker, C.

[1] Mesure de Föllmer en théorie des quasi-martingales, Sém. Probab. IX, LN in Math., **465**, 1975, 408—419.

[2] Quasi-martingales, martingales locales, Semi-martingales, et filtrations naturelles. Z. W., **39**(1977), 55—64.

[3] Arbitrage et lois de martingale, Ann. Inst. Henri Poincaré, **26**(1990), 451—460.

Stricker, C., Yor, M.

[1] Calcul stochastique dépendant d'un paramètre, Z. W., **45**(1978), 109—133.

Stroock, D. W.

[1] Applications of Fefferman-Stein type interpolation to probability theory and analysis, Comm. Pure Appl. M., **26**(1973), 477—495.

Stroock, D. W., Varadhan, S. R. S.

[1] *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer, 1979.

Strook, D. W., Yor, M.

[1] On extremal solutions of martingale problems, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **13** (1980), 95—164.

Van Shuppen, J. H., Wong, E.

[1] Translation of local martingales under a change of law, Ann. Probab., **2**(1974), 879—888.

Wang, J. G. (汪嘉冈)

[1] On the absolute continuity and singularity of measures induced by the processes with independent increments, Scientia Sinica, 13(1964), 859—877.

[2] Some remarks on processes with independent increments, Sem. Probab. XV, LN in Math., **850**, 1981, 627—631.

Watanabe, S.

[1] On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Jap. J. Math., **34**(1964), 53—79.

Williams, D.

[1] *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, Vol. 1, Wiley and Sons, 1979.

Yan, J. A. (严加安)

[1] Propriété de représentation prévisible pour les semimartingMales spéciales, Sientia Sinica, **23**(1980), 803—813.

[2] Sur une équation différentielle stochastique générale, Sém. Probab. XIV, LN in Math., **784**, 1980, 305—315.

[3] Remarques sur l'intégrale stochastique de processus non bornés, ibid, 128—139.

[4] Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou $\mathscr{H}^1$, ibid., 220—222.

[5] 半鞅局部时的几个公式，数学年刊，**1**(1980),545—551.

[6] 鞅与随机积分引论，上海科技出版社，1981.

[7] A propos de l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles, Sém. Probab. XVI, LN in Math., **920**(1982), 338—347.

[8] Martingales locales sur un ouvert droit optionel, Stochastics, **8**(1982), 161—181.

[9] 半鞅局部时的变量替换公式，科学通报，**33**(1988),1755—1759.

[10] Some remarks on the theory of stochastic integration, Sém. Probab. XXIV, LN in Math., **1485**, 1991, 95—107.

Yan, J. A. (严加安) Yoeurp, Ch.

[1] Représentation des martingales comme intégrales stochastiques des processus optionnels, Sém. Probab. X, LN in Math., **511**, 1976, 422—431.

Yoeurp, Ch.

[1] Décomposition des martingales locales et formules exponentielles, ibid., 432—480.

Yor, M.

[1] Représentation intégrale des martingales, étude des distributions extrémales. Article de Thèse de Doctorat, Paris, 1976.

[2] Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles, Sém. Probab. X, LN in Math., **511**, 1976, 481—500.

[3] Remarques sur la représentation des martingales comme intégrables stochastiques, Sém. Probab. XI, LN in Math., **581**, 1977, 502—517.

[4] Sous-espaces denses dans L^1 et $\mathscr{H}^1$ et représentation des martingales, Sém. Probab. XII, LN in Math., **649**, 1978, 264—309.

[5] Sur certains commutateurs d'une filtration, Sem. Probab. XV, LN in Math., **850**, 1981, 526—528.

Zheng, W. A. (郑伟安)

[1] Semimartingales in predictable random open sets, Sém. Probab. XVI, LN in

Math., **920**, 1982, 370—379.

[2] Une remarque sur même intégrale stochastique calculée dans deux filtrations, Sém. Probab. XVIII, LN in Math., **1059**, 1984, 172—178.

[3] Tightness results for laws of diffusion proesses, application to stochastic mechanics, Ann. Inst. Henri Poincaré(Probab. Stat.), **21**(1985), 103—124.

符号与名词索引

（按拼音排列）

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

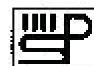
R

S

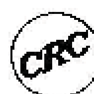
Z

Semimartingale Theory and Stochastic Calculus

Sheng-wu He Jia-gang Wang Jia-an Yan



SCIENCE PRESS
Beijing New York



CRC PRESS INC.
Boca Raton Ann Arbor London Tokyo

Sheng-wu He
Department of Mathematical Statistics
East China Normal University
Shanghai 200062, P. R. China

Jia-gang Wang
Institute of Applied Mathematics
East China University of Chemical Technology
Shanghai 200237, P. R. China

Jia-an Yan
Institute of Applied Mathematics
Chinese Academy of Sciences
Beijing 100080, P. R. China

Published by Science Press
16 Donghuangchenggen North Street
Beijing 100707, China

Distribution right throughout the world, excluding China, Hong Kong and Macau, is granted to CRC Press Inc. Boca Raton

Printed in Hong Kong

Library of Congress Cataloging in Publication Data
He, S. (Sheng-wu)
Semimartingale Theory and Stochastic Calculus / by
S. He, J. Wang, J. Yan
p. cm.
ISBN 0-8493-7715-3
1. Semimartingales, 2. Stochastic analysis.
I. Wang, Chia-kang. II. Yan, J. (Jia-an). III. Title
QA 274.5.H4. 1992
519.2'87-dc 20 91-42567
CIP

ISBN 7-03-003066-4/O-568 Science Press, Beijing
ISBN 0-8493-7715-3 CRC Press Inc., Boca Raton

To Zhen-zhu Tu, Ji-qing You, Lan Gu

Preface

Semimartingales constitute the largest class of integrator-processes with respect to which stochastic integrals can be reasonably defined. Stochastic calculus based on the semimartingales is one of the major branches of modern probability theory. It is not only an important tool for researches in diverse branches of probability (Markov processes and diffusion processes, stochastic point processes, statistics of stochastic processes, stochastic filtering and control etc.), but also has broad applications to certain branches of mathematics (partial differential equations, harmonic analysis, differential geometry etc.) and theoretic physics. It is now filtring gradually into engineering, biology, financial mathematics and other fields as well. In recent years, several monographs on stochastic calculus have appeared, but most of them stress on a certain topic, and none of them gives a sufficient discussion on semimartingale theory. It is the purpose of this book to give a systematic and overall exposition of the fundamental theory of semimartingales and stochastic calculus, and to illustrate some of their applications. We hope that it provides a reference for probabilists, statisticians and engineers, and its main parts also may be used as a textbook for graduate students. To this end, the materials for this book have been carefully selected. The text is supplemented and further developed in the form of problems. Indeed, a large part of these problems may be used as exercises. By working out these exercises readers can deepen their understanding of the text and broaden their thinking. But the others are difficult to be solved. They serve as complements to the text.

The book contains 16 chapters. The first ten chapters are an elaborate revision based on the book "An Introduction to Martingale Theory and Stochastic Integrals" (in Chinese) written by J. A. Yan, one of the authors, and published in 1981. The last six chapters reflects the new developments of semimartingales and stochastic calculus in the 1980s. Naturally, the selection of the material is partly influenced by the authors' interests of research. Here is a brief survey of the main contents. For the convenience of the reader, preliminaries, necessary for reading the book, are given in Chapter 1, of which some are difficult to be found in ordinary books on measure theory or probability theory. Chapter 2 contains the

main results of classical martingale theory. Chapters 3–5 are devoted to the exposition of what is commonly called "the general theory of stochastic processes". This theory is not only an important basis for semimartingales and stochastic calculus, but also indispensible for studying many specific types of stochastic processes, such as Markov processes, point processes. Beginning with Chapter 6, the fundamental theory of semimartingales and stochastic calculus is developed. Two most important classes of uniformly integrable martingales are discussed in Chapter 6: martingales with integrable variation and square integrable martingales. In Chapter 7 local martingales are introduced and their jumps are characterized. Semimartingales and quasimartingales and their elementary propertis are discussed in Chapter 8. Chapter 9, which is devoted to stochastic integrals and relative topics, is undoubtedly the highlight of the book. It contains the essence of stochastic calculus, e.g., Itô formula, Doléans-Dade exponential formula, Lenglart's inequality and local times. A short introduction to stochastic differential equations is also included. Though the stochastic differential equation is an important topic of stochastic calculus, we have no room to develop it fully in the book. Besides, a number of monographs on this subject are available. Chapter 10 is concerned with H^1-martingales and BMO-martingales, in which a series of main martingale inequalities are established. In Chapter 11, the predictable characteristics and integral representation of semimartingales are introduced. They are the generalization of the classical results of processes with independent increments. Changes of measures presented in Chapter 12 are one of the key techniques of stochastic calculus. The characterization of semimartingales as the only class of reasonable integrator-processes is established in this chapter. Chapter 13 presents the predictable integral representation of martingales, which is also useful, such as for filtering. Chapter 14 contributes to the problems of absolute continuity and singularity, contiguity, entire separation and convergence in variation of measures. These problems have been studied since the 1960s. By semimartingale approach the satisfactory solutions have been obtained finally. Chapter 16 deals with the weak convergence theory of semimartingales, and the preliminaries to weak convergence of stochastic processes are given in Chapter 15. Stochastic calculus not only provides a completely new method for weak convergence theory of stochastic processes, but also gives more elaborate results. Throughout the book, special interests are put on two basic types of processes: processes with independent increments and step processes, encountered frequently in applied probability and statistics.

It is supposed that readers have had a basic training in measure theory and advanced probability theory. However, no particular knowledge of

stochastic processes is required. A familiarity with the key concepts and some intuitive grounds of stochastic processes will certainly be helpful. An enormous literature has been devoted to semimartingales and stochastic calculus. We have no attempt to list all related papers in references and to make suitable historical notes. In this respect, the reader may refer to C. Dellacherie and P. A. Meyer's voluminous book "Probabilités et Potentiel" and J. Jacod and A. N. Shiryaev's "Limit Theorems for Stochastic Processes".

Sincere thanks are due to P. A. Meyer, who had led authors into the field of semimartingales and stochastic calculus, and provided a great deal of support and encouragement with enthusiasm constantly. We would like to extend our warm appreciation to those, who have offered useful advice and help in our research work at various stages, in particular to J. Azéma, P. D. Chen, C. S. Chou, C. Dellacherie, M. Emery, G. L. Gong, Z. Y. Huang, J. Jacod, Z. M. Ma, Y. M. Pan, P. Protter, C. Stricker, S. R. Wang, Ch. Yœurp, M. Yor and W. A. Zheng. Many chapters of this book have been taught many times by the authors in the last decade. We would like to thank our audience for their contributions to improvements of the book. The writting of the book is supported by National Natural Science Foundation of China. We are grateful for having had the grant.

Shanghai and Beijing
December 1991

S. W. He, J. G. Wang, J. A. Yan

Table of Contents

Chapter I

Preliminaries

Readers are assumed to be familiar with the fundamentals of measure theory and probability theory in Loève[1] or Neveu[1], such as measure extension theorem, Radon-Nikodym theorem, dominated convergence theorem, Fatou's lemma, L^p-space, Hölder's inequality, conditional mathematical expectation, Jensen's inequality, conditional independence, product probability space and Fubini's theorem. In this chapter we give some supplements, necessary for reading this book.

Throughout this book we use the following common notations.

$\boldsymbol{N}$ = the set of all non-negative integers.

$\overline{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N} \cup \{+\infty\}$.

$\boldsymbol{R} =]-\infty, +\infty[$ [1] (real line).

$\boldsymbol{R}_+ = [0, \infty[$.

$\overline{\boldsymbol{R}} = [-\infty, +\infty]$ (extended real line).

$\overline{\boldsymbol{R}}_+ = [0, +\infty]$.

$\boldsymbol{Q}$ (resp. $\boldsymbol{Q}_+$) = the set of all rationals in $\boldsymbol{R}$ (resp. $\boldsymbol{R}_+$).

$\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ (resp. $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$) = the Borel σ-field in $\boldsymbol{R}$ (resp. $\boldsymbol{R}_+$).

Let Ω be a set. A mapping from Ω to $\boldsymbol{R}$ (resp. $\overline{\boldsymbol{R}}$) is called a (resp. extended) real-valued function on Ω. As restricted on Ω, a set always means a subset of Ω. The union and intersection of sets A and B are denoted by $A \cup B$ and $A \cap B$ (or simply AB) respectively. The complement of A is denoted by A^c. $A \backslash B = AB^c$ is the difference between A and B. $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ is the symmetric difference of A and B. Empty set is denoted by $\emptyset$. The indicator of a set A is denoted by I_A:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in A^c \end{cases}$$

1) $]a,b[= (a,b)$, $]a,b] = (a,b]$, $[a,b[= [a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

The set of all elements ω having the property P is denoted by $\{\omega \in \Omega : P(\omega)\}$, or $\{\omega : P(\omega)\}$, or simply $[P]$, if no ambiguity will be produced. For example, if f and g are two extended real functions on Ω, $[f \geq g]$ stands for $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq g(\omega)\}$. Let (A_n) be a sequence of sets. $A_n \uparrow A$ means (A_n) is monotone increasing and $A = \bigcup_n A_n$. Correspondingly, $A_n \downarrow A$ means (A_n) is monotone decreasing and $A = \bigcap_n A_n$. The superior limit of (A_n) is denoted by $\overline{\lim}_n A_n$ or $[A_n \ i.o.]$. The inferior limit of (A_n) is denoted by $\underline{\lim}_n A_n$. If $\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n$ happens, we use the notation $\lim_n A_n$ for this set.

A collection of subsets of Ω is called a class on Ω. Let $\mathcal{F}$ be a class on Ω, and A be a set. $\mathcal{F} \cap A$ stands for $\{AB : B \in \mathcal{F}\}$, the trace of $\mathcal{F}$ on A. Define

$$\mathcal{F}_\sigma = \{\bigcup_n A_n : A_n \subset \mathcal{F}\}, \ \mathcal{F}_\delta = \{\bigcap_n A_n : A_n \in \mathcal{F}\}.$$

They are the minimal classes, containing $\mathcal{F}$ and closed under the formation of countable union and intersection respectively.

Let $\mathcal{C}$ be a class on Ω. We denote by $\sigma(\mathcal{C})$ the σ-field on Ω, generated by $\mathcal{C}$. Let $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ be a family of classes on Ω. We define $\sigma(\mathcal{G}_i, i \in I) = \sigma(\bigcup_{i \in I} \mathcal{G}_i)$.

Let $(E, \mathcal{E})$ be a measurable space, and f be a mapping from Ω to E. We denote by $\sigma(f)$ the σ-field $f^{-1}(\mathcal{E}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$, induced by f in Ω. If g is an extended real function on E, $g \in \mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}^+$, resp. $b\mathcal{E}$, resp. $b\mathcal{E}^+$) means that g is an $\mathcal{E}$-measurable (resp. non-negative, resp. bounded, resp. non-negative and bounded) function.

Let $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$ be a family of measurable spaces. For each $i \in I$, f_i is a mapping from Ω to E_i. Then $\sigma(\sigma(f_i), i \in I)$ is also denoted by $\sigma(f_i, i \in I)$.

Let $\mathcal{F}_i$ be a class on Ω_i, $i = 1, 2$. Define

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \{A \times B : \ A \in \mathcal{F}_1, \ B \in \mathcal{F}_2\}.$$

For $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$, the projection of A onto Ω_1 is defined as

$$\pi_1(A) = \{\omega_1 \in \Omega_1 : \ \exists \omega_2 \in \Omega_2 \text{ such that } (\omega_1, \omega_2) \in A\}.$$

If $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2$, are two measurable spaces, the product σ-field of $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ is denoted by $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$.

Let f and g be two extended real functions. Then $f \vee g$ stands for $\sup(f, g)$, and $f \wedge g$ for $\inf(f, g)$. Hence, $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0 = -(f \wedge 0)$. More generally, $\vee$ and $\wedge$ stand for supremum and infimum respectively.

For example, if $(f_n)_{n\in N}$ is a sequence of extended real functions, then $\bigvee_n f_n = \sup_n f_n$, $\bigwedge_n f_n = \inf_n f_n$. Moreover, if $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ is a family of σ-fields on Ω, then $\bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i = \sigma(\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i)$, $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{F}_i = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$.

On the real line $\boldsymbol{R}$, $s \uparrow t$ means $s \to t$, $s \le t$, and $s \uparrow\uparrow t$ means $s \to t$, $s < t$. For a sequence of real numbers (s_n), $s_n \uparrow t$ and $s_n \uparrow\uparrow t$ imply that (s_n) is a monotone increasing sequence in addition. Symbols $\downarrow$ and $\downarrow\downarrow$ have similar meanings. Let (f_n) be a sequence of extended real functions. $f_n \uparrow f$ (resp. $f_n \downarrow f$) means that (f_n) is monotone increasing (resp. decreasing) and $f = \lim_n f_n$.

In general, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ denotes a probability space. The mathematical expectation of a random variable (abbreviated as r.v.) ξ is denoted by $\boldsymbol{E}[\xi]$ if it makes sense. $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $p \ge 1$, denotes the Banach space of all p-th power integrable r.v. with p-norm: $\|\xi\|_p = (\boldsymbol{E}|\xi|^p)^{1/p}$.

§1. Monotone Class Theorems

1.1 Definition. Let Ω be a set, and $\mathcal{C}$ be a class on Ω. $\mathcal{C}$ is called a *π-class* if $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB \in \mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ is called a *λ-class* if

i) $\Omega \in \mathcal{C}$,

ii) $A, B \in \mathcal{C}$, $A \subset B \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{C}$,

iii) $A_n \in \mathcal{C}$, $A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ is called a *monotone class* if

$$A_n \in \mathcal{C},\ A_n \uparrow A \text{ or } A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}.$$

Obviously, a λ-class is a monotone class. If $\mathcal{C}$ is both a π-class and a λ-class, or both a field and a monotone class, then $\mathcal{C}$ is a σ-field.

The following theorem is the monotone class theorem in terms of sets.

1.2 Theorem. *Let $\mathcal{C}, \mathcal{F}$ be two classes on Ω, and $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.*

1) If $\mathcal{F}$ is a λ-class and $\mathcal{C}$ is a π-class, then $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

2) If $\mathcal{F}$ is a monotone class and $\mathcal{C}$ is a field, then $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

Proof. 1) The intersection $\mathcal{F}'$ of all λ-classes containing $\mathcal{C}$ is still a λ-class (called the λ-class generated by $\mathcal{C}$). Put

$$\mathcal{F}_1 = \{B \in \mathcal{F}' : \forall A \in \mathcal{C},\ B \cap A \in \mathcal{F}'\}.$$

Obviously, $\mathcal{F}_1$ is a λ-class and $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_1$. Hence, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_1$. Put

$$\mathcal{F}_2 = \{B \in \mathcal{F}' : \forall A \in \mathcal{F}',\ B \cap A \in \mathcal{F}'\}.$$

Equally, $\mathcal{F}_2$ is a λ-class and $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_2$. Hence, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_2$, and $\mathcal{F}'$ is a π-class. Then $\mathcal{F}'$ is a σ-field, and $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

2) The intersection $\mathcal{F}'$ of all monotone classes containing $\mathcal{C}$ is still a monotone class (called the monotone class generated by $\mathcal{C}$). Similarly one can show that $\mathcal{F}'$ is a π-class. Put

$$\mathcal{F}'' = \{B \in \mathcal{F}' : B^c \in \mathcal{F}'\}.$$

Then $\mathcal{F}''$ is a monotone class, and $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}''$. Hence, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}'$. This means $\mathcal{F}'$ is a field. Therefore, $\mathcal{F}'$ is a σ-field, and $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. $\square$

As a simple application of Theorem 1.2, we have

1.3 Corollary. 1) *Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, and ξ and η be integrable r.v. Suppose that $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ and $\mathcal{C}$ is a π-class. If $\boldsymbol{E}\xi = \boldsymbol{E}\eta$ and for each $A \in \mathcal{C}$, $\boldsymbol{E}[\xi I_A] = \boldsymbol{E}[\eta I_A]$, then*

$$\boldsymbol{E}[\xi|\sigma(\mathcal{C})] = \boldsymbol{E}[\eta|\sigma(\mathcal{C})] \quad \text{a.s.} \tag{3.1}$$

2) *Let $(\Omega, \mathcal{F})$ be a measurable space, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, and $\mathcal{C}$ be a π-class. Suppose that μ and ν are two bounded signed measures with $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. If for each $A \in \mathcal{C}$, $\mu(A) = \nu(A)$, then, being restricted on $\sigma(\mathcal{C})$, μ is identical with ν.*

Proof. We only show 1). The proof of 2) is similar. Put

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} : \boldsymbol{E}[\xi I_A] = \boldsymbol{E}[\eta I_A]\}.$$

Then $\mathcal{G}$ is a λ-class and $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ by the assumption. By Theorem 1.2.1), $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$, and (3.1) follows. $\square$

The following theorem is the monotone class theorem in terms of functions, corresponding to Theorem 1.2.1), and will be used frequently later.

1.4 Theorem. *Let $\mathcal{C}$ be a π-class on Ω, and $\mathcal{H}$ be a linear space formed by some real functions on Ω. If the following conditions are satisfied:*

i) $1 \in \mathcal{H}$,

ii) $f_n \in \mathcal{H}$, $0 \le f_n \uparrow f$, f *is finite (resp. bounded)* $\Rightarrow f \in \mathcal{H}$,

iii) $A \in \mathcal{C} \Rightarrow I_A \in \mathcal{H}$,

then $\mathcal{H}$ contains all $\sigma(\mathcal{C})$-measurable real (resp. bounded) functions on Ω.

Proof. Put $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : I_A \in \mathcal{H}\}$. It is easy to see that $\mathcal{F}$ is a λ-class, and $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ by the assumption. From Theorem 1.2.1), we have $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

Let ξ be a $\sigma(\mathcal{C})$-measurable real (resp. bounded) function on Ω, and put

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} I_{[k/2^n \le \xi < (k+1)/2^n]}.$$

Then $\xi_n \in \mathcal{H}$, $0 \le \xi_n \uparrow \xi^+$, and $\xi^+ \in \mathcal{H}$ by the condition ii). By the same argument, we have $\xi^- \in \mathcal{H}$. Hence $\xi = \xi^+ - \xi^- \in \mathcal{H}$. □

Applying monotone class theorems is one of our most useful techniques. Readers must manipulate them masterly. In general, details about applying monotone class theorems will be omitted. As an example, we will show a characterization of $\sigma(f)$-measurable functions by using Theorem 1.4. This characterization is very useful in probability theory, and is called *Doob's measurability theorem*.

1.5 Theorem. *Let f be a mapping from Ω to a measurable space $(E, \mathcal{E})$, and φ be a (resp. extended, resp. bounded) real function on Ω. In order for φ to be $\sigma(f)$-measurable, it is necessary and sufficient for an $\mathcal{E}$-measurable (resp. extended, resp. bounded) real function h exists on E such that $\varphi = h \circ f$, i.e., $\varphi(\omega) = h(f(\omega))$.*

Proof. The sufficiency is trivial. We are going to show the necessity. Put

$$\mathcal{H} = \{h \circ f : h \text{ is an } \mathcal{E}\text{-measurable real function on } E\}.$$

Then $\mathcal{H}$ is a linear space, and $1 \in \mathcal{H}$. Suppose $h_n \circ f \in \mathcal{H}$, $0 \le h_n \circ f \uparrow \psi$, and ψ is finite. Put

$$A = \{x \in E : \sup_n h_n(x) < \infty\}.$$

Then $A \in \mathcal{E}$, and $f(\Omega) \subset A$. Put

$$h(x) = \begin{cases} \sup_n h_n(x), & x \in A, \\ 0, & x \in A^c. \end{cases}$$

Obviously, h is an $\mathcal{E}$-measurable real function on E, and $\psi = h \circ f$. Hence, $\psi \in \mathcal{H}$. Now $\mathcal{H}$ satisfies the condition ii) in Theorem 1.4. Let $D \in \sigma(f)$. There exists $B \in \mathcal{E}$ such that $D = f^{-1}(B)$. Hence, $I_D = I_B \circ f \in \mathcal{H}$. By Theorem 1.4, $\mathcal{H}$ contains all $\sigma(f)$-measurable real functions. This means that if φ is a $\sigma(f)$-measurable real function, then there exists an $\mathcal{E}$-measurable real functon h on E such that $\varphi = h \circ f$. Furthermore, if φ is bounded: $|\varphi| \le c$, we take $h' = h^+ \wedge c - h^- \wedge c$, and $\varphi = h' \circ f$ remains true. At last, suppose φ is a $\sigma(f)$-measurable extended real function.

Then $\varphi' = \arctan \varphi$ is a $\sigma(f)$-measurable real function, and $|\varphi'| \le \pi/2$. So there exists an $\mathcal{E}$-measurable real function h' on E such that $\varphi' = h' \circ f$. Obviously, $h = \tan h'$ is an $\mathcal{E}$-measurable extended real function on E, and $\varphi = h \circ f$. □

§2. Uniform Integrability

1.6 Definition. Let $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i \in I$, be a family of probability spaces, $\xi_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i \in I$. $\mathcal{H} = \{\xi_i, i \in I\}$ is called a *uniformly integrable family* if

$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{i \in I} \int_{[|\xi_i| > c]} |\xi_i| dP_i = 0.$$

When $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{H}$ is also called a *uniformly integrable family on* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1.7 Theorem. *Let $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i \in I$, be a family of probability spaces, $\{\xi_i, \eta_i\} \subset L^1(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i \in I$, $\mathcal{H} = \{\xi_i, i \in I\}$, $\mathcal{X} = \{\eta_i, i \in I\}$.*

1) If $\mathcal{X}$ is a uniformly integrable family, and for each $i \in I$, $|\xi_i| \le |\eta_i|$ P_i-a.s., then $\mathcal{H}$ is also a uniformly integrable family.

2) If $\xi_i \in L^p(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i \in I$, $p > 1$, and $\sup_{i \in I} E_i[|\xi_i|^p] < \infty$, then $\mathcal{H}$ is a uniformly integrable family.

Proof. 1) follows immediately from Definition 1.6.

2) Put $a = \sup_{i \in I} E_i[|\xi_i|^p]$. For any $c > 0$, we have

$$\int_{[|\xi_i| > c]} |\xi_i| dP_i \le \int_{[|\xi_i| > c]} \frac{|\xi_i|^p}{c^{p-1}} dP_i \le \frac{E_i[|\xi_i|^p]}{c^{p-1}} \le \frac{a}{c^{p-1}}.$$

According to Definition 1.6, $\mathcal{H}$ is a uniformly integrable family. □

1.8 Theorem. *Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, ξ be an integrable r.v., and $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ be a family of sub-σ-fields of $\mathcal{F}$. Then $(E[\xi|\mathcal{G}_i])_{i \in I}$ is a uniformly integrable family.*

Proof. Set $\eta_i = E[|\xi||\mathcal{G}_i]$. For any $c > 0$ we have

$$P(\eta_i \ge c) \le \frac{1}{c} E[\eta_i] = \frac{1}{c} E[|\xi|], \ i \in I$$

and

$$\int_{[\eta_i > c]} \eta_i dP = \int_{[\eta_i > c]} |\xi| dP \le \delta P(\eta_i > c) + \int_{[|\xi| > \delta]} |\xi| dP$$
$$\le \frac{\delta}{c} E[|\xi|] + \int_{[|\xi| \ge \delta]} |\xi| dP.$$

For any given $\varepsilon > 0$, take $\delta > 0$ such that $\int_{[|\xi| \geq \delta]} |\xi| dP \leq \frac{\varepsilon}{2}$. When $c \geq \frac{2\delta}{\varepsilon} E[|\xi|]$, we have $\int_{[\eta_i > c]} \eta_i dP \leq \varepsilon$, $i \in I$. This means that $(\eta_i)_{i \in I}$ is a uniformly integrable family. By Theorem 1.7.1), we know that $(E_i[\xi|\mathcal{G}_i])_{i \in I}$ is a uniformly integrable family. □

1.9 Theorem. *Let $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i \in I$, be a family of probability spaces, $\xi_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i \in I$. Then $\mathcal{H} = \{\xi_i, i \in I\}$ is a uniformly integrable family if and only if the following conditions are satisfied:*

i) $a = \sup_{i \in I} E_i[|\xi_i|] < \infty$,

ii) *For any given $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that for each $A \in \mathcal{F}_i$ with $P_i(A) \leq \delta$ we have*

$$\int_A |\xi_i| dP_i \leq \varepsilon \tag{9.1}$$

i.e., $\lim_{\delta \to 0} \sup_{i \in I} \sup_{\{A: P_i(A) \leq \delta\}} \int_A |\xi_i| dP_i = 0$.

Proof. Necessity. For any $A \in \mathcal{F}_i$ and $c > 0$ we have

$$\int_A |\xi_i| dP_i \leq c P_i(A) + \int_{[|\xi_i| > c]} |\xi_i| dP_i, \ i \in I. \tag{9.2}$$

Since $\mathcal{H}$ is uniformly integrable, one can take c sufficiently large such that for each $i \in I$, $\int_{[|\xi_i| > c]} |\xi_i| dP_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$. In (9.2) putting $A = \Omega$ yields the condition i), and putting $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$ yields the condition ii).

Sufficiency. For any given $\varepsilon > 0$, choose $\delta > 0$ such that the condition ii) holds. When $c \geq a/\delta$ we have

$$P_i(|\xi_i| \geq c) \leq \frac{1}{c} E_i[|\xi_i|] \leq \frac{a}{c} \leq \delta.$$

Then from (9.1) for each $i \in I$ we have

$$\int_{[|\xi_i| > c]} |\xi_i| dP_i \leq \varepsilon.$$

This means that $\mathcal{H}$ is uniformly integrable. □

1.10 Corollary. *Suppose both $(\xi_i)_{i \in I}$ and $(\eta_i)_{i \in I}$ are uniformly integrable families, so is $(\xi_i + \eta_i)_{i \in I}$.*

The following theorem gives a criterion for L^1-convergence, and reveals the importance of uniform integrability.

1.11 Theorem. *Suppose (ξ_n) is a sequence of integrable r.v., and ξ is a real r.v. Then $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$ if and only if (ξ_n) is uniformly integrable, and $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.*

Proof. Necessity. Suppose $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$. It is well-known that L^1-convergence implies convergence in probability. For any $A \in \mathcal{F}$, we have

$$\int_A |\xi_n| dP \leq \int_A |\xi| dP + E[|\xi_n - \xi|]. \tag{11.1}$$

For given $\varepsilon > 0$, choose a positive integer N such that for $n > N$, $E[|\xi_n - \xi|] \leq \varepsilon/2$, and $\delta > 0$ such that for $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |\xi| dP \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{and} \quad \int_A |\xi_n| dP \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ n \leq N.$$

Then by (11.1) we see that for $A \in \mathcal{F}$,

$$P(A) \leq \delta \Rightarrow \forall n, \int_A |\xi_n| dP \leq \varepsilon.$$

At the same time, we also have $\sup_n E[|\xi_n|] < \infty$. Hence, by Theorem 1.9 we conclude that (ξ_n) is uniformly integrable.

Sufficiency. Suppose (ξ_n) is uniformly integrable, and $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. By Fatou's lemma, we have $E[|\xi|] \leq \sup_n E[|\xi_n|] < \infty$, i.e., ξ is integrable. Then $(\xi_n - \xi)$ is uniformly integrable (by Corollary 1.10). For any given $\varepsilon > 0$, from Theorem 1.9 we see that there exists $\delta > 0$ such that for any $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |\xi_n - \xi| dP < \varepsilon, \ n \geq 1.$$

Take N sufficiently large such that for all $n \geq N$ we have

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < \delta.$$

Hence, for $n \geq N$,

$$\begin{aligned} E[|\xi_n - \xi|] &= \int_{[|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon]} |\xi_n - \xi| dP + \int_{[|\xi_n - \xi| < \varepsilon]} |\xi_n - \xi| dP \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

This means $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$. □

Uniformly integrable families of r.v. will be encountered frequently in this book. Further materials about uniform integrability can be found in Problems and Complements of this chapter.

§3. Essential Suprema

1.12 Definition. Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, and $\mathcal{H}$ be a non-empty family of r.v. . A r.v. η is called the *essential supremum* of $\mathcal{H}$ if η satisfies the following conditions:

i) For all $\xi \in \mathcal{H}$, $\quad \xi \leq \eta$ a.s.,

ii) If η' is another r.v. satisfying i), i.e., for all $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \leq \eta'$ a.s., then $\eta \leq \eta'$ a.s..

It is easy to see that if the essential supremum of $\mathcal{H}$ exists, it must be unique up to a $\boldsymbol{P}$-null set. We denote it by $\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathcal{H}} \xi$ or $\operatorname{ess\,sup} \mathcal{H}$.

Reversing the symbols of inequality in i) and ii), we obtain the definition of *essential infimum*. The essential infimum of $\mathcal{H}$ is denoted by $\operatorname{ess\,inf}_{\xi\in\mathcal{H}} \xi$ or $\operatorname{ess\,inf} \mathcal{H}$.

The following theorem indicates that the essential supremum and infimum of a non-empty family of r.v. always exist.

1.13 Theorem. *Let $\mathcal{H}$ be a non-empty family of r.v.. Then the essential supremum (resp. infimum) always exists, and there are at most a denumerable number of elements (ξ_n) of $\mathcal{H}$ such that*

$$\operatorname{ess\,sup} \mathcal{H} = \bigvee_n \xi_n \ (\text{ resp. } \operatorname{ess\,inf} \mathcal{H} = \bigwedge_n \xi_n).$$

Moreover, if $\mathcal{H}$ is closed under the operation $\vee$ (resp. $\wedge$), the sequence (ξ_n) can be chosen being monotone increasing (resp. decreasing).

Proof. We only discuss the case of essential supremum. The second conclusion is easy. In order to show the first conclusion, we may assume all elements in $\mathcal{H}$ to be uniformly bounded. Otherwise, we may consider $\widetilde{\mathcal{H}} = \{\arctan \xi : \xi \in \mathcal{H}\}$ instead. Furthermore, we can assume that $\mathcal{H}$ is closed under the operation $\vee$. At this time, let $(\xi_n) \subset \mathcal{H}$ be a monotone increasing sequence such that

$$\lim_n \boldsymbol{E}[\xi_n] = \sup_{\xi\in\mathcal{H}} \boldsymbol{E}[\xi].$$

Put $\eta = \bigvee_n \xi_n$, and we are going to show that η is the essential supremum of $\mathcal{H}$. To this end, one needs to verify the two conditions in Definition 1.12. Condition ii) holds trivially, and only condition i) needs to be verified. Let $\xi \in \mathcal{H}$. Put

$$\xi_n' = \xi_n \vee \xi.$$

Then $(\xi_n') \subset \mathcal{H}$ is monotone increasing, and $\lim_n \xi_n' = \eta \vee \xi$. We have

$$\boldsymbol{E}[\eta \vee \xi] = \lim_n \boldsymbol{E}[\xi_n'] \leq \sup_{\zeta\in\mathcal{H}} \boldsymbol{E}[\zeta] = \boldsymbol{E}[\eta].$$

Because $\eta \vee \xi \geq \eta$, the above inequality means $\eta \vee \xi = \eta$ a.s., i.e., $\eta \geq \xi$ a.s.. Condition i) is established. □

1.14 Remark. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ be a probability space. Assume $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, and $\mathcal{C}$ is non-empty. Put

$$\mathcal{H} = \{I_C : C \in \mathcal{C}\}.$$

According to Theorem 1.13, there is $(C_n) \subset \mathcal{C}$ such that

$$I_{\bigcup_n C_n} = \bigvee_n I_{C_n} = \operatorname{ess\,sup} \mathcal{H},$$

$\bigcup_n C_n$ is called the *essential supremum* of $\mathcal{C}$, and is denoted by $\operatorname{ess\,sup}\ \mathcal{C}$. Similarly, there is $(D_n) \subset \mathcal{C}$ such that

$$I_{\bigcap_n D_n} = \bigwedge_n I_{D_n} = \operatorname{ess\,inf} \mathcal{H},$$

$\bigcap_n D_n$ is called the *essential infimum* of $\mathcal{C}$, and is denoted by $\operatorname{ess\,inf}\ \mathcal{C}$.

The way to prove the existence of essential suprema in Theorem 1.13 is also a useful technique, we will use it ever and again in this book.

§4. The Generalization of Conditional Expectation

1.15 Definition. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ be a probability space, $\mathcal{G}$ be a sub-σ-field of $\mathcal{F}$. A r.v. ξ is called *σ-integrable with respect to* (abbreviated as w.r.t.) $\mathcal{G}$, if there exist $\Omega_n \in \mathcal{G}$, $\Omega_n \uparrow \Omega$ a.s. [1)] such that each ξI_{Ω_n} is integrable.

1.16 Theorem. 1) *In order for a r.v. ξ to be σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$ it is necessary and sufficient that there exist a $\mathcal{G}$-measurable finite r.v. $\eta > 0$ a.s. such that $\xi\eta$ is integrable.*

2) *Let ξ be a r.v.. If there exists $(G_n) \subset \mathcal{G}$ such that $\bigcup_n G_n = \Omega$ a.s. and each ξI_{G_n} is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$, then ξ itself is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$.*

Proof. 1) The sufficiency is obvious (one can take $\Omega_n = [\eta \geq \frac{1}{n}]$), we show the necessity. Let ξ be σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$. Then there exists $(\Omega_n) \subset \mathcal{G}$ such that $\Omega_n \uparrow \Omega$ and each ξI_{Ω_n} is integrable. Set

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1 + \boldsymbol{E}[|\xi| I_{\Omega_n}])} I_{\Omega_n}.$$

It is easy to see that $\eta > 0$ is $\mathcal{G}$-measurable, and $\xi\eta$ is integrable.

1) If necessary, one can replace Ω_n by $\Omega_n \cup (\Omega \backslash \bigcup_n \Omega_n)$ to make $\Omega_n \uparrow \Omega$.

2) From 1) for each n there exists a $\mathcal{G}$-measurable finite r.v. $\eta_n > 0$ a.s. such that $\eta_n \xi I_{G_n}$ is integrable. Set

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n \wedge 1}{2^n(1 + \boldsymbol{E}[\eta_n|\xi|I_{G_n}])} I_{G_n}.$$

Then $\eta > 0$ a.s., $\eta \in \mathcal{G}$, and $\xi\eta$ is integrable. Again by 1) we conclude that ξ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$. □

It is well known that for any non-negative r.v. ξ one can define conditional expectation $\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}]$ (set $\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}] = \lim_n \boldsymbol{E}[\xi \wedge n|\mathcal{G}]$ a.s.). However, even if ξ only takes finite values, $\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}]$ may be $+\infty$ on a set with positive probability. It is not difficult to prove that for a non-negative r.v. ξ, $\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}]$ is a.s. finite if and only if ξ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$.

1.17 Theorem. *Let ξ be a r.v., σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$. Set*

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{G} : \boldsymbol{E}[|\xi|I_A] < +\infty\}.$$

Then there exists a unique (up to a null set) real r.v. $\eta \in \mathcal{G}$ such that for any $A \in \mathcal{C}$,

$$\boldsymbol{E}[\xi I_A] = \boldsymbol{E}[\eta I_A]. \tag{17.1}$$

η is called the conditional expectation of ξ given $\mathcal{G}$, and is denoted by $\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}]$.

Proof. Without loss of generality, we may assume ξ to be non-negative. Suppose that $\Omega_n \in \mathcal{G}$, $\Omega_n \uparrow \Omega$ and each ξI_{Ω_n} is integrable. Set

$$\eta_n = \boldsymbol{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathcal{G}].$$

Then $\eta_{n+1} I_{\Omega_n} = \eta_n$ a.s., $\eta_n \uparrow \eta$ a.s.. where η is a $\mathcal{G}$-measurable real r.v.. For $A \in \mathcal{C}$ we have

$$\boldsymbol{E}[\xi I_A] = \lim_n [\xi I_A I_{\Omega_n}] = \lim_n \boldsymbol{E}[\eta_n I_A] = \boldsymbol{E}[\eta I_A],$$

i.e., (17.1) holds. By (17.1), ηI_{Ω_n} is the conditional expectation of ξI_{Ω_n} given $\mathcal{G}$. Hence, η is determined uniquely up to a null set. □

As mentioned above, $\boldsymbol{E}[|\xi||\mathcal{G}] < \infty$ a.s. (i.e., $\boldsymbol{E}[\xi^+|\mathcal{G}] < \infty$ and $\boldsymbol{E}[\xi^-|\mathcal{G}] < \infty$ a.s.) if and only if ξ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$. In this case, the conditional expectation $\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}]$ defined in Theorem 1.17 is just

$$\boldsymbol{E}[\xi^+|\mathcal{G}] - \boldsymbol{E}[\xi^-|\mathcal{G}].$$

The properties of conditional expectations of integrable r.v. are well-known. These properties remain true for conditional expectations of σ-integrable r.v.. Below we list them, and only give the proof for smoothing

properties. The proof for others may be proceeded the same as in the case of integrable r.v..

1.18 Theorem. *Let ξ and η be two r.v., σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$.*

1) *For all real a and b, $a\xi + b\eta$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$, and*

$$\boldsymbol{E}[a\xi + b\eta|\mathcal{G}] = a\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}] + b\boldsymbol{E}[\eta|\mathcal{G}] \quad \text{a.s..}$$

2) *If $\xi \le \eta$ a.s., then $\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}] \le \boldsymbol{E}[\eta|\mathcal{G}]$ a.s..*

1.19 Theorem. *Let r.v. $\xi_n > 0$, $n \ge 1$, be σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$.*

1) *If $\xi_n \uparrow \xi$, then ξ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$ if and only if $\lim_n \boldsymbol{E}[\xi_n|\mathcal{G}] < \infty$ a.s.. In this case, we have*

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}] = \lim_n \boldsymbol{E}[\xi_n|\mathcal{G}] \quad a.s..$$

2) *If $\underline{\lim}_n \xi_n$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$, then*

$$\underline{\lim}_n \boldsymbol{E}[\xi_n|\mathcal{G}] \ge \boldsymbol{E}[\underline{\lim}_n \xi_n|\mathcal{G}] \quad a.s..$$

1.20 Theorem. *Suppose r.v. ξ_n a.s. converge to a r.v. ξ, and for each n, $|\xi_n| \le \eta$ a.s., where η is a $\mathcal{G}$-measurable real r.v.. Then*

$$\boldsymbol{E}[|\xi_n - \xi||\mathcal{G}] \to 0 \quad a.s..$$

1.21 Theorem. *Let ξ be a r.v., σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$, and η be a $\mathcal{G}$-measurable real r.v.. Then $\xi\eta$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$, and*

$$\boldsymbol{E}[\xi\eta|\mathcal{G}] = \eta\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}] \quad \text{a.s.} \tag{21.1}$$

Proof. Assume $A_n \in \mathcal{G}$, $A_n \uparrow \Omega$, and each ξI_{A_n} is integrable. Set $B_n = [|\eta| \le n]$. Then $B_n \in \mathcal{G}$ and $B_n \uparrow \Omega$. Put $\Omega_n = A_n \cap B_n$. Then $\Omega_n \in \mathcal{G}$, $\Omega_n \uparrow \Omega$, and each $\xi\eta I_{\Omega_n}$ is integrable. Hence, $\xi\eta$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$. We have (by (17.1))

$$\boldsymbol{E}[\xi\eta|\mathcal{G}] I_{\Omega_n} = \boldsymbol{E}[\xi\eta I_{\Omega_n}|\mathcal{G}] = \eta I_{\Omega_n} \boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}] \text{ a.s..}$$

(21.1) follows. □

1.22 Theorem. *Let $\mathcal{H}$ and $\mathcal{G}$ be two sub-σ-fields of $\mathcal{F}$, and $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. If ξ is a r.v., σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$ (σ-integrable w.r.t. $\mathcal{H}$ thereby), then $\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{H}]$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$, and*

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}] = \boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{H}|\mathcal{G}] \quad a.s., \tag{22.1}$$

where $\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{H}|\mathcal{G}]$ is the abbreviation of $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{H}]|\mathcal{G}]$.

Proof. Suppose that $\Omega_n \in \mathcal{G}$, $\Omega_n \uparrow \Omega$, and each ξI_{Ω_n} is integrable. From (17.1) we know that $I_{\Omega_n} \boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{H}]$ is integrable, then $\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{H}]$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$. Using smoothing properties of ordinary conditional expectation, we have

$$\boldsymbol{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathcal{G}] = \boldsymbol{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathcal{H}|\mathcal{G}] \text{ a.s..}$$

Hence, (by (21.1)) we obtain

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}]I_{\Omega_n} &= \boldsymbol{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathcal{G}] = \boldsymbol{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathcal{H}|\mathcal{G}] = \boldsymbol{E}[I_{\Omega_n}\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] \\ &= \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{H}]|\mathcal{G}]I_{\Omega_n} \quad \text{a.s..}\end{aligned}$$

(22.1) follows. □

The following theorem will be used constantly in this book.

1.23 Theorem. *Let ξ be a r.v., and $A \in \mathcal{G}$. Assume that ξI_A is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}$. Put*

$$\mathcal{G}' = \sigma\{A \cap G : G \in \mathcal{G}\}.$$

Then ξI_A is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}'$, and

$$\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathcal{G}] = \boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathcal{G}'] \quad \text{a.s.} \tag{23.1}$$

Proof. It is trivial that ξI_A is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{G}'$. From Theorem 1.21 we have

$$\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathcal{G}] = \boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathcal{G}]I_A \quad \text{a.s..}$$

Hence, we can take $\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathcal{G}] \in \mathcal{G}'$. Since $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, from Theorem 1.22 we have

$$\boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathcal{G}'] = \boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathcal{G}|\mathcal{G}'] = \boldsymbol{E}[\xi I_A|\mathcal{G}] \quad \text{a.s..}$$ □

Remark. If ξ is integrable, then for any $A \in \mathcal{G}$ we have

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}]I_A = \boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}']I_A \quad \text{a.s..}$$

Moreover, if two sub-σ-fields $\mathcal{G}_1$ and $\mathcal{G}_2$ satisfy $\mathcal{G}_1 \cap A = \mathcal{G}_2 \cap A$ and $A \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$, then for any integrable r.v. ξ

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}_1]I_A = \boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{G}_2]I_A \quad \text{a.s..}$$

§5. Analytic Sets and Choquet Capacity

In this paragraph we introduce the concept of analytic sets and their elementary properties. By means of Choquet capacity we show that $\mathcal{F}$-analytic sets in a measurable space $(\Omega, \mathcal{F})$ are universally measurable. These are prerequisites for section theorems in Chapter IV.

1.24 Definition. Let E be a set, $\mathcal{E}$ be a class on E. If $\mathcal{E}$ contains empty set $\emptyset$, we call $\mathcal{E}$ a *paving* on E, and the ordered pair $(E, \mathcal{E})$ a *paved set*.

1.25 Definition. Let $(F, \mathcal{F})$ be a paved set and A be a subset of F. A is called *$\mathcal{F}$-analytic*, if there exists a compact metrizable space E and a subset B of $F \times E$ belonging to $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$ such that A is the projection of B onto F, where $\mathcal{K}(E)$ is the paving consisting of all compact subsets of E.

The class of all $\mathcal{F}$-analytic sets is denoted by $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Immediately from the definition we know that if $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, then there exists $B \in \mathcal{F}_\sigma$ such that $A \subset B$. In particular, $F \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ if and only if $F \in \mathcal{F}_\sigma$.

1.26 Theorem. *Let $(F, \mathcal{F})$ be a paved set. Then*

1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

2) *$\mathcal{A}(\mathcal{F})$ is closed under countable unions and intersections.*

Proof. 1) is apparent. We show 2). Let $(A_n) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$. According to the definition, for each n there exists a compact metrizable space E_n and $B_n \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E_n))_{\sigma\delta}$ such that A_n is the projection of B_n onto F. Denote by E the product topological space $\prod_n E_n$, and by π the projection mapping from $F \times E$ onto F. Put

$$C_n = B_n \times \prod_{m \neq n} E_m.$$

We have

$$\bigcap_n A_n = \bigcap_n \pi(C_n) = \pi(\bigcap_n C_n). \tag{26.1}$$

Put $B_n = \bigcap_k B_{nk}$, where for each k, $B_{n,k} \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E_n))_\sigma$. Since $B_{n,k} \times \prod_{m \neq n} E_m \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E_n))_\sigma$, we have $C_n \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$, and $\bigcap_n C_n \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$. It follows from (26.1) that $\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, i.e., $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ is closed under countable intersections.

Now denote by E the one-point compactification of the sum topological space $\sum_n E_n$, and identify $\sum_n (F \times E_n)$ with $F \times (\sum_n E_n)$. Then

$$\pi(\sum_n B_n) = \bigcup_n A_n. \tag{26.2}$$

Since $\sum_n B_{k,n} \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))_\sigma$, we have

$$\sum_n B_n = \sum_n \bigcap_k B_{n,k} = \bigcap_k \sum_n B_{n,k} \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$$

and $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ by (26.2), i.e., $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ is closed under countable unions. □

1.27 Theorem. *Let $(E, \mathcal{E})$ and $(F, \mathcal{F})$ be two paved sets, and $(F \times E, \mathcal{F} \otimes \mathcal{E})$ be their product. Then*

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}). \tag{27.1}$$

Proof. Let $A \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ and $B \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Take $A_1 \in \mathcal{E}_\sigma$ and $B_1 \in \mathcal{F}_\sigma$ such that $A \subset A_1, B \subset B_1$. It is easy to see that $\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E})$. It follows from Theorem 1.26 that

$$\mathcal{F}_\sigma \otimes \mathcal{A}(\mathcal{E}) \subset (\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}(\mathcal{E}))_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}).$$

Similarly we have $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{E}_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E})$. Finally we obtain

$$B \times A = (B_1 \times A) \cap (B \times A_1) \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}).$$ □

1.28 Theorem. *Let $(F, \mathcal{F})$ be a paved set, and E be a compact metrizable space. Then for each $A' \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))$, the projection A of A' onto F is $\mathcal{F}$-analytic.*

Proof. There exists a compact metrizable space G and $A'' \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{K}(G))_{\sigma\delta}$ such that A' is the projection of A'' onto $F \times E$. But $\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{K}(G) \subset \mathcal{K}(E \times G)$, and $E \times G$ is a compact metrizable space, $\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{K}(G) \subset \mathcal{K}(E \times G)$, and A is the projection of A'' onto F. By the definition we have $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. □

1.29 Theorem. *Let $(F, \mathcal{F})$ be a paved set, and $\mathcal{G}$ be a paving on F such that $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Then*

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})). \tag{29.1}$$

Proof. Let $A \in \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$. There exists a compact metrizable space E and $A' \in (\mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$ such that A is the projection of A' onto F. From (27.1) we have

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{K}(E) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{K}(E)) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E)).$$

Hence, $A' \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))$. It follows from Theorem 1.28 that $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, i.e., $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$. It is trivial that $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$. Hence, (29.1) holds. □

1.30 Theorem. *Let $(F, \mathcal{F})$ be a paved set, A be a subset of F, and $\mathcal{F} \cap A = \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$. Then*

$$\mathcal{A}(\mathcal{F} \cap A) = \mathcal{A}(\mathcal{F}) \cap A, \tag{30.1}$$

where $\mathcal{F} \cap A$ is considered as a paving on A.

Proof. Let $C \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \cap A)$. There exists a compact metrizable space E and $C' \in ((\mathcal{F} \cap A) \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$ such that C is the projection of C' onto A. Furthermore, there exists $C'' \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$ such that $C' = (A \times E) \cap C''$. Hence, $C = A \cap \pi(C'') \in \mathcal{A}(\mathcal{F}) \cap A$, where π is the projection from $F \times E$ onto F. This means $\mathcal{A}(\mathcal{F} \cap A) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F}) \cap A$. Conversely, let $B \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. There exists a compact metrizable space E and $B' \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$ such that $B = \pi(B')$. Since $(A \times E) \cap B' \in ((\mathcal{F} \cap A) \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$ and $A \cap B = \pi((A \times E) \cap B')$, we have $A \cap B \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \cap A)$. This means $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \cap A \subset \mathcal{A}(\mathcal{F} \cap A)$. Hence, (30.1) holds. □

1.31 Theorem. *Let $(F, \mathcal{F})$ be a paved set. Then $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$ if and only if for any $A \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$.*

Proof. The necessity is trivial. We show the sufficiency. Put

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{F}) : A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{F})\}.$$

We have $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ is a σ-field (by Theorem 1.26). Then

$$\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F}).$$ □

1.32 Theorem. *Let $(\Omega, \mathcal{F})$ be a measurable space, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbf{R})$, $\mathcal{F} \times \mathcal{B}$ be the product σ-field on $\Omega \times \mathbf{R}$. Then*

1) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}), \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\mathcal{K})$,

2) $\mathcal{F} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) = \mathcal{A}(\mathcal{F} \times \mathcal{B})$,

3) *for any $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K})$, the projection of A onto Ω is $\mathcal{F}$-analytic.*

Proof. 1) Let $K \in \mathcal{K}$. It is well-known that $K^c \in \mathcal{K}_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{K})$. Because $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}$, we have $\mathcal{K} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mathcal{K})$ (by Theorem 1.31). Hence, $\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\mathcal{K})$ (by Theorem 1.29).

2) Let $B \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$. We see that $B^c \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K})_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K})$. Since $\sigma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) = \mathcal{F} \times \mathcal{B}$, we have $\mathcal{F} \otimes \mathcal{K} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K})$ (by Theorem 1.31). Hence, $\mathcal{A}(\mathcal{F} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K})$ (by Theorem 1.29).

3) Take $(K_n) \subset \mathcal{K}$ such that $\bigcup_n K_n = \mathbf{R}$ (e.g. $K_n = [-n, n]$). For each n we have (by Theorem 1.30)

$$\mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \cap (\Omega \times K_n) = \mathcal{A}((\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \cap (\Omega \times K_n))$$
$$= \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes (\mathcal{K} \cap K_n)).$$

Since K_n is a compact metric space, $\mathcal{K}(K_n) = \mathcal{K} \cap K_n$. $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K})$, the projection of $(\Omega \times K_n) \cap A$ onto Ω is $\mathcal{F}$-analytic (by Theorem 1.28). Noticing $A = \bigcup_n [(\Omega \times K_n) \cap A]$, the projection of A onto Ω is also $\mathcal{F}$-analytic. □

Remark. In Theorem 1.32 $\mathbf{R}$ can be replaced by any locally compact Hausdorff topological space with countable basis.

Now we turn to define Choquet capacity.

1.33 Definition. Let $(F, \mathcal{F})$ be a paved set, where $\mathcal{F}$ is closed under the formation of finite union and intersection. An extended real valued set function I, defined for all subsets of F, is called a *Choquet $\mathcal{F}$-capacity* on F, if I has the following properties:

i) I is increasing:

$$A \subset B \Rightarrow I(A) \le I(B), \tag{33.1}$$

ii) I is continuous from the below:

$$A_n \uparrow A \Rightarrow I(A) = \sup_n I(A_n), \tag{33.2}$$

iii) I is continuous in $\mathcal{F}$ from the above:

$$A_n \in \mathcal{F}, A_n \downarrow A \Rightarrow I(A) = \inf_n I(A_n). \tag{33.3}$$

A set A is called *I-capacitable*, if

$$I(A) = \sup_{B \in \mathcal{F}_\delta, B \subset A} I(B). \tag{33.4}$$

1.34 Lemma. *Let I be a Choquet $\mathcal{F}$-capacity on F. Then each element of $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ is I-capacitable.*

Proof. Let $A \in \mathcal{F}_{\sigma\delta}$. If $I(A) = -\infty$, then $I(\emptyset) = -\infty, \emptyset \in \mathcal{F}$, (33.4) holds, i.e., A is capacitable. Now assume $I(A) > -\infty$. We have

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{F}_\sigma, \qquad n \ge 1.$$

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}, \quad A_{nm} \in \mathcal{F}, \qquad n, m \ge 1.$$

Since $\mathcal{F}$ is closed under the formation of finite union, we may assume that for each n fixed, $(A_{n,m})_{m \ge 1}$ is an increasing sequence. In order to show (33.4), it suffices to prove: for any $a < I(A)$ there exists $B \in \mathcal{F}_\delta, B \subset A$ such that $I(B) \ge a$.

Assume $a < I(A)$. From (33.2) we have

$$I(A) = I(A \cap A_1) = \sup_m I(A \cap A_{1m}).$$

There exists an integer m_1 such that $I(A \cap A_{1m_1}) > a$. Then

$$I(A \cap A_{1m_1}) = I(A \cap A_{1m_1} \cap A_2) = \sup_m I(A \cap A_{1m_1} \cap A_{2m}) > a,$$

and there exists another integer m_2 such that $I(A \cap A_{1m_1} \cap A_{2m_2}) > a$. Repeating the same argument we obtain a sequence of integers $(m_k)_{k \ge 1}$ such that for each $k \ge 1$ we have

$$I(A \cap A_{1m_1} \cap \cdots A_{km_k}) > a.$$

Put $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_{km_k}$, $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. It follows from (33.1) that $I(B_n) > a$. On the other hand, $B_n \in \mathcal{F}, B_n \downarrow B, B \in \mathcal{F}_\delta$, from (33.3) we see that $I(B) = \inf_n I(B_n) \ge a$. Since $B_n \subset A_n$, we get $B \subset A$. □

The following theorem is called *Choquet's theorem*.

1.35 Theorem. *Let I be a Choquet $\mathcal{F}$-capacity on F. Then each $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ is I-capacitable.*

Proof. Let $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. There exists a compact metrizable space E and $B \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$ such that $\pi(B) = A$, where π is the projection mapping from $F \times E$ onto F. Let $\mathcal{H}$ be the paving consisting of all sets of the form $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E), n \ge 1$. It is easy to see that $\mathcal{H}$ is closed under the formation of finite union, and $\mathcal{H}_{\sigma\delta} = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(E))_{\sigma\delta}$. For each $H \subset F \times E$ define

$$J(H) = I(\pi(H)).$$

We are going to show that J is a Choquet $\mathcal{H}$-capacity on $F \times E$. Obviously, J satisfies properties i) and ii) in Definition 1.33. It remains to verify property iii).

Let $H = \bigcup_{k=1}^{m} (D_k \times C_k) \in \mathcal{H}$, where $D_k \in \mathcal{F}, C_k \in \mathcal{K}(E)$. For each $x \in \pi(H)$, we have $(\{x\} \times E) \cap H = \{x\} \times C$, where $C \ne \emptyset$, and $C = \bigcup_{\{k: x \in D_k\}} C_k \in \mathcal{K}(E)$. Now assume that $(B_n) \subset \mathcal{H}$ is a decreasing sequence of sets, and $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi(B_n)$. For each n there exists $C_n \in \mathcal{K}(E)$ such that

$$(\{x\} \times E) \cap B_n = \{x\} \times C_n.$$

Since (B_n) is decreasing, so is (C_n). Each C_n is a non-empty compact set of E, therefore $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$. Hence

$$(\{x\} \times E) \cap (\bigcap_n B_n) = \{x\} \times \bigcap_n C_n \neq \emptyset,$$

i.e., $x \in \pi(\bigcap_n B_n)$. This means $\bigcap_n \pi(B_n) \subset \pi(\bigcap_n B_n)$. The reverse implication always holds. Thus

$$\bigcap_n \pi(B_n) = \pi(\bigcap_n B_n). \tag{35.1}$$

Since $\pi(B_n) \in \mathcal{F}, \pi(B_n) \downarrow$, by (33.3) we have

$$J(\bigcap_n B_n) = I(\pi(\bigcap_n B_n)) = I(\bigcap_n \pi(B_n))$$
$$= \inf_n I(\pi(B_n)) = \inf_n J(B_n),$$

i.e., property iii) in **Definition 1.33** holds for J. Hence, J is a Choquet $\mathcal{H}$-capacity on $F \times E$.

Since $B \in \mathcal{H}_{\sigma\delta}$, from Lemma 1.34 we know that B is J-capacitable. But from (35.1) we see that $C \in \mathcal{H}_\delta \Rightarrow \pi(C) \in \mathcal{F}_\delta$. Hence

$$I(A) = J(B) = \sup_{C \in \mathcal{H}_\delta, C \subset B} J(C) = \sup_{C \in \mathcal{H}_\delta, C \subset B} I(\pi(C)) \leq \sup_{D \in \mathcal{F}_\delta, D \subset A} I(D).$$

$I(A) \geq \sup_{D \in \mathcal{F}_\delta, D \subset A} I(D)$ is trivial. Thus

$$I(A) = \sup_{D \in \mathcal{F}_\delta, D \subset A} I(D).$$

This means A is I-capacitable. □

As an important application of Choquet's theorem, we will show that all $\mathcal{F}$-analytic sets in a measurable space $(\Omega, \mathcal{F})$ are universally measurable.

Let $(\Omega, \mathcal{F})$ be a measurable space, and $\mathcal{P}$ be the collection of all probability measures on $(\Omega, \mathcal{F})$. For each $P \in \mathcal{P}$, denote by $\mathcal{F}^P$ the completion of $\mathcal{F}$ w.r.t. P. Put

$$\hat{\mathcal{F}} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{F}^P.$$

$\hat{\mathcal{F}}$ is called the *universal completion* of $\mathcal{F}$, the elements in $\hat{\mathcal{F}}$ are called *universally measurable sets*.

Obviously, $\hat{\hat{\mathcal{F}}} = \hat{\mathcal{F}}$. Besides, if $\mathcal{F}$ is complete w.r.t. a certain probability measure P, then $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

1.36 Theorem. *Let $(\Omega, \mathcal{F})$ be a measurable space. Then*

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \hat{\mathcal{F}} = \mathcal{A}(\hat{\mathcal{F}}).$$

Proof. Let $P \in \mathcal{P}$. Define

$$I(A) = \inf_{B \in \mathcal{F}, B \supset A} P(B), \qquad A \subset \Omega.$$

It is easy to verify that I is a Choquet $\mathcal{F}$-capacity on Ω. By Choquet's theorem, for each $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ we have (noting $\mathcal{F}_\delta = \mathcal{F}$)

$$I(A) = \sup_{B \in \mathcal{F}, B \subset A} I(B).$$

Thus $A \in \mathcal{F}^P$. Because $P \in \mathcal{P}$ is arbitrary, $A \in \hat{\mathcal{F}}$. This means $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \hat{\mathcal{F}}$. Therefore we have

$$\hat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{A}(\hat{\mathcal{F}}) \subset \hat{\hat{\mathcal{F}}} = \hat{\mathcal{F}}.$$

Hence, $\mathcal{A}(\hat{\mathcal{F}}) = \hat{\mathcal{F}}$. □

§6. Lebesgue-Stieltjes Integrals

1.37 Lemma. *Let $a(t)$ be a non-negative right-continuous increasing (extended real-valued) function on $\mathbf{R}_+$. Set*

$$c(t) = \inf\{s : a(s) > t\}, \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{37.1}$$

Then $c(t)$ is a non-negative right-continuous increasing function on $\mathbf{R}_+$, and is called the right-inverse function of $a(t)$. For $t \in \mathbf{R}_+$, $c(t) < +\infty$ if and only if $t < a(\infty) = \lim_{t \to \infty} a(t)$. Set

$$a_-(t) = a(t-) = \lim_{s \uparrow\uparrow t} a(s), \quad t > 0,$$

$$c_-(t) = c(t-) = \lim_{s \uparrow\uparrow t} c(s) = \inf\{s : a(s) \geq t\} = \sup\{s : a(s) < t\}, \quad t > 0,$$

$$a(0-) = a(0), \quad c(0-) = c(0).$$

Then we have

$$a_-(c_-(t)) \leq a_-(c(t)) \leq t, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{37.2}$$

and

$$a(c(t)) \geq a(c_-(t)) \geq t, \quad t < a(\infty). \tag{37.3}$$

In particular, if a is continuous, then for all $t < a(\infty)$ we have

$$a(c(t)) = a(c_-(t)) = t.$$

At last, the relation between $c(t)$ and $a(t)$ is symmetric, i.e., $a(t)$ is the right-inverse function of $c(t)$:

$$a(s) = \inf\{t : c(t) > s\}, \quad s \in \mathbf{R}_+. \tag{37.4}$$

Besides, we have

$$a(s) = \sup\{t : c(t) \le s\}, \quad s \in \mathbf{R}_+. \tag{37.5}$$

Proof. Left to readers as an exercise. □

The following lemma is called *Lebesgue's lemma*. It reduces Lebesgue-Stieltjes integrals w.r.t. a certain increasing function to ordinary Lebesgue integrals. It will be used in Chapter V.

1.38 Lemma. *Let $a(t)$ be a non-negative right-continuous increasing real function, and $f(t)$ be a bounded or non-negative Borel function. Then*

$$\int_{[0,\infty[} f(s)da(s) = \int_{[0,\infty[} f(c(s))I_{[c<\infty]}(s)ds, \tag{38.1}$$

$$\int_{[0,\infty[} f(s)da(s) = \int_{[0,\infty[} f(c_-(s))I_{[c_-<\infty]}(s)ds, \tag{38.2}$$

where $c(t)$ is defined by (37.1). (By convention $\int_{[0]} f(s)da(s) = f(0)a(0)$.)

Proof. Assume $f(t) = I_{[0,u]}(t), u \in \mathbf{R}_+$. From (37.5) we have

$$\int_{[0,\infty[} f(s)da(s) = a(u) = \sup\{s : c(s) \le u\} = \int_{[0,\infty[} I_{[c\le u]}(s)ds$$

$$= \int_{[0,\infty[} f(c(s))I_{[c<\infty]}(s)ds,$$

i.e., (38.1) holds for such f. Using the monotone class theorem (Theorem 1.4), (38.1) holds for any bounded or non-negative Borel function f. At last, the set $\{s : c(s) \ne c(s-)\}$ is at most countable, (38.2) follows from (38.1). □

The following lemma is the formula of integration by parts for Lebesgue-Stieltjes integrals.

1.39 Lemma. *Let $f(t)$ and $g(t)$ be two right-continuous functions with finite variation on $\mathbf{R}_+$ (i.e., which can be represented as the difference of two non-negative right-continuous increasing real functions). Then for $0 \le a < b < +\infty$*

$$f(b)g(b) = f(a)g(a) + \int_a^b f(s)dg(s) + \int_a^b g(s-)df(s). \tag{39.1}$$

(*By convention* $\int_a^b f(s)dg(s) = \int_{]a,b]} f(s)dg(s)$.)

Proof. We have

$$\begin{aligned}(f(b) - f(a))(g(b) - f(a)) &= \int\int_{]a,b]\times]a,b]} df(x)dg(y) \\
&= \int\int_{a<x\le y\le b} df(x)dg(y) + \int\int_{a<y<x\le b} df(x)dg(y) \\
&= \int_a^b dg(y)\int_a^y df(x) + \int_a^b df(x)\int_{]a,x[} dg(y) \\
&= \int_a^b [f(y) - f(a)]dg(y) + \int_a^b [g(x-) - g(a)]df(x) \\
&= \int_a^b f(y)dg(y) + \int_a^b g(x-)df(x) - f(a)[g(b) - g(a)] \\
&\quad - g(a)[f(b) - f(a)].\end{aligned}$$

(39.1) follows immediately. □

The formula (40.1) in the following theorem is called *Kunita-Watanabe inequality*.

1.40 Theorem. *Let $a(t)$ be a right-continuous function with finite variation on $\mathbf{R}_+$, $b(t)$ and $c(t)$ be two non-negative right-continuous increasing functions on $\mathbf{R}_+$. If $|a(0)| \le \sqrt{b(0)}\sqrt{c(0)}$, and for all $0 \le s < t < +\infty$,*

$$|a(t) - a(s)| \le \sqrt{b(t) - b(s)}\sqrt{c(t) - c(s)},$$

then for any Borel functions f and g on $\mathbf{R}_+$

$$\int_{[0,\infty[} |f(s)g(s)||da(s)| \le (\int_{[0,\infty[} f^2(s)db(s))^{1/2}(\int_{[0,\infty[} g^2(s)dc(s))^{1/2}. \tag{40.1}$$

Proof. We will use the following elementary fact: let x, y, z be three real numbers and $x \ge 0, z \ge 0$, then for all rationals λ, $\lambda^2 x + 2\lambda y + z \ge 0$ if and only if $|y| \le \sqrt{xz}$.

Put $\mu(t) = \int_{[0,t]} |da(s)| + b(t) + c(t)$, and $a' = \frac{da}{d\mu}$, $b' = \frac{db}{d\mu}$, $c' = \frac{dc}{d\mu}$. For a given rational λ set

$$\nu(t) = \lambda^2 b(t) + 2\lambda a(t) + c(t).$$

By the assumption and the above-mentioned elementary fact we know that

ν is a non-negative right-continuous increasing function on $\mathbf{R}_+$. Hence

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \lambda^2 b' + 2\lambda a' + c' \geq 0, \quad d\mu\text{-a.e.} \tag{40.2}$$

Since $\mathbf{Q}$ is countable, (40.2) holds for all $\lambda \in \mathbf{Q}$. Again using the above-mentioned elementary fact, we obtain

$$|a'| \leq \sqrt{b'c'}, \quad d\mu\text{-a.e.} \tag{40.3}$$

Now for any two Borel functions f and g on $\mathbf{R}_+$, by using Schwarz inequality and (40.3) we have

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty[} |f(s)g(s)||da(s)| &= \int_{[0,\infty[} |f(s)g(s)||a'(s)|d\mu(s) \\
&\leq \int_{[0,\infty[} |f(s)|\sqrt{b'(s)}|g(s)|\sqrt{c'(s)}d\mu(s) \\
&\leq \Big(\int_{[0,\infty[} f^2(s)b'(s)d\mu(s)\Big)^{1/2}\Big(\int_{[0,\infty[} g^2(s)c'(s)d\mu(s)\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\int_{[0,\infty[} f^2(s)db(s)\Big)^{1/2}\Big(\int_{[0,\infty[} g^2(s)dc(s)\Big)^{1/2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Problems and Complements

1.1 Let $\mathcal{C}$ be a class on Ω. $\lambda(\mathcal{C})$ and $m(\mathcal{C})$ be the λ-class and monotone class generated by $\mathcal{C}$ respectively. Then

1) $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ if and only if

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB \in \lambda(\mathcal{C}),$$

2) $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ if and only if

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C}); \ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB \in m(\mathcal{C}).$$

1.2 Let $\mathcal{H}$ be a family of real (resp. bounded) functions on Ω. Then there exists a σ-field $\mathcal{F}$ on Ω such that $\mathcal{H}$ is the collection of all real (resp. bounded) measurable functions on $(\Omega, \mathcal{F})$ if and only if the following conditions are satisfied:

i) $\mathcal{H}$ is a linear space,

ii) $1 \in \mathcal{H}$,

iii) $0 \leq f_n \uparrow f, (f_n) \subset \mathcal{H}$, f is a real (resp. bounded) function $\Rightarrow f \in \mathcal{H}$.

iv) $f, g \in \mathcal{H} \Rightarrow f \wedge g \in \mathcal{H}$.

1.3 Let $\mathcal{H}$ be a family of bounded functions on Ω satisfying the following conditions:

i) $\mathcal{H}$ is a linear space,

ii) $1 \in \mathcal{H}$,

iii) $0 \leq f_n \uparrow f, (f_n) \subset \mathcal{H}$, f is bounded $\Rightarrow f \in \mathcal{H}$.

Let $\mathcal{C}$ be a sub-family of $\mathcal{H}$, stable under the multiplication. Then $\mathcal{H}$ contains all $\sigma(f : f \in \mathcal{C})$-measurable bounded functions.

1.4 Let $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i\in I}$ be a family of measurable spaces. For each $i \in I$, f_i is a mapping from Ω to E_i. If φ is a $\sigma(f_i, i \in I)$-measurable (resp. extended) real function on Ω, then there exists a countable subset J of I and a measurable (resp. extended) real function h on $(\prod_{i\in J} E_i, \prod_{i\in J}\mathcal{E}_i)$ such that $\varphi = h \circ f_J$, where f_J is the mapping from Ω to $\prod_{i\in J} E_i$ defined as $f_J(\omega) = (f_i(\omega))_{i\in J}$.

1.5 Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ be a probability space, and $\mathcal{G}$ be a sub-σ-field of $\mathcal{F}$. Let $(E, \mathcal{E})$ be a measurable space, ξ be an E-valued $\mathcal{G}$-measurable r.v., and $f(\omega, x)$ be an $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$-measurable bounded function. Denote

$$f_x(\omega) = f(\omega, x), \qquad \eta(\omega) = f(\omega, \xi(\omega)).$$

Then there exists a $\mathcal{G} \times \mathcal{E}$-measurable bounded function $h(\omega, x)$ such that

i) for all $x \in E$, $\mathbf{E}[f_x|\mathcal{G}](\omega) = h(\omega, x)$ a.s.,

ii) $\mathbf{E}[\eta|\mathcal{G}](\omega) = h(\omega, \xi(\omega))$ a.s.

1.6 Let $\mathcal{H}$ be a uniformly integrable family of r.v. on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Then the closed convex hull of $\mathcal{H}$ in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ is also uniformly integrable.

1.7 Let (ξ_n) be a sequence of integrable r.v., and assume $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\mathbf{E}[|\xi_n|] \to \mathbf{E}[|\xi|] < \infty$. Then (ξ_n) is uniformly integrable and $\mathbf{E}[|\xi_n - \xi|] \to 0$.

1.8 Let (ξ_n) be a sequence of uniformly integrable r.v.. Then

$$\lim_n \mathbf{E}[\frac{1}{n} \sup_{1\leq k\leq n} |\xi_k|] = 0.$$

1.9 Let $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i), i \in I$, be a family of probability spaces, and $\xi_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i)$. In order that $(\xi_i)_{i\in I}$ be a uniformly integrable family it is necessary and sufficient that there exist a non-negative Borel function $G(t)$ on $\mathbf{R}_+$ such that

i) $\lim_{t\to+\infty} \frac{G(t)}{t} = +\infty$,

ii) $\sup_{i\in I} \mathbf{E}_i[G(|\xi_i|)] < +\infty$.

1.10 Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, $\mathcal{G}$ be a sub-σ-field of $\mathcal{F}$, and $A \in \mathcal{F}$. Then

1) $[E[I_A|\mathcal{G}] > 0] = \text{ess inf}\{B \in \mathcal{G} : B \supset A\}$;

2) $[E[I_A|\mathcal{G}] = 1] = \text{ess sup}\{B \in \mathcal{G} : B \subset A\}$.

1.11 Let (ξ_n) be a sequence of r.v. on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Define

$$s\,\overline{\lim_n}\,\xi_n = \text{ess inf}\{\eta \in \mathcal{F} : \lim_n P(\xi_n > \eta) = 0\},$$

$$s\,\underline{\lim_n}\,\xi_n = \text{ess sup}\{\eta \in \mathcal{F} : \lim_n P(\xi_n < \eta) = 0\}.$$

Then

1) $\underline{\lim}_n \xi_n \leq s\,\underline{\lim}_n \xi_n \leq s\overline{\lim}_n \xi_n \leq \overline{\lim}_n \xi_n$ a.s.;

2) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \iff s\overline{\lim}_n \xi_n = s\,\underline{\lim}_n \xi_n = \xi$ a.s.,

where ξ is a real r.v..

1.12 Suppose that $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ satisfies $\inf\{E[\xi], \xi \in \mathcal{H}\} > -\infty$. Then the following assertions are equivalent:

1) $E[\text{ess inf}\,\mathcal{H}] = \inf\{E[\xi], \xi \in \mathcal{H}\}$.

2) ess inf $\mathcal{H}$ is integrable, and for each sub-σ-field $\mathcal{G}$ of $\mathcal{F}$

$$E[\text{ess inf}\,\mathcal{H}|\mathcal{G}] = \text{ess inf}\{E[\xi|\mathcal{G}], \xi \in \mathcal{H}\}.$$

3) For any $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$ and $\varepsilon > 0$, there exists $\xi_3 \in \mathcal{H}$ such that

$$E[(\xi_3 - \xi_1 \vee \xi_2)^+] < \varepsilon.$$

1.13 Let ξ be a real r.v. on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, and $\mathcal{G}$ be a sub-σ-field of $\mathcal{F}$. Let $\varphi(x)$ be a real convex function. If both ξ and $\varphi(\xi)$ are σ-integrable w.r.t $\mathcal{G}$, then

$$\varphi(E[\xi|\mathcal{G}]) \leq E[\varphi(\xi)|\mathcal{G}], \text{ a.s.}.$$

This is *Jensen's inequality*.

1.14 Let (ξ_n) be a sequence of r.v. on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, and $\mathcal{G}$ be a sub-σ-field of $\mathcal{F}$. If for any $\varepsilon > 0$ there exists a $\mathcal{G}$-measurable finite positive r.v. η such that

$$\text{ess}\sup_n E[|\xi_n| I_{[|\xi_n| > \eta]}|\mathcal{G}] < \varepsilon \text{ a.s.}$$

(in this case, (ξ_n) is called *conditionally uniformly integrable given* $\mathcal{G}$), then

$$E[\underline{\lim_n}\,\xi_n|\mathcal{G}] \leq \underline{\lim_n}\,E[\xi_n|\mathcal{G}] \leq \overline{\lim_n}\,E[\xi_n|\mathcal{G}] \leq E[\overline{\lim_n}\,\xi_n|\mathcal{G}].$$

In particular, if (ξ_n) is uniformly integrable, then

$$E[\underline{\lim_n}\,\xi_n] \leq \underline{\lim_n}\,E[\xi_n] \leq \overline{\lim_n}\,E[\xi_n] \leq E[\overline{\lim_n}\,\xi_n].$$

1.15 Let $(F, \mathcal{F})$ and $(G, \mathcal{G})$ be two paved sets, and f be a mapping from F into G such that $f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Then

$$f^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{G})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F}).$$

1.16 Let $(F, \mathcal{F})$ be a paved set, and I be a Choquet $\mathcal{F}$-capacity on F. Then I is also a Choquet $\mathcal{F}_\sigma$-capacity on F.

1.17 Let $a(t)$ be a non-negative real right-continuous increasing function on R_+, and $c(t)$ be its right-inverse function. Then

1) $c(t)$ is strictly increasing on $[0, a(\infty)[$ if and only if $a(0) = 0$ and $a(t)$ is continuous on R_+. In this case, we have $a(c(t)) = t,\ t < a(\infty)$.

2) $c(t)$ is continuous on $[0, a(\infty)[$ if $a(t)$ is strictly increasing on R_+. In this case, we have $c(a(t)) = t,\ t \in R_+$.

1.18 Let $a(t)$ be a non-negative real continuous increasing function on R_+. Then for any non-negative Borel function $f(t)$ on $[a(0), a(\infty)[$ we have

$$\int_0^\infty f(a(t))da(t) = \int_{a(0)}^{a(\infty)} f(t)dt.$$

1.19 Let f be a non-negative Borel functin on R_+ and locally integrable, i.e. integrable on any finite interval. Set

$$a(t) = \int_0^t f(s)ds, t \geq 0.$$

Let $c(t)$ be the right-inverse function of $a(t)$. Denote

$$A = \{t : f(t) = 0\}, B = \{t : c(t) \in A\}.$$

Then the Lebesgue measure of B is equal to zero.

1.20 Let $a(t)$ and $b(t)$ be two non-negative real right-continuous increasing functions on R_+, and $b(0) > 0$. Then for $t > 0$ we have

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{a(0)}{b(0)} + \int_0^t \frac{da(t)}{b(t-)} - \int_0^t \frac{a(t)db(t)}{b(t)b(t-)}.$$

Chapter II

Classical Martingale Theory

In this chapter we present the major results of classical martingale theory, such as maximal inequality, upcrossing inequality, Doob's inequality, convergence theorems, Riesz decomposition theorem and Doob's stopping theorem. We deal with the discrete time case in §1–4, and the continuous time case in §5. In order to deepen readers' understanding we illustrate some examples of applications at times. In §6 an introduction to processes with independent increments is given.

§1. Elementary Inequalities

In this chapter all discussions are proceeded on a fixed probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$. In §1–4 we suppose in addition that an increasing sequence of sub-σ-fields $(\mathcal{F}_n, n \in \boldsymbol{N})$ is given: for all $n \in \boldsymbol{N}$

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}.$$

We call $(\mathcal{F}_n, n \in \boldsymbol{N})$ or $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ a *filtration*. It can be denoted simply by $\boldsymbol{F}$ or $(\mathcal{F}_n)$. Usually, we denote

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\geq 0} \mathcal{F}_n.$$

A sequence of real r.v. $(X_n, n \in \boldsymbol{N})$ or $(X_n)_{n\geq 0}$ is called a *stochastic sequence*, and is also denoted simply by X or (X_n). A stochastic sequence $X = (X_n)_{n\geq 0}$ is called *$\boldsymbol{F}$-adapted*, if for each n, X_n is $\mathcal{F}_n$-measurable.

2.1 Definition. An $\boldsymbol{F}$-adapted stochastic sequence $(X_n, n \in \boldsymbol{N})$ is called an *$\boldsymbol{F}$-martingale* (resp. *$\boldsymbol{F}$-supermartingale*, resp. *$\boldsymbol{F}$-submartingale*), if for each $n \geq 0$, X_n is integrable and

$$\boldsymbol{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \text{ (resp. } \leq X_n, \text{ resp. } \geq X_n) \quad \text{a.s.} .$$

In this case, for all $m \geq n \geq 0$,

$$\boldsymbol{E}[X_m|\mathcal{F}_n] = X_n \text{ (resp. } \leq X_n, \text{ resp. } \geq X_n) \text{ a.s.},$$

$$\boldsymbol{E}X_m = \boldsymbol{E}X_n \text{ (resp. } \leq \boldsymbol{E}X_n, \text{ resp. } \geq \boldsymbol{E}X_n).$$

The term "martingale" is originated from a French acronym for the gambling strategy of doubling one's bets until a win is secured. Let X_n be a gambler's fortune at time n. The martingale property means that the gambler's average fortune on the next game is just his current fortune. Hence, the game is fair. In fact, the class of martingale sequences is one of the most important types of stochastic sequences and indispensable for modern probability theory and statistics.

For a stochastic sequence $X = (X_n, n \in \boldsymbol{N})$ set

$$\boldsymbol{F}^0(X) = (\mathcal{F}^0_n(X), n \in \boldsymbol{N}), \quad \mathcal{F}^0_n(X) = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n), \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

Obviously, $\boldsymbol{F}^0(X)$ is a filtration, and is called the *natural filtration* of X. It is also the smallest filtration, w.r.t. which X is adapted.

By the smoothing property of conditional expectation, any $\boldsymbol{F}$-martingale (resp. $\boldsymbol{F}$-supermartingale, resp. $\boldsymbol{F}$-submartingale) is also a martingale (resp. supermartingale, resp. submartingale) w.r.t. its natural filtration.

Since the filtration $\boldsymbol{F}$ is fixed in the following discussions, for convenience we often omit the suffix "$\boldsymbol{F}$-". For examples, an $\boldsymbol{F}$-martingale is simply called a martingale, an adapted sequence means an $\boldsymbol{F}$-adapted sequence.

From the definition we see that if $X = (X_n)$ is a supermartingale (resp. submartingale), then $-X = (-X_n)$ is a submartingale (resp. supermartingale). A stochastic sequence is a martingale if and only if it is both a supermartingale and a submartingale.

In the following we give some examples of martingales, supermartingales and submartingales. Readers can check them directly.

2.2 Examples. 1) Let ξ be an integrable r.v.. Put $X_n = \boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{F}_n]$. Then (X_n) is a martingale.

2) Let (ξ_n) be an adapted sequence of integrable r.v.. For each $n \geq 0$, ξ_{n+1} is independent of $\mathcal{F}_n$. (Consequently, (ξ_n) are independent.) If for

each $n \geq 1$, $E[\xi_n] = 0$ (resp. ≤ 0, resp. ≥ 0), then $(X_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i, n \in N)$ is a martingale (resp. supermartingale, resp. submartingale)

3) Let (ξ_n) be an adapted sequence of integrable non-negative r.v.. For each $n \geq 0, \xi_{n+1}$ is independent of $\mathcal{F}_n$. If for each $n \geq 1$, $E[\xi_n] = 1$ (resp.≤ 1. resp. ≥ 1), then $(X_n = \prod_{i=0}^{n} \xi_i, n \in N)$ is a martingale (resp. supermartingale, resp. submartingale).

4) (The generalization of 2)). Let (ξ_n) be an adapted sequence of integrable r.v.. If for each $n \geq 0$, $E[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0$ (resp. ≤ 0, resp. ≥ 0), then $(X_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i, n \in N)$ is a martingale (resp. supermartingale, resp. submartingale).

5) Let (ξ_n) be an i.i.d. (i.e., independent identically distributed) stochastic sequence, and

$$P(\xi_0 = 1) = p, \quad P(\xi_0 = -1) = q = 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

Put

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i, \quad X_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \quad n \in N.$$

Then (X_n) is a martingale w.r.t. its natural filtration.

2.3 Theorem. 1) *Let $X = (X_n)$ and $Y = (Y_n)$ be two martingales (resp. supermartingales). Then $X + Y = (X_n + Y_n)$ is a martingale (resp. supermartingale), and $X \wedge Y = (X_n \wedge Y_n)$ is a supermartingale.*

2) *Let $X = (X_n)$ be a martingale (resp. submartingale), and f be a continuous convex (resp. continuous increasing convex) function on $\mathbf{R}$. If each $f(X_n)$ is integrable, then $f(X) = (f(X_n))$ is a submartingale.*

Proof. 1) is evident. We show 2). On the one hand, we have

$$f(X_n) = f(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \quad (\text{resp.} \leq f(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])) \quad \text{a.s.} \tag{3.1}$$

On the other hand, by Jensen's inequality

$$f(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \leq E[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \quad \text{a.s.} \tag{3.2}$$

Combining (3.1) with (3.2) yields $(f(X_n))$ which is a submartingale. □

2.4 Corollary. 1) *If (X_n) is a submartingale, so is (X_n^+). Moreover, if for each n, $X_n \log^+ X_n$ is integrable, then $(X_n \log^+ X_n)$ is a submartingale, where $\log^+ x = (\log x) I_{[1,\infty[}(x)$.*

2) *Let (X_n) be a martingale or non-negative submartingale, and $\lambda \geq 1$ be a constant. If for each n, $|X_n|^\lambda$ is integrable, then $(|X_n|^\lambda)$ is a submartingale.*

Now we start to introduce the maximal inequality and upcrossing inequality of martingales. To this end, we need the concept of stopping time.

2.5 Definition. An $\overline{N}$-valued random variable T is called a *stopping time* (*$\mathbf{F}$-stopping time*) or *optional time*, if for each n, $[T = n] \in \mathcal{F}_n$, or equivalently, for each n, $[T \leq n] \in \mathcal{F}_n$.

For a stopping time T put

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \quad \forall n \in N, \quad A \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n\},$$

it is called the *σ-field of events prior to T*. Obviously,

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \quad \forall n \in N, \quad A \cap [T \leq n] \in \mathcal{F}_n\}.$$

It is easy to see that a stopping time T is $\mathcal{F}_T$-measurable. The constant time $T \equiv n$ is a stopping time, and $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$. If T is a stopping time, then for each $n \geq 1$, $T + n$ is also a stopping time.

In practice, a filtration $(\mathcal{F}_n)$ describes the history of some random phenomenon, $\mathcal{F}_n$ represents the information observed up to time n. The characterization of a stopping time T consists in that the event "T has occurred up to time n" depends only on the history up to time n, not on any information of the future. For instance, suppose that X_n represents the fortune of a gambler at time n, and $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n)$. The gambler has the right to choose the time to stop the gamble. But the decision wether or not the gamble be stopped at time n must be determined on the base of $\mathcal{F}_n$, i.e., the information observed by him up to time n. Obviously, at time n he does not know anyone of future's outcomes $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$. Hence, the time chosen by him to stop the gamble must be a stopping time. This is the reason why we use the term "stopping time" or "optional time". The following theorem offers a class of most useful and frequently encountered stopping times associated with stochastic sequences.

2.6 Theorem. *Let $(X_n)_{n \geq 0}$ be an adapted stochastic sequence, and $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Let S be a stopping time. Put*

$$T(\omega) = \inf\{n : n \geq S(\omega) \text{ and } X_n(\omega) \in B\}.$$

Then T is a stopping time (by convention $\inf \emptyset = +\infty$).

In particular, $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}$ *is a stopping time.*

Proof. For each $n \in N$

$$[T = n] = \bigcup_{k=0}^{n} \left\{[S = k]\Big(\bigcap_{k \leq m < n} [X_m \in B^c]\Big)[X_n \in B]\right\} \in \mathcal{F}_n.$$

Hence T is a stopping time. □

2.7 Example. Let us consider independent repeated trials, each of which admits two possible outcomes, success or failure. Explicitly, define

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{if the } n\text{-th trial succeeds,} \\ 0, & \text{if the } n\text{-th trial fails,} \end{cases} \qquad n \geq 1.$$

Let $(\mathcal{F}_n)$ be the natural filtration of (X_n). Denote

$$T_1 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}, \quad T_{n+1} = \inf\{n > T_n : X_n = 1\}, \quad n \geq 1.$$

Then T_n is the waiting time for n-th success. Since (X_n) is i.i.d., it is not hard to prove that $(T_1, T_2 - T_1, \cdots, T_n - T_{n-1}, \cdots)$ is i.i.d., and T_1 is distributed geometrically.

2.8 Theorem. *Let* $(X_n)_{n\geq 0}$ *be an adapted stochastic sequence,* ξ *be an* $\mathcal{F}_\infty$*-measurable real r.v., and* T *be a stopping time. Put* $X_\infty = \xi$, *and*

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Then X_T *is* $\mathcal{F}_T$*-measurable.*

Proof. For $B \in \mathcal{B}(R)$ and $n \in N$

$$[X_T \in B] = \bigcup_{k \in \overline{N}} ([X_k \in B] \cap [T = k]) \in \mathcal{F}_\infty,$$

$$[X_T \in B] \cap [T = n] = [X_n \in B] \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n.$$

This means $[X_T \in B] \in \mathcal{F}_T$, i.e., X_T is $\mathcal{F}_T$-measurable. □

2.9 Theorem. *Let* S *and* T *be two stopping times, and* (S_k) *be a sequence of stopping times. Then*

1) $\bigwedge_k S_k$ *and* $\bigvee_k S_k$ *are stopping times,*

2) $A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A \cap [S \leq T] \in \mathcal{F}_T, A \cap [S = T] \in \mathcal{F}_T,$

3) $S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T,$

4) *for* $A \in \mathcal{F}_S$

$$S_A = SI_A + (+\infty)I_{A^c}$$

is a stopping time, and $\mathcal{F}_{S_A} \cap A = \mathcal{F}_S \cap A$.

Proof. 1) follows from the following equalities:

$$[\bigwedge_k S_k \leq n] = \bigcup_k [S_k \leq n],$$

$$[\bigvee_k S_k \leq n] = \bigcap_k [S_k \leq n].$$

2) Let $A \in \mathcal{F}_S$. Then $A \cap [S \leq T] \in \mathcal{F}_\infty$, and for each $n \in N$

$$A \cap [S \leq T] \cap [T = n] = (A \cap [S \leq n]) \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n.$$

Hence, $A \cap [S \leq T] \in \mathcal{F}_T$. By the same argument we have $A \cap [S = T] \in \mathcal{F}_T$.

3) follows from 2).

4) is trivial. □

2.10 Theorem. *Let* (X_n) *be a martingale (resp. supermartingale),* S *and* T *be two bounded stopping times, and* $S \leq T$. *Then*

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S \quad (\text{resp.} \leq X_S) \quad a.s.. \tag{10.1}$$

Proof. We give the proof for the supermartingale case. Suppose $T \leq n$. Then $|X_T| \leq \sum_{j=0}^{n} |X_j|, |X_S| \leq \sum_{j=0}^{n} |X_j|$, whence X_T and X_S are integrable. For $A \in \mathcal{F}_S$ and $j \in N$

$$A \cap [S = j] \cap [T > j] \in \mathcal{F}_j.$$

We first suppose $T - S \leq 1$. In this case, by the supermartingale property we have

$$\int_A (X_S - X_T) dP = \sum_{j=0}^{n} \int_{A \cap [S=j] \cap [T>j]} (X_j - X_{j+1}) dP \geq 0.$$

In general situation put $R_j = T \wedge (S + j)$, $j = 1, \cdots, n$. Then each R_j is a stopping time, and $S \leq R_1 \leq \cdots \leq R_n = T$, $R_1 - S \leq 1$, $R_{j+1} - R_j \leq 1$ $(j = 1, \cdots, n-1)$. Let $A \in \mathcal{F}_S$. For each $j, 1 \leq j \leq n$, $A \in \mathcal{F}_{R_j}$ (Theorem 2.9.3)). Using the conclusion proved above, we obtain

$$\int_A X_S dP \geq \int_A X_{R_1} dP \geq \cdots \geq \int_A X_T dP. \tag{10.2}$$

Because $X_S \in \mathcal{F}_S$ (by Theorem 2.5), (10.1) follows from (10.2). □

2.11 Corollary. *Let* (X_n) *be a supermartingale,* T *be a stopping time. Then*

$$E[|X_{T\wedge k}|] \leq E[X_0] + 2E[X_k^-], \tag{11.1}$$

$$E[|X_T I_{[T<\infty]}|] \leq 3 \sup_n E[|X_n|]. \tag{11.2}$$

Proof. Because (X_n^-) is a submartingale, by Theorem 2.10 we have

$$E[|X_{T\wedge k}|] = E[X_{T\wedge k}] + 2E[X_{T\wedge k}^-] \le E[X_0] + 2E[X_k^-].$$

This is (11.1). Furthermore,

$$E[|X_{T\wedge k}I_{[T<\infty]}|] \le E[X_0] + 2E[X_k^-] \le 3\sup_n E[|X_n|]. \tag{11.3}$$

Letting $k \to \infty$ in (11.3), (11.2) follows from Fatou's lemma. □

Theorem 2.10 is a special case (the bounded stopping time case) of Doob's stopping theorem, whose general formulation can be referred to Theorems 2.35 and 2.38. The inequality (12.3) in the following theorem is usually called the *maximal inequality* for supermartingales.

2.12 Theorem. *Let (X_n) be a supermartingale, and $k \in \mathbf{N}$. Then for any $\lambda > 0$ we have*

$$\lambda P\Big(\sup_{n\le k} X_n \ge \lambda\Big) \le E[X_0] - \int_{[\sup_{n\le k} X_n<\lambda]} X_k dP, \tag{12.1}$$

$$\lambda P\Big(\inf_{n\le k} X_n \le -\lambda\Big) \le \int_{[\inf_{n\le k} X_n\le-\lambda]} (-X_k) dP, \tag{12.2}$$

$$\lambda P\Big(\sup_{n\le k} |X_n| \ge \lambda\Big) \le E[X_0] + 2E[X_k^-]. \tag{12.3}$$

Proof. Put $T = \inf\{n \in \mathbf{N} : X_n \ge \lambda\} \wedge k$. Then T is a bounded stopping time, $X_T \ge \lambda$ on $[\sup_{n\le k} X_n \ge \lambda]$ and $T = k$ on $[\sup_{n\le k} X_n < \lambda]$. By Theorem 2.10,

$$E[X_0] \ge E[X_T] = \int_{[\sup_{n\le k} X_n\ge\lambda]} X_T dP + \int_{[\sup_{n\le k} X_n<\lambda]} X_T dP$$

$$\ge \lambda P(\sup_{n\le k} X_n \ge \lambda) + \int_{[\sup_{n\le k} X_n<\lambda]} X_k dP.$$

This is (12.1). (12.2) can be shown in the same way. (12.3) follows immediately from (12.1) and (12.2). □

2.13 Corollary. *Let (X_n) be a martingale. If $E[X_k^2] < +\infty$, then for any $\lambda > 0$*

$$P(\sup_{n\le k} |X_n| \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda^2} E[X_k^2]. \tag{13.1}$$

(This is *Kolmogorov's inequality*.)

Proof. By Jensen's inequality, for each $n \le k$

$$E[X_n^2] = E[(E[X_k|\mathcal{F}_n])^2] \le E[X_k^2] < \infty.$$

Hence, $(-X_n^2)_{n=0,1,\cdots,k}$ is a supermartingale. Applying inequality (12.2) to $(-X_n^2)$ and λ^2 yields (13.1). □

In the sequel we will show the very important *upcrossing inequality* for supermartingales and submartingales. To this end, we should introduce some necessary notations.

Let $X = (X_n)_{n\ge0}$ be an adapted stochastic sequence, $[a, b]$ be a finite closed interval. Put

$$T_0 = \inf\{n \ge 0;\ X_n \le a\},$$

$$T_1 = \inf\{n : n > T_0,\ X_n \ge b\},$$

$$\cdots\cdots$$

$$T_{2j} = \inf\{n : n > T_{2j-1},\ X_n \le a\},$$

$$T_{2j+1} = \inf\{n :\ n > T_{2j},\ X_n \ge b\},$$

$$\cdots\cdots$$

Then $(T_k)_{k\ge0}$ is an increasing sequence of stopping times. If $T_{2j-1}(\omega) < +\infty$, sequence $(X_0(\omega), X_1(\omega), \cdots, X_{T_{2j-1}}(\omega))$ upcrosses interval $[a, b]$ j times. Denote by $U_a^b[X, k]$ the number of upcrossings of $[a, b]$ by sequence $(X_0, X_1, \cdots, X_k)$. It is apparent that

$$[U_a^b[X, k] = j] = [T_{2j-1} \le k < T_{2j+1}] \in \mathcal{F}_k.$$

Consequently, $U_a^b[X, k] \in \mathcal{F}_k$.

2.14 Theorem. *If (X_n) is a supermartingale, then for $N \ge 1$ and $k \ge 0$*

$$P(U_a^b[X, N] \ge k + 1) \le \frac{1}{b-a} E[(X_N - a)^- I_{[U_a^b[X,N]=k]}], \tag{14.1}$$

$$E[U_a^b[X, N]] \le \frac{1}{b-a} E[(X_N - a)^-]. \tag{14.2}$$

If (X_n) is a submartingale, then for $N \ge 1$ and $k \ge 1$

$$P(U_a^b[X, N] \ge k) \le \frac{1}{b-a} E[(X_N - a)^+ I_{[U_a^b[X,N]=k]}], \tag{14.3}$$

$$E[U_a^b[X, N]] \le \frac{1}{b-a} E[(X_N - a)^+]. \tag{14.4}$$

Proof. Let (X_n) be a supermartingale. Then by Theorem 2.10, for $k \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \boldsymbol{E}[X_{T_{2k+1}\wedge N} - X_{T_{2k}\wedge N}] \\ &= \boldsymbol{E}[(X_{T_{2k+1}\wedge N} - X_{T_{2k}\wedge N})(I_{[T_{2k}\leq N<T_{2k+1}]} + I_{[N\geq T_{2k+1}]})] \\ &\geq \boldsymbol{E}[(X_N - a)I_{[T_{2k}\leq N<T_{2k+1}]} + (b-a)I_{[N\geq T_{2k+1}]}]. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Since $[U_a^b[X,N] \geq k+1] \subset [N \geq T_{2k+1}]$ and $[T_{2k} \leq N < T_{2k+1}] \subset [U_a^b[X,N] = k]$, (14.1) follows immediately from (14.5). Summing the two sides of (14.1) for $k \geq 0$ gives (14.2)

Now let (X_n) be a submartingale. Then by Theorem 2.10, for $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \boldsymbol{E}[X_{T_{2k-1}\wedge N} - X_{T_{2k}\wedge N}] \\ &= \boldsymbol{E}[(X_{T_{2k-1}\wedge N} - X_{T_{2k}\wedge N})(I_{[T_{2k-1}\leq N<T_{2k}]} + I_{[N\geq T_{2k}]})] \\ &\geq \boldsymbol{E}[(b - X_N)I_{[T_{2k-1}\leq N<T_{2k}]} + (b-a)I_{[N\geq T_{2k}]}] \\ &= \boldsymbol{E}[(a - X_N)I_{[T_{2k-1}\leq N<T_{2k}]} + (b-a)I_{[N\geq T_{2k-1}]}]. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Since $[U_a^b[X,N] \geq k] \subset [N \geq T_{2k-1}]$ and $[T_{2k-1} \leq N < T_{2k}] \subset [U_a^b[X,N] = k]$, (14.3) follows from (14.6). Summing the two sides of (14.3) for $k \geq 1$ yields (14.4). □

Finally, we show *Doob's inequalities* in the following theorem.

2.15 Theorem. *Let (X_n) be a non-negative submartingale. Put $X^* = \sup_n X_n$. Then*

$$\boldsymbol{E}[X^*] \leq \frac{e}{e-1}\Big(1 + \sup_n \boldsymbol{E}[X_n \log^+ X_n]\Big), \tag{15.1}$$

$$\|X^*\|_p \leq q \sup_n \|X_n\|_p, \tag{15.2}$$

where $p > 1$ and $q > 1$ are a couple of conjugate indices: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proof. For $k \in \boldsymbol{N}$ set $X_k^* = \sup_{n\leq k} X_n$.

Let $\Phi(\lambda)$ be a right continuous increasing function on $\boldsymbol{R}_+$ with $\Phi(0) = 0$. By Fubini's theorem and (12.2) we have

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}[\Phi(X_k^*)] &= \int_\Omega \int_{[0,X_k^*]} d\Phi(\lambda)dP = \int_{[0,\infty[} \boldsymbol{P}(X_k^* \geq \lambda)d\Phi(\lambda) \\ &\leq \int_0^\infty \Big(\frac{1}{\lambda}\int_{[X_k^*\geq\lambda]} X_k dP\Big)d\Phi(\lambda) = \boldsymbol{E}\Big[X_k\Big(\int_0^{X_k^*} \frac{d\Phi(\lambda)}{\lambda}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Putting $\Phi(\lambda) = (\lambda - 1)^+$ in (15.3) yields

$$\boldsymbol{E}[(X_k^* - 1)] \leq \boldsymbol{E}[(X_k^* - 1)^+] \leq \boldsymbol{E}[X_k \log^+ X_k^*]. \tag{15.4}$$

Because $\log x \leq \frac{x}{e}$ $(x \geq 0)$, for any $a \geq 0, b \geq 0$ we have

$$a \log^+ b \leq a \log^+ a + \frac{b}{e}.$$

Hence

$$\boldsymbol{E}[X_k \log^+ X_k^*] \leq \boldsymbol{E}[X_k \log^+ X_k] + \frac{1}{e}\boldsymbol{E}[X_k^*]. \tag{15.5}$$

From (15.4) and (15.5) we obtain

$$\boldsymbol{E}[X_k^*] \leq \frac{e}{e-1}(1 + \sup_k \boldsymbol{E}[X_k \log^+ X_k]). \tag{15.6}$$

Because $X_k^* \uparrow X^*$, letting $k \to \infty$ in (15.6) yields (15.1) by Fatou's lemma.

If put $\Phi(\lambda) = \lambda^p$, $p > 1$ in (15.3), then

$$\boldsymbol{E}[(X_k^*)^p] \leq \frac{p}{p-1}\boldsymbol{E}[X_k(X_k^*)^{p-1}] = q\boldsymbol{E}[X_k(X_k^*)^{p-1}].$$

Using Hölder's inequality (note that $(p-1)q = p$), we get

$$\boldsymbol{E}[(X_k^*)^p] \leq q(\boldsymbol{E}[(X_k)^p])^{1/p}(\boldsymbol{E}[(X_k^*)^p])^{1/q}. \tag{15.7}$$

In order to show (15.2), we may suppose $\sup_n \|X_n\|_p < \infty$. Then

$$\|X_k^*\|_p \leq \Big\|\sum_{n=0}^k X_n\Big\|_p \leq \sum_{n=0}^k \|X_n\|_p < \infty.$$

Dividing the two sides of (15.7) by $(\boldsymbol{E}[(X_k^*)^p])^{1/q}$, we obtain

$$\|X_k^*\|_p \leq q\|X_k\|_p \leq q \sup_n \|X_n\|_p. \tag{15.8}$$

Because $X_k^* \uparrow X^*$, letting $k \to \infty$ in (15.8) yields (15.2) by Fatou's lemma. □

2.16 Corollary. *Let (X_n) be a martingale, $p > 1$ and $q > 1$ be a couple of conjugate indices. Then*

$$\Big\|\sup_n |X_n|\Big\|_p \leq q \sup_n \|X_n\|_p. \tag{16.1}$$

§2. Convergence Theorems

2.17 Theorem. *Let (X_n) be a supermartingale. If $\sup_n \boldsymbol{E}[X_n^-] < \infty$ (or, equivalently, $\sup_n \boldsymbol{E}[|X_n|] < \infty$, since $\boldsymbol{E}[|X_n|] = \boldsymbol{E}[X_n] + 2\boldsymbol{E}[X_n^-]$),*

then X_n a.s. converge to an integrable r.v. X_∞ as $n \to +\infty$. Moreover, if (X_n) is non-negative, then for each $n \in \boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n] \leq X_n \quad \text{a.s.}. \tag{17.1}$$

Proof. Let $a, b \in \boldsymbol{Q}$, $a < b$. Denote by $U_a^b(X)$ the number of upcrossings of $[a, b]$ by $X = (X_n)_{n \geq 0}$, i.e., $U_a^b(X) = \lim_{N \to \infty} U_a^b[X, N]$. From (14.2) we have

$$\boldsymbol{E}[U_a^b(X)] \leq \frac{1}{b-a} \sup_N \boldsymbol{E}[(X_N - a)^-] \leq \frac{1}{b-a}(a^+ + \sup_N \boldsymbol{E}[X_N^-]) < \infty.$$

Consequently, $U_a^b(X) < \infty$ a.s.. Set

$$W_{a,b} = \left[\liminf_{n \to \infty} X_n < a,\ \limsup_{n \to \infty} X_n > b\right],$$

$$W = \bigcup_{a, b \in \boldsymbol{Q}, a < b} W_{a,b}.$$

Since $W_{a,b} \subset [U_a^b(X) = +\infty]$, then $\boldsymbol{P}(W_{a,b}) = 0$, and hence $\boldsymbol{P}(W) = 0$. If $\omega \notin W$, then $\lim_n X_n(\omega)$ exists, and is denoted by $X_\infty(\omega)$; if $\omega \in W$, put $X_\infty(\omega) = 0$. Hence, $X_n \to X_\infty$ a.s.. By Fatou's lemma

$$\boldsymbol{E}[|X_\infty|] \leq \sup_n \boldsymbol{E}[|X_n|] < \infty,$$

i.e., X_∞ is integrable.

If (X_n) is non-negative, then for any $m > n$

$$\boldsymbol{E}[X_m|\mathcal{F}_n] \leq X_n \quad \text{a.s.} .$$

Letting $m \to \infty$, (17.1) follows from Fatou's Lemma. □

2.18 Theorem. *Let (X_n) be a martingale (resp. supermartingale). If (X_n) is uniformly integrable, then there exists an integrable r.v. X_∞ such that $X_n \xrightarrow{a.s., L^1} X_\infty$, and for each $n \in \boldsymbol{N}$*

$$\boldsymbol{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n] = X_n \quad (\text{resp.} \leq X_n) \text{ a.s.} . \tag{18.1}$$

Proof. Since (X_n) is uniformly integrable, $\sup_n \boldsymbol{E}[|X_n|] < \infty$ (Theorem 1.9). By Theorem 2.17, $X_n \to X_\infty$ a.s.. By Theorem 1.11, $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$. Now it is easy to deduce (18.1).

(18.1) is the general form of a uniformly integrable martingale. □

2.19 Corollary. *Let ξ be an integrable r.v.. Put $\xi_n = \boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{F}_n]$, $\eta = \boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{F}_\infty]$. Then $\xi_n \xrightarrow{a.s., L^1} \eta$.*

Proof. Because (ξ_n) is uniformly integrable (Theorem 1.8), by Theorem 2.18, $\xi_n \xrightarrow{a.s., L^1} \xi_\infty$. Let $A \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$. Then $A \in \mathcal{F}_n$ for some n, and

$$\boldsymbol{E}[\xi_\infty I_A] = \boldsymbol{E}[\xi_n I_A] = \boldsymbol{E}[\xi I_A] = \boldsymbol{E}[\eta I_A].$$

Because ξ_∞ and η are $\mathcal{F}_\infty$-measurable, and $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right)$, by Corollary 1.3.1) $\xi_\infty = \eta$ a.s.. □

2.20 Corollary. *Let (X_n) be a martingale or non-negative submartingale, and $p > 1$. If $\sup_n \boldsymbol{E}[|X_n|^p] < \infty$, then (X_n) is uniformly integrable, $X_n \xrightarrow{a.s., L^p} X_\infty$, and*

$$\|X_\infty\|_p = \sup_n \|X_n\|_p. \tag{20.1}$$

Proof. From Theorem 1.7.2) we see that (X_n) is uniformly integrable. By Theorem 2.18, $X_n \to X_\infty$ a.s. Applying Doob's inequality (15.2) to non-negative submartingale $(|X_n|)$ yields $X^* = \sup_n |X_n| \in L^p$. Because $|X_n - X_\infty|^p \leq (2X^*)^p$, by the dominated convergence theorem we have $X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty$. Hence, (20.1) follows. □

The following theorem is a generalization of Corollary 2.19.

2.21 Theorem. *Let (ξ_n) be a sequence of integrable r.v., and $\xi_n \to \xi_\infty$ a.s.. If there exists an integrable r.v. ξ such that for each n $|\xi_n| \leq |\xi|$ a.s.,*

$$\boldsymbol{E}[\xi_n|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{a.s., L^1} \boldsymbol{E}[\xi_\infty|\mathcal{F}_\infty].$$

Proof. Set $u_m = \inf_{n \geq m} \xi_n$, $v_m = \sup_{n \geq m} \xi_n$. Then $|u_m| \leq \xi$, $|v_m| \leq \xi$ a.s., and $u_m \xrightarrow{a.s., L^1} \xi_\infty$, $v_m \xrightarrow{a.s., L^1} \xi_\infty$. On the other hand,

$$\boldsymbol{E}[u_m|\mathcal{F}_n] \leq \boldsymbol{E}[\xi_n|\mathcal{F}_n] \leq \boldsymbol{E}[v_m|\mathcal{F}_n], \quad n \geq m.$$

By Corollary 2.19 we have

$$\boldsymbol{E}[u_m|\mathcal{F}_\infty] \leq \liminf_{n \to \infty} \boldsymbol{E}[\xi_n|\mathcal{F}_n] \leq \boldsymbol{E}[v_m|\mathcal{F}_\infty] \quad \text{a.s.}, \tag{21.1}$$

$$\boldsymbol{E}[u_m|\mathcal{F}_\infty] \leq \limsup_{n \to \infty} \boldsymbol{E}[\xi_n|\mathcal{F}_n] \leq \boldsymbol{E}[v_m|\mathcal{F}_\infty] \quad \text{a.s.}. \tag{21.2}$$

Letting $m \to \infty$ in (21.1) and (21.2) yields

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{E}[\xi_n|\mathcal{F}_n] = \boldsymbol{E}[\xi_\infty|\mathcal{F}_\infty] \quad \text{a.s.}.$$

Moreover, since $(E[|\xi||\mathcal{F}_n])$ is uniformly integrable and

$$|E[\xi_n|\mathcal{F}_n]| \le E[|\xi_n|\,|\mathcal{F}_n] \le E[|\xi|\,|\mathcal{F}_n] \quad a.s.,$$

then $(E[\xi_n|\mathcal{F}_n])$ is uniformly integrable. Therefore, by Theorem 1.11

$$E[\xi_n|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{L^1} E[\xi_\infty|\mathcal{F}_\infty].$$ □

Now we turn to study the convergence of supermartingales with the index set $-\mathbf{N} = \{\cdots, -2, -1, 0\}$.

Let $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbf{N}}$ be a sequence of sub-σ-fields of $\mathcal{F}$ such that for all $n \in -\mathbf{N}$, $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$. An $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbf{N}}$-adapted stochastic sequence $(X_n)_{n\in -\mathbf{N}}$ is called a *martingale* (resp. *supermartingale*), if for each $n \in -\mathbf{N}$, X_n is integrable and

$$E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} \quad (\text{resp. } \le X_{n-1}) \quad \text{a.s.}.$$

2.22 Theorem. *Let $(X_n)_{n\in \mathbf{N}}$ be a supermartingale. If $\lim_{n\to-\infty} E[X_n] < +\infty$, then (X_n) is uniformly integrable and $X_n \xrightarrow{a.s.,\, L^1} X_{-\infty}$.*

Proof. Denote by $U_a^b[X,-N]$ the number of upcrossings of $[a,b]$ by $(X_{-N}, X_{-N+1}, \cdots, X_0)$. Then by (14.2) we obtain

$$EU_a^b[X,-N] \le \frac{1}{b-a} E[(X_0-a)^-].$$

Put $U_a^b(X) = \lim_{N\to+\infty} U_a^b[X,-N]$. We have

$$EU_a^b(X) \le \frac{1}{b-a} E[(X_0-a)^-] < +\infty.$$

Since $U_a^b(x)$ is the number of upcrossings of $[-b,-a]$ by the sequence $(-X_0, -X_{-1}, \cdots, -X_{-n}, \cdots)$, from the proof of Theorem 2.17 we can assert that $X_n \to X_{-\infty}$ a.s.. (Note that this conclusion holds unconditionally, but it needn't be $|X_{-\infty}| < \infty$ a.s..)

When $n \to -\infty$, $E[X_n] \uparrow A > -\infty$. According to the assumption, $A < +\infty$. We are going to show that $(X_n)_{n\in-\mathbf{N}}$ is uniformly integrable. Because $(E[X_0|\mathcal{F}_n])_{n\in-\mathbf{N}}$ is uniformly integrable, it suffices to show that $(X_n - E[X_0|\mathcal{F}_n])$ is also uniformly integrable. Therefore, we may suppose that (X_n) is a non-negative supermartingale. For any given $\varepsilon > 0$, take a natural number k sufficiently large such that $A - E[X_{-k}] < \frac{\varepsilon}{2}$. For $c > 0$

and $n < -k$ by the supermartingale property we have

$$\int_{[X_n>c]} X_n dP = E[X_n] - \int_{[X_n\le c]} X_n dP \le E[X_n] - \int_{[X_n\le c]} X_{-k} dP$$
$$= E[X_n] - E[X_{-k}] + \int_{[X_n>c]} X_{-k} dP.$$

Because $A \ge E[X_n] \ge E[X_{-k}]$, for $n < -k$ we have $E[X_n] - E[X_{-k}] < \frac{\varepsilon}{2}$.
On the other hand, because $P(X_n > c) \le \frac{1}{c}E[X_n] \le \frac{A}{c}$, when c is sufficiently large, for all $n \in -\mathbf{N}$ we have

$$\int_{[X_n>c]} X_{-k} dP < \frac{\varepsilon}{2}$$

and

$$\int_{[X_j>c]} X_j dP < \varepsilon, \quad j = 0, -1, \cdots, -k.$$

Hence, when c is large enough we have

$$\sup_n \int_{[X_n>c]} X_n dP < \varepsilon,$$

i.e., (X_n) is uniformly integrable. Now that $X_n \to X_{-\infty}$ a.s., by Theorem 1.11 we obtain $X_n \xrightarrow{L^1} X_{-\infty}$. □

2.23 Corollary. *Let ξ be an integrable r.v., $(\mathcal{G}_n)_{n\in \mathbf{N}}$ be a decreasing sequence of sub-σ-fields of $\mathcal{F}$. Put $\xi_n = E[\xi|\mathcal{G}_n]$. Then*

$$\xi_n \xrightarrow{a.s.,\, L^1} E\,[\xi|\bigcap_n \mathcal{G}_n].$$

Proof. For all $n \in -\mathbf{N}$, put $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_{-n}, \eta_n = \xi_{-n}$, then $(\eta_n)_{n\in-\mathbf{N}}$ is a uniformly integrable martingale w.r.t. $(\mathcal{F}_n)_{n\in-\mathbf{N}}$. By Theorem 2.22 we have $\eta_n \xrightarrow{a.s.,\, L^1} \eta_{-\infty}$, as $n \to -\infty$, i.e., $\xi_n \xrightarrow{a.s.,\, L^1} \eta_{-\infty}$, as $n \to \infty$.

For $A \in \bigcap_n \mathcal{G}_n$, we have

$$\lim_{n\to\infty} E[\xi_n I_A] = E[\eta_{-\infty} I_A].$$

But for all n, $E[\xi_n I_A] = E[\xi I_A]$, thus $E[\eta_{-\infty} I_A] = E[\xi I_A]$. Because $\eta_{-\infty} \in \bigcap_n \mathcal{G}_n$, then $\eta_{-\infty} = E[\xi|\bigcap_n \mathcal{G}_n]$. □

Corollaries 2.19 and 2.23 together are usually called *Lévy's theorem*.

Below we use the martingale convergence theorem to show the strong law of large numbers. It is one of the most brilliant examples of early applications of martingale theory, given by J. L. Doob in 1944.

2.24 Theorem. *Let $(\xi_n)_{n\geq 1}$ be an i.i.d. sequence of integrable r.v.. Put $X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, n \geq 1$. Then*

$$\frac{X_n}{n} \to E[\xi_1] \quad a.s. .$$

Proof. By the assumption we have

$$E[\xi_i | X_n] = E[\xi_1 | X_n] \quad \text{a.s.}, \ i = 1, \cdots, n, n \geq 1.$$

Thus, for $n \geq 1$

$$\frac{X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[\xi_i | X_n] = E[\xi_1 | X_n] = E[\xi_1 | X_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots]$$

$$= E[\xi_1 | \ X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots] \quad \text{a.s.} .$$

Set $\mathcal{G}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \cdots)$. Then by Corollary 2.23 we obtain $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{a.s., L^1} Z$, where $Z = E[\xi_1 | \bigcap_n \mathcal{G}_n]$. Because $Z \in \bigcap_n \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots)$, by Kolmogorov's 0-1 law Z is a.s. equal to a constant. Since $E[Z] = E[\xi_1]$, $Z = E[\xi_1]$ a.s.. □

The following is a simple but important application of the martingale convergence theorem to measure theory.

2.25 Lemma. *Let $(\Omega, \mathcal{F})$ be a separable measurable space, $\mathcal{F}$ be generated by $(A_n)_{n\geq 0}$. Put $\mathcal{F}_n = \sigma(A_0, \cdots, A_n)$. Denote by $\mathcal{P}_n$ the collection of all atoms of $\mathcal{F}_n$ i.e., $\mathcal{P}_n$ is the finite partition of Ω, which generates $\mathcal{F}_n$. Let P and P' be two probability measures on $(\Omega, \mathcal{F})$ such that P' is absolutely continuous w.r.t. P. Its Radon-Nikodym derivative is denoted by $\frac{dP'}{dP}$. Put*

$$X_n = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} \frac{P'(A)}{P(A)} I_A, \quad n \geq 0,$$

(by convention, $\frac{0}{0} = 0$). Then (X_n) is a uniformly integrable $(\mathcal{F}_n)$-martingale, and $\lim_{n\to\infty} X_n = \frac{dP'}{dP}$ P-a.s..

Proof. Put $\xi = \frac{dP'}{dP}$. It is well-known that

$$E[\xi | \mathcal{F}_n] = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} \frac{E[\xi I_A]}{P(A)} I_A = X_n \quad P\text{-a.s.}.$$

Thus (X_n) is a uniformly integrable martingale, and by Corollary 2.19 we have

$$\lim_{n\to\infty} X_n = E[\xi | \bigvee_n \mathcal{F}_n] = E[\xi | \mathcal{F}] = \xi \quad P\text{-a.s.} . \qquad \square$$

2.26 Theorem. *Let $(\Omega, \mathcal{F})$ be a separable measurable space, $(E, \mathcal{E})$ be a measurable space, $(P_x)_{x\in E}$ and $(P'_x)_{x\in E}$ be two measurable families of probability measures (i.e., for each $A \in \mathcal{F}$, $x \longmapsto P_x(A)$ and $x \longmapsto P'_x(A)$ are $\mathcal{E}$-measurable functions on E) such that for each $x \in E$, P'_x is absolutely continuous w.r.t. P_x. Then there exists a non-negative real $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$-measurable function $X(x, \omega)$ on $E \times \Omega$ such that for each $x \in E$, $X(x, \cdot)$ is the Radon-Nikodym derivative of P'_x w.r.t. P_x.*

Proof. Suppose that $(A_n)_{n\geq 0}$ generates $\mathcal{F}$. We use the notations in Lemma 2.25. Put

$$X_n(x, \omega) = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} \frac{P'_x(A)}{P_x(A)} I_A(\omega).$$

Then X_n is $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$-measurable. For each $x \in E$, by Lemma 2.25, $X_n(x, \cdot)$ P_x-a.s. converge to $\frac{dP'_x}{dP_x}$. Now it needs only to define

$$X(x, \omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n(x, \omega), & \text{if this limit exists and is finite,} \\ 0, & \text{for other cases.} \end{cases} \qquad \square$$

§3. Decomposition Theorems for Supermartingales

In this paragraph we study the structure of supermartingales. The main results are Doob decomposition, Riesz decomposition and Krickeberg decomposition of supermartingales.

2.27 Definition. A stochastic sequence $(X_n, n \in N)$ is called F-*predictable*, if X_0 is $\mathcal{F}_0$-measurable and for each $n \geq 1$, X_n is $\mathcal{F}_{n-1}$-measurable.

A stochastic sequence $(X_n, n \in N)$ is called *increasing*, if for each $n \in N, 0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ a.s. In this case, define $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$. An increasing sequence $(X_n, n \in N)$ is called *integrable*, if $E[X_\infty] < \infty$.

2.28 Theorem. *Let $X = (X_n)$ be a supermartingale. Then (X_n) has the following unique decomposition:*

$$X_n = M_n - A_n, \tag{28.1}$$

where (M_n) is a martingale, and (A_n) is a predictable increasing sequence with $A_0 = 0$. Decomposition (28.1) is called Doob decomposition of the supermartinagle X.

Proof. If (28.1) is the decomposition satisfying the requirements in the theorem, then from the predictability of (A_n) and the martingale peoperty of (M_n) we obtain

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= E[A_{n+1} - A_n|\mathcal{F}_n] = E[X_n - X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= X_n - E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]. \end{aligned}$$

Thus, since $A_0 = 0$, we have

$$A_n = \sum_{j=0}^{n-1}(X_j - E[X_{j+1}|\mathcal{F}_j]), \quad n \geq 1. \tag{28.2}$$

This means that the decomposition satisfying the requirements is unique. On the other hand, if define (A_n) by (28.2), and put $M_0 = X_0$,

$$M_n = X_n + A_n = M_0 + \sum_{j=0}^{n-1}(X_{j+1} - E[X_{j+1}|\mathcal{F}_j]), \quad n \geq 1,$$

then $X_n = M_n - A_n$ is just the decomposition satisfying the requirements. □

2.29 Definition. A non-negative supermartingale (X_n) is called a *potential*, if $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = 0$, i.e., $X_n \xrightarrow{L^1} 0$.

From Theorem 1.11 we see that any potential is a uniformly integrable supermartingale.

2.30 Definition. Let $X = (X_n)$ be a supermartingale. If there exists a martingale $Y = (Y_n)$ and a potential $Z = (Z_n)$ such that

$$X_n = Y_n + Z_n,$$

then we say that X has *Riesz decomposition*: $X = Y + Z$.

If a supermartingale $X = (X_n)$ has Riesz decomposition, then its Riesz decomposition is unique. In fact, if $X_n = Y_n + Z_n$ and $X_n = Y_n' + Z_n'$ are two Riesz decompositions, then $(Y_n - Y_n')$ is a martingale and

$$Y_n - Y_n' = Z_n' - Z_n \xrightarrow{L^1} 0.$$

By Theorem 1.11 $(Y_n - Y_n')$ is a uniformly integrable martingale. By (18.1) it must be that for each n, $Y_n = Y_n'$ a.s. Hence $Z_n = Z_n'$ a.s..

2.31 Theorem. 1) *A supermartingale (X_n) has Riesz decomposition if and only if $\lim_{n\to\infty} E[X_n] > -\infty$.*

2) *Let (X_n) be a non-negative supermartingale, and $X_n = Y_n + Z_n$ be its Riesz decomposition. Then (Y_n) is a non-negative martingale.*

3) *Let (X_n) be a uniformly integrable supermartingale, and $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$. Put*

$$Y_n = E[X_\infty|\mathcal{F}_n], \quad Z_n = X_n - Y_n.$$

Then $X_n = Y_n + Z_n$ is the Riesz decomposition of (X_n).

Proof. 1) The necessity is trivial. We will show the sufficiency. Assume $\lim_{n\to\infty} E[X_n] > -\infty$, and $X_n = M_n - A_n$ is the Doob decomposition of (X_n). Then (A_n) is integrable: $E[A_\infty] < \infty$. Put $Y_n = M_n - E[A_\infty|\mathcal{F}_n]$, $Z_n = E[A_\infty|\mathcal{F}_n] - A_n$. Thus, $X_n = Y_n + Z_n$ is just the Riesz decomposition of (X_n).

2) Let (X_n) be a non-negative supermartingale, and $X_n = Y_n + Z_n$ be its Riesz decomposition. Then by 1) we have

$$\begin{aligned} Y_n = M_n - E[A_\infty|\mathcal{F}_n] &= \lim_{p\to\infty} E[M_p|\mathcal{F}_n] - \lim_{p\to\infty} E[A_p|\mathcal{F}_n] \\ &= \lim_{p\to\infty} E[M_p - A_p|\mathcal{F}_n] = \lim_{p\to\infty} E[X_p|F_n] \geq 0. \end{aligned}$$

3) is obvious. □

2.32 Theorem. *Let (X_n) be a supermartingale (resp. martingale). Then the following conditions are equivalent*

1) $\sup_n E[X_n^-] < \infty$ *(resp. $\sup_n E[|X_n|] < \infty$),*

2) *(X_n) has the following decomposition (called Krickeberg decomposition) :*

$$X_n = L_n - M_n, \tag{32.1}$$

where (L_n) is a non-negative supermartingale (resp. martingale), and (M_n) is a non-negative martingale. In addition, if 1) holds, we can make the above decomposition have minimality in a sense that if $X_n = L_n' - M_n'$ is another such decomposition, then for each n, $L_n \leq L_n'$ and $M_n \leq M_n'$.

Proof. 2) ⇒ 1) is obvious. We will show 1) ⇒ 2). Because $(-X_n^-)$ is a supermartingale and $\lim_{n\to\infty} E[-X_n^-] > -\infty$ (by 1)), by Theorem 2.31

$(-X_n^-)$ has Riesz decomposition:

$$-X_n^- = Y_n + Z_n,$$

where (Y_n) is a martingale, and (Z_n) is a potential. Put $L_n = X_n - Y_n$, $M_n = -Y_n$. Then (L_n) is a supermartingale, and (M_n) is a martingale. At the same time, we have

$$L_n = X_n^+ + Z_n \geq 0, \quad M_n = X_n^- + Z_n \geq 0.$$

Therefore, 1) $\Rightarrow$ 2) is proved. Let $X_n = L_n' - M_n'$ be another decomposition satisfying the requirements. Then $M_p' \geq X_p^- = M_p - Z_p$, and

$$M_n' = \lim_{p\to\infty} E[M_p'|\mathcal{F}_n] \geq \lim_{p\to\infty} E[M_p - Z_p|\mathcal{F}_n] = M_n.$$

Immediately, $L_n' = X_n + M_n' \geq X_n + M_n = L_n$. □

§4. Doob's Stopping Theorem

In §1 in order to establish the elementary inequalities of martingales and supermartingales we have already proved Doob's stopping theorem (or so-called optional sampling theorem) for bounded stopping times. Here we will generalize this result to more general cases. There are two kinds of generalizations. The first is to a class of closable martingales and supermartingales (see Definition 2.33). At this time Doob's stopping theorem holds for all stopping times. The second is to general martingales and supermartingales. In this case Doob's stopping theorems holds only for certain stopping times. The latter has important applications in statistics.

2.33 Definition. A martingale (resp. supermartingale) $(X_n, n \in N)$ is called *right-closable*, if there exists an integrable r.v. $X_\infty \in \mathcal{F}_\infty$ such that for each $n \in N$, $E[X_\infty|\mathcal{F}_n] = X_n$ (resp. $\leq X_n$) a.s.. In this case $(X_n, n \in \overline{N})$ is called a *right-closed martingale* (resp. *supermartingale*), and X_∞ is the *right-closing element* of $(X_n, n \in N)$.

Immediately from the martingale convergence theorem we see that for a right-closable martingale the right-closing element is uniquely determined. For a right-closable supermartingale there exists a maximal right-closing element (see the remark after Theorem 2.34). Obviously by the definition, a right-closable martingale is just a uniformly integrable martingale. It must be pointed out that a martingale may be a right-closed supermartingale, but not a right-closed martingale.

The following theorem gives a necessary and sufficient condition of right-closability for supermartingales.

2.34 Theorem. *In order that a supermartingale $(X_n)_{n\geq 0}$ be right-closable it is necessary and sufficient that $(X_n^-)_{n\geq 0}$ be uniformly integrable.*

Proof. Necessity. Let X_∞ be a right-closing element of (X_n). Then for each n

$$X_n \geq E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \geq -E[X_\infty^-|\mathcal{F}_n] \quad a.s.,$$

$$X_n^- \leq E[X_\infty^-|\mathcal{F}_n] \quad \text{a.s.}.$$

Because $(E[X_\infty^-|\mathcal{F}_n])$ is uniformly integrable, so is (X_n^-).

Sufficiency. Assume that (X_n^-) is a uniformly integrable supermartingale. Then $\sup_n E[X_n^-] < \infty$, and by Theorem 2.17 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty$, where X_∞ is an integrable r.v.. We will prove that X_∞ is a right-closing element of (X_n). For $A \in \mathcal{F}_n$ we have

$$\int_A X_n dP \geq \int_A X_{n+m} dP = \int_A X_{n+m}^+ dP - \int_A X_{n+m}^- dP, \quad m \geq 1. \quad (34.1)$$

Because $X_{n+m}^- \xrightarrow{L^1} X_\infty^-$, as $m \to \infty$ (by Theorem 1.11),

$$\lim_{m\to\infty} \int_A X_{n+m}^- dP = \int_A X_\infty^- dP. \quad (34.2)$$

However, $X_{n+m}^+ \to X_\infty^+$ a.s., as $m \to \infty$. Then by Fatou's lemma

$$\int_A X_\infty^+ dP \leq \varliminf_{m\to\infty} \int_A X_{n+m}^+ dP. \quad (34.3)$$

It follows from (34.1)–(34.3) that $E[I_A X_n] \geq E[I_A X_\infty]$, i.e., $E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \leq X_n$ a.s.. This means that X_∞ is a right-closing element of (X_n). □

Remark. Let (X_n) be a right-closable supermartingale. From the above proof we see that $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ exists, and X_∞ is a right-closing element of (X_n). X_∞ is, indeed, the maximal right-closing element. In fact, if ξ is another right-closing element of (X_n), then

$$\xi = E[\xi|\mathcal{F}_\infty] = \lim_{n\to\infty} E[\xi|\mathcal{F}_n] \leq \lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty \quad \text{a.s.}.$$

The following theorem is *Doob's stopping theorem* for right-closed martingales and supermartingales.

2.35 Theorem. *Let $(X_n, n \in \overline{N})$ be a martingale (resp. supermartingale), S and T be two stopping times, $S \leq T$. Then X_S and X_T are integrable, and*

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S \quad (\text{resp.} \leq X_S) \quad \text{a.s.}. \tag{35.1}$$

Proof. Let $(X_n, n \in \overline{N})$ be a martingale. Put $S_n = SI_{[S \leq n]} + (+\infty)I_{[S > n]}$. Because the set $\{0, 1, \cdots, n, +\infty\}$ is an isomorphism, preserving order, of $\{0, 1, \cdots, n, n+1\}$, by Theorem 2.10 we have

$$X_{S_n} = E[X_\infty|\mathcal{F}_{S_n}] \quad \text{a.s.}.$$

Since $\mathcal{F}_S \cap [S = S_n] = \mathcal{F}_{S_n} \cap [S = S_n]$ (Theorem 2.9.2)), by Theorem 1.23

$$\begin{aligned} E[X_\infty|\mathcal{F}_S]\, I_{[S=S_n]} &= E[X_\infty|\mathcal{F}_{S_n}] I_{[S=S_n]} \\ &= X_{S_n} I_{[S=S_n]} = X_S I_{[S=S_n]} \quad \text{a.s.} . \end{aligned}$$

Since $[S = S_n] \uparrow \Omega$, we obtain

$$E[X_\infty|\mathcal{F}_S] = X_S \quad \text{a.s.} .$$

Especially, this means X_S is integrable. The same equality holds for T. Hence,

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] = E[E[X_\infty|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_S] = E[X_\infty|\mathcal{F}_S] = X_S \quad \text{a.s.} .$$

Now let $(X_n, n \in \overline{N})$ be a supermartingale. Put $Y_n = E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$; $Z_n = X_n - Y_n$, $Y_\infty = X_\infty$ and $Z_\infty = 0$. Then $(Y_n, n \in \overline{N})$ is a martingale, $(Z_n, n \in \overline{N})$ is a non-negative supermartingale. Because $E[Z_{S_n}] \leq E[Z_0]$ (Theorem 2.10), it follows from Fatou's lemma that Z_S is integrable. Hence, $X_S = Y_S + Z_S$ is integrable. Put $T_n = TI_{[T \leq n]} + (+\infty)I_{[T > n]}$. By Theorem 2.10 we have

$$Z_{S_n} \geq E[Z_{T_n}|\mathcal{F}_{S_n}] \quad \text{a.s.} ,$$

$$Z_S I_{[S=S_n]} \geq E[Z_{T_n}|\mathcal{F}_{S_n}] I_{[S=S_n]} = E[Z_{T_n}|\mathcal{F}_S] I_{[S=S_n]} \text{ a.s.}. \tag{35.2}$$

Since $Z_{T_n} \uparrow Z_T$, letting $n \to +\infty$ in (35.2) yields

$$Z_S \geq E[Z_T|\mathcal{F}_S] \quad \text{a.s.} .$$

We have already shown $Y_S = E[Y_T|\mathcal{F}_S]$ a.s.. Therefore,

$$X_S \geq E[X_T|\mathcal{F}_S] \quad \text{a.s.} . \qquad \square$$

The following theorem is a strengthened form of Theorem 2.35.

2.36 Theorem. *Let $(X_n, n \in \overline{N})$ be a martingale (resp. supermartingale), S and T be two stopping times. Then*

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_{T \wedge S} \quad (\text{resp.} \leq X_{T \wedge S}) \text{ a.s.} . \tag{36.1}$$

Proof. By Theorem 2.9.2) $X_T I_{[T \leq S]}$ is $\mathcal{F}_S$-measurable, and by (35.1)

$$\begin{aligned} E[X_T|\mathcal{F}_S] &= E[X_T I_{[T \leq S]} + X_{S \vee T} I_{[T > S]}|\mathcal{F}_S] \\ &= X_T I_{[T \leq S]} + X_S I_{[T > S]} \quad (\text{resp.} \leq) \\ &= X_{T \wedge S} \quad \text{a.s.} . \end{aligned}$$

$\square$

2.37 Corollary. *Let ξ be an integrable r.v., S and T be two stopping times. Then*

$$E[\xi|\mathcal{F}_S|\mathcal{F}_T] = E[\xi|\mathcal{F}_{S \wedge T}] \quad \text{a.s.}.$$

The following theorem is *Doob's stopping theorem* for general martingales and supermartingales.

2.38 Theorem. 1) *Let $(X_n)_{n \geq 0}$ be a martingale, S and T be two finite stopping times. Suppose that X_T is integrable. Then we have*

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_{T \wedge S} \quad \text{a.s.} \tag{38.1}$$

if and only if

$$\lim_{n \to \infty} E[X_n I_{[T \geq n]}|\mathcal{F}_S] = 0, \quad \text{a.s.},$$

or, equivalently,

$$\varlimsup_{n \to \infty} E[X_n I_{[T \geq n]}|\mathcal{F}_S] = 0 \quad (\text{or } \varliminf_{n \to \infty} E[X_n I_{[T \geq n]}|\mathcal{F}_S] = 0) \quad \text{a.s.}.$$

In particular, if $\varliminf_{n \to \infty} E[|X_n| I_{[T \geq n]}] = 0$, (38.1) holds.

2) *Let $(X_n)_{n \geq 0}$ be a supermartingale, S and T be two finite stopping times. Suppose that X_T is integrable, and*

$$\varlimsup_{n \to \infty} E[X_n I_{[T \geq n]}|\mathcal{F}_S] \geq 0 \quad \text{a.s.}$$

Then

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] \leq X_{T \wedge S} \quad \text{a.s.} . \tag{38.2}$$

In particular, if $\varliminf_{n \to \infty} E[X_n^- I_{[T \geq n]}] = 0$, (38.2) holds.

Proof. 1) For each n, $X_{T\wedge n}\in\mathcal{F}_n$, by Corollary 2.37 and Theorem 2.10 we have

$$E[X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_S]=E[X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_{S\wedge n}]=X_{T\wedge S\wedge n},$$

$$E[X_T|\mathcal{F}_S]=\lim_{n\to\infty}E[X_T I_{[T<n]}|\mathcal{F}_S]=\lim_{n\to\infty}E[X_{T\wedge n}-X_n I_{[T\geq n]}|\mathcal{F}_S]$$

$$=\lim_{n\to\infty}(X_{T\wedge S\wedge n}-E[X_n I_{[T\geq n]}|\mathcal{F}_S])$$

$$=X_{T\wedge S}-\lim_{n\to\infty}E[X_n I_{[T\geq n]}|\mathcal{F}_S].$$

This means that the limit $\lim_{n\to\infty}E[X_n I_{[T\geq n]}|\mathcal{F}_S]$ always exists, and (38.1) holds if and only if it is a.s. equal to zero. The other assertions are trivial.

The proof of 2) is similar, and is omitted. □

The following theorem, as a consequence of Theorem 2.38, is very useful.

2.39 Theorem. *Let $(X_n)_{n\geq 0}$ be a martingale (resp. supermartingale), T be a stopping time, and $E[T]<\infty$. If there exists a constant C such that for each $n\in N$*

$$E[|X_{n+1}-X_n|\,|\mathcal{F}_n]\leq C \text{ a.s. on } [T\geq n+1], \tag{39.1}$$

then $E[|X_T|]<\infty$, and

$$E[X_T]=E[X_0]\quad (\text{resp. } \leq E[X_0]). \tag{39.2}$$

Proof. By Theorem 2.38, in order to show (39.2) it suffices to show that X_T is integrable and $\lim_{n\to\infty}E[|X_n|I_{[T\geq n]}]=0$. To this end, put $Y_0=|X_0|$, $Y_j=|X_j-X_{j-1}|$, $j\geq 1$. Then

$$E\Big[\sum_{j=0}^{T}Y_j\Big]=\sum_{n=0}^{\infty}E\Big[\sum_{j=0}^{n}Y_j I_{[T=n]}\Big]=\sum_{j=0}^{\infty}E[Y_j I_{[T\geq j]}]$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}E[E[Y_j|\mathcal{F}_{j-1}]I_{[T\geq j]}]+E[Y_0]$$

$$\leq C\sum_{j=1}^{\infty}P(T\geq j)+E[Y_0]=CE[T]+E[|X_0|]<\infty.$$

Because $|X_T|\leq\sum_{j=0}^{T}Y_j$, $E[|X_T|]<\infty$. At the same time, we have

$$E[|X_n|I_{[T\geq n]}]\leq E\Big[\sum_{j=0}^{T}|Y_j|I_{[T\geq n]}\Big]\to 0,\quad n\to\infty.$$ □

Below we use Theorem 2.39 to show the famous Wald's equation, which is very useful in statistics.

2.40 Theorem (Wald's equation). *Let $(\xi_n)_{n\geq 1}$ be an i.i.d. stochastic sequence, $E[|\xi_1|]<\infty$. Put $\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)$. Suppose that $T\geq 1$ is a stopping time, and $E[T]<\infty$. Then*

$$E\Big[\sum_{j=1}^{T}\xi_j\Big]=E[\xi_1]E[T]. \tag{40.1}$$

In addition, if $E[\xi_1^2]<\infty$, then

$$E[(\sum_{j=1}^{T}\xi_j-TE[\xi_1])^2]=D[\xi_1]E[T], \tag{40.2}$$

where $D[\xi_1]=E\xi_1^2-(E\xi_1)^2$ denotes the variance of ξ_1.

Proof. Set $X_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j-nE[\xi_1]$, $n\geq 1$. Then $(X_n)_{n\geq 1}$ is a martingale, and

$$E[|X_{n+1}-X_n|\,|\mathcal{F}_n]=E[|\xi_{n+1}-E[\xi_1]|\,|\mathcal{F}_n]$$

$$=E[|\xi_{n+1}-E[\xi_1]|]\leq 2E[|\xi_1|].$$

By Theorem 2.39 we have $E[X_T]=E[X_1]=0$, i.e., (40.1) holds. Considering martingale (Y_n), where $Y_n=X_n^2-nD[\xi_1]$, we can show (40.2) similarly. □

Finally, to end this paragraph we summarize the main results about supermartingales with discrete time as follows:

Let $(X_n, n\in N)$ be a supermartingale. Then

(X_n) is uniformly integrable $\Longleftrightarrow X_n\xrightarrow{a.s.,\,L^1}X_\infty$

$\Downarrow$

(X_n^-) is uniformly integrable $\Longleftrightarrow (X_n)$ is right-closable

$\Downarrow$

$\sup_n E[X_n^-]<\infty \begin{cases}\Longleftrightarrow (X_n) \text{ has Krickeberg decomposition}\\ \Longrightarrow X_n\xrightarrow{a.s.}X_\infty,\quad X_\infty \text{ is integrable}\end{cases}$

$\Downarrow$

$\lim_{n\to\infty}E[X_n]>-\infty\Longleftrightarrow (X_n)$ has Riesz decomposition.

§5. Martingales with Continuous Time

We continue to proceed our discussion in a fixed probability space $(\Omega,\mathcal{F},P)$. But in §5 and §6 a filtration with continuous time $F=(\mathcal{F}_t, t\in$

$\boldsymbol{R}_+$) (or $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) is given, i.e., $(\mathcal{F}_t, t \in \boldsymbol{R}_+)$ is an increasing family of sub-σ-fileds indexed by $\boldsymbol{R}_+$: for all $0 \leq s < t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Put $\mathcal{F}_\infty = \vee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$ and

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \quad t \geq 0,$$

$$\mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s = \sigma\Big(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\Big), \quad t > 0.$$

It is natural to define $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_{\infty-} = \mathcal{F}_\infty$. A filtration $\boldsymbol{F}$ is called *right-continuous*, if for each $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$. Obviously, the filtration $\boldsymbol{F}_+ = (\mathcal{F}_{t+}, t \in \boldsymbol{R}_+)$ is right-continuous.

A family of real r.v. indexed by $\boldsymbol{R}_+$ $(X_t, t \in \boldsymbol{R}_+)$ (or $(X_t)_{t\geq 0}$) is called a *stochastic process*[1)] or simply a *process*, and is also denoted simply by X or (X_t). Apparently, a stochastic process $X = (X_t(\omega))$ is indeed a real function defined on $\Omega \times \boldsymbol{R}_+$ such that for each t $X_t(\omega)$ is $\mathcal{F}$-measurable. For each $\omega \in \Omega$, $X.(\omega)$ is a function on $\boldsymbol{R}_+$ and is called a *trajectory* (or *path*, or *sample function*) of X. If all trajectories of X are continuous (resp. right-continuous, resp. left-continuous) functions on $\boldsymbol{R}_+$, stochastic process X is called *continuous* (resp. *right-continuous*, resp. *left-continuous*). If all trajectories of X are right-continuous with finite left hand limits, X is called a *cadlag process*[2)]. We denote by $X_- = (X_{t-})$ the left hand limit process, where $X_{0-} = X_0$ by convention, and denote by $\Delta X = (\Delta X_t)$ the *jump process* of X: $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$, $t \geq 0$, i.e., $\Delta X = X - X_-$.

A stochastic prcess X is called $\boldsymbol{F}$*-adapted* if for each $t \geq 0$, X_t is $\mathcal{F}_t$-measurable. Put

$$\boldsymbol{F}^0(X) = (\mathcal{F}_t^0(X)), \quad \mathcal{F}_t^0(X) = \sigma\{X_s, s \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

$\boldsymbol{F}^0(X)$ is called the *natural filtration* of X. Obviously, X is always $\boldsymbol{F}^0(X)$-adapted, and if X is $\boldsymbol{F}$-adapted, then for each $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t^0(X) \subset \mathcal{F}_t$.

For any $n \geq 1$ and $t_1, t_2, \cdots, t_n \in \boldsymbol{R}_+$,

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \cdots, X_{t_n} \leq x_n)$$

is called a *finite-dimensional* (*n-dimensional*) *distribution* of X. The collection of all finite-dimensional distributions of X is called the *family of*

[1)] In general, any family of r.v. is called a stochastic process. A stochastic sequence is also called a stochastic process with discrete time, and a stochastic process indexed by an interval is called a stochastic process with continuous time.

[2)] The term "cadlag" is the French abbreviation of "continu à droite avec des limites à gauche", and now has been accepted into English literature on stochastic processes.

finite-dimensional distributions of X. Put

$$(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}_+}, \mathcal{B}^{\boldsymbol{R}_+}) = \prod_{t\geq 0}(E_t, \mathcal{E}_t), \quad (E_t, \mathcal{E}_t) \equiv (\boldsymbol{R}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R})), \quad t \geq 0.$$

By Kolmogorov's extension theorem, the family of finite-dimensional distributions of X determines a probability measure on $(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}_+}, \mathcal{B}^{\boldsymbol{R}_+})$, denoted by $\boldsymbol{P}^X$ or $\mathcal{L}(X)$, called the *distribution law* (or simply *law*) of X. In principle, the probabilistic properties of a stochastic process are determined by its distribution law. In fact, to determine the law of a process usually we give its family of finite-dimensional distributions. It is worth noting that neither $C(\boldsymbol{R}_+)$, the set of all continuous functions on $\boldsymbol{R}_+$, nor $D(\boldsymbol{R}_+)$, the set of all cadlag functions on $\boldsymbol{R}_+$, belong to $\mathcal{B}^{\boldsymbol{R}_+}$. If process X is continuous (resp. cadlag), we only conclude that the outer measure of $C(\boldsymbol{R}_+)$ (resp. $D(\boldsymbol{R}_+)$) under law $\boldsymbol{P}^X$ is one. In this case one can define a probability measure on $(C(\boldsymbol{R}_+), \mathcal{B}^{\boldsymbol{R}_+} \cap C(\boldsymbol{R}_+))$ (resp. $(D(\boldsymbol{R}_+), \mathcal{B}^{\boldsymbol{R}_+} \cap D(\boldsymbol{R}_+))$) as follows: for all $A \in \mathcal{B}^{\boldsymbol{R}_+}$,

$$\mu(A \cap C(\boldsymbol{R}_+)) = \boldsymbol{P}^X(A) \text{ (resp. } \mu(A \cap D(\boldsymbol{R}_+)) = \boldsymbol{P}^X(A)).$$

We also call μ the *law* of X, and denote it by $\boldsymbol{P}^X$.

In general, if $E \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}_+}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}^{\boldsymbol{R}_+} \cap E$, and $\boldsymbol{P}$ is a probability measure on $(E, \mathcal{E})$. Define a process X, called *coordinate process* or *canonical process*, as follows:

$$X_t(\varphi) = \varphi_t, \quad \varphi = (\varphi_t) \in E, \quad t \geq 0.$$

Then $\boldsymbol{P}$ is just the law of X.

In this paragraph first we study the properties of trajectories of supermartingales with continuous time. Then, comparing with supermartingales with discrete time, we establish corresponding results for right-continuous supermartingales with continuous time. But Doob decomposition for supermartingales will be discussed in Chapter V.

2.41 Definition. An $\boldsymbol{F}$-adapted stochastic process $X = (X_t)_{t\geq 0}$ is called an $\boldsymbol{F}$*-martingale* (resp. $\boldsymbol{F}$*-supermartingale*, resp. $\boldsymbol{F}$*-submartingale*), if for each $t \geq 0$, X_t is integrable, and for all $0 \leq s < t$

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \quad (\text{resp. } \leq X_s, \text{ resp. } \geq X_s) \quad \text{a.s.}$$

Obviously, any $\boldsymbol{F}$-martingale (resp. $\boldsymbol{F}$-supermartingale, resp. $\boldsymbol{F}$-submartingale) is a martingale (resp. supermartingale, resp. submartingale), w.r.t. $\boldsymbol{F}^0(X)$. As in the discrete time case, since the filtration $\boldsymbol{F}$ is

fixed, the suffix "$\boldsymbol{F}$-" will be omitted. Thus a martingale means an $\boldsymbol{F}$-martingale, unless clarity dictates otherwise.

Similarly, we can define martingales, supermartingales and submartingales indexed by $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ or $\boldsymbol{R}_+\backslash\{0\}$.

Now we start to study the properties of trajectories of supermartingales. To this end, we generalize the upcrossing inequality of supermartingales with discrete time to the case of continuous time.

Let $X = (X_t)_{t\geq 0}$ be an adapted process, and u be a finite subset of $\boldsymbol{R}_+$. Suppose $u = \{t_1, \cdots, t_n\}$ and $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Denote by $U_a^b[X, u]$ the number of upcrossings of $[a, b]$ by $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}\}$. For any subset D of $\boldsymbol{R}_+$, define

$$U_a^b[X, D] = \sup\{U_a^b[X, u] : u \text{ is a finite subset of } D\}.$$

Let $D = \{t_1, t_2, \cdots,\}$ be a denumerable set. Set $u_n = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$. Obviously, we have

$$U_a^b[X, D] = \lim_{n\to\infty} U_a^b[X, u_n].$$

2.42 Theorem. *Let $X = (X_t)_{t\geq 0}$ be a supermartingale, D be a denumerable dense subset of $\boldsymbol{R}_+$. Then for any $r < s$ ($r, s \in \boldsymbol{R}_+$), $a < b$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ and $\lambda > 0$ we have*

$$\lambda \boldsymbol{P}\Big(\sup_{t\in D\cap[r,s]} |X_t| \geq \lambda\Big) \leq \boldsymbol{E}[X_r] + 2\boldsymbol{E}[X_s^-], \tag{42.1}$$

$$\boldsymbol{E}U_a^b[X, D\cap[r, s]] \leq \frac{1}{b-a}\boldsymbol{E}[(X_s - a)^-]. \tag{42.2}$$

Furthermore, if almost all trajectories of X are right-continuous, in the above inequalities $D\cap[r, s]$ can be replaced by $[r, s]$.

Proof. Suppose $D\cap[r, s] = \{t_1, t_2, \cdots, t_n \cdots\}$. Put $u_n = \{t_1, \cdots, t_n\}$. The inequalities (42.1) and (42.2) with $D\cap[r, s]$ replaced by u_n follow from (12.3) and (14.2) respectively (note that (X_t^-) and $((X_t - a)^-)$ are submartingales). Then letting $n \to \infty$ yields (42.1) and (42.2). The last conclusion is trivial. □

2.43 Theorem. *Let (X_t) be a supermartingale, and D be a denumerable dense subset of $\boldsymbol{R}_+$. Then for almost all ω, for any $t \in \boldsymbol{R}_+$ (resp. $t \in \boldsymbol{R}_+\backslash\{0\}$), $\lim_{s\in D, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega)$ (resp. $\lim_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega)$) exists and is finite. Furthermore, if almost all trajectories of X are right-continuous, then for*

almost all ω, for any $t \in \boldsymbol{R}_+\backslash\{0\}$, $X_{t-}(\omega) = \lim_{s\in \boldsymbol{R}_+, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega)$ exists and is finite.

Proof. Let $t \in \boldsymbol{R}_+$, $a, b \in \boldsymbol{R}$, and $a < b$. Put

$$H_{t,a,b} = \{\omega : \sup_{s\in D\cap[0,t]} |X_s(\omega)| = \infty \text{ or } U_a^b[X_\cdot(\omega), D\cap[0, t]] = \infty\}.$$

Then $H_{t,a,b} \in \mathcal{F}_t$. From Theorem 2.42, we know $\boldsymbol{P}(H_{t,a,b}) = 0$. Set

$$H_t = \bigcup_{a<b, a,b\in Q} H_{t,a,b}, \quad H = \bigcup_{t\in \boldsymbol{R}_+} H_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Then $H_t \in \mathcal{F}_t$, $H_t \uparrow H$, and $\boldsymbol{P}(H) = 0$. If $\omega \notin H$, for each $t \in \boldsymbol{R}_+$ (resp. $t \in \boldsymbol{R}_+\backslash\{0\}$), $\lim_{s\in D, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega)$ (resp. $\lim_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega)$) exists and is finite.

If almost all trajectories of X are right-continuous, obviously we have $\lim_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega) = \lim_{s\in \boldsymbol{R}_+, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega)$ for $t \in \boldsymbol{R}_+\backslash\{0\}$. □

The following theorem is called *Föllmer's lemma* (see Föllmer [1]). Its difference from the classical results is without the requirement that $\mathcal{F}_0$ contains all $\boldsymbol{P}$-null sets of $\mathcal{F}$.

2.44 Theorem. *Let (X_t) be a supermartingale (resp. martingale), and D be a denumerable dense subset of $\boldsymbol{R}_+$. Then there exists an $\boldsymbol{F}_+$-adapted process $(\overline{X}_t)$ such that*

1) *$(\overline{X}_t)$ is right-continuous, and for almost all ω, for any $t \in \boldsymbol{R}_+$*

$$\overline{X}_t(\omega) = \lim_{s\in D, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega); \tag{44.1}$$

2) *for almost all ω, for any $t \in \boldsymbol{R}_+\backslash\{0\}$, $\overline{X}_{t-}(\omega) = \lim_{s\in \boldsymbol{R}_+, s\uparrow\uparrow t} \overline{X}_s(\omega)$ exists and is finite. In addition, we have*

$$\overline{X}_{t-}(\omega) = \lim_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega); \tag{44.2}$$

3) *for all $t \in \boldsymbol{R}_+$ we have*

$$X_t \geq \boldsymbol{E}[\overline{X}_t|\mathcal{F}_t] \quad (\textit{resp. } X_t = \boldsymbol{E}[\overline{X}_t|\mathcal{F}_t]) \quad a.s.; \tag{44.3}$$

4) *$(\overline{X}_t)$ is an $\boldsymbol{F}_+$-supermartingle (resp. martingale).*

Proof. We continue to use the notations in Theorem 2.43. For all $t \in \boldsymbol{R}_+$ put $H_{t+} = \bigcap_{s>t} H_s$, then $H_{t+} \in \mathcal{F}_{t+}$. If $\omega \notin H_{t+}$, there is a $t_1 > t$ such that $\omega \notin H_{t_1}$. Thus, $\lim_{s\in D, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega)$ exists and is finite. Put

$$\overline{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{s\in D, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega), & \omega \notin H_{t+}, \\ 0, & \omega \in H_{t+}. \end{cases} \tag{44.4}$$

Apparently, $(\overline{X}_t)$ is an F_+-adapted process. We are going to show that $(\overline{X}_t)$ satisfies the above-listed properties.

1) If $t \in R_+$ and $\omega \in H_{t++}$, then for all $s > t$, $\omega \in H_{s+}$. Hence, $\overline{X}_s(\omega) = 0$, for $s \geq t$, and $\overline{X}_\cdot(\omega)$ is right-continuous at point t. Let $\omega \notin H_{t+}$. Since $H_{t+} = \bigcap_{r>t} H_{r+}$, there is an $r_0 > t$ such that for all $r \in]t, r_0]$ we have $\omega \notin H_{r+}$. For given $\varepsilon > 0$ take $\delta \in (0, r_0 - t)$ such that $|\overline{X}_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq \varepsilon$ when $s \in D, s > t$, and $s - t < \delta$. Thus, when $r > t$ and $r - t < \delta$, we have

$$|\overline{X}_t(\omega) - \overline{X}_r(\omega)| = \lim_{s \in D, s \downarrow\downarrow r} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq \varepsilon.$$

This means that $\overline{X}_\cdot(\omega)$ is right-continuous at point t. Therefore, $(\overline{X}_t)$ is right-continuous. At last, if $\omega \notin H$, then for all $t \in R_+$ (44.1) follows from (44.4).

2) If $t > 0$ and $\omega \notin H$, then $\lim_{s \in D, s \uparrow\uparrow t} X_s(\omega)$ exists and is finite. (44.2) can be shown as in 1).

3) We discuss only the supermartingale case. Let $r_n \in D$ and $r_n \downarrow\downarrow t$. For any $A \in \mathcal{F}_t$ we have

$$\int_A X_t dP \geq \int_A X_{r_n} dP. \tag{44.5}$$

Because (X_{r_n}) is uniformly integrable (Theorem 2.22), $X_{r_n} \xrightarrow{L^1} \overline{X}_t$ follows from 1). Letting $n \to \infty$ on the right-hand side of (44.5) gives

$$\int_A X_t dP \geq \int_A \overline{X}_t dP,$$

i.e., (44.3) holds.

4) We discuss only the supermartingale case. Let $s < t, s, t \in R_+$, and $s_n \in D, s_n < t, s_n \downarrow\downarrow s, t_n \in D, t_n \downarrow\downarrow t$. For any $A \in \mathcal{F}_{s+}$, we have

$$\int_A X_{s_n} dP \geq \int_A X_{t_n} dP. \tag{44.6}$$

Because (X_{s_n}) and (X_{t_n}) are uniformly integrable (Theorem 2.22), letting $n \to \infty$ in both sides of (44.6) yields

$$\int_A \overline{X}_s dP \geq \int_A \overline{X}_t dP,$$

i.e., $(\overline{X}_t)$ is an F_+-supermartingale. □

2.45 Definition. Let (X_t) and (Y_t) be two stochastic processes. We say that (X_t) is a *modification* of (Y_t), if for each $t \in R_+$, $X_t = Y_t$ a.s.. We

say that (X_t) and (Y_t) are *indistinguishable*, if for almost all ω trajectories $X_\cdot(\omega)$ and $Y_\cdot(\omega)$ are identical.

Obviously, two indistinguishable processes are modifications of each other. But the converse is not true in general. However, if two right-continuous (or left-continuous) processes are modifications of each other, then they are indistinguishable. Later, we will not distinguish two indistinguishable processes, i.e., they are regarded as the same.

2.46 Theorem. *If (X_t) is a right-continuous F-supermartingale (resp. martingale), then (X_t) is also an F_+-supermartingale (resp. martingale), and almost all trajectories of (X_t) are cadlag.*

Proof. This is a consequence of Theorem 2.44. Under the assumption of the theorem, (X_t) and $(\overline{X}_t)$ are indistinguishable. □

2.47 Theorem. *Suppose $F = (\mathcal{F}_t)$ is right continuous and (X_t) is an F-supermartingale. In order that (X_t) have a right-continuous adapted modification it is necessary and sufficient that $t \mapsto E[X_t]$ be a right-continuous function on R_+.*

Proof. Let D be a denumerable dense subset of R_+. Because F is right-continuous, the process $(\overline{X}_t)$ defined in Theorem 2.44 is an F-supermartingale, and from (44.3) for each $t \geq 0$ we have $X_t \geq \overline{X}_t$ a.s.. Let $t_n \in D, t_n \downarrow\downarrow t$. Because (X_{t_n}) is uniformly integrable (Theorem 2.22), we have

$$E[\overline{X}_t] = \lim_{n \to \infty} E[X_{t_n}].$$

Thus, $X_t = \overline{X}_t$ a.s., or equivalently, $E[X_t] = E[\overline{X}_t]$ (since $X_t \geq \overline{X}_t$ a.s.), if and only if

$$E[X_t] = \lim_{n \to \infty} E[X_{t_n}]. \tag{47.1}$$

Because $s \mapsto E[X_s]$ is a decreasing function, (47.1) is equivalent to saying that this function is right-continuous at point t. Hence, if function $s \mapsto E[X_s]$ is right-continuous on R_+, then supermartingale $(\overline{X}_t)$ is a right-continuous adapted modification of supermartingale (X_t). Conversely, if (X_t) has a right-continuous adapted modification (Y_t), then $E[X_t] = E[Y_t]$. By the same way we know that $t \mapsto E[Y_t] = E[X_t]$ is right-continuous. □

2.48 Corollary. *If F is right-continuous, then any F-martingale has a right-continuous adapted modification.*

If two processes are modifications of each other, they have the same family of finite-dimensional distributions, i.e., in the sense of law they are of no difference. Therefore, we may assume that $F = (\mathcal{F}_t)$ is right-continuous, and discuss right-continuous martingales or supermartingales only. At present, we can generalize all fundamental results on martingales and supermartingales with discrete time to the continuous time setting, apart from Doob decomposition theorem for supermartingales. The corresponding Doob-Meyer decomposition theorem for supermartingales will be presented in Chapter V §4 .

The following theorem is *Doob's inequality*, it can be deduced directly from Theorem 2.15.

2.49 Theorem. *Let (X_t) be a non-negative right-continuous submartingale and $X^* = \sup_{t\geq 0} X_t$. Then*

$$E[X^*] \leq \frac{e}{e-1}\Big(1 + \sup_{t\geq 0} E[X_t \log^+ X_t]\Big), \tag{49.1}$$

$$\|X^*\|_p \leq q \sup_{t\geq 0} \|X_t\|_p, \tag{49.2}$$

where $p > 1$ and $q > 1$ are a couple of conjugate indices.

The convergence properties of martingales or supermartingales are listed below. Their proofs are completely similar to those for the discrete time case, and are omitted here.

2.50 Theorem. *Let (X_t) be a right-continuous supermartingale. If $\sup_t E[X_t^-] < \infty$ (or equivalently, $\sup_t E[|X_t|] < \infty$), then (X_t) a.s. converges to an integrable r.v. X_∞ as $t \to \infty$. Furthermore, if (X_t) is non-negative, then $(X_t, t \in \overline{R}_+)$ is a supermartingale.*

2.51 Theorem. *If (X_t) is a uniformly integrable right-continuous supermartingale (resp. martingale), then*

$$X_t \xrightarrow{a.s.,\, L^1} X_\infty, \quad as \quad t \to \infty$$

and $(X_t, t \in \overline{R}_+)$ is a supermartingale (resp. martingale).

2.52 Corollary. *Assume $(\mathcal{F}_t)$ is right-continuous. Let ξ be an integrable r.v., and (ξ_t) be a right-continuous adapted modification of martingale $(E[\xi|\mathcal{F}_t])$. Then*

$$\xi_t \xrightarrow{a.s.,\, L^1} E[\xi|\mathcal{F}_\infty], \quad as \quad t \to \infty.$$

2.53 Corollary. *Let (X_t) be a right-continuous martingale (or non-negative submartingale) and $p > 1$. If $\sup_{t\geq 0} E[|X_t|^p] < \infty$, then*

$$X_t \xrightarrow{a.s.,\, L^p} X_\infty, \quad as \quad t \to \infty,$$

and $\|X_\infty\|_p = \sup_{t\geq 0} \|X_t\|_p$.

2.54 Theorem. *Let $(X_t)_{t>0}$ be a right-continuous $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$-supermartingale. If $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0+}$ and $\sup_{t>0} E[X_t] < \infty$, then X_t a.s. and L^1 converge to an $\mathcal{F}_0$-measurable integrable r.v. X_0, as $t \downarrow 0$, and $(X_t)_{t\geq 0}$ is an $(\mathcal{F}_t)$-supermartingale.*

Now we study Riesz decomposition of a supermartingale. For the time being, we cannot establish Doob decomposition of a supermartingale. So the line of proof here is different from that for discrete time case. As to Krickeberg decomposition concerned, the formulation and proof are completely similar to those for the discrete time case, and are omitted here.

2.55 Definition. Let (X_t) be a non-negative right-continuous supermartingale. (X_t) is called a *potential*, if $\lim_{t\to\infty} E[X_t] = 0$.

Suppose that $X = (X_t)$ is a right-continuous supermartingale. If there exists a right-continuous martingale $Y = (Y_t)$ and a potential $Z = (Z_t)$ such that

$$X_t = Y_t + Z_t, \tag{55.1}$$

we say that X has *Riesz decomposition* $X = Y + Z$. It is easy to see that if X has Riesz decomposition, then the decomposition is unique.

2.56 Theorem. *Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is right-continuous and (X_t) is a right-continuous supermartingale.*

1) *(X_t) has Riesz decomposition if and only if $\lim_{t\to\infty} E[X_t] > -\infty$.*

2) *Suppose that (X_t) has Riesz decomposition (55.1). If (X_t) is non-negative, so is martingale (Y_t).*

3) *If (X_t) is uniformly integrable, then*

$$X_t \xrightarrow{L^1} X_\infty, \quad as \quad t \to \infty.$$

Let $Z_t = X_t - Y_t$ and (Y_t) be a right-continuous adapted modification of martingale $(\boldsymbol{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t])$. Then (Z_t) is a potential.

Proof. 1) The necessity is trivial. We are going to show the sufficiency. Put

$$Y_{t,s} = \boldsymbol{E}[X_{t+s}|\mathcal{F}_t], \quad t, s \in \boldsymbol{R}_+.$$

For $s > r$,

$$Y_{t,s} = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[X_{t+s}|\mathcal{F}_{t+r}]|\mathcal{F}_t] \leq \boldsymbol{E}[X_{t+r}|\mathcal{F}_t] = Y_{t,r}, \quad \text{a.s.}$$

Define $Y_t = \lim_{n\to\infty} Y_{t,n}$ a.s.. Then $Y_{t,n} \xrightarrow{L^1} Y_t$, as $n \to \infty$. For $t > s$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] &= \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}[Y_{t,n}|\mathcal{F}_s] = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}[X_{t+n}|\mathcal{F}_s] \\ &= \lim_{n\to\infty} Y_{s,n+(t-s)} = Y_s \text{ a.s.} \end{aligned}$$

For each $t \in \boldsymbol{R}_+$ choose $Y_t \in \mathcal{F}_t$, then (Y_t) is a martingale. Since $(\mathcal{F}_t)$ is right-continuous, by Corollary 2.58 (Y_t) has a right-continuous adapted modification, denoted also by (Y_t). Set $Z_t = X_t - Y_t$. Because for all $n, Y_{t,n} \leq X_t$ a.s., we have $Y_t \leq X_t$, a.s.. Hence, (Z_t) is a non-negative supermartingale, and

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}[Z_t] &= \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}[X_t - Y_{t,n}] = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}[X_t - X_{t+n}] \\ &= \boldsymbol{E}[X_t] - \lim_{s\to\infty} \boldsymbol{E}[X_s], \end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}[Z_t] = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}[X_t] - \lim_{s\to\infty} \boldsymbol{E}[X_s] = 0,$$

i.e., (Z_t) is a potential.

2) can be easily seen from proof 1). 3) is trivial. □

Now we turn to establish Doob's stopping theorem of martingales (resp. supermartingales) with continuous time. The discussion will be restricted to closable martingales (resp. supermartingales). Of course, we need to introduce the concept of stopping time. But the detailed discussion about stopping times will be given in Chapter III §1.

2.57 Definition. An $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-valued r.v. T is called an ***F*-stopping time** or *optional time* if for each $t \geq 0, [T \leq t] \in \mathcal{F}_t$.

For each stopping time T put

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty: \ \forall t \in \boldsymbol{R}_+, \ A[T \leq t] \in \mathcal{F}_t\}. \tag{57.1}$$

This is a σ-field, called the *σ-field of events prior to T*.

An $\boldsymbol{F}_+$-stopping time T is called an *$\boldsymbol{F}$-stopping time in the wide sense*. The σ-field of events prior to T w.r.t. $\boldsymbol{F}_+$ is denoted by $\mathcal{F}_{T+}$, i.e.,

$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty: \ \forall t \in \boldsymbol{R}_+, \ A[T \leq t] \in \mathcal{F}_{t+}\}. \tag{57.2}$$

2.58 Theorem. *Let $(X_t, t \in \overline{\boldsymbol{R}}_+)$ be a right-continuous martingale (resp. supermartingale), and $S \leq T$ be two stopping times. Then X_S and X_T are integrable, and*

$$\boldsymbol{E}[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S \quad (\text{resp. } \leq X_S) \quad \text{a.s.}. \tag{58.1}$$

Proof. We give the proof only for the supermartingale case. For each natural number n put $D_n = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \cdots, +\infty\}$. Then $(X_t, t \in D_n)$ is an $(\mathcal{F}_t, t \in D_n)$-supermartingale. Put

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k-1}{2^n} \leq S < \frac{k}{2^n}]} + (+\infty) I_{[S=+\infty]},$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}]} + (+\infty) I_{[T=+\infty]}.$$

S_n and T_n are $(\mathcal{F}_t, t \in D_n)$-stopping times (see Theorem 3.7.2)), and $S_n \downarrow S$, $T_n \downarrow T$. By Theorem 2.35 we have

$$\boldsymbol{E}[X_{T_n}|\mathcal{F}_{S_n}] \leq X_{S_n} \text{ a.s.},$$

where X_{T_n} and X_{S_n} are integrable. In particular, for any $A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$ (see Theorem 3.4.2))

$$\int_A X_{T_n} d\boldsymbol{P} \leq \int_A X_{S_n} d\boldsymbol{P}. \tag{58.2}$$

But

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T, \quad \lim_{n\to\infty} X_{S_n} = X_S,$$

and $X_T \in \mathcal{F}_T, X_S \in \mathcal{F}_S$ (see Theorem 3.12). In order to deduce (58.1) from (58.2), it remains to show that (X_{S_n}) and (X_{T_n}) are uniformly integrable. By Theorem 2.35 we know for each $n \geq 1$

$$\boldsymbol{E}[X_{S_{n-1}}|\mathcal{F}_{S_n}] \leq X_{S_n} \quad \text{a.s.}.$$

Set

$$Y_{-n} = X_{S_n}, \quad \mathcal{G}_{-n} = \mathcal{F}_{S_n}, \quad n \geq 1.$$

Then $(Y_n)_{n\leq -1}$ is a $(\mathcal{G}_n)_{n\leq -1}$-supermartingale. Since $\boldsymbol{E}[Y_{-n}] = \boldsymbol{E}[X_{S_n}] \leq \boldsymbol{E}[X_0]$ (Theorem 2.35), $(Y_n)_{n\leq -1} = (X_{S_n})_{n\geq 1}$ is uniformly integrable (Theorem 2.22), so is (X_{T_n}). □

The following theorem is a strengthened form of Doob's stopping theorem. Its proof is completely similar to that of Theorem 2.36 and is omitted here.

2.59 Theorem. *Let $(X_t, t \in \boldsymbol{R}_+)$ be a right-continuous martingale (resp. supermartingale), and S, T be two stopping times. Then*

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_{T\wedge S} \ (\text{resp.} \ \leq X_{T\wedge S}) \quad a.s.. \tag{59.1}$$

2.60 Corollary. *Suppose that $(\mathcal{F}_t)$ is right-continuous. Let ξ be an integrable r.v., and S, T be two stopping times. Then*

$$E[\xi|\mathcal{F}_T|\mathcal{F}_S] = E[\xi|\mathcal{F}_S|\mathcal{F}_T] = E[\xi|\mathcal{F}_{S\wedge T}] \quad a.s.. \tag{60.1}$$

Proof. Let (X_t) be a right-continuous adapted modification of martingale $(E[\xi|\mathcal{F}_t])$, and $X_\infty = E[\xi|\mathcal{F}_\infty]$. Then (60.1) follows from (59.1). □

2.61 Corollary. *Let $(X_t)_{t\geq 0}$ be a right-continuous supermartingale. Then for any stopping time T*

$$E[|X_T|I_{[T<\infty]}] \leq 3 \sup_{t\geq 0} E[|X_t|]. \tag{61.1}$$

Proof. Let $a > 0$. Put $X_t^a = X_{t\wedge a}, X_\infty^a = X_a$. Then $(X_t^a, t \in \overline{\boldsymbol{R}}_+)$ is a supermartingale and $X_T^a = X_{T\wedge a}$. Noting that (X_t^-) is a submartingale, by Theorem 2.58 we have

$$\begin{aligned} E[|X_{T\wedge a}|\, I_{[T<\infty]}] &\leq E[|X_{T\wedge a}|] = E[X_{T\wedge a}] + 2E[X_{T\wedge a}^-] \\ &\leq E[X_0] + 2E[X_a^-] \leq 3 \sup_{t\geq 0} E[|X_t|]. \end{aligned}$$

Letting $a \to \infty$ yields (61.1). □

The follwoing theorem is a simple application of Doob's stopping theorem.

2.62 Theorem. *Let (X_t) be a non-negative right-continuous supermartingale. Put*

$$T_n = \inf\{t : X_t < \frac{1}{n}\}, \quad T = \sup_n T_n. \tag{62.1}$$

Then T is a wide-sense stopping time, and for almost all $\omega \in [T < \infty]$

$$X_t(\omega) = 0, \quad t \geq T(\omega),$$

for all $\omega \in [T > 0]$, $t < T(\omega)$,

$$X_t(\omega) > 0, \quad \lim_{s\uparrow t} X_s(\omega) > 0,$$

(T is the time when (X_t) attains to zero).

Proof. For any $t \in \boldsymbol{R}_+$

$$[T_n < t] = \bigcup_{r<t, r\in Q_+} [X_r < \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}_t,$$

thus $[T_n \leq t] \in \mathcal{F}_{t+}$, i.e., T_n is a wide-sense stopping time, so is T.

Put $X_\infty = 0$, then $(X_t, t \in \overline{\boldsymbol{R}}_+)$ is a right-continuous supermartingale. From Theorem 2.46 we know that $(X_t, t \in \overline{\boldsymbol{R}}_+)$ is an $\boldsymbol{F}_+$-supermartingale. By Theorem 2.58 we have

$$E[X_{T\vee t}] \leq E[X_{T_n}] \leq \frac{1}{n}.$$

Since n is arbitrary, $E[X_{T\vee t}] = 0$ and $X_{T\vee t} = 0$ a.s.. In particular,

$$X_t I_{[t\geq T]} = X_{T\vee t} I_{[t\geq T]} = 0 \text{ a.s.}. \tag{62.2}$$

Because all trajectories of (X_t) are right-continuous, it is deduced from (62.2) that for almost all $\omega \in [T < \infty]$, we have $X_t(\omega) = 0$ for all $t \geq T(\omega)$. On the other hand, we have

$$[T > t] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [T_n > t].$$

Let $t < T(\omega)$. Then there exists n such that $T_n(\omega) > t$. By the definition of T_n, for all $s \leq t, X_s(\omega) \geq \frac{1}{n}$, and $\lim_{s\uparrow t} X_s(\omega) \geq \frac{1}{n}$. □

2.63 Definition. A filtration $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is called *complete*, if $\mathcal{F}_0$ contains all P-null sets. If a filtration $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is both complete and right-continuous, we say that $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ satisfies the *usual conditions*.

If $\boldsymbol{F}$ satisfies the usual conditions, (X_t) is an $\boldsymbol{F}$-supermartingale, and $E[X_t]$ is right-continuous on $\boldsymbol{R}_+$, then from Theorems 2.46 and 2.47 we know that (X_t) has an adapted cadlag modification, which is also an $\boldsymbol{F}$-supermartingale. In particular, if $\boldsymbol{F}$ satisfies the usual conditions, each $\boldsymbol{F}$-martingale has an adapted cadlag modification, which is also an $\boldsymbol{F}$-martingale.

Let (X_t) be a non-negative right-continuous F-supermartingale. Put

$$S_1 = \inf\{t : X_t = 0 \text{ or } X_{t-} = 0\},$$
$$S_2 = \inf\{t : X_t = 0\},$$
$$S_3 = \inf\{t : X_{t-} = 0\},$$
$$T_n = \inf\left\{t : X_t < \frac{1}{n}\right\}, \qquad T = \sup_n T_n.$$

Then by Theorem 2.62 we have

$$S_1 = S_2 = S_3 = T \text{ a.s. }.$$

If F satisfies the usual condition, it is not difficult to see that S_1, S_2, S_3 and T all are F-stopping times.

An arbitrary filtration can always be completed. First, we complete the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, i.e., we suppose that the space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is complete: $\mathcal{F} = \mathcal{F}^P$. Then denote by $\mathcal{N}$ the σ field, generated by all P-null sets. For any filtration $F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ put

$$F^P = (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{N})_{t\geq 0}.$$

Then F^P is complete, called the *completion of* F. Obviously, F^P_+ satisfies the usual conditions. It is called the *usual augmentation* of F and is denoted by $\bar{F} = (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$. It is not hard to show that for each $t \geq 0$

$$\mathcal{F}_{t+} \vee \mathcal{N} = \bigcap_{s>t} (\mathcal{F}_s \vee \mathcal{N}) = \bar{\mathcal{F}}_t,$$

i.e. $\bar{F} = (\mathcal{F}_{t+} \vee \mathcal{N})_{t\geq 0}$.

For any process $X = (X_t)_{t\geq 0}$, we denote by $F^P(X)$ the completion of its natural filtration $F^0(X)$, and $F^P(X)$ is called the *complete natural filtration* of X. And denote by $F(X)$ the usual augmentation of $F^0(X)$, and $F(X)$ is called the *usual natural filtration* of X. Obviously, if two processes are modifications of each other, they have the same complete natural filtrations.

§6. Processes with Independent Increments

2.64 Definition. A process (X_t) is called *stochastically continuous* on R_+, if for each $t \in R_+$, X_s converge to X_t in propability as $s \to t$.

We say that a process (X_t) has *stationary increments*, if for all $s < t$, $s, t \in R_+$, the law of $X_t - X_s$ depends only on $t - s$.

An adapted process (X_t) is called a *process with independent increments* (w.r.t. $F = (\mathcal{F}_t)$), if for all $s < t$, $s, t \in R_+$, $X_t - X_s$ is independent of $\mathcal{F}_s$. In this case, for any $0 \leq t_0 < t_1, \cdots < t_n$

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{ are independent.} \tag{64.1}$$

The independence property (64.1) (in particular, the increments of disjoint intervals are independent) is equivalent to the fact that (X_t) is a process with independent increments w.r.t. its natural filtration $F^0(X)$. If the filtration is not specified, a process with independent increments is always meant w.r.t. its natural filtration. A process with independent increments in called *homogeneous*, if it has stationary increments.

It is easy to see that if (X_t) is a process with indpendent increments w.r.t. F, so is (X_t) w.r.t. F^P (the completion of F). Moreover, if (X_t) is stochastically continuous, then (X_t) is also a process with independent increments w.r.t. $\bar{F}$ (the usual augmentation of F). For simplicity, we call a stochastically continuous process with independent increments as *Lévy process*, whether or not it is homogeneous. It will be the object of study in this paragraph. Below we suppose the filtration satisfies the usual conditions.

For any Lévy process X denote by $\varphi_{s,t}(u)$ the characteristic function of increment $X_t - X_s (s \leq t)$:

$$\varphi_{s,t}(u) = E[\exp\{iu(X_t - X_s)\}].$$

By the independence of increments, we have

$$\varphi_{r,s}(u)\varphi_{s,t}(u) = \varphi_{r,t}(u), \quad r \leq s \leq t. \tag{64.2}$$

By the stochastic continuity of X we know that $\varphi_{s,t}(u)$ is continuous in s, t and u.

2.65 Lemma. *Let X be a Lévy process. Then for all $u \in R$, $s, t \in R_+$, $s < t$*

$$\varphi_{s,t}(u) \neq 0.$$

Proof. Set $t_0 = \inf\{t \geq s : \varphi_{s,t}(u) = 0\}$. Since $\varphi_{s,s}(u) = 1$, it must be $t_0 > s$. It suffices to show $t_0 = \infty$. In fact, if $t_0 < \infty$, then $\varphi_{s,t_0}(u) = 0$. From (64.2),

$$\varphi_{s,t}(u)\varphi_{t,t_0}(u) = 0, \quad s < t < t_0.$$

Because $\varphi_{s,t}(u) \neq 0$, we have $\varphi_{t,t_0}(u) = 0$. Letting $t \uparrow\uparrow t_0$ yields $\varphi_{t_0,t_0}(u) = 0$. This contradicts $\varphi_{t_0,t_0}(u) = 1$. $\square$

2.66 Theorem. *Let X be a Lévy process. Put*

$$Z_{s,t}(u) = [\varphi_{s,t}(u)]^{-1}\exp\{iu(X_t - X_s)\}, \quad s \le t. \tag{66.1}$$

Then $(Z_{s,t}(u))_{t\ge s}$ is an $(\mathcal{F}_t)_{t\ge s}$-martingale.

Proof. Let $s \le t_0 < t$. Then

$$E[Z_{s,t}(u)|\mathcal{F}_{t_0}] = [\varphi_{s,t}(u)]^{-1}\exp\{iu(X_{t_0} - X_s)\}E[e^{iu(X_t - X_{t_0})}|\mathcal{F}_{t_0}]$$
$$= e^{iu(X_{t_0}-X_s)}\frac{\varphi_{t_0,t}(u)}{\varphi_{s,t}(u)} = Z_{s,t_0}(u). \qquad \square$$

Martingale $(Z_{s,t}(u))_{t\ge s}$ will play an important role in the study of processes with independent increments. For simplicity, $Z_{0,t}$ and $\varphi_{0,t}$ are denoted by Z_t and φ_t respectively.

2.67 Lemma (Ottaviani's inequality). *Suppose that independent r.v. $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ satisfy the following conditions:*

$$P(|\xi_k + \cdots + \xi_n| \ge a) \le \alpha, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

where $a > 0$ and $\alpha \in (0,1)$ are constants. Then for any $b > 0$

$$P\Big(\sup_{1\le k\le n}|\xi_1 + \cdots + \xi_k| \ge a + b\Big) \le \frac{1}{1-\alpha}P(|\xi_1 + \cdots + \xi_n| \ge b). \tag{67.1}$$

Proof. Put

$$A_k = [|\xi_1 + \cdots + \xi_k| \ge a + b],$$
$$B_k = [|\xi_k + \cdots + \xi_n| \ge a], \quad k = 1, 2, \cdots, n, \quad B_{n+1} = \emptyset,$$
$$C = [|\xi_1 + \cdots + \xi_n| \ge b].$$

Then

$$\bigcup_{k=1}^{n}(A_k B_{k+1}^c) \subset C,$$

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_1^c \cdots A_{k-1}^c A_k B_{k+1}^c) \le P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k B_{k+1}^c\Big) \le P(C).$$

On the other hand, B_{k+1}^c is independent of $(A_1^c \cdots A_{k-1}^c A_k)$. Thus,

$$P(C) \ge \sum_{k=1}^{n} P(A_1^c \cdots A_{k-1}^c A_k B_{k+1}^c) = \sum_{k=1}^{n} P(A_1^c \cdots A_{k-1}^c A_k)P(B_{k+1}^c)$$
$$\ge (1-\alpha)\sum_{k=1}^{n} P(A_1^c \cdots A_{k-1}^c A_k) = (1-\alpha)P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big).$$

(67.1) follows immediately. $\square$

2.68 Theorem. *Every Lévy process has an adapted cadlag modification, which is also a Lévy process.*

Proof. Let $X = (X_t)$ be a Lévy process. First, we show that for every $c > 0$

$$P(\sup\{|X_t| : t \in [0,c] \cap Q\} < \infty) = 1. \tag{68.1}$$

In fact, for each $t \in [0, c]$

$$P(|X_c - X_t| \ge n) \downarrow 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

By stochastic continuity of X, for each n and $t_0 \in [0, c]$,

$$\varlimsup_{t\to t_0} P(|X_c - X_t| \ge n) \le P(|X_c - X_{t_0}| \ge n)$$

Hence, by Dini's theorem we have

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le t\le c} P(|X_c - X_t| \ge n) = 0.$$

Take n_1 such that

$$\sup_{0\le t\le c} P(|X_c - X_t| \ge n_1) < \frac{1}{2}.$$

By Lemma 2.67 we obtain

$$P\Big(\sup_{t\in[0,c]\cap Q}|X_t| \ge n + n_1\Big) \le 2P(|X_c| \ge n). \tag{68.2}$$

Then (68.1) follows from (68.2).

Now applying Föllmer's lemma to martingale $(Z_t(u))_{t\ge 0}$, we know that there exists $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ with $P(\Omega_0) = 1$ such that for each $\omega \in \Omega_0$

1) for all $c > 0$, $\sup_{t\in[0,c]\cap Q}|X_t(\omega)| < \infty$,

2) for all $u \in Q$ and $t \ge 0$ (resp. $t > 0$) $\lim_{r\in Q_+, r\downarrow\downarrow t} e^{iuX_r(\omega)}$ (resp. $\lim_{r\in Q_+, r\uparrow\uparrow t} e^{iuX_r(\omega)}$) exists and is finite. Furthermore, we can conclude that for each $\omega \in \Omega_0$, for all $t \ge 0$ $\lim_{r\in Q_+, r\downarrow\downarrow t} X_r(\omega)$ (resp. for all $t > 0$, $\lim_{r\in Q_+, r\uparrow\uparrow t} X_r(\omega)$) exists and is finite. In fact, suppose there exist two sequences (r_n) and (r_n') in Q_+ such that $r_n \downarrow\downarrow t, r_n' \downarrow\downarrow t$ and

$$\lim_n X_{r_n}(\omega) = a \ne b = \lim_n X_{r_n'}(\omega).$$

Obviously, a and b are finite. For all $u \in Q$, $e^{iua} = e^{iub}$. This is impossible when $0 < u < \dfrac{2\pi}{|b-a|}$.

Define

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{r\in Q_+, r\downarrow t} X_r(\omega), & \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \omega \notin \Omega_0, \end{cases} \qquad t \geq 0.$$

Then $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ is a cadlag process. By stochastic continuity of X, for each $t \geq 0$

$$P(X_t = Y_t) = 1,$$

i.e. Y is a cadlag modification of X.

Since the filtration satisfies the usual conditions, it is easy to see that Y is adapted. Hence, Y is also a Lévy process. □

The following theorem provides another connection between processes with independent increments and martingales.

2.69 Theorem. *Let $X = (X_t)$ be a process with independent increments, and for all $t \geq 0, E[|X_t|] < \infty$. Put $m_t = E[X_t], t \geq 0$. Then $(X_t - m_t)$ is a martingale.*

Moreover, if $d_t = D[X_t] < \infty, t \geq 0$, then $((X_t - m_t)^2 - d_t)$ is a martingale.

Proof. Since $X_t - X_s, s \leq t$, is independent of $\mathcal{F}_s$, we have

$$E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = E[X_t - X_s] = m_t - m_s, \text{ a.s. },$$

$$E[X_t - m_t|\mathcal{F}_s] = X_s - m_s, \text{ a.s.}.$$

Hence $(X_t - m_t)$ is a martingale.

Now suppose $d_t = D[X_t] < \infty$. Without loss of generality, we suppose $m_t \equiv 0$. Then for $s \leq t$

$$E[|X_t - X_s|^2|\mathcal{F}_s] = E[|X_t - X_s|^2], \text{ a.s. } \tag{69.1}$$

Since X_s and $X_t - X_s$ are independent, we have

$$d_t = D[X_t] = D[X_s] + D[X_t - X_s] = d_s + E[|X_t - X_s|^2]. \tag{69.2}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} E[|X_t - X_s|^2|\mathcal{F}_s] &= E[X_t^2|\mathcal{F}_s] - 2X_sE[X_t|\mathcal{F}_s] + X_s^2 \\ &= E[X_t^2|\mathcal{F}_s] - X_s^2 \quad \text{a.s.} \end{aligned} \tag{69.3}$$

From (69.1)–(69.3) we obtain

$$E[X_t^2 - d_t|\mathcal{F}_s] = X_s^2 - d_s \quad \text{a.s.}.$$

Hence $(X_t^2 - d_t)$ is a martingale. □

For a homogeneous Lévy process $X = (X_t)$ the characteristic function $\varphi_{s,t}(u)$ of increment $X_t - X_s, s \leq t$, depends only on $t - s$:

$$\varphi_{s,t}(u) = \varphi_{t-s}(u),$$

and $(\varphi_t(u))_{t\geq 0}$ satisfies the following functional equation:

$$\varphi_{t+s}(u) = \varphi_t(u)\varphi_s(u), \quad t, s \in R_+.$$

Because $\varphi_t(u)$ is continuous in t, we have

$$\varphi_t(u) = [\varphi_1(u)]^t$$

and $\varphi_1(u)$ is infinitely divisible.

Furthermore, if the expectations of (X_t) exist, then

$$m_t = m_0 + (m_1 - m_0)t, \quad t \geq 0.$$

If the variances of (X_t) exist, then

$$d_t = d_0 + (d_1 - d_0)t, \quad t \geq 0.$$

2.70 Theorem. *Let $X = (X_t)$ be a cadlag homogeneous Lévy process, and T be a finite stopping time. Put*

$$Y_t = X_{T+t} - X_T, \quad t \geq 0.$$

Then

1) *$Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ is indpendent of $\mathcal{F}_T$,*
2) *Y is a process with independent increments w.r.t. $(\mathcal{F}_{T+t})$,*
3) *Y has the same law as $X - X_0$.*

Proof. Since $(Z_t = \dfrac{1}{\varphi_t(u)}e^{iu(X_t - X_0)})$ is a cadlag martingale, for any bounded stopping time S by Theorem 2.58 we have

$$\begin{aligned} &E[Z_{S+t}|\mathcal{F}_S] = Z_S, \quad \text{a.s.}, \\ &E[e^{iu(X_{S+t}-X_S)}|\mathcal{F}_S] = \frac{\varphi_{S+t}(u)}{\varphi_S(u)} = \varphi_t(u) \text{ a.s.}. \end{aligned} \tag{70.1}$$

For any $A \in \mathcal{F}_T$ and n, $A[T \leq n] \in \mathcal{F}_{T\wedge n}$. Applying (70.1) to $T \wedge n$ we get

$$\begin{aligned} E[\,I_{A[T\leq n]}e^{iuY_t}] - E[I_{A[T\leq n]}e^{iu(X_{T\wedge n+t} - X_{T\wedge n})}] \\ = E[I_{A[T\leq n]}\varphi_t(u)] = \varphi_t(u)P(A[T \leq n]). \end{aligned} \tag{70.2}$$

Letting $n \to \infty$ in (70.2) yields

$$E[I_Ae^{iuY_t}] = E[I_A]\varphi_t(u). \tag{70.3}$$

Putting $A = \Omega$ in (70.3), we obtain

$$E[e^{iuY_t}] = \varphi_t(u),$$

$$E[I_A e^{iuY_t}] = E[I_A]E[e^{iuY_t}].$$

Hence Y_t is independent of $\mathcal{F}_T$, and Y_t has the same law as $X_t - X_0$.

For $0 \le s < t$, applying the assertion proved above to stopping time $T+s$, we know that $X_{T+t} - X_{T+s}$ is independent of $\mathcal{F}_{T+s}$. Therefore, $Y = (Y_t)$ is a process with independent increments w.r.t. $(\mathcal{F}_{T+t})$, independent of $\mathcal{F}_T$, and has the same law as $X - X_0$. □

Remark. In Theorem 2.70 if the stopping time T is equal to $+\infty$, then the process Y is only defined on $[T < \infty]$. Replacing $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ by $([T < \infty], \mathcal{F} \cap [T < \infty], P(\cdot)/P(T < \infty))$, the assertions remain true.

2.71 Definition. A stochastic process $W = (W_t)_{t\ge 0}$ is called a *Wiener process* or *Brownian motion* (w.r.t. $(\mathcal{F}_t)$), if the following conditions are satisfied:

1) $W_0 = 0$,

2) W is a process with independent increments (w.r.t. $(\mathcal{F}_t)$),

3) for all $s < t$, $s, t \in R_+$, $W_t - W_s$ has normal distribution $N(0, \sigma^2(t-s))$, $\sigma^2 > 0$.

If $\sigma = 1$, the Wiener process is refered to as *standard*. Obviously, a Wiener process is a homogeneous Lévy process.

It has long been observed that particles suspended in a liquid are in a state of constant highly irregular motion, so-called Brownian motion, named after the British botanist who discovered it first. The Wiener process is a reasonable mathematical model for Brownian motion. In fact, the Wiener process has been found useful in fitting many random phenomena of diverse domains.

2.72 Definition. A stochastic process $X = (X_t)_{t\ge 0}$ is called *Gaussian* or *normal* if all finite-dimensional distributions of X are Gaussian.

Obviously, the law of a Gaussian process X is completely determined by its mean function

$$m_t = E[X_t], \quad t \ge 0$$

and covariance function

$$C(t,s) = E[(X_t - m_t)(X_s - m_s)], \quad t, s \ge 0.$$

It is easy to see that the Wiener process is a Gaussian process, and

$$\begin{cases} E[W_t] = 0, & t \ge 0, \\ E[W_t W_s] = \sigma^2(t \wedge s), & t, s \ge 0. \end{cases} \tag{72.1}$$

Conversely, if $W = (W_t)$ is a Gaussian process, and its mean function and covariance function are specified as in (72.1), then W is a Wiener process w.r.t. $F(W)$.

2.73 Theorem. *Let $W = (W_t)$ be a Wiener process. Then W has an adapted continuous modification, which is also a Wiener process.*

Proof. Since a Wiener process is a homogeneous Lévy process, by Theorem 2.68 W has a cadlag modification $X = (X_t)$. Put

$$H = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n=l}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{p2^n} [|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}| \ge \frac{1}{m}].$$

It is not difficult to see that if $\omega \in H^c$, $X_\cdot(\omega)$ is continuous on R_+. On the other hand, for the fixed p and m

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{j=1}^{p2^n} [|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}| \ge \frac{1}{m}]\Big) &\le \sum_{j=1}^{p2^n} P(|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}| \ge \frac{1}{m}) \\ &\le m^4 \sum_{j=1}^{p2^n} E[|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}|^4] \\ &= m^4(p2^n)(3\frac{\sigma^4}{2^{2n}}) \qquad (X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2^n})) \\ &= 3pm^4\sigma^4 \cdot \frac{1}{2^n} \to 0, \qquad \text{as } n \to \infty. \end{aligned}$$

Consequently, for any l

$$P\Big(\bigcap_{n=l}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{p2^n} [|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}| \ge \frac{1}{m}]\Big) = 0.$$

Therefore, we know

$$P(H) = 0.$$

Now define

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \omega \in H^c, \\ 0, & \omega \in H, \end{cases} \qquad t \ge 0.$$

It is clear that $Y = (Y_t)$ is a continuous modification of $W = (W_t)$. Since the filtration satisfies the usual conditions, Y is adapted. □

Remark. In view of Theorem 2.73, henceforth we add another requirement to the definition of Wiener process: it is a continuous process.

2.74 Theorem. *Let $W = (W_t)$ be a Wiener process. Then for each $t > 0$,*

$$\sum_{j=1}^{2^n}(W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t})^2 \xrightarrow{a.s., L^2} \sigma^2 t, \qquad as \quad n \to \infty.$$

Proof. Put

$$V_n = \sum_{j=1}^{2^n}(W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t})^2.$$

Since $\{(W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t}) : j = 1, \cdots, 2^n\}$ are i.i.d. and

$$\left(W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t}\right) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2^n}t\right),$$

we have

$$E[V_n] = \sum_{j=1}^{2^n} E[|W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t}|^2] = 2^n \cdot \frac{\sigma^2}{2^n}t = \sigma^2 t,$$

$$D[V_n] = \sum_{j=1}^{2^n} D[|W_{\frac{j}{2^n}t} - W_{\frac{j-1}{2^n}t}|^2] = 2^n \cdot 2\left(\frac{\sigma^2}{2^n}t\right)^2 = \frac{\sigma^4 t^2}{2^{n-1}}.$$

Since $D[V_n] \to 0$, we obtain $V_n \xrightarrow{L^2} \sigma^2 t$.

On the other hand,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|V_n - E[V_n]| \ge \frac{1}{n}) \le \sum_{n=1}^{\infty} n^2 D[V_n] = \sigma^4 t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} < \infty.$$

By Borel-Cantelli Lemma we obtain $V_n \xrightarrow{a.s.} \sigma^2 t$. □

Remark. For each t and n, let $D_n : 0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,k_n} = t$ be a partition of $[0, t]$ such that $\max |t_{n,j} - t_{n,j-1}| \to 0$ as $n \to \infty$. In the same way one can show for a Wiener process W

$$\sum_{j=1}^{k_n}(W_{t_{n,j}} - W_{t_{n,j-1}})^2 \xrightarrow{L^2} \sigma^2 t.$$

Moreover, if D_{n+1} is a refinement of D_n for each n, then we have

$$\sum_{j=1}^{k_n}(W_{t_{n,j}} - W_{t_{n,j-1}})^2 \to \sigma^2 t \qquad a.s.$$

as well. In fact, define $V_{-n} = \sum_{j=1}^{k_n}(W_{t_{n,j}} - W_{t_{n,j-1}})^2$, $n \ge 1$, then $(V_n)_{n\le -1}$ is a martingale w.r.t. a due filtration. The details are left to readers as an exercise.

2.75 Definition. A stochastic process $N = (N_t)_{t\ge 0}$ is called a *(homogeneous) Poisson process with parameter* (or *rate*) $\lambda > 0$ (w.r.t. $(\mathcal{F}_t)$), if the following conditions are satisfied:

1) $N_0 = 0$,

2) N is a process with independent increments (w.r.t. $(\mathcal{F}_t)$),

3) for all $s < t, s, t \in R_+$, $N_t - N_s$ has a Poisson distribution with parameter $\lambda(t - s)$.

2.76 Theorem. *Let $N = (N_t)_{t\ge 0}$ be a Poisson process. Then N has an adapted cadlag modification, whose trajectories are all increasing step functions with jump size one and take values only in the set of non-negative integers.*

Proof. Since Poisson process N is a homogeneous Lévy process, by theorem 2.68 N has a cadlag modification $X = (X_t)$. Put

$$A = \Big(\bigcap_{r\in Q_+}[X_r \in N]\Big) \cap \Big(\bigcap_{r,t\in Q_+, s<t}[X_t - X_s \ge 0]\Big).$$

Obviously, $P(A) = 1$, and for $\omega \in A$, $X_\cdot(\omega)$ is a cadlag increasing function and takes values only in N.

Put

$$H = \bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n=l}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{p2^n}[|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}| \ge 2].$$

Then for any fixed p

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{p2^n}[|X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}}| \ge 2]\Big) \le \sum_{j=1}^{p2^n} P(X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}} \ge 2)$$
$$= p2^n(1 - e^{-\lambda 2^{-n}} - \lambda 2^{-n}e^{-\lambda 2^{-n}}) \to 0, \qquad as\ n \to \infty.$$

Hence $P(H) = 0$. It is not difficult to see that for $\omega \in AH^c$, $X_\cdot(\omega)$ is a cadlag increasing step function with jump size one and takes values only in N.

Now define

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \omega \in AH^c, \\ 0, & \omega \notin AH^c, \end{cases} \qquad t \ge 0.$$

Then $Y = (Y_t)$ is the required modification of N. □

Remark. By the same reason as in the case of Wiener process, from now on we add another requirement to the definition of Poisson process, i.e., all trajectories of a Poisson process are cadlag increasing step functions with jump size one and take values only in $\boldsymbol{N}$.

2.77 Theorem. *Let $N = (N_t)$ be a Poisson process with parameter λ. Put*

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : \quad N_t = n\}, \quad n \geq 1. \tag{77.1}$$

Then

1) *for each n, T_n is a finite stopping time,*
2) *T_1 has the exponential distribution with parameter λ,*
3) *$(T_1, T_2 - T_1, \cdots, T_n - T_{n-1} \cdots)$ is an i.i.d. sequence.*

Proof. For any $n \geq 1$ and $t \geq 0$

$$[T_n \leq t] = [N_t \geq n].$$

Hence T_n is a stopping time. Moreover,

$$P(T_n \leq t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \to 1, \quad \text{as } t \to \infty.$$

Therefore, T_n is finite. In particular,

$$P(T_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

i.e., T_1 has the exponential distribution with parameter λ.

Define

$$Y_t = N_{T_1 + t} - N_{T_1}, \quad t \geq 0.$$

By Theorem 2.70 $Y = (Y_t)$ is a Poisson process with parameter λ w.r.t. $(\mathcal{F}_{T_1+t})$, and independent of $\mathcal{F}_{T_1}$. In addition,

$$T_2 - T_1 = \inf\{t \geq 0 : \ Y_t = 1\}.$$

Therefore, $T_2 - T_1$ is independent of T_1 (since $T_1 \in \mathcal{F}_{T_1}$), and identically distributed with T_1. In the same way, by induction one can show that $(T_1, T_2 - T_1, \cdots, T_n - T_{n-1}, \cdots)$ is an i.i.d. sequence. □

Remark. Actually, a Poisson process $N = (N_t)$ can be represented as follows:

$$N_t = n, \text{ when } \ T_n \leq t < T_{n+1},$$

where $T_n, n \geq 1$, is defined in (77.1), and $T_0 = 0$.

Suppose that $(S_n)_{n \geq 1}$ is an i.i.d. sequence of r.v., and their common distribution is the exponential distribution with parameter $\lambda > 0$. Define

$$\widetilde{T}_0 = 0, \quad \widetilde{T}_n = S_1 + \cdots S_n, \quad n \geq 1$$

and

$$\widetilde{N}_t = n, \quad \widetilde{T}_n \leq t < \widetilde{T}_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Then $\widetilde{N} = (\widetilde{N}_t)_{t \geq 0}$ is a Poisson process with parameter λ w.r.t. $\boldsymbol{F}(\widetilde{N})$, since $\widetilde{N}$ has the same law as N.

Generally, let $(T_n)_{n \geq 0}$ be a sequence of r.v. such that

1) $0 = T_0 \leq T_1 \leq \cdots T_n \leq \cdots, T_n \uparrow \infty$,
2) For each $n \geq 0, T_n < \infty \Rightarrow T_n < T_{n+1}$.

Define

$$X_t = n, \quad \text{when } T_n \leq t < T_{n+1}.$$

$X = (X_t)$ is called a *counting process or point process.* Counting processes are used to model events occurring in time, such as arrivals of customers in a queue, calls coming into a telephone exchange, accidents on roads etc. Hence, X_t may be considered as the number of customers arriving in $[0, t]$, and T_n is called the n-th arrival time ($T_n = \infty$ means the n-th customer never occurs). The Poisson process is the simplest but most important and useful type of counting processes.

Problems and Complements

2.1 Let $(X_n)_{n \geq 1}$ be an i.i.d. sequence of r.v.. Assume that X_1 is distributed uniformly on (0,1). Let $d \in (0, 1)$. Set

$$T = \inf\{n \geq 1 : \quad X_n \geq d\},$$

$$S = \inf\{n \geq 1 : \quad X_1 + \cdots X_n \geq 1\}.$$

Evaluate $\boldsymbol{E}[T], \boldsymbol{E}[X_T], \boldsymbol{E}[S]$ and $\boldsymbol{E}[X_S]$.

2.2 Let $(X_n)_{n \geq 1}$ be an i.i.d. $(\mathcal{F}_n)$-adapted sequence of r.v. such that for each $n \geq 1$, X_{n+1} is independent of $\mathcal{F}_n$, and T be a finite $(\mathcal{F}_n)$-stopping time. Then

1) $(X_{T+n})_{n \geq 1}$ is independent of $\mathcal{F}_T$,
2) $(X_{T+n})_{n \geq 1}$ has the same law as $(X_n)_{n \geq 1}$.

2.3 Let $(X_n)_{n\geq 1}$ be an $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$-adapted sequence of non-negative r.v. such that for each $n \geq 1$, X_{n+1} is independent of $\mathcal{F}_n$. Then

$$\boldsymbol{E}[\sup_{n\geq 1} X_n] \leq 2\sup\{\boldsymbol{E}[X_T I_{[T<\infty]}] : T \text{ is an } (\mathcal{F}_n)\text{-stopping time}\}$$

(prophet's inequality).

2.4 Let $(X_n)_{n\geq 0}$ be a martingale. Then $(|X_n|)_{n\geq 0}$ is also a martingale if and only if

1) for each $n \geq 1$, $X_n X_0 \geq 0$, a.s.,

2) for each $n > 0$, $[X_n = 0] \subset [X_{n+1} = 0]$, a.s..

2.5 Let $X = (X_n)$ be an $(\mathcal{F}_n)$-martingale (resp. supermartingale), and T be an $(\mathcal{F}_n)$-stopping time. Then the sequence stopped at time T $X^T = (X_n^T)$ (defined by $X_n^T = X_{T\wedge n}$) is also an $(\mathcal{F}_n)$-martingale (resp. supermartingale).

2.6 Let $a < b, a, b \in \boldsymbol{R}$ and $N \geq 1$.

1) If (X_n) is an $(\mathcal{F}_n)$-supermartingale, then

$$P(U_a^b[X,N] \geq 1|\mathcal{F}_0] \leq \frac{1}{b-a}\{\boldsymbol{E}[(X_N - a)^- I_{[U_a^b[X,N]=0]}|\mathcal{F}_0] - (X_0 - a)^-\},$$

$$E[U_a^b[X,N]|\mathcal{F}_0] \leq \frac{1}{b-a}\{\boldsymbol{E}[(X_N - a)^-|\mathcal{F}_0] - (X_0 - a)^-\}.$$

2) If (X_n) is an $(\mathcal{F}_n)$-submartingale, then

$$(X_0 - a)^+ < E[(X_N - a)^+ I_{[U_a^b[X,N]=0]}|\mathcal{F}_0],$$

$$E[U_a^b[X,N]|\mathcal{F}_0] \leq \frac{1}{b-a}\{E[(X_N - a)^+|\mathcal{F}_0] - (X_0 - a)^+\}.$$

2.7 Let (X_n) be a martingale, and $\boldsymbol{E}[\sup_n |X_{n+1} - X_n|] < \infty$. Then for almost all ω, either $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ exists and is finite, or $\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = +\infty$ and $\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = -\infty$ hold simultaneously.

2.8 Let (A_n) be an $(\mathcal{F}_n)$-adapted sequence of events. Then

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \left[\sum_n P[A_n|\mathcal{F}_{n-1}] = +\infty\right] \quad \text{a.s.}$$

(generalized Borel-Cantelli Lemma).

2.9 Let (X_n) be a non-negative supermartingale. Then (X_n) is a potential if and only if there is a non-negative martingale (Y_n) such that for each $n, Y_n \leq X_n$ a.s. must be equal to zero: for all n, $Y_n = 0$ a.s. .

2.10 Let (X_n) be an $(\mathcal{F}_n)$-adapted sequence of integrable r.v.. Then (X_n) is a potential if and only if there exists an $(\mathcal{F}_n)$-adapted integrable increasing sequence (A_n) such that for all n

$$X_n = \boldsymbol{E}[A_\infty|\mathcal{F}_n] - A_n \quad \text{a.s. .}$$

Moreover, if (A_n) is required to be predictable and $A_0 = 0$, then (A_n) is determined uniquely.

2.11 Let $(Y_n)_{n\geq 0}$ and $(Z_n)_{n\geq 0}$ be two non-negative martingales. Then

$$X_n = Y_n - Z_n, \quad n \geq 0$$

is the Krickeberg decomposition of martingale (X_n) if and only if $\boldsymbol{E}[Y_0] + \boldsymbol{E}[Z_0] = \sup_n \boldsymbol{E}[|X_n|]$.

2.12 Let $(X_n)_{n\geq 0}$ be an $(\mathcal{F}_n)$-adapted sequence such that for each n, X_{n+1} is independent of $\mathcal{F}_n$, $\sup_n \boldsymbol{E}[|X_n|] < \infty$, and $\boldsymbol{E}[X_n] = 0, n \geq 0$. Let T be an $(\mathcal{F}_n)$-stopping time and $\boldsymbol{E}[T] < \infty$. Then

$$\boldsymbol{E}[X_0 + X_1 + \cdots + X_T] = 0.$$

2.13 An adapted sequence (X_n) is a right-closable supermartingale (resp. martingale) if and only if

i) $\sup_n \boldsymbol{E}[|X_n|] < \infty$,

ii) for all finite stopping times $S \leq T, \boldsymbol{E}[X_S] \geq \boldsymbol{E}[X_T]$ (resp. $\boldsymbol{E}[X_S] = \boldsymbol{E}[X_T]$).

2.14 Let $X = (X_n)_{n\geq 0}$ be an $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-adapted sequence. Then the following statements are equivalent:

1) There exists a sequence of stopping times $T_k \uparrow \infty$ such that for each k, $X^{T_k} = (X_{T_k\wedge n})$ is an $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

2) X_0 is integrable, for each $n \geq 0$, X_{n+1} is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_n$, and

$$\boldsymbol{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \quad \text{a.s..}$$

2.15 Let $W = (W_t)_{t\geq 0}$ be a Wiener process. Then all the following processes are Wiener processes:

$$W_t^{(1)} = -W_t, \quad t \geq 0,$$

$$W_t^{(2)} = W_{t+s} - W_s, \quad t \geq 0, \text{ for a fixed } s > 0,$$

$$W_t^{(3)} = \begin{cases} tW_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

$$W_t^{(4)} = W_a - W_{a-t}, \quad 0 \leq t \leq a, \text{ for a fixed } a > 0.$$

2.16 Let $W = (W_t)$ be a standard Wiener process.

1) Show that

$$B_t = W_t - tW_1, \quad 0 \le t \le 1,$$

is a Gaussian process with zero mean function and covariance function

$$C(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & t \le s, \\ (1-t)s, & t > s. \end{cases}$$

(Such a Gaussian process is called a *Brownian bridge*.)

2) Show that the conditional law of $(W_t, 0 \le t \le 1)$ given $W_1 = 0$ is identical with the law of a Brownian bridge.

2.17 Let $W = (W_t)$ be a Wiener process, and T be a stopping time such that $E[T] < \infty$. Then $E[W_T] = 0$ and $E[W_T^2] = \sigma^2 E[T]$.

2.18 Let $W = (W_t)$ be a standard Wiener process and $a < 0 < b$. Define

$$T = \inf\{t \ge 0 : \quad W_t = a \text{ or } W_t = b\}.$$

Evaluate $E[T]$ and $P(W_T = a)$.

2.19 Let $W = (W_t)$ be a Wiener process and T be a stopping time. Define

$$X_t = \begin{cases} W_t, & t \le T, \\ 2W_T - W_t, & t > T, \end{cases} \qquad t \ge 0.$$

Then $X = (X_t)$ is still a Wiener process and has the same law as W (reflexion principle). By making use of the reflexion principle, for fixed $t > 0$, $\max\limits_{0 \le s \le t} W_s$, $|W_t|$ and $\max\limits_{0 \le s \le t} W_s - W_t$ have the following common density function:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-x^2/(2\sigma^2 t)} I_{[0,\infty[}(x).$$

2.20 Let $(T_n)_{n \ge 0}$ be a sequence of r.v. such that

$$0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n < \cdots, T_n \uparrow \infty,$$

and $N = (N_t)$ be defined as follows:

$$N_t = n, \quad \text{when } T_n \le t < T_{n+1}.$$

The following statements are equivalent:

1) N is a Poisson process with parameter λ (w.r.t. its natural filtration).

2) For any $t > 0$ and $n \ge 1$, given $N_t = n$, $T_1, \cdots, T_n$ have the same distribution as the order statistics corresponding to n independent r.v. uniformly distributed on $[0,t]$, and N_t has the Poisson distribution with parameter λt.

3) For any non-negative Borel function f on $\mathbf{R}_+$,

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} f(T_n)\Big] = \lambda \int_0^\infty f(t)dt,$$

and $T_1, T_2 - T_1, \cdots, T_n - T_{n-1}, \cdots$ are i.i.d..

Chapter III

Processes and Stopping Times

From now on we introduce "the general theory of stochastic processes" and its preliminary applications in three consecutive chapters.

The basic starting point of this chapter is a measurable space $(\Omega, \mathcal{F})$ with a given filtration $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. No probability measure appears throughout this chapter.

§1. Stopping Times

To begin with, we recall the definition of stopping time, given in Chapter II §5.

3.1 Definition. An $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-valued r.v. T defined on $(\Omega, \mathcal{F})$ is called an *$\boldsymbol{F}$-stopping time*, if for each $t \geq 0$,

$$[T \leq t] \in \mathcal{F}_t;$$

and an *$\boldsymbol{F}$-stopping time in the wide sense*, if for each $t > 0$,

$$[T < t] \in \mathcal{F}_t,$$

or equivalently,

$$T \wedge t \in \mathcal{F}_t.$$

Obviously, $\boldsymbol{F}$-stopping times in the wide sense and $\boldsymbol{F}_+$-stopping times are the same things (recall that $\boldsymbol{F}_+ = (\mathcal{F}_{t+})$). In particular, $\boldsymbol{F}$-stopping times are also $\boldsymbol{F}$-stopping times in the wide sense. In what follows, all stopping times are relative to $\boldsymbol{F}$, unless otherwise stated.

It is not hard for readers to show the following theorem.

3.2 Theorem. *1) If S and T are two stopping times (resp. in the wide sense), so are $S \wedge T$ and $S \vee T$.*

2) Let (S_n) be a sequence of stopping times (resp. in the wide sense). Then $\bigvee_n S_n$ is a stopping time (resp. in the wide sense), and $\bigwedge_n S_n$ is a wide-sense stopping time, moreover, if (S_n) is stationary, i.e. for each $\omega \in \Omega$, there exists a natural number n_ω, such that $S_n(\omega) = S_{n_\omega}(\omega)$ when $n \geq n_\omega$, then $\bigwedge_n S_n$ is a stopping time.

3.3 Definition. Let T be a stopping time. Put

$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \in \boldsymbol{R}_+,\ A[T \leq t] \in \mathcal{F}_{t+}\}, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \in \boldsymbol{R}_+,\ A[T \leq t] \in \mathcal{F}_t\}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_0 \vee \sigma\{A[t < T] : A \in \mathcal{F}_t,\ t \in \boldsymbol{R}_+\}. \tag{3.3}$$

Then $\mathcal{F}_{T+}, \mathcal{F}_T$ and $\mathcal{F}_{T-}$ are all σ-fields. $\mathcal{F}_T$ is called the *σ-field of events prior to T*, and $\mathcal{F}_{T-}$ the *σ-field of events strictly prior to T*.

It is easy to see

$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \in \boldsymbol{R}_+, A[T < t] \in \mathcal{F}_t\}, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{F}_{T-} = \sigma\{A[t \leq T] : A \in \mathcal{F}_{t-},\ t \in \boldsymbol{R}_+\}, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_0 \vee \sigma\{A[t < T] : A \in \mathcal{F}_{t+},\ t \in \boldsymbol{R}_+\}. \tag{3.6}$$

If T is just a stopping time in the wide sense, the definitions of $\mathcal{F}_{T+}$ and $\mathcal{F}_{T-}$ remain available. But $\mathcal{F}_T$ defined by (3.2) is no longer a σ-field (for some $t \in \boldsymbol{R}_+, [T \leq t] \notin \mathcal{F}_t$, then $\Omega \notin \mathcal{F}_T$). Therefore, for a wide-sense stopping time T only $\mathcal{F}_{T+}$ and $\mathcal{F}_{T-}$ make sense. But (3.4)—(3.6) remain true in this case. In fact, for any $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-valued r.v. T we can define $\mathcal{F}_{T-}$ still by (3.3), and (3.5), (3.6) are valid.

Obviously, for every stopping time T we have $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T+}$; for every wide-sense stopping time T we have $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_{T+}$.

It is also easy to see that if $T \equiv t \in \overline{\boldsymbol{R}}_+$ then T is a stopping time, and $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t, \mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{t-}, \mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_{t+}$ (recall that $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_{\infty-} = \mathcal{F}_\infty$).

The main properties of σ-fields $\mathcal{F}_T, \mathcal{F}_{T-}$ and $\mathcal{F}_{T+}$ are listed in the following theorem.

3.4 Theorem. *In the following statements, $T, S, S_1, \cdots, S_n, \cdots$ denote stopping times, and $U, R, R_1, \cdots, R_n, \cdots$ denote wide-sense stopping times.*

1) R is $\mathcal{F}_{R-}$-measurable.

2) $S \le T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$; $R < U \Rightarrow \mathcal{F}_{R-} \subset \mathcal{F}_{U-}, \mathcal{F}_{R+} \subset \mathcal{F}_{U+}$.

3) $\mathcal{F}_S \bigcap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S\wedge T}$.

4) $A \subset \mathcal{F}_{S\vee T} \Rightarrow A[S \le T] \in \mathcal{F}_T, A[S < T] \in \mathcal{F}_T, A[S = T] \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$.

5) $\mathcal{F}_S \vee \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S\vee T} = \{A \bigcup B : A \in \mathcal{F}_S, B \in \mathcal{F}_T, AB = \emptyset\}$.

6) $A \in \mathcal{F}_{R+} \Rightarrow A[R < U] \in \mathcal{F}_{U-}$.

7) $A \in \mathcal{F}_\infty \Rightarrow A[R = \infty] \in \mathcal{F}_{R-}$.

8) $R \le U$, and $R < U$ on $[R < \infty] \Rightarrow \mathcal{F}_{R+} \subset \mathcal{F}_{U-}$.

9) $S \le T$, *and* $S < T$ *on* $[T > 0] \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{T-}$.

10) *If* $R = \bigvee_n R_n$ *and* $U = \bigwedge_n R_n$, *then*

$$\mathcal{F}_{R-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{R_n-}, \quad \mathcal{F}_{U+} = \bigwedge_n \mathcal{F}_{R_n+}.$$

11) *If* $S = \bigvee_n S_n$ *and for each* n, $S_n < S$ *on* $[0 < S_n < \infty]$, *then*

$$\mathcal{F}_{S-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n}.$$

Proof. 1) For each $t \in \mathbf{R}_+$, $[R > t] \in \mathcal{F}_{R-}$ by (3.3), and $[R = 0] = [R > 0]^c$. Hence $R \in \mathcal{F}_{R-}$.

2) Let $A \in \mathcal{F}_S$. For each $t \in \mathbf{R}_+$

$$A[T \le t] = (A[S \le t])[T \le t] \in \mathcal{F}_t.$$

This means $A \in \mathcal{F}_T$. Hence $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. Similarly, we have $\mathcal{F}_{R+} \subset \mathcal{F}_{U+}$.

Let $A \in \mathcal{F}_{t+}$, then $A[t < R] \in \mathcal{F}_{t+}$. From (3.6) we have

$$A[t < R] = (A[t < R])[t < U] \in \mathcal{F}_{U-}.$$

Hence $\mathcal{F}_{R-} \subset \mathcal{F}_{U-}$.

3) In view of 2) it suffices to show $\mathcal{F}_S \bigcap \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{S\wedge T}$. Let $A \in \mathcal{F}_S \bigcap \mathcal{F}_T$. For each $t \in \mathbf{R}_+$

$$A[S \wedge T \le t] = (A[S \le t]) \cup (A[T \le t]) \in \mathcal{F}_t.$$

This means $A \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$. Hence $\mathcal{F}_S \bigcap \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{S\wedge T}$.

4) Let $A \subset \mathcal{F}_{S\vee T}$. From 1) and 2) we know that both S and T are $\mathcal{F}_{S\vee T}$-measurable. Hence $A[S \le T] \in \mathcal{F}_{S\vee T}$. For each $t \in \mathbf{R}_+$

$$(A[S \le T])[T \le t] = (A[S \le T])[S \vee T \le t] \in \mathcal{F}_t.$$

This means $A[S \le T] \in \mathcal{F}_T$. By the same argument we have $A[S < T] \in \mathcal{F}_T$. Thus $A[S = T] \in \mathcal{F}_T$. By the symmetry between S and T,

$$A[S = T] \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S\wedge T}.$$

5) Let $C \in \mathcal{F}_{S\vee T}$, $A = C[T < S]$ and $B = C[S \le T]$. Then by 4) we know that $A \in \mathcal{F}_S$, $B \in \mathcal{F}_T$ and $AB = \emptyset$, $A \bigcup B = C$. Therefore,

$$\mathcal{F}_{S\vee T} \subset \{A \cup B : A \in \mathcal{F}_S, B \in \mathcal{F}_T, AB = \emptyset\} \subset \mathcal{F}_S \vee \mathcal{F}_T.$$

Owing to 2), $\mathcal{F}_S \bigvee \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{S\vee T}$ is trivial. Hence 5) is established.

6) Let $A \in \mathcal{F}_{R+}$. For each $t \in \mathbf{R}_+$, $A[R \le t] \in \mathcal{F}_{t+}$. By (3.6) we have

$$A[R < U] = \bigcup_{r\in \mathbf{Q}_+} (A[R \le r])[r < U]) \in \mathcal{F}_{U-}.$$

7) Let $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A[R = \infty] \in \mathcal{F}_{R-}\}$. Then $\mathcal{G}$ is a σ-field. Let $A \in \mathcal{F}_n$. We have

$$A[R = \infty] = \bigcap_{k=n}^{\infty} (A[k < R]) \in \mathcal{F}_{R-},$$

i.e. $A \in \mathcal{G}$. Hence $\mathcal{G} \supset \bigcup_n \mathcal{F}_n, \mathcal{G} \supset \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n) = \mathcal{F}_\infty$, and $\mathcal{G} = \mathcal{F}_\infty$.

8) Let $A \in \mathcal{F}_{R+}$. Then $A[R < U] \in \mathcal{F}_{U-}$ (by 6)), $A[R = \infty] \in \mathcal{F}_{R-} \subset \mathcal{F}_{U-}$ (by 7)), and

$$A = (A[R < U]) \cup (A[R = \infty]) \in \mathcal{F}_{U-}.$$

9) Let $A \in \mathcal{F}_S$. Then $A[S = 0] \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{T-}$, and

$$A = (A[S < T]) \cup (A[T = 0]) \in \mathcal{F}_{T-}.$$

10) Let $t \in \mathbf{R}_+$ and $A \in \mathcal{F}_t$. Then $A[t < R_n] \in \mathcal{F}_{R_n-}$, and

$$A[t < R] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A[t < R_n]) \in \bigvee_n \mathcal{F}_{R_n-}.$$

By Definition 3.3 we have

$$\mathcal{F}_{R-} \subset \bigvee_n \mathcal{F}_{R_n-}.$$

The converse implication is always true.

Let $A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{R_n+}$. For each $t \in \mathbf{R}_+$ by (3.4) we have

$$A[U < t] = \bigcup_n (A[R_n < t]) \in \mathcal{F}_t.$$

This means $A \in \mathcal{F}_{U+}$. Hence

$$\bigcap_n \mathcal{F}_{R_n+} \subset \mathcal{F}_{U+}.$$

The converse implication is always true, too.

11) By 9) we have $\bigvee_n \mathcal{F}_{S_n} \subset \mathcal{F}_{S-}$. By 10) we have

$$\mathcal{F}_{S-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n-} \subset \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n}.$$

Hence $\mathcal{F}_{S-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n}$. □

3.5 Corollary. *Let S and T be stopping times, R and U be wide-sense stopping times.*

1) $[S \le T]$, $[S < T]$ *and* $[S = T]$ *all belong to* $\mathcal{F}_{S\wedge T}$; $[S < T] \in \mathcal{F}_{T-}$.

2) r.v. $\xi \in \mathcal{F}_{S\vee T} \Rightarrow \xi I_{[S\leq T]} \in \mathcal{F}_T, \xi I_{[S<T]} \in \mathcal{F}_T, \xi I_{[S=T]} \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$.

3) r.v. $\xi \in \mathcal{F}_{R+} \Rightarrow \xi I_{[R<U]} \in \mathcal{F}_{U-}$.

4)

$$\mathcal{F}_{S\vee T} \cap [S \leq T] = \mathcal{F}_T \cap [S \leq T],$$

$$\mathcal{F}_{S\vee T} \cap [S < T] = \mathcal{F}_T \cap [S < T],$$

$$\mathcal{F}_{S\vee T} \cap [S = T] = \mathcal{F}_{S\wedge T} \cap [S = T] = \mathcal{F}_S \cap [S = T] = \mathcal{F}_T \cap [S = T].$$

5)

$$\mathcal{F}_{S\wedge T} \cap [S \leq T] = \mathcal{F}_S \cap [S \leq T],$$

$$\mathcal{F}_{S\wedge T} \cap [S < T] = \mathcal{F}_S \cap [S < T].$$

6) *If (S_n) is a stationary sequence of stopping times, then*

$$\mathcal{F}_{\bigvee_n S_n} = \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n} = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathcal{F}_{S_n}, n = 1, 2, \cdots, A_k A_j = \emptyset, k \neq j \right\}, \tag{5.1}$$

$$\mathcal{F}_{\bigwedge_n S_n} = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n}. \tag{5.2}$$

Proof. We only give the proof of 6). Put $S = \bigvee_n S_n$. Because (S_n) is stationary, we have $\bigcup_{n=1}^{\infty} [S_n = S] = \Omega$. Let $A \in \mathcal{F}_S$. Put

$$A_1 = A[S = S_1], \; A_n = A(\bigcap_{j<n} [S_j < S])[S = S_n], \; n \geq 2.$$

Since $[S_j < S] \in \mathcal{F}_S$, by Theorem 3.4.4) we have $A_n \in \mathcal{F}_{S_n}$, $n \geq 1$. Obviously, $A_k A_j = \emptyset$, $k \neq j$, and $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. (5.1) is established.

Put $T = \bigwedge_n S_n$. Let $A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n}$. By Theorem 3.4.4), for each n, $A[S_n = T] \in \mathcal{F}_T$. Hence $A = \bigcup_n (A[S_n = T]) \in \mathcal{F}_T$. (5.2) is established. □

Remark. In 4) and 5) $\mathcal{F}_{S\vee T}, \mathcal{F}_{S\wedge T}, \mathcal{F}_T$ and $\mathcal{F}_S$ can be replaced by $\mathcal{F}_{(S\vee T)-}, \mathcal{F}_{(S\wedge T)-}, \mathcal{F}_{T-}$ and $\mathcal{F}_{S-}$ respectively.

3.6 Theorem. *Suppose $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0+}$. Let (T_n) be a monotone sequence of wide-sense stopping times, and $T = \lim_{n\to\infty} T_n$.*

1) *If (T_n) is decreasing, and for each n, $T < T_n$ on $[0 < T_n]$ then*

$$\mathcal{F}_{T+} = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n -}. \tag{6.1}$$

2) *If (T_n) is increasing, and for each n, $T_n < T$ on $[0 < T]$, then*

$$\mathcal{F}_{T-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n +}. \tag{6.2}$$

Proof. 1) Put $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+}, t \geq 0$. Since $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_{0+} = \mathcal{F}_0$, we also have $\mathcal{G}_{t-} = \mathcal{F}_{t-}, t \geq 0$. Now T and T_n are $(\mathcal{G}_t)$-stopping times. By Theorem 3.4.9) we have

$$\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{G}_T \subset \mathcal{G}_{T_n -} = \mathcal{F}_{T_n -}.$$

On the other hand, by theorem 3.4.10)

$$\mathcal{F}_{T+} \subset \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n -} \subset \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n +} = \mathcal{F}_{T+}.$$

Hence (6.1) is established.

2) By the same argument, we have $\mathcal{F}_{T_n +} \subset \mathcal{F}_{T-}$. Then by Theorem 3.4 10)

$$\bigvee_n \mathcal{F}_{T_n +} \subset \mathcal{F}_{T-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n -} \subset \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n +}.$$

Hence (6.2) is established. □

3.7 Theorem. 1) *If S is a stopping time, r.v. $T \in \mathcal{F}_S$ and $T \geq S$, then T is a stopping time. If S is a wide-sense stopping time, r.v. $T \in \mathcal{F}_{S+}, T \geq S$ and $T > S$ on $[S < \infty]$, then T is a stopping time, too.*

2) *Let S be a wide-sense stopping time. For each $n \geq 1$ put*

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k-1}{2^n} \leq S < \frac{k}{2^n}]} + (+\infty) I_{[S=+\infty]}. \tag{7.1}$$

Then $S_n, n \geq 1$, are stopping times, and $S_n \downarrow S$.

3) *If S and T are two stopping times, so is $S + T$.*

Proof. 1) For the first case, for each $t \geq 0$, $[T \leq t] \in \mathcal{F}_S$, and by the definition of $\mathcal{F}_S$ we have

$$[T \leq t] = [T \leq t][S \leq t] \in \mathcal{F}_t.$$

Hence T is a stopping time. For the second case, for each $t \geq 0$, $[T \leq t] \in \mathcal{F}_{S+}$, and by Theorem 3.4.6) we have

$$[T \leq t] = [T \leq t][S < t] \in \mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t$$

(note that $T > 0$ by the assumption). Hence T is a stopping time, too.

2) By Theorem 3.4.1) we know $S_n \in \mathcal{F}_{S-}$. Obviously, $S_n \geq S$ and $S_n > S$ on $[S < \infty]$. Thus by 1) $S_n, n \geq 1$, are stopping times. $S_n \downarrow S$ is trivial.

3) Since $S + T \geq S \vee T$ and $S + T \in \mathcal{F}_{S\vee T}$, by 1) $S + T$ is a stopping time. □

3.8 Definition. Let T be a non-negative function on Ω and $A \subset \Omega$. Put

$$T_A = TI_A + (+\infty)I_{A^c}.$$

T_A is called the *restriction of T on A*. Obviously, $T \leq T_A$.

3.9 Theorem. *1) Let T be a stopping time and $A \in \mathcal{F}_\infty$. Then T_A is a stopping time if and only if $A \in \mathcal{F}_T$.*

2) Let T be a stopping time and $A \in \mathcal{F}_T$. Then

$$\mathcal{F}_{T_A} \cap A = \mathcal{F}_T \cap A, \ \mathcal{F}_{T_A} \cap A^c = \mathcal{F}_\infty \cap A^c, \tag{9.1}$$

$$\mathcal{F}_{T_A-} \cap A = \mathcal{F}_{T-} \cap A, \ \mathcal{F}_{T_A-} \cap A^c = \mathcal{F}_{\infty} \cap A^c. \tag{9.2}$$

In particular, if $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$, then for any $A \in \mathcal{F}_T$

$$\mathcal{F}_{T_A} = \mathcal{F}_{T_A-}.$$

Proof. 1) is evident.

2) Let $B \in \mathcal{F}_{T_A}$. Then $AB \in \mathcal{F}_{T_A}$, and for each $t \geq 0$

$$AB[T \leq t] = AB[T_A \leq t] \in \mathcal{F}_t.$$

This means $AB \in \mathcal{F}_T$ and $B \cap A = (AB) \cap A \in \mathcal{F}_T \cap A$. Hence $\mathcal{F}_{T_A} \cap A \subset \mathcal{F}_T \cap A$. But $T \leq T_A, \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T_A}$. Thus $\mathcal{F}_{T_A} \cap A = \mathcal{F}_T \cap A$. Noting that $(T_A)_{A^c} = +\infty$ and making use of the assertion established just before, we obtain

$$\mathcal{F}_{T_A} \cap A^c = \mathcal{F}_{(T_A)_{A^c}} \cap A^c = \mathcal{F}_\infty \cap A^c.$$

Let $B \in \mathcal{F}_t$. Then $B[t < T_A] \in \mathcal{F}_{T_A-}, B[t < T] \in \mathcal{F}_{T-}$. Since

$$(B[t < T_A]) \cap A = (B[t < T]) \cap A \in \mathcal{F}_{T-} \cap A.$$

$\mathcal{F}_{T_A-} \cap A \subset \mathcal{F}_{T-} \cap A$. But $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_{T_A-}$. Thus $\mathcal{F}_{T_A-} \cap A = \mathcal{F}_{T-} \cap A$. Similarly, we have

$$\mathcal{F}_{T_A-} \cap A^c = \mathcal{F}_{(T_A)_{A^c}-} \cap A^c = \mathcal{F}_\infty \cap A^c.$$

Now assume $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$ and $A \in \mathcal{F}_T$. Let $B \in \mathcal{F}_{T_A}$. By (9.1), $AB \in \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_{T_A-}$. By (9.2), $A^cB \in \mathcal{F}_{T_A-} \bigcap A^c \subset \mathcal{F}_{T_A}$. Thus $B = (AB) \bigcup (A^cB) \in \mathcal{F}_{T_A-}$. Hence $\mathcal{F}_{T_A} = \mathcal{F}_{T_A-}$. □

§2. Progressively Measurable, Optional and Predictable Processes

In this paragraph we study three most useful classes of measurable processes: progressively measurable, optional and predictable processes.

3.10 Definition. Let $X = (X_t)_{t \geq 0}$ be a stochastic process. X is said to be *measurable*, if $X_t(\omega)$, as a function of (ω, t), is $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+)$-measurable. X is said to be *progressively measurable* (or simply *progressive*), if for each $t \geq 0$, restricted on $\Omega \times [0, t]$, X is $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0, t])$-measurable.

Obviously, every progressive process is measurable and adapted. But the converse is not true in general.

3.11 Theorem. *Right-continuous (or left-continuous) adapted processes are progressive.*

Proof. Let $X = (X_t)$ be a right-continuous adapted process. For any given $t \geq 0$, define a sequence of processes on $\Omega \times [0, t]$ as follows:

$$X_s^{(n)}(\omega) = X_0(\omega)I_{[s=0]} + \sum_{k=1}^{2^n} X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega)I_{[\frac{(k-1)t}{2^n} < s \leq \frac{kt}{2^n}]}, s \in [0, t].$$

Then $X^{(n)}, n \geq 1$, are $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0, t])$-measurable, and $\lim_{n \to \infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega)$ on $\Omega \times [0, t]$. Hence restricted on $\Omega \times [0, t]$, X is $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0, t])$-measurable, i.e., X is progressive. The proof for left-continuous adapted processes is similar. □

3.12 Theorem. *Let (X_t) be a progressive process. Then for every stopping time T, $X_T I_{[T<\infty]}$ is $\mathcal{F}_T$-measurable.*

Proof. For each $t \geq 0$, $T \wedge t \in \mathcal{F}_t$. Therefore, $X_{T\wedge t}$, as the composition of measurable mapping from $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ to $(\Omega \times [0, t], \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0, t]))$: $\omega \mapsto (\omega, T(\omega) \wedge t)$ and measurable mapping from $(\Omega \times [0, t], \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0, t]))$ to $(R, \mathcal{B}(R))$: $(\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$, is $\mathcal{F}_t$-measurable. (This assertion is valid even for a wide-sense stopping time.)

Let $A \in \mathcal{B}(R)$. For each $t \geq 0$

$$[X_T I_{[T<\infty]} \in A][T \leq t] = [X_{T\wedge t} \in A][T \leq t] \in \mathcal{F}_t.$$

Since $X_T I_{[T<\infty]} = \lim_{n \to \infty} X_{T\wedge n} I_{[T \leq n]}$, we have $X_T I_{[T<\infty]} \in \mathcal{F}_\infty$. Hence $[X_T I_{[T<\infty]} \in A] \in \mathcal{F}_T$, i.e., $X_T I_{[T<\infty]}$ is $\mathcal{F}_T$-measurable. □

Remark. Let $(X_t, t \in R_+)$ be a progressive process, and X_∞ be a real $\mathcal{F}_\infty$-measurable r.v.. Then for any stopping time T, $X_T = X_T I_{[T<\infty]} + X_\infty I_{[T=\infty]}$ is $\mathcal{F}_T$-measurable.

3.13 Definition. A subset B of $\Omega \times R_+$ is called a *stochastic set*, if its indicator I_B is a stochastic process: $I_B = ((I_B)_t)_{t \geq 0}$, where $(I_B)_t = I_{B_t}$, and B_t is the section of B at t. A set $B \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+)$ is called a *measurable*

(stochastic) set. A subset B of $\Omega \times R_+$ is said to be *progressive*, if I_B is *progressive*. All progressive sets constitute a sub-σ-field of $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+)$, called *progressive σ-field*, and denoted by $\mathcal{E}$.

It is easy to see that a process is progressive if and only if it is $\mathcal{E}$-measurable.

3.14 Definition. Let U and V be two $\overline{R}_+$-valued functions defined on Ω, and $U \leq V$. Define

$$[\![U, V]\!] = \{(\omega, t) \in \Omega \times R_+ : U(\omega) \leq t \leq V(\omega)\},$$

$$[\![U, V[\![= \{(\omega, t) \in \Omega \times R_+ : U(\omega) \leq t < V(\omega)\},$$

$$]\!]U, V]\!] = \{(\omega, t) \in \Omega \times R_+ : U(\omega) < t \leq V(\omega)\},$$

$$]\!]U, V[\![= \{(\omega, t) \in \Omega \times R_+ : U(\omega) < t < V(\omega)\}.$$

Note that when $V = +\infty$, we have $[\![U, +\infty]\!] = [\![U, +\infty[\![$. When U and V are r.v., $[\![U, V]\!], [\![U, V[\![, \cdots$ are called *stochastic intervals*. $[\![U]\!]$ is defined as $[\![U, U]\!]$, and is called the *graph* of U.

3.15 Definition. The σ-field on $\Omega \times R_+$, generated by all cadlag adapted processes, is called *optional σ-field*, and denoted by $\mathcal{O}$. The σ-field on $\Omega \times R_+$, generated by all left-continuous adapted processes, is called *predictable σ-field*, and denoted by $\mathcal{P}$. A stochastic set or process is said to be *optional* (resp. *predictable*), if it is $\mathcal{O}$-(resp.$\mathcal{P}$-) measurable.

From Theorem 3.11 we know that all optional or predictable processes are adapted.

If $X = (X_t)_{t \geq 0}$ is a cadlag adapted process, then the left limit process $X_- = (X_{t-})_{t \geq 0}$ is predictable. Some elementary optional or predictable sets and processes are given in the following theorem.

3.16 Theorem. 1) *Let S and T be a couple of stopping times, and $S \leq T$. Then all intervals $[\![S, T]\!], [\![S, T[\![, \cdots$ and the graphs of S and T are optional. Moreover, if ξ is a real $\mathcal{F}_S$-measurable r.v., then $X = \xi I_{[\![S,T[\![}$ is an optional process.*

2) *Let S and T be a couple of wide-sense stopping times, and $S \leq T$. Then $]\!]S, T]\!]$ is predictable. Moreover, if ξ is a real $\mathcal{F}_{S+}$-measurable r.v., then $\xi I_{]\!]S,T]\!]}$ is a predictable process.*

Proof. 1) It is easy to see that $I_{[\![S,T[\![}$ is cadlag and adapted. Hence $[\![S, T[\![$ is optional. Put $T_n = S + \dfrac{1}{n}$. Then $[\![S]\!] = \bigcap_n [\![S, T_n[\![$ is optional. So

is $[\![T]\!]$. Thus $[\![S, T]\!],]\!]S, T]\!]$ and $]\!]S, T[\![$ are all optional.

By Corollary 3.5.2) we know that $X_t = \xi I_{[S \leq t]} I_{[t < T]} \in \mathcal{F}_t$. Then $X = \xi I_{[\![S,T[\![}$ is adapted and cadlag. Immediately, X is optional.

2) Since $I_{]\!]S,T]\!]}$ is left-continuous and adapted, $]\!]S, T]\!]$ is predictable. By Corollary 3.5.3) we know that for $t > 0$, $X_t = \xi I_{[S<t]} I_{[t \leq T]} \in \mathcal{F}_{t-}$. Obviously, $X_0 = 0$. Hence $X = \xi I_{]\!]S,T]\!]}$ is a left-continuous adapted process, and is predictable immediately. □

3.17 Theorem. *Denote by $\mathcal{T}$ the collection of all stopping times. Then*

$$\mathcal{O} = \sigma\{[\![S, \infty[\![: S \in \mathcal{T}\}.$$

Proof. Put $\mathcal{C} = \{[\![S, \infty[\![: S \in \mathcal{T}\}$. Since $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$, we have $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{O}$. It suffices to show $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$.

Let (X_t) be a cadlag adapted process. We are going to show that (X_t) is $\sigma(\mathcal{C})$-measurable. For each given $\varepsilon > 0$, put $T_0^\varepsilon = 0$, and define $(T_n^\varepsilon)_{n \geq 1}$ by induction as follows: for $n \geq 1$

$$T_{n+1}^\varepsilon(\omega) = \inf\{t : t > T_n^\varepsilon(\omega), |X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_t(\omega)| \geq \varepsilon \quad \text{or} \quad |X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_{t-}(\omega)| \geq \varepsilon\}. \tag{17.1}$$

We are able to show all T_n^ε are stopping times by induction on n. Noting that the set on the right hand side of (17.1) is closed under the limit on the right in R_+, for every $r \in R_+$ we have

$$[T_{n+1}^\varepsilon = r] \subset [T_n^\varepsilon < r]([|X_{T_n^\varepsilon} - X_r| \geq \varepsilon] \cup [|X_{T_n^\varepsilon} - X_{r-}| \geq \varepsilon]) \subset [T_{n+1}^\varepsilon \leq r]. \tag{17.2}$$

Because

$$\bigcup_{r \leq t} [T_{n+1}^\varepsilon = r] = \bigcup_{r \leq t} [T_{n+1}^\varepsilon \leq r] = [T_{n+1}^\varepsilon \leq t],$$

from (17.2) we obtain

$$[T_{n+1}^\varepsilon \leq t] = \bigcup_{r \leq t} \{[T_n^\varepsilon < r]([|X_{T_n^\varepsilon} - X_r| \geq \varepsilon] \cup [|X_{T_n^\varepsilon} - X_{r-}| \geq \varepsilon])\}$$
$$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{r \in Q_t} \{[T_n^\varepsilon < r][|X_{T_n^\varepsilon} - X_r| > \varepsilon(1 - \frac{1}{m})]\},$$

where $Q_t = (Q \cap [0, t]) \cup \{t\}$. Assume T_n^ε is a stopping time, by Theorem 3.4.4) we know $[T_{n+1}^\varepsilon \leq t] \in \mathcal{F}_t$, i.e., T_{n+1}^ε is a stopping time, too.

Obviously, (T_n^ε) is increasing. When $T_{n+1}^\varepsilon(\omega) < \infty$, $T_{n+1}^\varepsilon(\omega) > T_n^\varepsilon(\omega)$ and $|X_{T_{n+1}^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega)| \geq \varepsilon$ or $|X_{T_{n+1}^\varepsilon(\omega)-}(\omega) - X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega)| \geq \varepsilon$ must

hold. Since $X_\cdot(\omega)$ has finite left limits on $]0,\infty[$, $(T_n^\varepsilon(\omega))_{n\geq 1}$ has no finite accumulation point. Hence $T_n^\varepsilon(\omega)\uparrow +\infty$. Put

$$X^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} X_{T_n^\varepsilon} I_{[T_n^\varepsilon, T_{n+1}^\varepsilon[}.$$

For all $t \in [T_n^\varepsilon(\omega), T_{n+1}^\varepsilon(\omega)[$, $|X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_t(\omega)| < \varepsilon$. Thus for all $(\omega,t) \in \Omega \times \boldsymbol{R}_+$, $|X_t^\varepsilon(\omega) - X_t(\omega)| < \varepsilon$. This means

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} X_t^\varepsilon(\omega) = X_t(\omega).$$

It is easy to show that $X_{T_n^\varepsilon} I_{[T_n^\varepsilon, T_{n+1}^\varepsilon[}$ is $\sigma(\mathcal{C})$-measurable (to approximate $X_{T_n^\varepsilon}$ by $\mathcal{F}_{T_n^\varepsilon}$-measurable simple functions). Hence for each $\varepsilon > 0$, X^ε is $\sigma(\mathcal{C})$-measurable, and so is X. □

3.18 Definition. A stochastic set B is called a *thin set*, if $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\![T_n]\!]$, where $T_n, n \geq 1$, are stopping times. Obviously, a thin set is optional.

3.19 Theorem. *If a progressive set B is contained in a thin set, then B is also a thin set.*

Proof. Let $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [\![T_n]\!]$, where each T_n is a stopping time. Put

$$L_n = \{\omega : (\omega, T_n(\omega)) \in B\}.$$

Then $I_{L_n} = I_B(T_n) I_{[T_n<\infty]}$. By Theorem 3.12, $L_n \in \mathcal{F}_{T_n}$. Hence

$$(T_n)_{L_n} = T_n I_{L_n} + (+\infty) I_{L_n^c}$$

is a stopping time. Evidently, we have

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\![(T_n)_{L_n}]\!]. \qquad \square$$

3.20 Theorem. *Let (X_t) be an optional process. Then there exists a predictable process (Y_t) such that*

$$A = \{(\omega,t) : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

is a thin set.

Proof. Denote by $\mathcal{H}$ the collection of all optional processes for which the assertion holds. Obviously, $\mathcal{H}$ is a linear space. Put

$$\mathcal{C} = \{[\![S,T[\![:\ S \leq T,\ S,\ T \in \mathcal{T}\}$$

(recall that $\mathcal{T}$ is the set of all stopping times). If $S \leq T, U \leq V, S, T, U, V \in \mathcal{T}$,

$$[\![S,T[\![\cap [\![U,V[\![= [\![(S\vee U), (S \vee U) \vee (T \wedge V)[\![.$$

This means that $\mathcal{C}$ is a π-class (Definition 1.1). Let $S, T \in \mathcal{T}$, and $S \leq T$. Put $X = I_{[\![S,T[\![}$. Then $Y =]\!]S,T]\!]$ is a predictable process, and

$$[X \neq Y] \subset [\![S]\!] \cup [\![T]\!].$$

Hence the indicators of sets in $\mathcal{C}$ belong to $\mathcal{H}$.

Let $X^{(n)} \in \mathcal{H}$, and $0 \leq X^{(n)} \uparrow X < +\infty$. Take predictable processes $Y^{(n)}$ such that all $[X^{(n)} \neq Y^{(n)}]$ are thin sets. Put

$$\overline{Y} = \limsup_{n\to\infty} Y^{(n)}, \qquad Y = \overline{Y} I_{[|\overline{Y}|<\infty]}.$$

Then Y is predictable, and

$$[X \neq Y] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [X^{(n)} \neq Y^{(n)}]. \tag{20.1}$$

The right side of (20.1) is still a thin set. By Theorem 3.19, $X \in \mathcal{H}$. Since $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{O}$, by the monotone class Theorem (Theorem 1.4) we know that $\mathcal{H}$ is just the collection of all optional processes. □

3.21 Theorem. *Put*

$$\mathcal{C}_1 = \{A \times \{0\} : A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{A \times]s,t] : 0 < s < t, s,t \in \boldsymbol{Q}_+, A \in \bigcup_{r<s} \mathcal{F}_r\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{A \times \{0\} : A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{A \times [s,t[: 0 < s < t, s,t \in \boldsymbol{Q}_+, A \in \bigcup_{r<s} \mathcal{F}_r\},$$

$$\mathcal{C}_3 = \{A \times \{0\} : A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{[\![S,\infty[\![: S \in \mathcal{T}\}.$$

Then $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_3) = \mathcal{P}$. In particular, $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$.

Proof. First of all, $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{P}$ is obvious. Thus $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{P}$. On the other hand, for each left-continuous adapted process (X_t) define

$$X_t^{(n)} = X_0 I_{[t=0]} + \sum_{k=0}^{\infty} X_{\frac{k}{2^n}} I_{[\frac{k}{2^n} < t \leq \frac{k+1}{2^n}]}.$$

Then $\lim_{n\to\infty} X_t^{(n)} = X_t$. It is easy to see that $(X_t^{(n)})$ is $\sigma(\mathcal{C}_1)$-measurable for each $n \geq 1$, and so is (X_t). Hence $\mathcal{P} \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$. We obtain $\sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{P}$.

Secondly, let $A \in \mathcal{F}_r, r < s$. Apparently,

$$A \times]s,t] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A \times [s + \frac{t-s}{n}, t + \frac{1}{m}[,$$

$$A \times [s,t[= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A \times]r + (1 - \frac{1}{n})(s-r), t - \frac{t-s}{n}].$$

Hence $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$, and $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$. Thus we obtain $\sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{P}$.

Obviously, we have $\sigma(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{P}$ and $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_3)$ $(A \times]s,t] =]\!]s_A, t_A]\!]$, $0 < s < t$, $A \in \bigcup_{r<s} \mathcal{F}_r)$. Hence $\sigma(\mathcal{C}_3) = \mathcal{P}$.

Finally, since all sets in $\mathcal{C}_2$ are optional, we have $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$. □

3.22 Corollary. *Let T be a stopping time. Define*

$$f(\omega) = (\omega, T(\omega)) \qquad \text{on } [T < \infty].$$

Then

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{F}_T \cap [T < \infty], \tag{22.1}$$

$$f^{-1}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_{T-} \cap [T < \infty]. \tag{22.2}$$

Proof. We give the proof of (22.2) only. The proof for (22.1) is similar. Let $A_0 \in \mathcal{F}_0$. Then $f^{-1}(A \times \{0\}) = A[T = 0] \in \mathcal{F}_T \bigcap [T < \infty]$. Let $S \in \mathcal{T}$. Then $f^{-1}(]\!]S, \infty[\![) = [S < T < \infty] \in \mathcal{F}_{T-} \bigcap [T < \infty]$. By Theorem 3.21 $f^{-1}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{F}_{T-} \bigcap [T < \infty]$. Conversely, let $A \in \mathcal{F}_0$. Then $A[T < \infty] = f^{-1}(A \times R_+) \in f^{-1}(\mathcal{P})$. Let $A \in \mathcal{F}_t$. Then

$$(A[t < T])[T < \infty] = f^{-1}(A \times]t, \infty[) \in f^{-1}(\mathcal{P}).$$

Hence $\mathcal{F}_{T-} \bigcap [T < \infty] \subset f^{-1}(\mathcal{P})$. (22.2) follows. In fact, (22.2) holds even for any wide-sense stopping time T. □

3.23 Corollary. 1) *Let T be a stopping time. Then for any optional process (X_t), $X_T I_{[T<\infty]}$ is $\mathcal{F}_T$-measurable. Conversely, if ξ is a real $\mathcal{F}_T$-measurable r.v., then there exists an optional process (X_t) such that $\xi I_{[T<\infty]} = X_T I_{[T<\infty]}$.*

2) *Let T be a wide-sense stopping time. Then for any predictable process (X_t), $X_T I_{[T<\infty]}$ is $\mathcal{F}_{T-}$-measurable. Conversely, if ξ is a real $\mathcal{F}_{T-}$-measurable r.v., then there exists a predictable process (X_t) such that $\xi I_{[T<\infty]} = X_T I_{[T<\infty]}$.*

Proof. Using the mapping $f(\omega) = (\omega, T(\omega))$ on $[T < \infty]$, for any process (X_t), $X_T I_{[T<\infty]}$, being restricted on $[T < \infty]$, results from the composition of X and f. Now the assertions follow from Corollary 3.22 and Doob's measurability theorem (Theorem 1.5) immediately. □

3.24 Corollary. *Let T be a stopping time, and $X = (X_t)$ be an optional (resp. predictable) process. Then the stopped process of X at T:*

$$X^T = (X_t^T)_{t\geq 0} = (X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$$

is still optional (resp. predictable).

Proof. In fact, the stopped process X^T can be written as

$$X^T = X I_{[\![0,T]\!]} + X_T I_{]\!]T,\infty[\![}.$$

We already know that $I_{[\![0,T]\!]}$ and $X_T I_{]\!]T,\infty[\![} = (X_T I_{[T<\infty]}) I_{]\!]T,\infty[\![}$ are predictable (Theorems 3.12 and 3.16.2)). Hence if X is optional (resp. predictable), so is X^T. In fact, if X is predictable, even for any wide-sense stopping time T, X^T is predictable. □

§3. Predictable and Accessible Times

3.25 Definition. An $\overline{R}_+$-valued r.v. T, defined on Ω, is called a *predictable time*, if $[\![T, \infty[\![$ is a predictable set.

Obviously, a predictable time is a stopping time, and a constant stopping time is predictable. Besides, let T be a wide-sense stopping time. Since $]\!]T, \infty[\![$ is a predictable set, T is a predictable time if and only if $[\![T]\!]$ is predictable.

3.26 Definition. Let T be a wide-sense stopping time, $(T_n)_{n\geq 1}$ be an increasing sequence of wide-sense stopping times, and for all $n, T_n \leq T$. Let $A \subset \Omega$. We say that the sequence (T_n) *foretells* T on A, if on $A[T > 0]$ we have $T_n < T$ for all n and $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. We say briefly that (T_n) foretells T if (T_n) foretells T on the whole Ω.

A wide-sense stopping time T is calleld *foretellable*, if there exists an increasing sequence of wide-sense stopping times which foretells T.

3.27 Theorem. *Let T be a foretellable wide-sense stopping time. If $[T = 0] \in \mathcal{F}_0$, then T is a predictable time. In particular, if $\mathcal{F}_{0+} = \mathcal{F}_0$, then all foretellable wide-sense stopping times are predictable times.*

Proof. Let (T_n) be an increasing sequense of wide-sense stopping times which foretells T. Then

$$[\![T, \infty[\![= ([T = 0] \times \{0\}) \cup \Big(\bigcap_n]\!]T_n, \infty[\![\Big) \in \mathcal{P}.$$

Hence T is a predictable time. □

3.28 Corollary. $\mathcal{P} = \sigma\{[\![S, T]\!]: S$ *and* T *are foretellable predictable times, and* $S \leq T\}$.

Proof. In Theorem 3.21 $\mathcal{C}_2$ are composed of two classes of elements. The elements of the first class have the form $A \times \{0\}$, where $A \in \mathcal{F}_0$. We have

$$A \times \{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\![0_A, (\tfrac{1}{n})_A[\![.$$

The stopping times 0_A and $(\frac{1}{n})_A$ are foretelled by sequences $(k \wedge 0_A)_{k\geq 1}$ and $\left(k \wedge \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)_A\right)_{k\geq 1}$ respectively. The elements of the second class have the form $A \times [s,t[$, where $0 < s < t$ and $A \in \bigcup_{r<s} \mathcal{F}_r$. We have $A \times [s,t[= [\![s_A, t_A [\![$. Take n sufficienlty large such that $A \in \mathcal{F}_{s-\frac{1}{n}}$. Then the stopping times s_A and t_A are foretelled by sequences $\left((n+k) \wedge \left(s - \frac{1}{n+k}\right)_A\right)_{k\geq 1}$ and $\left((n+k) \wedge \left(t - \frac{1}{n+k}\right)_A\right)_{k\geq 1}$ respectively. □

The main properties of predictable times are listed in the following theorem.

3.29 Theorem. 1) *Suppose (S_n) is a sequence of predictable times. Then $\bigvee_n S_n$ is a predictable time. Moreover, if (S_n) is stationary, $\bigwedge_n S_n$ is a predictable time, too.*

2) *Let S be a predictable time, and T be a stopping time. Then*

$$A \in \mathcal{F}_{S-} \Rightarrow A[S \leq T] \in \mathcal{F}_{T-}, \quad A[S = T] \in \mathcal{F}_{T-}.$$

In pariculdar, $[S = T] \in \mathcal{F}_{T-}$.

3) *If S and T are predictable times, then $\mathcal{F}_{S-} \bigcap \mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{(S\wedge T)-}$.*

4) *If S and T are predictable times, then*

$$A \in \mathcal{F}_{(S\vee T)-} \Rightarrow$$

$$A[S \leq T] \in \mathcal{F}_{T-}, \ A[S < T] \in \mathcal{F}_{T-}, \ A[S = T] \in \mathcal{F}_{(S\wedge T)-},$$

$$\mathcal{F}_{(S\vee T)-} = \mathcal{F}_{S-} \vee \mathcal{F}_{T-} = \{A \cup B : \ A \in \mathcal{F}_{S-}, B \in \mathcal{F}_{T-}, AB = \emptyset\}.$$

5) *Let (S_n) be a stationary sequence of predictable times. Then*

$$\mathcal{F}_{(\bigvee_n S_n)-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n-} = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathcal{F}_{S_n-}, n \geq 1, A_k A_j = \emptyset, k \neq j \right\},$$

$$\mathcal{F}_{(\bigwedge_n S_n)-} = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n} .$$

6) *Let S be a stopping time, and $A \in \mathcal{F}_{\infty}$. If S_A is a predictable time, then $A \in \mathcal{F}_{S-}$.*

7) *If S is a predictable time, then so is S_A for all $A \in \mathcal{F}_{S-}$.*

8) *Let S be a predictable time, and ξ be a real $\mathcal{F}_{S-}$-measurable r.v. then the process $\xi I_{[\![S,\infty[\![}$ is predictable.*

Proof. 1) We have

$$[\![\bigvee_n S_n, \infty[\![= \bigcap_n [\![S_n, \infty[\![.$$

If (S_n) is stationary, then

$$[\![\bigwedge_n S_n, \infty[\![= \bigcup_n [\![S_n, \infty[\![.$$

2) By Theorem 3.4, $A[S < T] \in \mathcal{F}_{T-}, A[T = \infty] \in \mathcal{F}_{T-}$, it suffices to show $A[S = T][T < \infty] \in \mathcal{F}_{T-}$. Suppose that (X_t) is a predictable process such that $I_A I_{[S<\infty]} = X_S I_{[S<\infty]}$ (Corollary 3.23.2)). Put $Y = X I_{[\![S]\!]}$. Then Y is predictable, and

$$Y_T I_{[T<\infty]} = X_T I_{[S=T]} I_{[T<\infty]} = X_S I_{[S=T<\infty]} = I_A I_{[S=T<\infty]}.$$

Hence $A[S = T < \infty] \in \mathcal{F}_{T-}$ (Corollary 3.23.2)).

3) It suffices to show $\mathcal{F}_{S-} \cap \mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_{(S\wedge T)}$. Let $A \in \mathcal{F}_{S-} \cap \mathcal{F}_{T-}$. Then

$$A[S \leq T] = A[S = S \wedge T] \in \mathcal{F}_{(S\wedge T)-},$$

$$A[T \leq S] = A[T = S \wedge T] \in \mathcal{F}_{(S\wedge T)-}.$$

Hence $A = (A[S \leq T]) \cup [A[T \leq S]) \subset \mathcal{F}_{(S\wedge T)}$.

4) We have

$$A[S \leq T] = A[S \vee T = T] \in \mathcal{F}_{T-},$$

$$A[S < T] = (A[S \leq T]) \bigcap [S < T] \in \mathcal{F}_{T-}.$$

Hence $A[S = T] \in \mathcal{F}_{T-}$. In view of the symmetry between S and T, we obtain

$$A[S = T] \in \mathcal{F}_{S-} \cap \mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{(S\wedge T)-}.$$

Let $C \in \mathcal{F}_{(S\vee T)-}$. Put $A = C[T < S]$, $B = C[S \leq T]$. Then

$$C = A \cup B, A \in \mathcal{F}_{S-}, \ B \in \mathcal{F}_{T-}, AB = \emptyset.$$

5) The proof is completely similar to that of Corollary 3.5.6).

6) Put $X = I_{[\![S_A,\infty[\![}$. Then X is a predictable process. By Corollary 3.23.2),

$$I_{A[S<\infty]} = X_S I_{[S<\infty]}$$

is $\mathcal{F}_{S-}$-measurable, i.e., $A[S < \infty] \in \mathcal{F}_{S-}$. By Theorem 3.4.7), $A[S = \infty] \in \mathcal{F}_{S-}$. Hence $A \in \mathcal{F}_{S-}$.

7) Let $A \in \mathcal{F}_{S-}$. By Corollary 3.23.2), there exists a predictable process X such that

$$I_A I_{[S<\infty]} = X_S I_{[S<\infty]}.$$

Then $[\![S_A]\!] = [X = 1] \bigcap [\![S]\!]$ is predictable. Since S_A is a stopping time, S_A is a predictable time.

8) follows easily from 7). □

3.30 Theorem. *If A is a predictable set and contained in the union of graphs of a sequence of predictable times, then A itself is the union of graphs of a sequence of predictable times.*

Proof. It is completely similar to that of Theorem 3.19. □

3.31 Theorem. *Suppose that A is the union of graphs of a sequence of stopping times (resp. predictable times). Then there exists a sequence of stopping time (T_n) (resp. predictable times) such that $A = \bigcup_n [T_n]$ and $[T_n] \bigcap [T_m] = \emptyset, n \neq m$.*

Proof. We only show the predictable case. Let (S_n) be a sequence of predictable times such that $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [S_n]$. Put $T_1 = S_1$, and for $n \geq 2$

$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} [S_k \neq S_n], \quad T_n = (S_n)_{B_n}.$$

Then $B_n \in \mathcal{F}_{S_n-}$, T_n is predictable, $[T_n] \bigcap [T_m] = \emptyset$ when $n \neq m$, and $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [T_n]$. □

3.32 Theorem. *For any cadlag adapted process $(X_t)_{t\geq 0}$ there exists a sequence of strictly positive stopping times (T_n) such that*

$$[\Delta X \neq 0] = \{(\omega, t) : 0 < t < +\infty,\ X_t(\omega) \neq X_{t-}(\omega)\} = \bigcup_n [T_n]. \tag{32.1}$$

Proof. In the proof of Theorem 3.17 take $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. We are going to show $[\Delta X \neq 0] \subset \bigcup_{n,k\geq 1} [T_n^{1/k}]$. Let $0 < t < +\infty$ and $|X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)| \geq \frac{2}{k}$. Then for some $n \geq 1$ we have

$$T_n^{1/k}(\omega) \leq t < T_{n+1}^{1/k}(\omega).$$

For all $s \in]T_n^{1/k}(\omega), T_{n+1}^{1/k}(\omega)[$, from (17.1) we have

$$\left|X_s(\omega) - X_{T_n^{1/k}(\omega)}(\omega)\right| < \frac{1}{k}, \quad \left|X_{s-}(\omega) - X_{T_n^{1/k}(\omega)}(\omega)\right| < \frac{1}{k}.$$

Thus $|X_s(\omega) - X_{s-}(\omega)| < \frac{2}{k}$. This means that it must be $t = T_n^{1/k}(\omega)$. Now (32.1) follows immediately from Theorem 3.19. □

The following theorem provides a characterization of predictability for cadlag adapted processes.

3.33 Theorem. *Let $X = (X_t)$ be a cadlag adapted process. Then X is predictable if and only if X satisfies the following conditions:*

i) There exists a sequence of strictly positive predictable times (T_n) such that $[\Delta X \neq 0] \subset \bigcup_n [T_n]$.

ii) For each predictable time T, $X_T I_{[T<\infty]} \in \mathcal{F}_{T-}$.

Proof. Necessity. Assume X to be predictable. Then in the proof of Theorem 3.17 we are able to show that $T_n^\varepsilon, n \geq 1$, are predictable times by induction on n. In fact, if T_n^ε is predictable, then

$$A =]T_n^\varepsilon, \infty[\bigcap (\{|X_{T_n^\varepsilon} I_{[T_n^\varepsilon,\infty[} - X_-| \geq \varepsilon\} \cup \{|X_{T_n^\varepsilon} I_{[T_n^\varepsilon,\infty[} - X| \geq \varepsilon\})$$

is a predictable set. We have already known that T_{n+1}^ε is a stopping time. Since $[T_{n+1}^\varepsilon] \subset A$, $[T_{n+1}^\varepsilon] = A \bigcap [0, T_{n+1}^\varepsilon]$ is predictable, T_{n+1}^ε is predictable. Now the condition i) follows from the proof of Theorem 3.32, and the condition ii) follows from Corollary 3.23.2).

Sufficiency. Assume that the conditions i) and ii) are satisfied. By Theorem 3.31 we can assume that the graphs of (T_n) are disjoint. We have

$$X = X_- I_{(\bigcup_n [T_n])^c} + \sum_n X_{T_n} I_{[T_n]}.$$

Since $X_{T_n} I_{[T_n<\infty]} \in \mathcal{F}_{T_n-}$, $X_{T_n} I_{[T_n]} = X_{T_n} I_{[T_n<\infty]}(I_{[T_n,\infty[} - I_{]T_n,\infty[})$ is predictable. Hence so is X. □

3.34 Definition. A stopping time T is called an *accessible time*, if there exists a sequence (T_n) of predictable times such that $[T] \subset \bigcup_n [T_n]$.

Obviously, predictable times are accessible.

3.35 Theorem. *Let T be a stopping time, and (S_n) be an increasing sequence of wide-sense stopping times, dominated by T, i.e., $S_n \leq T$. Put*

$$A[(S_n)] = \left\{(\bigcap_n [S_n < T]) \bigcap [\lim_{n\to\infty} S_n = T]\right\} \bigcup [T = 0] \tag{35.1}$$

(i.e., (S_n) foretells T on $A[(S_n)]$). Then $A[(S_n)] \in \mathcal{F}_{T-}$, and $T_{A[(S_n)]}$ is accessible.

Proof. Noting that $\lim_n S_n \leq T$, we have $[\lim_n S_n = T] = [\lim_n S_n < T]^c \in \mathcal{F}_{T-}$. Hence $A[(S_n)] \in \mathcal{F}_{T-}$. Put $R_n = (S_n)_{[S_n<\lim_n S_n]} \wedge n$. Then (R_n) foretells $R = \lim_n (R_n)$, and $R > 0$. By Theorem 3.27, R is a predictable time. Because $[T_{A[(S_n)]}] \subset [R] \bigcup [0]$, $T_{A[(S_n)]}$ is accessible. □

3.36 Theorem. 1) *If S and T are accessible times, so are $S \vee T$ and $S \wedge T$.*

2) *If T is an accessible time, so is T_A for all $A \in \mathcal{F}_T$.*

3) *Suppose that (T_n) is a monotone sequence of accessible times, and $T = \lim_n T_n$. If (T_n) is increasing, then T is accessible. If (T_n) is decreasing and stationary, then T is accessible, too.*

Proof. 1) and 2) are evident. Let us show 3). In the increasing case, by Theorem 3.35 $T_{A[(S_n)]}$ is accessible, and by (35.1)

$$A[(S_n)]^c = (\bigcup_n [T_n = T]) \cap [T > 0].$$

Hence $[\![T_{A[(S_n)]^c}]\!] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ and $T_{A[(S_n)]^c}$ is accessible. At last, $T = T_{A[(S_n)]} \wedge T_{A[(S_n)]^c}$ is accessible. In the decreasing and stationary case, we have $[\![T]\!] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$. Hence T is accessible. □

Now that we have the concept of accessible time, we may define accessible σ-field according to Theorem 3.17.

3.37 Definition. Denote by $\mathcal{A}$ the collection of all accessible times. The σ-field on $\boldsymbol{R}_+ \times \Omega$, generated by $\{[\![S, \infty[\![: S \in \mathcal{A}\}$ is called *accessible σ-field*. The processes and sets, measurable w.r.t. the accessible σ-field, are called *accessible processes* and *sets* respectively.

If S is an accessible time, then $[\![S]\!] = [\![S, \infty]\!] \backslash]\!]S, \infty[\![$ is an accessible set.

Remark. If the stopping times and optional processes in Theorems 3.19, 3.20 and 3.31 are replaced by accessible times and accessible processes respectively, the assertions remain true, their proofs are completely similar.

The relation between accessible and predictable times or processes is established in the following theorem.

3.38 Theorem. 1) *Assume X to be an accessible process. Then X is predictable if and only if for all predictable time T, $X_T I_{[T<\infty]} \in \mathcal{F}_{T-}$.*

2) *Assume S to be an accessible time. Then S is predictable if and only if for all predictable time T $[S = T] \in \mathcal{F}_{T-}$.*

Proof. 1) The necessity comes from Corollary 3.23.2). Let us show the sufficiency. According to the remark following Definition 3.37, there exists a predictable process Y such that $[X \neq Y]$ is the union of graphs of a sequence of accessible times. Then by Definition 3.34 and Theorem 3.31, there is a sequence of predictable times (S_n) such that $[X \neq Y] \subset \bigcup_n [\![S_n]\!]$,

and $[\![S_n]\!] \cap [\![S_m]\!] = \emptyset$ when $n \neq m$. We have

$$X = Y I_A + \sum_n X_{S_n} I_{[S_n<\infty]} I_{[\![S_n]\!]},$$

where $A = \bigcap_n [\![S_n]\!]^c$. Since A is predictable, so is $Y I_A$. On the other hand, each S_n is predictable. By the assumption, $X_{S_n} I_{[S_n<\infty]} \in \mathcal{F}_{S_n-}$. Hence $X_{S_n} I_{[S_n<\infty]} I_{[\![S_n]\!]}$ is predictable. At last, X is predictable.

2) The necessity comes from Theorem 3.29.2). It suffices to show the sufficiency. Put $X = I_{[\![S]\!]}$. Then X is accessible, and by the assumption for any predictable time T

$$[S = T < \infty] = [S = T][T < \infty] \in \mathcal{F}_{T-}$$

(note that T is $\mathcal{F}_{T-}$-measurable), i.e., $X_T I_{[T<\infty]} = I_{[S=T<\infty]}$ is $\mathcal{F}_{T-}$-measurable. By 1) X is predictable, namely, S is a predictable time. □

3.39 Definition. A filtration $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ is said to be *quasi-left-continuous* if for any predictable time T, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$.

3.40 Theorem. 1) *A filtration $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous if and only if each $\boldsymbol{F}$-asscessible time is $\boldsymbol{F}$-predictable.*

2) *Suppose that $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous. Then for any sequence of stopping times (T_n) we have*

$$\mathcal{F}_{\bigvee_n T_n} = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}. \tag{40.1}$$

Proof. 1) Necessity. Assume that $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous. Let S be an $\boldsymbol{F}$-accessible time, and T be an $\boldsymbol{F}$-predictable time. Then $[S = T] \in \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$. By Theorem 3.28.2), S is predictable.

Sufficiency. Assume that each $\boldsymbol{F}$-accessible time is $\boldsymbol{F}$-predictable. Let T be an $\boldsymbol{F}$-predictable time, and $A \in \mathcal{F}_T$. Then T_A is an accessible time. By the assumption, T_A is predictable . Hence $A \in \mathcal{F}_{T-}$ (Theorem 3.29.6)). This means $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$, i.e., $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous.

2) By Corollary 3.5.6), we have $\mathcal{F}_{\bigvee_{n=1}^{k} T_n} = \bigvee_{n=1}^{k} \mathcal{F}_{T_n}$. In order to prove (40.1), we may suppose that (T_n) is an increasing sequence. Put $T = \bigvee_{n=1}^{\infty} T_n$. Let $H = \bigcap_n [T_n < T]$. Then $H \in \mathcal{F}_{T-}$. Let $A \in \mathcal{F}_T$. We are going

to show $AH \in \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$ and $AH^c \in \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$. We have

$$AH^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A[T = T_n]) \in \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}.$$

Since $T_H > 0$ and $((T_n)_{[T_n<T]} \wedge n)$ foretells T_H on whole Ω, T_H is predictable. Thus by the assumption we have $\mathcal{F}_{T_H} = \mathcal{F}_{T_H-}$. Hence $AH \in \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T_H} = \mathcal{F}_{T_H-}$. But $T = T_H$ on H. Then $H = H \cap [T_H = T]$, and by Theorem 3.29.2)

$$AH = AH \cap [T_H = T] \in \mathcal{F}_{T-}.$$

$\mathcal{F}_{T-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n} \subset \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$ always holds (Theorem 3.4.10)), we have $AH \in \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$. Finally, $A = (AH^c) \bigcup (AH) \in \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$. □

§4. Processes with Finite Variation

3.41 Definition. A process is called an *increasing process*, if its trajectories all are non-negative right-continuous increasing real funtions. A process is said to be *with finite variation*, if it is the difference of two increasing processes.

Obviously, a process with finite variation is cadlag. Therefore, an adapted process with finite variation is optional.

Let $A = (A_t)_{t\geq 0}$ be a process with finite variation. For each $\omega \in \Omega$, $A.(\omega)$ is a real function on $\mathbf{R}_+$ with finite variation, i.e., the variation of $A.(\omega)$ on every finite interval is finite, and it can be uniquely decomposed as: $A.(\omega) = A.^c(\omega) + A.^d(\omega)$, where $A.^c(\omega)$ is a continuous function with finite variation, $A.^d(\omega)$ is a purely discontinuous function with finite variation:

$$A_t^d(\omega) = \sum_{0<s\leq t} \Delta A_s(\omega). \tag{41.1}$$

A^c is called the *continuous part* of A, and A^d the *purely discontinuous* or *jump part* of A.

A process with finite variation A is said to be *purely discontinuous*, if $A^c = 0$.

The following theorem describes the structure of adapted or predictable processes with finite variation.

3.42 Theorem. *If A is an adapted (resp. predictable) process with finite variation, so is A^d (consequently, A^c is predictable). Furthermore, there exists a sequence (S_n) of strictly positive stopping times (resp. predictable times) with disjoint graphs such that*

$$A_t^d = \sum_n \Delta A_{S_n} I_{[S_n\leq t]}. \tag{42.1}$$

(By convention, $\Delta A_\infty = 0$.)

Proof. We only give proof for the predictable case. By Theorems 3.31 and 3.33, there exists a sequence (S_n) of strictly positive predictable times with disjoint graphs such that $[\Delta A \neq 0] \subset \bigcup_n [S_n]$. Since the series in (41.1) is absolutely convergent, it does not depend on the order of summation, so (42.1) holds. However, ΔA is predictable. Therefore, $\Delta A_{S_n} \in \mathcal{F}_{S_n-}$, and A^d is predictable by Theorem 3.29.8). □

Remark. From (41.1) and (42.1) we have

$$\sum_{0<s\leq t} |\Delta A_s| = \sum_n |\Delta A_{S_n}| I_{[S_n\leq t]}.$$

The following theorem is a consequence of the above theorem, and is useful sometimes.

3.43 Theorem. *Let A be an adapted (resp. predictable) purely discontinuous process with finite variation. Then there exists a sequence (T_n) of strictly positive stopping times (resp. predictable times) (here the graphs of (T_n) need not to be disjoint in general), and a sequence (λ_n) of reals such that for all $t \geq 0$*

$$\sum_n |\lambda_n| I_{[T_n\leq t]} < \infty, \tag{43.1}$$

$$A_t = \sum_n \lambda_n I_{[T_n\leq t]}. \tag{43.2}$$

Moreover, if A is an increasing process, each λ_n may be taken to be positive.

Proof. We only give proof for the predictable case. Owing to (42.1), it suffices to show the assertion for predictable increasing process $A = \xi I_{[S,\infty[}$, where S is a strictly positive predictable time, and ξ is a non-negative real $\mathcal{F}_{S-}$-measurable r.v.. Let (ξ_n) be an increasing sequence of non-negative $\mathcal{F}_{S-}$-measurable simple r.v. such that $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$. Then $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_{n-1})$, $\xi_0 = 0$. Hence there exits a sequence (λ_n) of reals

and a sequence (H_n) of $\mathcal{F}_{S-}$-measurable sets such that $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n I_{H_n}$. For each n define $T_n = S_{H_n}$, then T_n is a predictable time, and we have

$$A_t = \sum_n \lambda_n I_{[T_n \le t]}. \quad \square$$

3.44 Theorem. *Let $A = (A_t)$ be an adapted (resp. predictable) process with finite variation. Then $B_t = \int_{[0,t]} |dA_s|$, the variation process of A, is an adapted (resp. predictable) increasing process, and A can be represented as the difference of two adapted (resp. predictable) increasing processes.*

Proof. By Theorem 3.42 we know that

$$\int_{[0,t]} |dA_s^d| = \sum_n |\Delta A_{S_n}| I_{[S_n \le t]}$$

is an adapted (resp. predictable) increasing process, and

$$\int_{[0,t]} |dA_s^c| = |A_0| + \lim_{n\to\infty} \sum_{0 \le k < 2^n} |A^c_{\frac{k+1}{2^n}t} - A^c_{\frac{k}{2^n}t}|$$

is an adapted continuous (consequently, predictable) increasing process. Their sum $B_t = \int_{[0,t]} |dA_s|$, therefore, is an adapted (resp. predictable) increasing process. Define

$$A^+ = \frac{1}{2}(B + A), \quad A^- = \frac{1}{2}(B - A).$$

Then A^+ and A^- are adapted (resp. predictable) increasing processes, and $A = A^+ - A^-$. $\square$

Below we investigate the Lebesgue-Stieltjes integrals by paths of measurable processes w.r.t. processes with finite variation.

3.45 Definition. Let $H = (H_t)$ be a measurable process, and $A = (A_t)$ be a process with finite variation. If for all $\omega \in \Omega$ and $t \ge 0$ Lebesgue-Stieltjes integral

$$\int_{[0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega)$$

exists and is finite (i.e., $\int_{[0,t]} |H_s(\omega)| |dA_s(\omega)| < \infty$), we say that H is *integrable w.r.t. A*. At this time we define

$$B = (B_t), \quad B_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega)$$

as the stochastic integral of H w.r.t. A, and denote $B = H.A$. Trivially, B is still a process with finite variation.

3.46 Theorem. *Let $H = (H_t)$ be a measurable process, and $A = (A_t)$ be a process with finite variation. Assume H is integrable w.r.t. A.*

1) If H is progressive and A is adapted, then $H.A$ is adapted.

2) If both H and A are predictable, so is $H.A$.

Proof. Without loss of generality, we may assume that A is an increasing process. It is easy to show by the monotone class argument that for each measurable proess H with $\int_{[0,\infty[} |H_s| dA_s < \infty$, $\int_{[0,\infty[} H_s dA_s$ is $\mathcal{F}$ measurable. Hence applying this assertion to $HI_{[0,t]}$ and A_t on $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ leads to 1). In order to show 2), consider the following decomposition of A:

$$A_t = A_t^c + \sum_n \Delta A_{S_n} I_{[S_n \le t]},$$

where (S_n) is a sequence of predictable times with disjoint graphs (Theorem 3.42). We have

$$\int_{[0,t]} H_s dA_s = \int_{[0,t]} H_s dA_s^c + \sum_n H_{S_n} \Delta A_{S_n} I_{[S_n \le t]}.$$

By 1) the first process on the right side is adapted and continuous. Therefore, it is predictable. The second process on the right side is predictable apparently. Since H is predictable, $H_{S_n} I_{[S_n < \infty]} \in \mathcal{F}_{S_n-}$, and by Theorem 3.29.8) $H_{S_n} \Delta A_{S_n} I_{[S_n, \infty[}$ is predictable. $\square$

§5. Changes of Time

3.47 Definition. A family of stopping times $\tau = (\tau_t)_{t \ge 0}$ is called a *change of time* if τ is an $\overline{\mathbb{R}}_+$-valued increasing process, i.e.,

i) for every $t \ge 0$, τ_t is a stopping time,

ii) for every $\omega \in \Omega$, $\tau.(\omega)$ is an $\overline{\mathbb{R}}_+$-valued righ-continuous increasing function on $\mathbb{R}_+$. A change of time $\tau = (\tau_t)_{t \ge 0}$ is said to be *continuous*, if τ is an $\overline{\mathbb{R}}_+$-valued continuous process.

The filtration changed by τ is defined as:

$$\boldsymbol{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \ge 0}, \ \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}, \ t \ge 0. \tag{47.1}$$

If the original filtration $\boldsymbol{F}$ is right-continuous, so is $\boldsymbol{G}$ by Theorem 3.4.10).

For a change of time $\tau = (\tau_t)_{t\geq 0}$ its right-inverse process $A = (A_t)$:

$$A_t = \inf\{s \geq 0 : \tau_s > t\}$$

is an $\overline{R}_+$-valued adapted increasing process. In fact, for any $t \geq 0$

$$\tau_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}, \ \tau_{t-} = \inf\{s \geq 0 : A_s \geq t\}$$

i.e., $\tau = (\tau_t)$ is also the right-inverse process of $A = (A_t)$ (Lemma 1.37). Then for any $t \geq 0$ and $s > 0$

$$[\tau_{s-} \leq t] = [A_t \geq s]. \tag{47.2}$$

Because τ_{s-} is a stopping time, so $A_t \in \mathcal{F}_t$, i.e., A is adapted. From (47.2) we also know that A_t is a G-stopping time in the wide sense.

3.48 Theorem. *Let $A = (A_t)$ be an $\overline{R}_+$-valued adapted (resp. predictable) increasing process. Denote by $\tau = (\tau_t)$ the right-inverse process of A:*

$$\tau_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}.$$

Then for every $t > 0$, τ_{t-} is a stopping time (resp. predictable time), and for every $t \geq 0$, τ_t is a wide-sense stopping time.

In particular, if the filtration F is right-continuous, then $\tau = (\tau_t)$ is a change of time, and is said to be associated with $\overline{R}_+$-valued adapted increasing process $A = (A_t)$.

Proof. For every $t > 0$, again using (47.2), we see

$$[\tau_{t-} \leq s] = [A_s \geq t] \in \mathcal{F}_s, \ s \geq 0,$$

i.e., τ_{t-} is a stopping time. Then for every $t \geq 0, \tau_{(t+\frac{1}{n})-} \downarrow \tau_t, \tau_t$ is a wide-sense stopping time.

Furthermore, if A is predictable, noting that $\tau_{t-} = \inf\{s \geq 0 : A_s \geq t\}$, $[\![\tau_{t-}]\!] = [\![0, \tau_{t-}]\!] \cap [A \geq t]$ is predictable, i.e., τ_{t-} is predictable.

The last assertion is trivial. □

As pointed out above, every change of time is associated with an $\overline{R}_+$-valued adapted process—its right-inverse process.

3.49 Theorem. *Let $\tau = (\tau_t)$ be a change of time*[1]*. The filtration $G = (\mathcal{G}_t)$ is defined in (47.1).*

1) If S is a G-stopping time in the wide sense, then τ_S is an F-stopping time in the wide sense, and $\mathcal{G}_{S+} \subset \mathcal{F}_{\tau_S+}$.

2) If S is a non-negative r.v. such that τ_S is an F-stopping time and S is $\mathcal{F}_{\tau_S}$-measurable, then S is a G-stopping time, and $\mathcal{F}_{\tau_S} \cap \mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{G}_S$.

Proof. 1) Let $A \in \mathcal{G}_{S+}$. For every $t > 0$ we have

$$A[\tau_S < t] = (A[\tau_\infty < t, S = \infty]) \cup (\bigcup_{r \in Q_+} A[S < r][\tau_r < t]).$$

Since $A[S = \infty] \in \mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{F}_{\tau_\infty} \subset \mathcal{F}_\infty$, $A[S < r] \in \mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}$, we obtain

$$A[\tau_S < t] \in \mathcal{F}_t.$$

This means that τ_S is an F-stopping time in the wide sense (by taking $A = \Omega$), and $\mathcal{G}_{S+} \subset \mathcal{F}_{\tau_S+}$.

2) Let $A \in \mathcal{G}_\infty \cap \mathcal{F}_{\tau_S}$. For every $t \geq 0$

$$A[S \leq t] = (A[S \leq t])[\tau_S \leq \tau_t] \in \mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{G}_t.$$

This means that S is a G-stopping time, and $\mathcal{G}_\infty \cap \mathcal{F}_{\tau_S} \subset \mathcal{G}_S$. □

3.50 Corollary. *Assume F is right-continuous. A non-negative r.v. S is a G-stopping time if and only if τ_S is an F-stopping time and $S \in \mathcal{F}_{\tau_S}$. At this time, we have $\mathcal{G}_S = \mathcal{G}_\infty \cap \mathcal{F}_{\tau_S}$.*

Proof. Immediately it follows from Theorem 3.49, noting that $\mathcal{G}$ is also right-continuous. □

3.51 Theorem. *Let $\tau = (\tau_t)$ be a change of time, and $A = (A_t)$ be its right-inverse process: $A_t = \inf\{s \geq 0 : \tau_s > t\}, t \geq 0$.*

1) If T is an F-stopping time in the wide sense, then A_T is a G-stopping time in the wide sense, and $\mathcal{F}_{T+} \cap \mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{G}_{A_T+}$.

2) Assume that F is right-continuous, and $\tau_{A_t} = t, t \geq 0$[1]*. If T is a non-negative r.v. such that A_T is a G-stopping time and $T \in \mathcal{G}_{A_T}$, then T is an F-stopping time, and $\mathcal{G}_{A_T} \subset \mathcal{F}_T$.*

Proof. 1) Let $B \in \mathcal{F}_{T+} \cap \mathcal{G}_\infty$. For every $t > 0$

$$B[A_T < t] = (B[T = \infty][A_\infty < t]) \cup (\bigcup_n B[T < \infty][T < \tau_{t-1/n}]).$$

Since $(B[T < \infty])[T < \tau_{t-1/n}] \in \mathcal{F}_{\tau_{t-1/n}} \subset \mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{G}_t$, $B[T = \infty][A_\infty < t] = B[T = \infty][A_\infty < t][\tau_t = \infty] \in \mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{G}_t$, we obtain

$$B[A_T < t] \in \mathcal{G}_t.$$

This means that A_T is a G-stopping time in the wide sense, and $\mathcal{F}_{T+} \cap \mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{G}_{A_T+}$.

2) Let $B \in \mathcal{G}_{A_T}$. For every $t \geq 0$, A_t is a G-stopping time, and

$$B[T \leq t] = (B[T \leq t])[A_T \leq A_t] \in \mathcal{G}_{A_t}.$$

[1] e.g. τ is continuous, and $\tau_0 = 0, \tau_\infty = \infty$.

By Corollary 3.50, $\mathcal{G}_{A_t} \subset \mathcal{F}_{\tau_{A_t}} = \mathcal{F}_t$. Hence T is an $\boldsymbol{F}$-stopping time, and $\mathcal{G}_{A_T} \subset \mathcal{F}_T$. □

3.52 Theorem. *Let $\tau = (\tau_t)$ be a change of time, and for each $t \geq 0$, $\tau_t < \infty$.*

1) If $X = (X_t)_{t\geq 0}$ is an $\boldsymbol{F}$-optional process, then $(X_{\tau_t})_{t\geq 0}$ is a $\boldsymbol{G}$-optional process.

2) If $X = (X_t)_{t\geq 0}$ is an $\boldsymbol{F}$-predictable process, then $(X_{\tau_t-})_{t\geq 0}$ is a $\boldsymbol{G}$-predictable process.

Proof. It is easy to see that if $(X_t)_{t\geq 0}$ is cadlag, so is $(X_{\tau_t})_{t\geq 0}$, and if $(X_t)_{t\geq 0}$ is left-continuous, so is $(X_{\tau_t-})_{t\geq 0}$. If $(X_t)_{t\geq 0}$ is $\boldsymbol{F}$-optional, obviously $(X_{\tau_t})_{t\geq 0}$ and $(X_{\tau_t-})_{t\geq 0}$ are $\boldsymbol{G}$-adapted.

Let T be an $\boldsymbol{F}$-stopping time. If $X = I_{[0,T[}$, $(X_{\tau_t})_{t\geq 0}$ is cadlag and $\boldsymbol{G}$-adapted. Hence it is $\boldsymbol{G}$-optional. If $X = I_{]0,T]}$, $(X_{\tau_t-})_{t\geq 0}$ is left-continuous and $\boldsymbol{G}$-adapted. Hence it is $\boldsymbol{G}$-predictable. Now if $X = I_{[0]}I_A$, $A \in \mathcal{F}_0$, by the same reason $(X_{\tau_t-})_{t\geq 0}$ is $\boldsymbol{G}$-predictable. Now applying the monotone class argument leads to the assertions. □

In the next theorem a useful and simple example of changes of time is discussed in detail.

3.53 Theorem. *Let T be a stopping time. Define*

$$\boldsymbol{G} = (\mathcal{G}_t), \ \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t\wedge T}, \ t \geq 0.$$

1) If S is an $\boldsymbol{F}$-stopping time, then $S \wedge T$ and $S_{[S\leq T]}$ are $\boldsymbol{G}$-stopping times.

2) If S is an $\boldsymbol{F}$-stopping time in the wide sense, then $S_{[S<T]}$ is a $\boldsymbol{G}$-stopping time in the wide sense.

3) If S is a $\boldsymbol{G}$-stopping time, then $\mathcal{G}_S = \mathcal{G}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_{S\wedge T}$.

4) If X is an $\boldsymbol{F}$-optional (resp. $\boldsymbol{F}$-predictable) process, then X^T and $XI_{[0,T]}$ are $\boldsymbol{G}$-optional (resp. $\boldsymbol{G}$-predictable) processes.

5) If S is an $\boldsymbol{F}$-predictable time, then $S_{[S\leq T]}$ is a $\boldsymbol{G}$-predictable time.

Proof. Here we are concerned with the change of time $\tau = (\tau_t)$: $\tau_t = t \wedge T$. Its right-inverse process is $A = (A_t) : A_t = t_{[t<T]}$. Because $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t, t \geq 0$, every $\boldsymbol{G}$-stopping time is also an $\boldsymbol{F}$-stopping time.

First of all, we show $\mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_T$. $\mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{F}_T$ is trivial. Let $t \geq 0, A \in \mathcal{F}_t$. $A[t < T] = (A[t < T])[t = t\wedge T] \in \mathcal{F}_{t\wedge T} \subset \mathcal{G}_\infty$, so $A[T = \infty] \in \mathcal{G}_\infty$. Therefore, if $A \in \mathcal{F}_\infty$, then $A[T = \infty] \in \mathcal{G}_\infty$. Now let $A \in \mathcal{F}_T$. $A[T < \infty] = \bigcup_n (A[T \leq n])$, $A[T \leq n] \in \mathcal{F}_{n\wedge T} \subset \mathcal{G}_\infty$, $n \geq 1$, so $A[T < \infty] \in \mathcal{G}_\infty$, $A = (A[T = \infty]) \bigcup (A[T < \infty]) \in \mathcal{G}_\infty$, $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{G}_\infty$.

1) Let S be a $\boldsymbol{F}$-stopping time. For each $t \geq 0$

$$[S \wedge T \leq t] \in \mathcal{F}_{S\wedge T\wedge t} \subset \mathcal{G}_t,$$
$$[S_{[S\leq T]} \leq t] = [S \leq T][S \leq t] = [S \leq T \wedge t] \in \mathcal{F}_{t\wedge T} = \mathcal{G}_t.$$

Hence $S \wedge T$ and $S_{[S\leq T]}$ are $\boldsymbol{G}$-stopping times.

2) Since $S_{[S<T]} = A_S$, the assertion follows from Theorem 3.51.1).

3) Let S be a $\boldsymbol{G}$-stopping time. Immediately, we have $\mathcal{G}_S \subset \mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_T$, $\mathcal{G}_S \subset \mathcal{F}_S$, $\mathcal{G}_S \subset \mathcal{F}_T \bigcap \mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{T\wedge S}$. On the other hand, let $A \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$. For all $t \geq 0$,

$$A[S \wedge T \leq t] \in \mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_{S\wedge T} \subset \mathcal{G}_t.$$

This means $A \in \mathcal{G}_{S\wedge T}$ and $\mathcal{F}_{S\wedge T} \subset \mathcal{G}_{S\wedge T} \subset \mathcal{G}_S$. Thus $\mathcal{G}_S = \mathcal{G}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_{S\wedge T}$.

4) The assertion concerned with X^T comes directly from Theorem 3.52. On the other hand, $XI_{[0,T]} = X^T - X_T I_{]T,\infty[}$. By 1) T is a $\boldsymbol{G}$-stopping time. Hence $X_T I_{[T<\infty]} = X_T^T I_{[T<\infty]} \in \mathcal{G}_T$, $X_T I_{]T,\infty[}$ is $\boldsymbol{G}$-predictable. When X^T is $\boldsymbol{G}$-optional (resp. $\boldsymbol{G}$-predictable), so is $XI_{[0,T]}$.

5) Let S be an $\boldsymbol{F}$-predictable time. Then $X = I_{[S,\infty[}$ is $\boldsymbol{F}$-predictable, $X^T = I_{[S_{[S\leq T]},\infty[}$ is $\boldsymbol{G}$-predictable, i.e., $S_{[S\leq T]}$ is a $\boldsymbol{G}$-predictable time. □

Problems and Complements

3.1 Let $(X_t)_{t\geq 0}$ be a right-continuous adapted process, S be a stopping time in the wide sense, and $B \subset \boldsymbol{R}$ be an open set. Then

$$T = \inf\{t > S : X_t \in B\} (\text{ or } \inf\{t \geq S : X_t \in B\})$$

is a wide-sense stopping time.

3.2 Let $(X_t)_{t\geq 0}$ be a cadlag adapted process, S be a stopping time and $B \subset \boldsymbol{R}$ be a closed set. Then

$$T = \inf\{t \geq S : X_t \in B \text{ or } X_{t-} \in B\}$$

is a stopping time. In particular, if (X_t) is a continuous adapted process, S is a stopping time and $B \subset \boldsymbol{R}$ is a closed set, then

$$T = \inf\{t \geq S : X_t \in B\}$$

is a stopping time.

3.3 Let $(X_t)_{t\geq 0}$ be an adapted increasing process. For any $a \in \boldsymbol{R}$,

$$T = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}$$

is a stopping time.

3.4 Let $\boldsymbol{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ be a discrete time filtration. Define $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_{[t]}$. Then $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is a right-continuous filtration.

1) If S is a $\boldsymbol{G}$-stopping time, then S is also an $\boldsymbol{F}$-stopping time, and $\mathcal{F}_S = \mathcal{G}_S$.

2) If T is an $\boldsymbol{F}$-stopping time, then

$$S = \begin{cases} n, & n \leq T < n+1, \\ \infty, & T = \infty, \end{cases}$$

is a $\boldsymbol{G}$-stopping time and $\mathcal{G}_S = \mathcal{F}_T$.

3.5 Let $X = (X_t)$ be an $(\mathcal{F}_t)$-adapted process. If for any $\epsilon > 0$, X is $(\mathcal{F}_{t+\epsilon})$-progressive, then X is $(\mathcal{F}_t)$-progressive.

3.6 Let (X_t) be an adapted process, and D be a denumerable dense set in $\boldsymbol{R}$. Define

$$Y_t^+ = \lim_{n\to\infty} \sup\{X_s : s \in D \cap]t, t+\frac{1}{n}[\}, t \geq 0,$$

$$Y_t^- = \lim_{n\to\infty} \inf\{X_s : s \in D \cap]t, t+\frac{1}{n}[\}, t \geq 0,$$

$$Z_t^+ = \lim_{n\to\infty} \sup\{X_s : s \in D \cap](t-\frac{1}{n})^+, t[\}, t > 0,$$

$$Z_t^- = \lim_{n\to\infty} \inf\{X_s : s \in D \cap](t-\frac{1}{n})^+, t[\}, t > 0,$$

$$Z_0^+ = Z_0^- = X_0.$$

Then (Y_t^+), (Y_t^-), (Z_t^+) and (Z_t^-) are all progressive.

3.7 Two filtrations $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ and $\boldsymbol{G} = (\mathcal{G}_t)$ are given. Denote by $\mathcal{O}(\boldsymbol{F})$, $\mathcal{P}(\boldsymbol{F})$, $\mathcal{T}(\boldsymbol{F})$ and $\mathcal{T}_P(\boldsymbol{F})$ the $\boldsymbol{F}$-optional σ-field, the $\boldsymbol{F}$-predictable σ-field, the collection of all $\boldsymbol{F}$-stopping times and the collection of all $\boldsymbol{F}$-predictable times respectively. The notations $\mathcal{O}(\boldsymbol{G})$, $\mathcal{P}(\boldsymbol{G})$, $\mathcal{T}(\boldsymbol{G})$ and $\mathcal{T}_P(\boldsymbol{G})$ have the same meanings.

1) The following statements are equivalent:

(i) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}$, i.e., $\forall t \geq 0$ $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t$.

(ii) $\mathcal{O}(\boldsymbol{F}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{G})$.

(iii) $\mathcal{T}(\boldsymbol{F}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{G})$.

2) The following statements are equivalent:

(i) $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0$, and $\forall t \geq 0$ $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{G}_{t+}$.

(ii) $\mathcal{P}(\boldsymbol{F}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{G})$.

(iii) $\mathcal{T}_P(\boldsymbol{F}) = \mathcal{T}_P(\boldsymbol{G})$.

3.8 Let $f \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$, $X = (X_t)$ be optional (resp. predictable). Then $Z_t = f(t, X_t)$ is optional (resp. predictable).

3.9 Two filtrations $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ and $\boldsymbol{G} = (\mathcal{G}_t)$ satisfy the following conditions.

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0, \quad \forall t \geq 0 \quad \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{G}_{t+}.$$

Then for any $\boldsymbol{F}$-stopping time in the wide sense T

$$\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{G}_{T-}.$$

3.10 Suppose that S is a stopping time, r.v. $T \geq S$, T is $\mathcal{F}_S$-measurable, and $T > S$ on $[S < \infty]$. Then T is a predictable time.

3.11 Let S be a predictable time and T be a stopping time. If $S < T$ and $\mathcal{F}_{S-} = \mathcal{F}_{T-}$, then T is a predictable time.

3.12 If S and T are predictable times, so is $S + T$.

3.13 Suppose that S is a predictable time, r.v. $T \geq S$, T is $\mathcal{F}_S$-measurable, and $[T = S] \in \mathcal{F}_{S-}$. Then T is a predictable time.

3.14 Let T be a stopping time. Define

$$\boldsymbol{G} = (\mathcal{G}_t), \ \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T+t}, \ t \geq 0.$$

1) If S is an $\boldsymbol{F}$-stopping time (resp. $\boldsymbol{F}$-predictable time), then

$$\tilde{S} = \begin{cases} (S-T)^+, & T < \infty, \\ 0, & T = \infty. \end{cases}$$

is a $\boldsymbol{G}$-stopping time (resp. $\boldsymbol{G}$-predictable time).

2) If (X_t) is an $\boldsymbol{F}$-optional (resp. $\boldsymbol{F}$-predictable) process, then $(X_{T+t} I_{[T<\infty]})$ is a $\boldsymbol{G}$-optional (resp. $\boldsymbol{G}$-predictable) process.

3.15 Let $X = (X_t)$ be a cadlag stochastic process, T be an $\boldsymbol{F}^0(X)$ stopping time. If T takes only a denumerable number of values, then T is measurable w.r.t. $\sigma\{X_{T\wedge t}, t \geq 0\}$.

3.16 Let $X = (X_t)$ be a cadlag stochastic process defined on $(\Omega, \mathcal{F})$, satisfying the following conditions: i) $\forall t \geq 0$ $X_t(\omega) = X_t(\omega') \Rightarrow \omega = \omega'$, ii) $\forall \omega \in \Omega$ and $t \geq 0$ there exists $\omega' \in \Omega$ such that $\forall s \geq 0$ $X_s(\omega') = X_{s\wedge t}(\omega)$. Then

1) A non-negative r.v. T is an $\boldsymbol{F}^0(X)$-stopping time if and only if $\forall t \geq 0$

$$T(\omega) \leq t, \ \forall s \leq t \quad X_s(\omega) = X_s(\omega') \Rightarrow T(\omega) = T(\omega').$$

2) If T is an $\mathbf{F}^0(X)$-stopping time, then $A \in \mathcal{F}^0_T(X)$ if and only if

$$\omega \in A,\ T(\omega) = T(\omega'),\ \forall s \leq T(\omega) \quad X_s(\omega) = X_s(\omega') \Rightarrow \omega' \in A.$$

3) For any $\mathbf{F}^0(X)$-predictable time T, $\mathcal{F}^0_T(X) = \mathcal{F}^0_\infty(X^T)$, where $X^T = (X_{T\wedge t})$.

3.17 In addition to the assumption in the above problem, we suppose that $\forall \omega \in \Omega$ and $t \geq 0$ there exists $\omega' \in \Omega$ such that $\forall s \geq 0$ $X_s(\omega') = X_s(\omega)_s I_{[s<t]} + X_{t-}(\omega) I_{[s\geq t]}$. Then

1) A non-negative r.v. T is an $\mathbf{F}^0(X)$-predictable time if and only if $\forall t \geq 0$

$$T(\omega) \leq t, \forall s < t \quad X_s(\omega) = X_s(\omega') \Rightarrow T(\omega) = T(\omega').$$

2) If T is an $\mathbf{F}^0(X)$-predictable time, then $A \in \mathcal{F}^0_{T-}(X)$ if and only if

$$\omega \in A,\ T(\omega) = T(\omega'),\ \forall s < T(\omega) \quad X_s(\omega) = X_s(\omega') \Rightarrow \omega' \in A.$$

3) For any $\mathbf{F}^0(X)$-predictable time T, $\mathcal{F}^0_{T-}(X) = \mathcal{F}^0_\infty(X^{T-})$, where $X^{T-} = X I_{[0,T[} + X_{T-} I_{[T,\infty[}$.

4) An $\mathcal{F}^0_\infty(X) \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$-measurable process $Z = (Z_t)$ is $\mathbf{F}^0(X)$-predictable if and only if Z is $\mathbf{F}^0_-(X) = (\mathcal{F}^0_{t-}(X))$-adapted.

Chapter IV

Section Theorems and Their Applications

In this chapter we mainly introduce section theorems and their applications. We will show that predictable times are a.s foretellable. This result will be used constantly later. By means of the concept of totally inaccessible time we will investigate the jumps and quasi-left-continuity of adapted cadlag processes.

§1. Section Theorems

In this paragraph, by using the theory of analytic sets and capacity in Chapter I, we show the section lemma concerned with measurable sets. Then, based on this lemma, we establish section theorems in general theory of stochastic processes.

4.1 Definition. Let Ω be a set, $A \subset \Omega \times \mathbf{R}_+$. Put

$$D_A(\omega) = \inf\{t \in \mathbf{R}_+ : (\omega, t) \in A\},\ \omega \in \Omega.$$

D_A is called the *debut* of A. Recall that $\inf \emptyset = +\infty$.

4.2 Theorem. *Let $(\Omega, \mathcal{F})$ be a measurable space. For every $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+))$, D_A is $\hat{\mathcal{F}}$-measurable.*

Proof. Let $r > 0$. Then $[D_A < r]$ is the projection of $A \cap (\Omega \times [0, r[)$ onto Ω. Hence, by Theorem 1.32 $[D_A < r] \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Since $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \hat{\mathcal{F}}$ (Theorem 1.36), D_A is $\hat{\mathcal{F}}$-measurable. □

Remark. Let (X_t) be a measurable process on $(\Omega, \mathcal{F})$. Then $\sup_t |X_t|$ is $\hat{\mathcal{F}}$-measurable. In fact, for all $a > 0$ put

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : |X_t| > a\},$$

then by the theorem we know that T_a is $\hat{\mathcal{F}}$-measurable. However,

$$[\sup_t |X_t| > a] = [T_a < \infty] \in \hat{\mathcal{F}}.$$

This means that $\sup_t |X_t|$ is $\hat{\mathcal{F}}$-measurable.

The following lemma is usually called the *section lemma*. It is one of the important applications of the theory of analytic sets and capacity in probability theory.

4.3 Lemma. *Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+))$. Then there exists a r.v. $T \in \mathcal{F}^+$ such that*

$$T(\omega) < \infty \Rightarrow (\omega, T(\omega)) \in A, \tag{3.1}$$

$$P([T < \infty]) = P([D_A < \infty]). \tag{3.2}$$

Proof. Put

$$\overline{P}(A) = \inf\{P(B) : B \in \mathcal{F}, B \supset A\}, \quad A \subset \Omega.$$

Then $\overline{P}$ is a Choquet $\mathcal{F}$-capacity on Ω.

Let $\mathcal{H}$ be the paving consisting of all finite unions of sets in $\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(R_+)$. It is easy to see that $\mathcal{H}$ is closed under the formation of finite intersection. By Theorem 1.32 we have

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}(R_+)) = \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(R_+)).$$

Denote by π the projection mapping from $\Omega \times R_+$ onto Ω. For any $C \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ by Theorem 1.32 we have $\pi(C) \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Put

$$I(C) = \overline{P}(\pi(C)), \quad C \subset \Omega \times R_+.$$

From the proof of Theorem 1.35 we see that I is a Choquet $\mathcal{H}$-capacity on $\Omega \times R_+$.

Since $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, by Theorem 1.35 for any given $\epsilon > 0$ there exists $B \in \mathcal{H}_\delta$, $B \subset A$ such that $I(B) > I(A) - \epsilon$, i.e.,

$$P(D_B < \infty) > P(D_A < \infty) - \varepsilon.$$

Because D_B is $\mathcal{F}^P$-measurable, there is a r.v. $S_\varepsilon \in \mathcal{F}^+$ such that $S_\varepsilon = D_B$ a.s.. Let $C \in \mathcal{F}$, $C \subset [S_\varepsilon = D_B]$ such that $P(C) = 1$. Define

$$T_\varepsilon = S_\varepsilon I_C + (+\infty) I_{C^c},$$

then $T_\varepsilon \in \mathcal{F}$, $T_\varepsilon = S_\varepsilon = D_B$ a.s., and $T_\varepsilon = D_B$ on $[T_\varepsilon < \infty]$. On the other hand, for every $\omega \in \Omega$, $B(\omega) = \{t \geq 0 : (\omega, t) \in B\}$ is a compact set in

R_+. Hence, $D_B(\omega) < +\infty \Rightarrow (\omega, D_B(\omega)) \in B \subset A$. We have

$$T_\varepsilon(\omega) < \infty \Rightarrow (\omega, T_\varepsilon(\omega)) \in A,$$

$$P(T_\varepsilon(\omega) < \infty) = P(D_B < \infty) > P(D_A < \infty) - \varepsilon.$$

Putting $T_0 = -\infty$, we define a sequence (T_n) of non-negative $\mathcal{F}$-measurable r.v. satisfying (3.1) by induction as follows. If T_n has been defined, put

$$A_n = A \cap \{(\omega, t) : T_n(\omega) = \infty\} = A \cap ([T_n = \infty] \times R_+).$$

Then $A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+))$. As shown above, there is a r.v. $S_n \in \mathcal{F}^+$ such that

$$S_n(\omega) < \infty \Rightarrow (\omega, S_n(\omega)) \in A_n,$$

$$P(S_n < \infty) \geq \frac{1}{2} P(D_{A_n} < \infty) = \frac{1}{2} P([T_n = \infty] \cap [D_A < \infty]).$$

Define $T_{n+1} = T_n \wedge S_n$, then T_{n+1} satisfies (3.1) and

$$\begin{aligned} P(T_{n+1} < \infty) &= P(T_n < \infty) + P(S_n < \infty) \\ &\geq P(T_n < \infty) + \frac{1}{2} P([T_n = \infty] \cap [D_A < \infty]). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Set $T = \lim_{n \to \infty} T_n = \bigwedge_n T_n$. Since $T_{n+1} I_{[T_n < \infty]} = T_n I_{[T_n < \infty]}$, we have $T I_{[T_n < \infty]} = T_n I_{[T_n < \infty]}$. Therefore

$$[T < \infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [T_n < \infty], \quad [T = \infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [T_n = \infty].$$

Letting $n \to \infty$ in (3.3) yields

$$P(T < \infty) \geq P(T < \infty) + \frac{1}{2} P([T = \infty] \cap [D_A < \infty]).$$

Hence $P([T = \infty] \cap [D_A < \infty]) = 0$, i.e., $[D_A < \infty] \subset [T < \infty]$ a.s.. But $[T < \infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [T_n < \infty]$, so T satisfies (3.1), and $[T < \infty] \subset [D_A < \infty]$. Therefore $[T < \infty] \subset [D_A < \infty]$ a.s., i.e., (3.2) is established. □

Remark. Later any non-negative r.v. T satisfying (3.1) is called a *section* of A. (3.2) means that except for a P-null set, T is a full section of A. Here comes the name of section lemma.

4.4 Lemma. *Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, $\mathcal{C}$ be a field generating $\mathcal{F}$. Then for any $A \in \mathcal{F}$ we have*

$$P(A) = \sup\{P(B) : B \in \mathcal{C}_\delta, B \subset A\} = \inf\{P(C) : C \in \mathcal{C}_\sigma, C \supset A\}. \tag{4.1}$$

Proof. Denote by $\mathcal{G}$ the collection of all sets in $\mathcal{F}$ satisfying (4.1). Since $\mathcal{C}_\sigma = \{A : A^c \in \mathcal{C}_\delta\}$, we have $A \in \mathcal{G} \Rightarrow A^c \in \mathcal{G}$.

Let $A_n \in \mathcal{G}$, $A_n \uparrow A$. We are going to show $A \in \mathcal{G}$. For any given $\varepsilon > 0$, take n large enough such that $P(A \backslash A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Let $B \in \mathcal{C}_\delta$, $B \subset A_n$ such that $P(A_n \backslash B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hence $B \subset A$ and $P(A) < P(B) + \varepsilon$. On the other hand, for each n take $C_n \in \mathcal{C}_\sigma, C_n \supset A_n$ such that $P(C_n \backslash A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Put $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Then $C \in \mathcal{C}_\sigma, C \supset A$ and $P(C \backslash A) < \varepsilon$. This means $A \in \mathcal{G}$. We have shown that $\mathcal{G}$ is a monotone class. It is evident that $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$. Hence $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. □

The following theorem is an important application of Lemma 4.3, and will be used to prove section theorems.

4.5 Theorem. *Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, $\mathcal{G}$ be a sub-σ-field of $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+)$, and $\mathcal{C}$ be a field generating $\mathcal{G}$. Let $A \in \mathcal{G}$. Then for any given $\varepsilon > 0$, there exists $B \in \mathcal{C}_\delta$ such that*

$$B \subset A, \tag{5.1}$$

$$P(\pi(A)) \leq P(\pi(B)) + \varepsilon. \tag{5.2}$$

Proof. Choose a r.v. $T \in \mathcal{F}^+$ satisfying (3.1) and (3.2). Define a measure μ on $\mathcal{G}$ as follows:

$$\mu(G) = P(\{\omega : (\omega, T(\omega)) \in G\}), \quad G \in \mathcal{G}.$$

Then A is the support of μ, and $\mu(A) = P([T < \infty]) = P(\pi(A))$. For any $G \in \mathcal{G}$ we have

$$\{\omega : (\omega, T(\omega)) \in G\} \subset \pi(G).$$

Hence $\mu(G) \leq P(\pi(G))$. For any given $\varepsilon > 0$, by Lemma 4.4, there exists $B \in \mathcal{C}_\delta, B \subset A$ such that $\mu(A) \leq \mu(B) + \varepsilon$. Thus

$$P(\pi(A)) = \mu(A) \leq \mu(B) + \varepsilon \leq P(\pi(B)) + \varepsilon. \quad \square$$

Below we will make use of Theorem 4.5 to show section theorems in general theory of stochastic processes. We suppose that a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and a filtration $(\mathcal{F}_t)$ are given.

4.6 Lemma. *Let $\mathcal{V}$ be a family of wide-sense stopping times satisfying the following conditions:*

i) $0 \in \mathcal{V}$, $+\infty \in \mathcal{V}$.

ii) $S, T \in \mathcal{V} \Rightarrow S \wedge T \in \mathcal{V}$, $S \vee T \in \mathcal{V}$,

iii) $S, T \in \mathcal{V} \Rightarrow S_{[S<T]} \in \mathcal{V}$,

iv) $S_n \in \mathcal{V}$, $n = 1, 2, \cdots$, $S_n \uparrow S \Rightarrow S \in \mathcal{V}$.

Let $\mathcal{C}$ be the collection of all finite unions of sets in $\mathcal{C}_0 = \{[S, T[: S \leq T, \ S, T \in \mathcal{V}\}$. Then $\mathcal{C}$ is a field on $\Omega \times R_+$. For any $B \in \mathcal{C}_\delta$ we have $[D_B] \subset B$, where D_B is the debut of B (Definition 4.1), *and there exists a wide-sense stopping time $T \in \mathcal{V}$ such that $T = D_B$ a.s..*

Proof. The fact that $\mathcal{C}$ is a field follows from conditions i) and ii).

For each $\omega \in \Omega$, $B(\omega) = \{t \geq 0 : (\omega, t) \in B\}$ is closed relative to the right topology in R_+. Hence $[D_B] \subset B$. Put

$$\mathcal{H} = \{S \in \mathcal{V} : S \leq D_B\}.$$

It is easy to see that $S_n \in \mathcal{H}, n = 1, 2, \cdots \Rightarrow \bigvee_n S_n \in \mathcal{H}$. Then, by Theorem 1.13 there exists $T \in \mathcal{H}$ such that

$$T = \operatorname{ess\,sup} \mathcal{H}.$$

We are going to show $T = D_B$ a.s.. Let (B_n) be a decreasing sequence of elements in $\mathcal{C}$ such that $B = \bigcap_n B_n$. Put

$$C_n = B_n \cap [T, \infty[.$$

Then (C_n) is a decreasing sequence of elements in $\mathcal{C}$, and

$$\bigcap_n C_n = B \cap [T, \infty[= B.$$

Let $G = [S, T[\in \mathcal{C}_0$. By condition iii) we have $D_G = S_{[S<T]} \in \mathcal{V}$, where D_G is the debut of G. Suppose $C_n = C_{n1} \cup C_{n2} \cup \cdots \cup C_{nm}$, where $C_{nk} \in \mathcal{C}_0$, $k = 1, 2, \cdots, m$. Then $D_{C_n} = \bigwedge_{k=1}^{m} D_{C_{nk}} \in \mathcal{V}$ (condition ii)), and $D_{C_n} \geq T$. Since $C_n \supset B$, $D_{C_n} \leq D_B$, i.e., $D_{C_n} \in \mathcal{H}$. But T is the essential supremum of $\mathcal{H}$, it must be that $D_{C_n} = T$ a.s. for each n. Since $[D_{C_n}] \subset C_n$, $[T]$ is contained a.s. in $\bigcap_n C_n = B$[1]. Thus $T \geq D_B$ a.s.. We have already shown $T \leq D_B$. Hence $T = D_B$ a.s.. □

The following two theorems are all called *section theorems*. They are the most important results in general theory of stochastic processes.

4.7 Theorem. *Let A be an optional (resp. accessible) set. For any given $\varepsilon > 0$ there exists a stopping time (resp. accessible time) T such that*

[1] Here the meaning of a.s. is that for almost all $\omega \in [T < \infty]$ we have $(\omega, T(\omega)) \in B$.

i) $[T] \subset A$,

ii) $P(T < \infty) \geq P(\pi(A)) - \varepsilon$,

where $\pi(A)$ *is the projection of* A *onto* Ω.

Proof. We only give proof for the optional case. It is completely similar to the accessible case. Let $\mathcal{V}$ be the collection of all stopping times. Obviously, $\mathcal{V}$ satisfies the four conditions in Lemma 4.6. We will use notations in Lemma 4.6. By Theorem 3.17 we know $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{O}$. According to the assumption, $A \in \sigma(\mathcal{C})$. By Theorem 4.5 there exists $B \in \mathcal{C}_\delta$ such taht $B \subset A$ and $P(\pi(B)) \geq P(\pi(A)) - \varepsilon$. By Lemma 4.6 there exists a stopping time $S \in \mathcal{V}$ such that $S = D_B$ a.s.. Put

$$L = \{\omega : (\omega, S(\omega)) \in B\}.$$

Then $I_B(S)I_{[S<\infty]} = I_L$, and $L \in \mathcal{F}_S$ (Theorem 3.12). Since $[D_B] \subset B$, we have $P(L \cup [S = +\infty]) = 1$. Set $T = S_L$. Thus T is a stopping time, $[T] \subset B \subset A$, and $T = S = D_B$ a.s.. Hence

$$P(T < \infty) = P(D_B < \infty) = P(\pi(B)) \geq P(\pi(A)) - \varepsilon. \quad \square$$

4.8 Theorem. *Let A be a predictable set. For any given $\varepsilon > 0$ there exists a predictable time T such that*

i) $[T] \subset A$,

ii) $P(T < \infty) \geq P(\pi(A)) - \varepsilon$.

Proof. Let $\mathcal{V}$ be the collection of all predictable times. Then one may copy the proof of Theorem 4.7, only noting that here $L \in \mathcal{F}_{S-}$ (Corollary 3.23.2)), so S_L is a predictable time (Theorem 3.29.7)). $\square$

4.9 Definition. A subset Λ of $\Omega \times R_+$ is said to be *evanescent* (w.r.t. P) provided that the projection $\pi(\Lambda)$ of Λ onto Ω is a P-null set (it needn't be $\pi(\Lambda) \in \mathcal{F}$, but should be $\pi(\Lambda) \in \mathcal{F}^P$). A process X is said to be evanescent, if $\{(\omega, t) : X_t(\omega) \neq 0\}$ is an evanescent set.

Two processes $X = (X_t)$ and $Y = (Y_t)$ are said to be *P-indistinguishable* (simply denoted by $X = Y$), if $\{(\omega, t) : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ is an P-evanescent set (refer to Definition 2.45). X is said to be *not larger than* Y (denoted by $X \leq Y$), if $\{(\omega, t) : X_t(\omega) > Y_t(\omega)\}$ is an P-evanescent set. Henceforth, in a certain class of processes (e.g. the class of optional processes or predictable processes) we identify two indistinguishable processes.

Below we give an application of section theorems to stochastic process theory. We omit the accessible cases for brevity.

4.10 Theorem. *Let $X = (X_t)$ and $Y = (Y_t)$ be two optional (resp. predictable) processes. If for every bounded stopping time (resp. predictable time) T, we have $X_T \leq Y_T$ a.s., then $X \leq Y$.*

Proof. We only discuss the optional case. Suppose $A = \{(\omega, t) : X_t(\omega) \geq Y_t(\omega)\}$ is not evanescent. Since A is optional, by Theorem 4.7 there exists a stopping time S such that $[S] \subset A$ and $P(S < \infty) > 0$. Choose a constant $C > 0$ such that $P(S \leq C) > 0$. Put $T = S \wedge C$. Thus T is a bounded stopping time, and $X_T > Y_T$ on $[S \leq C]$. It contradicts the assumption. Hence A is evanescent. By definiton we have $X \leq Y$.
$\square$

4.11 Corollary. *Let $X = (X_t)$ and $Y = (Y_t)$ be two optional (resp. predictable) processes. If for every bounded stopping time (resp. predictable time) T, we have $X_T = Y_T$ a.s., then $X = Y$.*

In practical applications the following theorem is more effective than Theorem 4.10 sometimes.

4.12 Theorem. *Let $X = (X_t)$ and $Y = (Y_t)$ be two optional (resp. predictable) processes. If for every stopping time (resp. predictable time) T, $X_T I_{[T<\infty]}$ and $Y_T I_{[T<\infty]}$ are integrable, $\mathbf{E}[X_T I_{[T<\infty]}] \leq \mathbf{E}[Y_T I_{[T<\infty]}]$, then $X \leq Y$.*

Proof. We only discuss the optional case. Suppose $A = \{(\omega, t) : X_t(\omega) > Y_t(\omega)\}$ is not evanescent. By Theorem 4.7 there exists a stopping time T such that $[T] \subset A$ and $P(T < \infty) > 0$. Thus we have $\mathbf{E}[X_T I_{[T<\infty]}] > \mathbf{E}[Y_T I_{[T<\infty]}]$. This contradicts the assumption. Hence A is evanescent, i.e., $X \leq Y$. $\square$

4.13 Corollary. *If in* Theorem 4.12 *we have $\mathbf{E}[X_T I_{[T<\infty]}] = \mathbf{E}[Y_T I_{[T<\infty]}]$, then $X = Y$.*

Remark. In Theorem 4.12 and Corollary 4.13, if only bounded stopping times (resp. predictable times) are concerned, it is not sufficient to arrive at the conclusion.

§2. a.s. Foretellability of Predictable Times

4.14 Definition. Let T be a wide-sense stopping time, $(T_n)_{n\geq 1}$ be an increasing sequence of wide-sense stopping times, and for all $n, T_n \leq T$. Let $A \subset \Omega$. We say that the sequence (T_n) *a.s. foretells* T on A, if on $A[T > 0]$ we have $T_n < T$ a.s. for all n and $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ a.s.. We say briefly that (T_n) a.s. foretells T if (T_n) a.s. foretells T on whole Ω.

A wide-sense topping time T is said to be *a.s. foretellable*, if there exists an increasing sequence of wide-sense stopping times which a.s. foretells T.

We will show every predictable time is a.s. foretellable.

4.15 Lemma. *Let $\mathcal{V}$ be the family of all a.s. foretellable wide-sense stopping times. Then $\mathcal{V}$ has the following properties:*

i) $0 \in \mathcal{V}$, $+\infty \in \mathcal{V}$.

ii) $S, T \in \mathcal{V} \Rightarrow S \wedge T, S \vee T \in \mathcal{V}$.

iii) *The limits of increasing sequences of elements in $\mathcal{V}$ belong to $\mathcal{V}$.*

iv) *The limits of stationary decreasing sequences of elements in $\mathcal{V}$ belong to $\mathcal{V}$.*

v) *If $S \in \mathcal{V}$, T is a wide-sense stopping time, and $T = S$ a.s., then $T \in \mathcal{V}$.*

vi) $S, T \in \mathcal{V} \Rightarrow S_{[S<T]} \in \mathcal{V}$.

Proof. i) and ii) are obvious.

iii) Let T be the limit of an increasing sequence (T_n) of elements in $\mathcal{V}$. For each n, let $(S_{n,k})_{k\geq 1}$ be a sequence of wide-sense stopping times which a.s. foretells T_n. Put

$$S_k = S_{1,k} \vee S_{2,k} \vee \cdots \vee S_{k,k}.$$

Then $(S_k)_{k\geq 1}$ a.s. foretells T.

iv) Let T be the limit of a stationary decreasing sequence (T_n) of elements in $\mathcal{V}$. For each n let $(S_{n,k})_{k\geq 1}$ be a sequence of wide-sense stopping times which a.s. foretells T_n. We may assume for all n and k

$$P(e^{-S_{n,k}} - e^{-T_n} > 2^{-k}) \leq 2^{-(n+k)}$$

(if necessary, by taking a subsequence). Put $S_k = \inf\limits_n S_{n,k}$. Then (S_n) is an increasing sequence of wide-sense stopping times, and for all $k, S_k \leq T$. On $[T > 0]$ we always have $T_n > 0$ for all n, and thus for all k. $S_{n,k} < T_n$ a.s.. Since (T_n) is stationary, on $[T > 0]$ for all k we have $S_k < T$ a.s.. Let $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$. For all k

$$P(e^{-S} - e^{-T} > 2^{-k}) \leq P(e^{-S_k} - e^{-T} > 2^{-k})$$

$$\leq P(\bigcup_{n=1}^{\infty} [e^{-S_{n,k}} - e^{-T} > 2^{-k}]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(e^{-S_{n,k}} - e^{-T_n} > 2^{-k}) \leq 2^{-k}.$$

Hence $S = T$ a.s. and (S_n) a.s. foretells T, i.e., $T \in \mathcal{V}$.

v) Suppose (S_n) is a sequence of wide-sense stopping times which a.s. foretells S. Then $(S_n \wedge T)$ a.s. foretells T. Hence $T \in \mathcal{V}$.

vi) Let (S^n) and (T^m) be two sequences which a.s. foretell S and T respectively. Put

$$U_n^m = n \wedge S^n_{[S^n<T^m]}.$$

For each fixed $m, (U_n^m)_{n\geq 1}$ a.s. foretells the wide-sense stopping time $U^m = S_{[S\leq T^m]\bigcap[T^m>0]}$. (Since $[S \leq T^m]\bigcap[T^m > 0]$ belongs to $\mathcal{F}_{S+}$ but not to $\mathcal{F}_S$ in general, U^m is only a wide-sense stopping time, even if S is a stopping time.) Hence $U^m \subset \mathcal{V}$. Evidently, (U^m) is a stationary decreasing sequence. Its limit U belongs to $\mathcal{V}$ by iv). But $U = S_{[S<T]}$ a.s.. Therefore, $S_{[S<T]} \in \mathcal{V}$ by v). □

4.16 Theorem. *All predictable times are a.s. foretellable.*

Proof. Let $\mathcal{V}$ be the collection of all a.s. foretellable wide-sense stopping times. We make use of notations in Lemma 4.6. By Corollary 3.28 we know $\mathcal{P} \subset \sigma(\mathcal{C})$. From the proof of Theorem 4.7 we can see that the section theorem holds for sets in $\sigma(\mathcal{C})$ (because in this case $S_L = S$ a.s., thus $S_L \in \mathcal{V}$).

Now let T be a predictable time. Then $[T] \in \mathcal{P}$, and $[T] \in \sigma(\mathcal{C})$. For any given $\varepsilon > 0$ there exists $S^\varepsilon \in \mathcal{V}$ such that $[S^\varepsilon] \subset [T]$ and $P(S^\varepsilon < \infty) \geq P(T < \infty) - \varepsilon$. Define

$$T_n = S^{\frac{1}{2}} \wedge S^{\frac{1}{3}} \wedge \cdots \wedge S^{\frac{1}{n}}, \quad n \geq 2.$$

It is easy to see that $(T_n)_{n\geq 2}$ is a stationary decreasing sequence of elements in $\mathcal{V}$ and $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ a.s.. By properties iv) and v) of $\mathcal{V}$ we have $T \in \mathcal{V}$, i.e., T is a.s. foretellable. □

Furthermore, we will show that all predictable times can be a.s. foretellable by a sequence of predictable times.

4.17 Theorem. *Let $T > 0$ be a predictable time, and $A \subset [0, T[$ be an optional (resp. predictable) set such that for almost all $\omega \in [T < \infty]$, $T(\omega)$*

is a limit point of set $A(\omega) = \{t \geq 0 : (\omega, t) \in A\}$. Then there exists an increasing sequence (T_n) of stopping times (resp. predictable times) such that $\bigcup_n [\![T_n]\!] \subset A$ a.s., $T_n \leq T$ and $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ a.s..

Proof. We only discuss the predictable case: A is predictable. Let (V_n) be a sequence of wide-sense stopping times which a.s. foretells T. For each n the projection of predictable set $A_n^T = A \cap]\!]V_n, T]\!]$ onto Ω a.s. contains $[T < \infty]$. By Theorem 4.8 for each n there exists a predictable time U_n such that $[\![U_n]\!] \subset A_n^T$ and

$$P(T < \infty) \leq P(\pi(A_n^T)) \leq P(U_n < \infty) - \frac{1}{2^n}.$$

Since $\lim_{n\to\infty} V_n = T$ a.s., we have $\liminf_{n\to\infty} U_n = T$ a.s..

For each n and k define

$$S_{nk} = \inf_{n \leq m \leq n+k} U_m, \quad S_n = \inf_k S_{n,k} = \lim_{k\to\infty} S_{n,k}.$$

It is obvious that $(S_{n,k})_{k\geq 1}$ is a decreasing sequence of predictable times. We will show that it is a.s. stationary. If $\omega \in \bigcap_{m=n}^{\infty} [U_m = \infty]$, then for all $k \geq 1$, $S_{n,k}(\omega) = \infty$. If $\omega \in (\bigcup_{m=n}^{\infty} [U_m < \infty]) \cap (\bigcap_{l=1}^{\infty} [V_l < T]) \cap [\lim_{l\to\infty} V_l = T]$, then there exists $m_0 \geq n$ such that $U_{m_0}(\omega) < \infty$. Since $U_{m_0}(\omega) < T(\omega)$ and $\lim_{l\to\infty} V_l(\omega) = T(\omega)$, there exists $k_0 \geq m_0 - n$ such that for $k \geq k_0$

$$U_{n+k}(\omega) \geq V_{n+k}(\omega) > U_{m_0}(\omega).$$

This means for $k \geq k_0$ $S_{n,k}(\omega) = S_{n,k_0}(\omega)$, i.e., $(S_{n,k}(\omega))_{k\geq 1}$ is stationary. Noting that $P(\bigcap_{l=1}^{\infty} [V_l < T]) \cap [\lim_{l\to\infty} V_l = T]) = 1$, we have shown that $(S_{n,k})_{k\geq 1}$ is a.s. stationary. Put

$$A_{n,k} = \bigcap_{i=1}^{\infty} [S_{n,k} = S_{n,k+i}], \quad R_{n,k} = (S_{n,k})_{A_{n,k}} \wedge T.$$

Then $A_{n,k} \in \mathcal{F}_{S_{n,k}-}$, $R_{n,k}$ is predictable and $(R_{n,k})_{k\geq 1}$ is a stationary decreasing sequence (noting $A_{n,k} \subset A_{n,k+1}$). Hence $R_n = \lim_{k\to\infty} R_{n,k}$ is predictable, and $R_n = S_n$ a.s.. Put

$$T_n = R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n.$$

Since (S_n) is an increasing sequence, we have $T_n = R_n = S_n$ a.s.,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \liminf_{m\to\infty} U_m = T \quad \text{a.s.}.$$

Finally, because all graphs of $S_{n,k}$ are contained in A and $(S_{n,k})_{k\geq 1}$ is a.s. stationary, the graph of S_n is a.s. contained in A, and so is the graph of T_n. □

4.18 Corollary. *All predictable times are a.s. foretellable by a sequence of predictable times.*

Proof. Let U be a predictable time. Put $T = U_{[U>0]}$. Then T is predictable and $T > 0$. By Theorem 4.17 there exists an increasing sequence (T_n) of predictable times such taht $\bigcup_n [\![T_n]\!] \subset [\![0, T[\![$ a.s. and $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ a.s.. Put

$$U_n = T_n \wedge U_{[U=0]}.$$

Then (U_n) is an increasing sequence of predictable times, and a.s. foretells U. □

§3. Totally Inaccessible Times

4.19 Definition. Let T be a stopping time. T is called *totally inaccessible*, if for every predictable time S $P(T = S < \infty) = 0$.

Obviously, totally inaccessible times are a.s. positive. If a stopping time is a.s. equal to a totally inaccessible time, then it is totally inaccessible, too. If a stopping time is both accessible and totally inaccessible, it must be a.s. equal to $+\infty$.

4.20 Theorem. *For each stopping time T there exists $A \in \mathcal{F}_{T-}$ such that $A \subset [T < \infty]$, T_A is accessible and T_{A^c} is totally inaccessible. Such set A is a.s. unique.*

Proof. Put

$$\mathcal{H} = \{\bigcup_n [S_n = T < \infty] : (S_n) \text{ is a sequence of predictable times}\}.$$

Obviously, $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_{T-}$ and $\mathcal{H}$ is closed under the formation of countable unions. By Remark 1.14, there exists $A \in \mathcal{H}$ such that $A = \text{ess sup}\,\mathcal{H}$. It is easy to see that T_A is accessible, and T_{A^c} is totally inaccessible. It is not difficult to verify a.s. uniqueness of A. □

Remark. Usually, T_A and T_{A^c} are called the *accessible part* and *totally inaccessible part* of T respectively, and denoted by T^a and T^i respectively. They are determined a.s. uniquely.

Now we are ready to study the jumps of adapted cadlag processes.

4.21 Theorem. *For any adapted cadlag process $X = (X_t)$ there exists*

a sequence (T_n) of strictly positive stopping times satisfying the following conditions:

i) $[\Delta X \neq 0] \subset \bigcup_n [T_n]$,

ii) *each T_n is predictable or totally inaccessible.*

iii) $[T_n] \bigcap [T_m] = \emptyset$ *for* $n \neq m$.

Such a sequence (T_n) of stopping times is called a standard sequence of stopping times exhausting the jumps of X.

Proof. By Theorem 3.32 there exists a sequence (U_n) of strictly positive stopping times such that condition i) is satisfied. By Theorem 4.20 for each n there exist an accessible time U_n^a and a totally inaccessible time U_n^i such that

$$[U_n] = [U_n^a] \cup [U_n^i]$$

From the definition of accessible times we see that there exists a sequence (S_n) of strictly positive stopping times satisfying conditions i) and ii). Put

$\mathcal{N}_1 = \{n : S_n \text{ is predictable}\}, \mathcal{N}_2 = \{n : S_n \text{ is totally inaccessible}\}$,

$T_1 = S_1$,

$$B_n = \begin{cases} \bigcap\limits_{k \le n-1, k \in \mathcal{N}_1} [S_k \neq S_n], & n \in \mathcal{N}_1, \\ (\bigcap\limits_{k \in \mathcal{N}_1} [S_k \neq S_n]) \bigcap (\bigcap\limits_{k \le n-1, k \in \mathcal{N}_2} [S_k \neq S_n]), & n \in \mathcal{N}_2, \end{cases} \quad n \ge 2.$$

$T_n = (S_n)_{B_n}, \quad n \ge 2.$

If S_n is predictable, then $B_n \in \mathcal{F}_{S_n -}$, and T_n is predictable. If S_n is totally inaccessible, then $B_n \in \mathcal{F}_{S_n}$. T_n is totally inaccessible. Apparently, (T_n) satisfies all conditions i), ii) and iii). □

Remark. If in condition ii) predictable times are replaced by accessible times, then it is desirable that in condition i) equality holds.

4.22 Definition. Let $X = (X_t)$ be an adapted cadlag process, and $T > 0$ be a stopping time. T is called a *jump time* of X, if on $[T < \infty]$ $X_T \neq X_{T-}$ a.s., i.e., $P(T < \infty, X_T \neq X_{T-}) = P(T < \infty)$. We say that X *has only accessible jumps*, provided that each jump time of X is a.s. equal to a certain accessible time. We say that X *has only totally inaccessible jumps*, provided that each jump time of X is totally inaccessible.

An adapted cadlag process having only totally inaccessible jumps is said to be *quasi-left-continuous*.

4.23 Theorem. *Let $X = (X_t)$ be an adapted cadlag process. Then the following statements are equivalent:*

1) *X is quasi-left-continuous;*

2) *For every predictable time $T > 0$, $X_T = X_{T-}$ a.s. on $[T < \infty]$;*

3) *If (T_n) is an increasing sequence of stopping times and $T = \lim\limits_{n \to \infty} T_n$, then $\lim\limits_{n \to \infty} X_{T_n} = X_T$ a.s. on $[T < \infty]$.*

Proof. 3) ⇒ 2) follows from Theorem 4.16. 2) → 1) follows from Theorem 4.20. We are going to show 1) ⇒ 2) ⇒ 3).

Assume that X is quasi-left-continuous, and $T > 0$ is a predictable time. Put

$$B = [T < \infty] \cap [X_T \neq X_{T-}].$$

Then T_B is a jump time of X. By the assumption T_B is totally inaccessible,

$$P(T_B = T < \infty) = 0.$$

This means $X_T = X_{T-}$ a.s. on $[T < \infty]$. 1) ⇒ 2) is established.

Assume 2) holds. Let (T_n) be an increasing sequence of stopping times, and $T = \lim\limits_{n \to \infty} T_n$. Put

$$A = \bigcap_n [T_n < T].$$

Then $T_A > 0$ and $(T_n)_{[T_n < T]} \wedge n$ foretells T_A. Hence T_A is predictable. By 2) $X_{T_A} = X_{T_A -}$ a.s. on $[T < \infty]$, i.e., $X_T = X_{T-}$ a.s. on $A \bigcap [T < \infty]$. Therefore, $\lim\limits_{n \to \infty} X_{T_n} = X_T$ a.s. on $A \bigcap [T < \infty]$. But on $A^c \bigcap [T < \infty]$, $\lim\limits_{n \to \infty} X_{T_n} = X_T$ holds always. Thus

$$\lim_{n \to \infty} X_{T_n} = X_T \quad \text{a.s. on } [T < \infty].$$

2) ⇒ 3) is established. □

Remark. A thin set is said to be *totally inaccessible* if $A = \bigcup_n [T_n]$, where each T_n is a totally inaccessible time. Then an adapted cadlag process X is quasi-left-continuous if and only if $[\Delta X \neq 0]$ is totally inaccessible.

4.24 Theorem. *Let $X = (X_t)$ be an adapted cadlag process. In order that X have only accessible jumps it is necessary and sufficient that for*

any totally inaccessible time T we have

$$X_T = X_{T-} \quad \text{a.s.} \quad \text{on} \quad [T < \infty].$$

Proof. It is analogous to proof 1) $\Longleftrightarrow$ 2) in Theorem 4.23. $\square$

The following theorem gives a useful decomposition for adapted processes with finite variation.

4.25 Theorem. *Let $A = (A_t)$ be an adapted process with finite variation. Then A has a unique decomposition as follows:*

$$A = A^c + A^{da} + A^{di},$$

where A^c is an adapted continuous process with finite variation, A^{da} is an adapted purely discontinuous process with finite variation having only accessible jumps, and A^{di} is an adapted quasi-left-continuous purely discontinuous process with finite variation.

Proof. Let (T_n) be a standard sequence of stopping times exhausting the jumps of X. Let $N_1 = \{n : T_n \text{ is predictable}\}$, $N_2 = \{n : T_n \text{ is totally inaccessible}\}$. Put

$$A_t^{da} = \sum_{n \in N_1} \Delta A_{T_n} I_{[T_n \le t]}, \quad A_t^{di} = \sum_{n \in N_2} \Delta A_{T_n} I_{[T_n \le t]}, \quad t \ge 0.$$

By Theorem 3.42 $A = A^c + A^{da} + A^{di}$ is a decomposition satisfying the sa-
requirement of the theorem. Suppose A has another decomposition
tisfying the requirement of the theorem: $A = A^c + \overline{A}^{da} + \overline{A}^{di}$. Denote $B = A^{da} - \overline{A}^{da} = \overline{A}^{di} - A^{di}$. Then B is an adapted purely discontinuous
process with finite variation. Let $T > 0$ be a stopping time, T^a and
T^i be its accessible and totally inaccessible parts respectively: $[T] =$
$[T^a] \cup [T^i]$. We have $\Delta B_{T^a} = \Delta \overline{A}^{di}_{T^a} - \Delta A^{di}_{T^a} = 0$ a.s. on $[T^a < \infty]$, and $\Delta B_{T^i} = \Delta A^{da}_{T^i} - \Delta \overline{A}^{da}_{T^i} = 0$ a.s. on $[T^i < \infty]$. Hence $\Delta B_T = 0$ a.s. on $[T < \infty]$. By Corollary 4.11, ΔB is indistinguishable from a null-process,
i.e., B is indistinguishable from a continuous process. But B is a purely
discontinuous process with finite variation, so B is indistinguishable from
a null-process, i.e., A^{da} and $\overline{A}^{da}$ are indistinguishable, A^{di} and $\overline{A}^{di}$ are
indistinguishable. The uniqueness of the decomposition has been proved.
$\square$

§4. Complete Filtrations and the Usual Conditions

4.26 Theorem. *Assume $(\mathcal{F}_t)$ is complete* (see Definition 2.63). *Then all evanescent measurable processes are predictable.*

Proof. Let X be an evanescent measurable process, and $A = \{\omega : \exists t \in \boldsymbol{R}_+ \text{ such that } X_t(\omega) \ne 0\}$. Then $P(A) = 0$, and $A \in \mathcal{F}_0$. Put

$$\mathcal{C} = \{C \times [t, \infty[: C \in \mathcal{F}, t \in \boldsymbol{R}_+\}.$$

It is easy to see that $\mathcal{C}$ is a π-class, and $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$. On the other hand, put

$$\mathcal{H} = \{Y : Y \text{ is } \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)\text{-measurable and } Y I_{A \times \boldsymbol{R}_+} \text{ is predictable}\}.$$

Then for all $H \in \mathcal{C}$, $I_H \in \mathcal{H}$. By the monotone class theorem (Theorem 1.4) $\mathcal{H}$ is just the collection of all $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$-measurable processes. In particular, $X = X I_{A \times \boldsymbol{R}_+}$ is predictable. $\square$

4.27 Corollary. *Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. Let $A \in \mathcal{F}$ and $P(A) = 0$. Then for each non-negative r.v. ξ, $\xi_A = \xi I_A + (+\infty) I_{A^c}$ is a predictable time.*

Proof. Since $[\xi_A, +\infty[$ is an evanescent measurable set, it is predictable. By Definition 3.25 ξ_A is a predictable time. $\square$

4.28 Corollary. *Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. Let X and Y be two indistinguishable measurable processes. If X is optional (resp. accessible, resp. predictable), so is Y.*

Proof. Note that $Y = X I_{[X=Y]} + Y I_{[X \ne Y]}$. $I_{[X \ne Y]}$ and $I_{[X=Y]}$ are predictable. Then the assertion follows immediately. $\square$

4.29 Theorem. *Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete.*

1) Let T be a stopping time (resp. accessible time, resp. predictable time), and $S = T$ a.s.. Then S is a stopping time (resp. accessible time, resp. predictable time) and $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_S, \mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_S$.

2) Let $S \ge 0$ be a r.v.. In order that S be a stopping time (resp. accessible time, resp. predictable time) it is necessary and sufficient that $[S]$ be an optional (resp. accessible, resp. predictable) set.

Proof. 1) follows from Corollary 4.28 since S is a r.v. and measurable process. $I_{[S,\infty[}$ and $I_{[T,\infty[}$ are indistinguishable. The equalities $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_S$ and $\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{S-}$ follow directly from the definitions of $\mathcal{F}_T$ and $\mathcal{F}_{T-}$.

2) Only the sufficiency needs to be proved. We discuss only the predictable case, the others are similar. Let $[\![S]\!]$ be a predictable set. By the section theorem, for any given $\varepsilon > 0$ there exists a predictable time T^ε such that $[\![T^\varepsilon]\!] \subset [\![S]\!]$ and $P(T^\varepsilon < \infty) \geq P(S < \infty) - \varepsilon$. Put

$$S_n = T^{\frac{1}{2}} \wedge \cdots \wedge T^{\frac{1}{n}}, n \geq 2.$$

Then $(S_n)_{n\geq 2}$ is a stationary decreasing sequence of predictable times, and $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ a.s.. By 1) S is a predictable time. □

4.30 Theorem. *Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. The debut D_A of any progressive set A is a wide-sense stopping time. Furthermore, if $[\![D_A]\!] \subset A$, D_A is a stopping time.*

Proof. For any $t \geq 0$ put

$$\Lambda_t = \{(\omega, s) : s < t, (\omega, s) \in A\}.$$

Then $\Lambda_t = A \cap (\Omega \times [0,t[) \in \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$, and $[D_A < t] = \pi(\Lambda_t)$, where $\pi(\Lambda_t)$ is the projection of Λ_t onto Ω. Since $\mathcal{F}_t$ is complete w.r.t. $\mathbf{P}$, by Theorems 1.36 and 1.40 $[D_A < t] = \pi(\Lambda_t) \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_t) = \mathcal{F}_t$. Hence D_A is a wide-sense stopping time.

If $[\![D_A]\!] \subset A$, then $[D_A \leq t] = \pi(\overline{\Lambda}_t)$ where

$$\overline{\Lambda}_t = \{(\omega, s) : s \leq t, (\omega, s) \in A\}.$$

Similarly, $[D_A \leq t] = \pi(\overline{\Lambda}_t) \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_t) = \mathcal{F}_t$. Hence D_A is a stopping time. □

4.31 Theorem. *Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. Let H be a predictable set, and $[\![D_H]\!] \subset H$, where D_H is the debut of H. Then D_H is a predictable time.*

Proof. First, by Theorem 4.30 D_H is a stopping time. Thus $[\![D_H]\!] = H \cap [\![0, D_H]\!]$ is a predictable set. Then by Theorem 4.29.3) D_H is predictable. □

4.32 Theorem. *Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. All adapted right-continuous processes are optional.*

Proof. Let X be an adapted right-continuous process. For any given $\varepsilon > 0$ denote by $\mathcal{A}$ the collection of all stopping times S satisfying the following condition: there exists an optional process $Y^{(S)}$ such that

$$\{(\omega, t) : t \in [0, S(\omega)[, |X_t(\omega) - Y_t^{(S)}(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

is an evanescent set. It is easy to see that $\mathcal{A}$ is not empty (because $0 \in \mathcal{A}$) and has the following properties:

i) $S, T \in \mathcal{A} \Rightarrow S \vee T \in \mathcal{A}$.

ii) $S_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \cdots$, $S_n \uparrow S \Rightarrow S \in \mathcal{A}$.

iii) $S \in \mathcal{A}$, T is a stopping time, $T = S$ a.s. $\Rightarrow T \in \mathcal{A}$.

By Theorem 1.13 there exists $T \in \mathcal{A}$ such that $T = \operatorname{ess\,sup} \mathcal{A}$. We are going to show $T = +\infty$ a.s.. Let

$$\Lambda = \{(\omega, t) : t > T(\omega), |X_t(\omega) - X_{T(\omega)}(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

Λ is a progressive set. Denote by U the debut of Λ. In view of right-continuity of X, we have $[\![U]\!] \subset \Lambda$. Hence U is a stopping time. Put

$$Y^{(U)} = Y^{(T)} I_{[\![0,T[\![} + X_T I_{[\![T,U[\![}.$$

Then $U \in \mathcal{A}$ and $U \geq T$. Therefore $U = T$ a.s.. On the other hand, again by the right-continuity of X, we have $T < U$ on $[U < \infty]$. This means $T = U = +\infty$ a.s. Thus by the property iii) of $\mathcal{A}$ we know $+\infty \in \mathcal{A}$. Put $X^\varepsilon = Y^{(+\infty)}$. Then X^ε is an optional process and

$$\{(\omega, t) : |X_t(\omega) - X_t^\varepsilon(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

is an evanescent set. Take $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Put

$$\overline{Y} = \liminf_{n\to\infty} X^{\varepsilon_n}, \quad Y = \overline{Y} I_{[|\overline{Y}|<\infty]}.$$

So Y is an optional process, X and Y are indistinguishable. Hence X is optional by Corollary 4.28. □

4.33 Theorem. *Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. Let X be an adapted cadlag process. In order for X to be predictable it is necessary and sufficient to satisfy the following conditions:*

i) For each totally inaccessible time S $X_S = X_{S-}$ a.s. on $[S < \infty]$;

ii) For each predictable time T, $X_T I_{[T<\infty]}$ is $\mathcal{F}_{T-}$-measurable.

Proof. The necessity follows from Theorem 3.33. We are to show the sufficiency. Suppose conditions i) and ii) hold. By Theorem 3.32 there exists a sequence (U_n) of strictly positive stopping times such that

$$[\Delta X \neq 0] = \bigcup_n [\![U_n]\!].$$

For each n, let U_n^a and U_n^i be the accessible and totally inaccessible parts of U_n respectively:

$$[\![U_n]\!] = [\![U_n^a]\!] \cup [\![U_n^i]\!].$$

By condition i) $U_n^i = +\infty$ a.s.. Hence U_n^i is a predictable time (Theorem 4.29.2)). Then $U_n = U_n^a \wedge U_n^i$ is accessible, and there exists a sequence (T_n) of strictly positive predictable times such that

$$[\Delta X \neq 0] \subset \bigcup_n [T_n].$$

Combining with condition ii), from Theorem 3.33 we know that X is a predictable process. □

Remark. From the above proof one can see that condition i) is necessary and sufficient for X to be accessible (see the Remark of Definition 3.37). Theorem 4.33 is more convenient than Theorem 3.33 in applications.

4.34 Theorem. *Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. All predictable times are foretellable.*

Proof. Let T be a predictable time, and (S_n) be an increasing sequence of stopping times which a.s. foretells T. Put

$$A = \{(\bigcap_n [S_n < T]) \cap [T = \lim_{n\to\infty} S_n]\} \cup [T = 0],$$

$$T_n = (S_n)_A \wedge (T - \frac{1}{n})^+_{A^c}.$$

Since $P(A) = 1$, (T_n) is a sequence of stopping times by Theorem 4.29. Obviously, (T_n) foretells T. □

4.35 Theorem. *Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. The following statements are equivalent:*

1) *$(\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous, i.e., for every predictable time T, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$.*

2) *All accessible times are predictable,*

3) *If (T_n) is an increasing sequence of stopping times and $T = \lim_{n\to\infty} T_n$, then*

$$\mathcal{F}_T = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}.$$

Proof. 1) $\Longleftrightarrow$ 2) and 1) $\Rightarrow$ 3) have already been shown in Theorem 3.40. It remains to show 3) $\Rightarrow$ 1). Let T be a predictable time, and (T_n) be a sequence of stopping times foretelling T (Theorem 4.34). By Theorem 3.4.11) we have

$$\mathcal{F}_{T-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}.$$

By 3) we obtain $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$. Hence $(\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous. □

4.36 Theorem. *Assume that $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$ is the usual augmentation of a filtration $\mathbf{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)$, i.e.,*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}^0 \vee \mathcal{N}, \quad t \geq 0,$$

where $\mathcal{N}$ is the σ-field generated by all $\mathbf{P}$-null sets (see Definition 2.63).

1) *For each $\mathbf{F}$-stopping time T there exists an $\mathbf{F}^0$-stopping time in the wide sense U such that $T = U$ a.s.. In addition, we have*

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{U+}^0 \vee \mathcal{N}, \quad \mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{U-}^0 \vee \mathcal{N}.$$

2) *For each $\mathbf{F}$-optional process X there exists an $\mathbf{F}_+^0$-optional process Y such that X and Y are indistinguishable.*

Proof. 1) Since

$$T = \inf_{n,k\geq 1} \left\{\frac{k}{2^n} I_{[\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}]} + (+\infty) I_{[T < \frac{k-1}{2^n}] \cup [T \geq \frac{k}{2^n}]}\right\},$$

we may assume that T has the following form:

$$T = a I_A + (+\infty) I_{A^c}, \quad a \in \mathbf{R}_+, \ A \in \mathcal{F}_a.$$

In this case, take $B \in \mathcal{F}_{a+}^0$ such that $\mathbf{P}(B \Delta A) = 0$. Then

$$U = a I_B + (+\infty) I_{B^c}$$

is an $\mathbf{F}^0$-stopping time in the wide sense, and $U = T$ a.s..

By Theorem 4.29.1) we have $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_U \supset \mathcal{F}_{U+}^0 \vee \mathcal{N}$. On the other hand, for any $L \in \mathcal{F}_T$ we may take $L' \in \mathcal{F}_\infty^0$ such that $\mathbf{P}(L \Delta L') = 0$, and an $\mathbf{F}^0$-stopping time in the wide sense V such that $V = T_L$ a.s.. Put

$$M = (L' \cap [U = \infty]) \cup [V = U < \infty].$$

Then $M \in \mathcal{F}_{U+}^0$, and $\mathbf{P}(M \Delta L) = 0$. This means $L \in \mathcal{F}_{U+}^0 \vee \mathcal{N}$. Hence $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{U+}^0 \vee \mathcal{N}$. The equality for $\mathcal{F}_{T-}$ is trivial.

2) Suppose $X = I_{[T,\infty[}$, where T is an $\mathbf{F}$-stopping time. By 1) take an $\mathbf{F}_+^0$-stopping time U such that $U = T$ a.s.. Then $Y = I_{[U,\infty[}$ is an $\mathbf{F}_+^0$-optional process, and indistinguishable from X. The general assertion follows by the monotone class argument. □

4.37 Theorem. *Assume that $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$ is the completion of a filtration $\mathbf{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)$, i.e.,*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^0 \vee \mathcal{N}, \quad t \geq 0.$$

1) *For each $\mathbf{F}^0$-stopping time T we have*

$$\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{T-}^0 \vee \mathcal{N}.$$

2) *For each* $\boldsymbol{F}$*-predictable time* T *there exists an* $\boldsymbol{F}^0$*-predictable time* S *such that* $T = S$ *a.s. and* $\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}^0_{S-} \vee \mathcal{N}$.

3) *For each* $\boldsymbol{F}$*-predictable process* X *there exists an* $\boldsymbol{F}^0$*-predictable process* Y *such that* X *and* Y *are indistiguishable.*

Proof. 1) is trivial.

2) Let (T^n) be a sequence of $\boldsymbol{F}$-stopping times foretelling predictable time $T_{[T>0]}$. For each n let R^n be an $\boldsymbol{F}^0_+$-stopping time such that $R^n = T^n$ a.s. (Theorem 4.36.1)). Replacing R^n by $R^1 \vee \cdots \vee R^n$ (if necessary), we may suppose (R^n) is increasing. Denote $R = \lim_{n\to\infty} R^n$. Put $A_n = [R^n <$ $R]$. Since (A_n) is decreasing, $(U_n = R^n_{A_n} \wedge n)$ is an increasing sequence of $\boldsymbol{F}^0_+$-stopping times. (U_n) foretells U and $U > 0$, so U is an $\boldsymbol{F}^0$-predictable time (see the proof of Theorem 3.27). Because $\boldsymbol{P}(A_n) = 1$, $U_n = R^n \wedge n$ a.s., $U = R = T_{[T>0]}$ a.s.. Take $H \in \mathcal{F}^0_0$ such that $P(H \triangle [U = 0]) = 0$. Put

$$S = U \wedge 0_H.$$

Then S is an $\boldsymbol{F}^0$-predictable time, and $T = S$ a.s..

By 1) and Theorem 4.29.1) we have $\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{S-} = \mathcal{F}^0_{S-} \vee \mathcal{N}$.

Proof 3) is similar to that of Theorem 4.36.2). □

4.38 Theorem. *Assume that* $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ *is the usual augmentation of a filtration* $\boldsymbol{F}^0 = (\mathcal{F}^0_t)$.

1) *For each* $\boldsymbol{F}$*-accessible time* T *there exists an* $\boldsymbol{F}^0_+$*-accessible time* U *such that* $T = U$ *a.s..*

2) *For each* $\boldsymbol{F}$*-accessible process* X *there exists an* $\boldsymbol{F}^0_+$*-accessible process* Y *such that* X *and* Y *are indistinguishable.*

Proof. 1) Let S be an $\boldsymbol{F}^0_+$-predictable time such that $S = T$ a.s.. Assume $[T] \subset \bigcup_n [T_n]$, where (T_n) is a sequence of $\boldsymbol{F}$-predictable times. For each n there exists an $\boldsymbol{F}^0_+$-predictable time S_n such that $S_n = T_n$ a.s. (Theorem 4.37.2)). Obviously, $[S] \subset \bigcup_n [S_n]$ a.s.. Put

$$U = \bigwedge_n (S)_{[S=S_n]}.$$

Then U is an $\boldsymbol{F}^0_+$-accessible time: $[U] \subset \bigcup_n [S_n]$, and $U = S = T$ a.s..

2) follows from 1) by the monotone class argument. □

§5. Applications to Martingales

In this paragraph we assume that $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ is a complete probability space and the filtration $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ satisfies the usual conditions.

4.39 Theorem. *Let* $X = (X_t)$ *be a right-continuous supermartingale (resp. martingale) and* T *be a stopping time. Then the stopped process* $X^T = (X_{t\wedge T})$ *is also a supermartingale (resp. martingale).*

Proof. For each $t \geq 0$, $X_{t\wedge T}$ is $\mathcal{F}_{t\wedge T}$-measurable. Hence X^T is adapted. Let $a \in \boldsymbol{R}_+$, $0 \leq s \leq a$. Applying Theorem 2.59 to $X^a = (X_{t\wedge a})$ yields

$$\boldsymbol{E}[X_{a\wedge T}|\mathcal{F}_s] \leq X_{s\wedge T} \text{ (resp.} = X_{s\wedge T}) \quad \text{a.s.}.$$

Therefore, X^T is a supermartingale (resp. martingale). □

Remark. Put $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t\wedge T}$. Filtration $(\mathcal{G}_t)$ satisfies the usual conditions, and X^T is a $(\mathcal{G}_t)$-supermartingale (resp. martingale).

The following theorem is very useful sometimes, though it is simple.

4.40 Theorem. *Let* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *be an adapted measurable process, and* X_∞ *be an integrable* $\mathcal{F}_\infty$*-measurable r.v.. If for every stopping time* T, X_T *is integrable, and* $\boldsymbol{E}[X_T]$ *is independent of* T, *then* X *is a uniformly integrable martingale. Moreover, if* X *is optional, then almost all its trajectories are right-continuous.*

Proof. For any stopping time T and $A \in \mathcal{F}_T$ we have

$$\int_A X_T d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}[X_{T_A}] - \int_{A^c} X_\infty d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}[X_\infty] - \int_{A^c} X_\infty d\boldsymbol{P} = \int_A X_\infty d\boldsymbol{P}. \tag{40.1}$$

Take $T = t \in \boldsymbol{R}_+$ in (40.1). Since $X_t \in \mathcal{F}_t$, we obtain

$$\boldsymbol{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t] = X_t \quad \text{a.s.}$$

Hence X is a uniformly integrable martingale. Moreover, if X is optional, for any stopping time T, X_T is $\mathcal{F}_T$-measurable. From (40.1) we obtain

$$\boldsymbol{E}[X_\infty|\mathcal{F}_T] = X_T \quad \text{a.s.}.$$

Let $Y = (Y_t)$ be the right-continuous adapted modification of martingale $(\boldsymbol{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t])$ (with the convention $Y_\infty = X_\infty$). By Theorem 2.58 we have

$$Y_T = \boldsymbol{E}[X_\infty|\mathcal{F}_T] = X_T \quad \text{a.s.}.$$

Since Y is optional, by Corollary 4.11 X and Y are indistinguishable. Therefore, almost all trajectories of X are right-continuous. □

Remark. Suppose $X = (X_t)$ is an optional process. If for every bounded stopping time T X_T is integrable and $E[X_T]$ is independent of T, then applying the theorem to $X^n = (X_{t\wedge n}), n \geq 1$, we know that X is a martingale, and almost all its trajectories are right-continuous.

The following theorem is the predictable form of the stopping theorem. It is the basis of defining predictable projections of processes in the next chapter.

4.41 Theorem. *Let $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ be a right-continuous supermartingale (resp. martingale). Then for every predictable time T and stopping time $U \geq T$ we have*

$$E[X_U|\mathcal{F}_{T-}] \leq X_{T-} \text{ (resp. } = X_{T-}) \text{ a.s.,} \tag{41.1}$$

where X_{T-} is a.s. well-defined (Theorem 2.43) *and integrable.*

Proof. Let (T_n) be a sequence of stopping times foretelling T. By Theorem 3.4.11) we have

$$\mathcal{F}_{T-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}.$$

For brevity we discuss only the supermartingale case. By the stopping theorem 2.58 we have

$$E[X_U|\mathcal{F}_{T_n}] \leq X_{T_n} \quad \text{a.s.,}$$

Applying Corollary 2.19, we obtain

$$E[X_U|\mathcal{F}_{T-}] = \lim_{n\to\infty} E[X_U|\mathcal{F}_{T_n}] \leq \lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_{T-} \quad \text{a.s.,}$$

The integrability of X_{T-} follows from Corollary 2.61. □

4.42 Theorem. *Let ξ be an integrable r.v., S and T be two predictable times. Then*

$$E[E[\xi|\mathcal{F}_{S-}]|\mathcal{F}_{T-}] = E[\xi|\mathcal{F}_{(S\wedge T)-}] \quad \text{a.s.,} \tag{42.1}$$

Proof. Let (X_t) be the right-continuous adapted modification of martingale $(E[\xi|\mathcal{F}_t])$. Then we have

$$\begin{aligned} E[E[\xi|\mathcal{F}_{S-}]|\mathcal{F}_{T-}] &= E[X_{S-}|\mathcal{F}_{T-}] = E[I_{[S\geq T]}X_{(S\vee T)-} + I_{[S<T]}X_{S-}|\mathcal{F}_{T-}] \\ &= I_{[S\geq T]}E[E[X_{S\vee T}|\mathcal{F}_{(S\vee T)-}]|\mathcal{F}_{T-}] + I_{[S<T]}X_{S-} \\ &= I_{[S\geq T]}E[X_{S\vee T}|\mathcal{F}_{T-}] + I_{[S<T]}X_{S-} \\ &= I_{[S\geq T]}X_{T-} + I_{[S<T]}X_{S-} = X_{(S\wedge T)-} \\ &= E[\xi|\mathcal{F}_{(S\wedge T)-}] \quad \text{a.s.,} \end{aligned}$$

□

Problems and Complements

4.1 Let S be a wide-sense stopping time and $A \subset]S, \infty[$ be an optional (resp. predictable) set such that for all $\omega \in [S < \infty]$ $S(\omega)$ is a limit point of set $A(\omega) = \{t \geq 0 : (\omega, t) \in A\}$. Then there exists a decreasing sequence (S_n) of stopping times (resp. predictable times) such that $\bigcup_n [S_n] \subset A$ and $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ a.s..

4.2 Suppose $T = T_1 \wedge T_2, T_1 \vee T_2 = +\infty$, where T_1 is an accessible time and T_2 is a totally inaccessible time. Then $T_1 = T^a$, $T_2 = T^i$ a.s.

4.3 Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. Let H be a predictable set and D_H be the debut of H. Then there exists an increasing sequence (T_n) of stopping times such that $\lim_{n\to\infty} T_n = D_H$ and for all n $T_n < D_H$ on $\{\omega : D_H(\omega) > 0$ and $(\omega, D_H(\omega)) \in H\}$.

4.4 Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. Then every predictable time can be foretold by a sequence of stopping times taking values in the set of dyadic numbers.

4.5 Let $F^0 = (\mathcal{F}_t^0)$ be a right-continuous filtration and $F = (\mathcal{F}_t)$ be its completion. If F^0 is quasi-left-continuous, so is F.

4.6 Suppose $F = (\mathcal{F}_t)$ is the usual augmentation of a filtration $F^0 = (\mathcal{F}_t^0)$ and $X = (X_t)$ is a right-continuous F^0-supermartingale (resp. martingale). Then X is also an F-supermartingale (resp. martingale).

4.7 Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. Let S and T be predictable times, $S < T$. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists a sequence (R_n) of predictable times such that $R_0 = S$, $0 < R_{n+1} - R_n \leq \varepsilon$, $n \geq 0$, and $\lim_n R_n = T$.

4.8 Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is complete. Let $T > 0$ be a predictable time. Then there exists an adapted continuous strictly increasing process A such

that $A_0 = 0$, $A_T = 1$.

In the following problems we always assume that the filtration $F = (\mathcal{F}_t)$ satisfies the usual conditions.

4.9 If $X = (X_t)$ is a cadlag supermartingale (resp. martingale) and T is a predictable time, then X^{T-} is a supermartingale (resp. martingale), too.

4.10 Suppose $X = (X_t)$ is a predictable process, $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ exists and is finite, for each predictable time T X_T is integrable and $E[X_T]$ is independent of T. Let Y be the cadlag adapted modification of martingale $(E[X_\infty|\mathcal{F}_t])$. Then $X = Y_-$.

4.11 Suppose (X_t) is a cadlag supermartingale (resp. martingale). If S and T are predictable times, and $S \le T$, then

$$X_{S-} \ge E[X_{T-}|\mathcal{F}_{S-}] \ge E[X_T|\mathcal{F}_{S-}]$$

$$(\text{resp.} \quad X_{S-} = E[X_{T-}|\mathcal{F}_{S-}] = E[X_T|\mathcal{F}_{S-}]).$$

4.12 Let $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ be a sub-σ-field such that $\mathcal{F}_{S-} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_S$ for a certain stopping time S. Then for every stopping time T and integrable r.v. ξ

$$E[\xi|\mathcal{F}_T|\mathcal{G}] = E[\xi|\mathcal{G}|\mathcal{F}_T].$$

Moreover, if T is predictable, then $E[\xi|\mathcal{F}_{T-}|\mathcal{G}] = [\xi|\mathcal{G}|\mathcal{F}_{T-}]$.

4.13 Let $X = (X_t)$ be an optional (resp. predictable) porcess such that for every bounded stopping time (resp. predictable time) T, X_T is integrable.

1) If for every decreasing sequence (T_n) of bounded stopping times (resp. predictable times) $\lim_{n\to\infty} E[X_{T_n}]$ exists (may be $\pm\infty$), then almost all trajectories of X have right limits on R_+ (may be $\pm\infty$).

2) If for every uniformly bounded increasing sequence (T_n) of stopping times (resp. predictable times) $\lim_{n\to\infty} E[X_{T_n}]$ exists, then almost all trajectories of X have left limits on $]0,\infty[$.

Moreover, if for every bounded stopping time (resp. predictable time) T, $E|X_T| \le K$, where K is a constant, then all right or left limits above are finite.

4.14 Let $X = (X_t)$ be a bounded optional process. If for every increasing sequence (T_n) of finite stopping times tending to $+\infty$, $\lim_{n\to\infty} E[X_{T_n}]$ exists, then $\lim_{t\to\infty} X_t$ a.s. exists.

4.15 Let $X = (X_t)$ be an optional process and

$$\sup\{E|X_T| : T \text{ is a bounded stopping time}\} < \infty^{1)}.$$

If for every decreasing sequence (T_n) of bounded stopping times, (X_{T_n}) is uniformly integrable and

$$\lim_{n\to\infty} E[X_{T_n}] = E[X_{\lim_{n\to\infty} T_n}],$$

then almost all trajectories of X are right continuous.

4.16 Let $X = (X_t)$ be an optional process. In order that almost all trajectories of X be right-continuous it is necessary and sufficient that for every decreasing sequence (T_n) of bounded stopping times we have

$$X_{T_n} \xrightarrow{P} X_{\lim_{n\to\infty} T_n}.$$

4.17 Let $X = (X_t)$ be a predictable process and

$$\sup\{E|X_T| : T \text{ is a bounded predictable time}\} < \infty.$$

If for every uniformly bounded increasing sequence (T_n) of predictable times, (X_{T_n}) is uniformly integrable and $\lim_{n\to\infty} E[X_{T_n}] = E[X_{\lim_{n\to\infty} T_n}]$, then almost all trajectories of X are left-continuous.

4.18 Let $X = (X_t)$ be a predictable process. In order that almost all trajectories of X be left-continuous it is necessary and sufficient that for every uniformly bounded increasing sequence (T_n) of predictable times we have

$$X_{T_n} \xrightarrow{P} X_{\lim_{n\to\infty} T_n}.$$

4.19 Let $(X^{(n)})_{n\ge1}$ be a sequence of right-continuous supermartingales such that for all n and $t \in R_+$, $X_t^{(n)} \le X_t^{(n+1)}$ a.s.. Put

$$X_t(\omega) = \sup_n X_t^{(n)}(\omega), \quad t \ge 0.$$

If X_0 is integrable, then (X_t) is a supermartingale, and almost all its trajectories are right-continuous.

4.20 Let $(X^{(n)})_{n\ge1}$ be a sequence of right-continuons submartingales such that for all n and $t \in R_+$, $X_t^{(n)} \le X_t^{(n+1)}$ a.s., and for all n, $X^{(n+1)} - X^{(n)}$ is a submartingale. Put

$$X_t(\omega) = \sup_n X_t^{(n)}(\omega), \quad t \ge 0.$$

If for every $t \in R_+$, X_t is integrable, then (X_t) is a submartingale, and almost all its trajectories are right-continuous.

---

1) In other words, (X_t) is bounded in L^1.

Chapter V

Projections of Processes

In this chapter we mainly present optional and predictable projections of measurable processes, dual optional and predictable projection of processes with finite variation. As an application of projection theory, we will show the extremely important Doob-Meyer decomposition theorem for supermartingales. At last, we will give a detailed discussion about filtrations of discrete type to conclude the general theory of stochastic processes.

In this chapter we suppose $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is a complete probability space, and the filtration $F = (\mathcal{F}_t)$ satisfies the usual conditions, unless otherwise stated. Usually, $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ is called a *filtered probability space*.

§1. Projections of Measurable Processes

5.1 Theorem. *Let $X = (X_t)$ be a measurable process such that for every stopping time T $X_T I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_T$*[1]*. Then there exists a unique optional process, denoted by ^oX, such that for every stopping time T we have*

$$E[X_T I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_T] = {}^oX_T I_{[T<\infty]} \quad \text{a.s.} \tag{1.1}$$

In this case, we say that the optional projection of X exists[2]*, or X has optional projection, and refer to ^oX as the optional projection of X.*

Proof. The uniqueness comes from Corollary 4.11. It suffices to show the existence. We proceed in four steps.

[1] It is easy from Theorem 1.16 to see that this condition is equivalent to the seemingly weaker one: for every bounded stopping time T, X_T is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_T$.

[2] Rigorously speaking, we should say that the optional projection of X exists and is finite. Because from the proof of the theorem one can see that if the value $+\infty$ is allowed for ^oX, then the optional projections of all non-negative measurable processes exist. But it is stipulated that processes take only finite values. The existence of ^oX means ^oX is finite-valued.

a) Assume $X = \xi I_{[r,s[}$, where ξ is a bounded (or integrable) r.v., $0 \le r < s \le +\infty$. Let $^oX = Y I_{[r,s[}$, where $Y = (Y_t)$ is the cadlag modification of martingale $(E[\xi|\mathcal{F}_t])$ (see Corollary 2.48). Obviously, ^oX is optional. It is easy from Theorem 2.58 to see that ^oX satisfies (1.1), i.e., ^oX is the optional projection of X.

b) Let X and Y be two measurable processes. If X and Y have optional projections ^oX and ^oY respectively, then for any real λ and β, $\lambda X + \beta Y$ has optional projection $\lambda {}^oX + \beta {}^oY$. Moreover, if $X \le Y$, then $^oX \le {}^oY$ (Theorem 4.10). If $(X^{(n)})$ is an increasing sequence of non-negative measurable processes, for each n the optional projection of $X^{(n)}$ exists, and the limit process $X = \lim_{n\to\infty} X^{(n)}$ is bounded, then the optional projection of X exists, and $^oX = \lim_{n\to\infty} {}^o(X^{(n)})$. Hence by a) and the monotone class theorem we conclude that the optional projections of all bounded measurable processes exist.

c) Suppose X is a non-negative measurable process satisfying the assumption of the theorem. Let $X^{(n)} = X \wedge n$. By b) the optional projection of $X^{(n)}$ exists, and $^o(X^{(n)})$ is increasing (up to an evanescent set). For every stopping time T, $(^oX_T^{(n)} I_{[T<\infty]})$ is increasing (up to a null set), and by Theorem 1.19 we have

$$E[X_T I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_T] = \lim_{n\to\infty} E[X_T^{(n)} I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_T] = \lim_{n\to\infty} {}^oX_T^{(n)} I_{[T<\infty]}.$$

Let $Y = \limsup_{n\to\infty} {}^oX^{(n)}$ and $^oX = Y I_{[Y<\infty]}$. Then ^oX is an optional process, and for every stopping time T

$${}^oX_T I_{[T<\infty]} = Y_T I_{[T<\infty]} = \lim_{n\to\infty} {}^oX_T^{(n)} I_{[T<\infty]} = E[X_T I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_T] \quad \text{a.s.}.$$

Thus ^oX satisfies (1.1), i.e., ^oX is the optional projection of X.

d) Suppose measurable process X satisfies the assumption of the theorem. Then so do $X^+ = X \vee 0$ and $X^- = -(X \wedge 0)$. By c) $^o(X^+)$ and $^o(X^-)$ exist. Now it is easy to see that $^oX = {}^o(X^+) - {}^o(X^-)$ is the optional projection of X. □

Remark. If X is a progressive process, then the optional projection of X exists, and for every finite stopping time T we have $X_T = {}^oX_T$ a.s.. In particular, ^oX is an optional modification of X.

5.2 Theorem. *Let $X = (X_t)$ be a measurable process such that for every predictable time T, $X_T I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_{T-}$. Then there exists a unique predictable process, denoted by ^pX, such that for every predictable time T we have*

$$E[X_T I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_{T-}] = {}^pX_T I_{[T<\infty]} \quad \text{a.s.} \tag{2.1}$$

In this case, we say that the predictable projection of X exists, or X has predictable projection, and refer to ${}^pX$ as the predictable projection of X.

Proof. Assume $X = \xi I_{[r,s[}$, where ξ is a bounded (or integrable) r.v., $0 \le r < s \le +\infty$. Let $Y = (Y_t)$ be the cadlag modification of martingale $(E[\xi|\mathcal{F}_t])$. Put ${}^pX = Y_- I_{]r,s]}$. Then ${}^pX$ is predictable, and satisfies (2.1) (Theorem 4.41), i.e., ${}^pX$ is the predictable projection of X. The other parts of the proof are completely similar to that of Theorem 5.1. □

5.3 Remarks. 1) If X is a uniformly integrable cadlag martingale, then X_- is the predictable projection of X.

2) Suppose the optional projection of a measurable process X exists. In order to verify that an optional process Y is the optional projection of X it suffices by Corollary 4.11 to justify the following equality

$$E[X_T|\mathcal{F}_T] = Y_T \quad \text{a.s.}$$

for any bounded stopping time T. Moreover, if for every stopping time T $X_T I_{[T<\infty]}$ is integrable, it suffices by Corollary 4.13 to justify the following equality

$$E[X_T I_{[T<\infty]}] = E[Y_T I_{[T<\infty]}]$$

for any stopping time T. For the predictable case we have similar assertions.

The following theorems illustrate that projections have the smoothing property, analogous to conditional expectations.

5.4 Theorem. *Let X be a measurable process and Y be an optional (resp. predictable) process. If the optional (resp. predictable) projection of X exists, then the optional (resp. predictable) projection of XY exists, and ${}^o(XY) = ({}^oX)Y$ (resp. ${}^p(XY) = ({}^pX)Y$).*

Proof. It follows from Theorem 1.21 easily. □

5.5 Theorem. *Let X be a measurable process. If the optional and predictable projections of X exist, then the predictable projection of ${}^oX$ also exists, and ${}^p({}^oX) = {}^pX$. In addition, $[{}^oX \ne {}^pX]$ is indistinguishable from a thin set.*

Proof. The first assertion comes from Theorem 1.22 easily. We are going to show the second assertion. Let $X = \xi I_{[r,s[}$, where ξ is a bounded (or integrable) r.v., $0 \le r < s \le +\infty$. Let Y be the cadlag modification of the martingale $(E[\xi|\mathcal{F}_t])$. Then

$$[{}^oX \ne {}^pX] = [Y \ne Y_-].$$

We have already known that $[Y \ne Y_-]$ is a thin set. Thus, $[{}^oX \ne {}^pX]$ is indistinguishable from a thin set. The assertion for general measurable

processes follows by the monotone class argument as usual. □

5.6 Theorem. *Let T be a stopping time, and ξ be a real r.v.. Put*

$$X = \xi I_{[T,\infty[},\ Y = \xi I_{]T,\infty[},\ Z = \xi I_{[T]}.$$

1) The optional projection of X exists if and only if $\xi I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_T$.

2) Assume that T is predictable. Then the predictable projection of X exists if and only if $\xi I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_{T-}$.

3) If $\xi I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_T$, then the predictable projection of Y exists, and Z has optional projection

$${}^oZ = E[\xi I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_T] I_{[T]}.$$

4) If T is predictable and $\xi I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_{T-}$, then the predictable projection of Z exists, and

$${}^pZ = E[\xi I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] I_{[T]}.$$

Proof. We only give proof for 1). The others are left to readers. Let S be a stopping time. Obviously,

$$X_S I_{[S<\infty]} = \xi I_{[T\le S<\infty]}.$$

If the optional projection of X exists, then $X_T I_{[T<\infty]} = \xi I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_T$. Conversely, assume that $\xi I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_T$. Let $A_n \in \mathcal{F}_T$ such that $A_n \uparrow \Omega$ and $\xi I_{[T<\infty]} I_{A_n}$ is integrable for each n. Put

$$\Omega_n = (A_n[T \le S]) \cup [S < T].$$

Then $\Omega_n \in \mathcal{F}_S$, $\Omega_n \uparrow \Omega$, and $X_S I_{[S<\infty]} I_{\Omega_n} = \xi I_{A_n} I_{[T\le S<\infty]}$ is integrable. Hence $X_S I_{[S<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_S$, i.e., the optional projection of X exists. □

5.7 Theorem. *Let X be a measurable process. If the optional (resp. predictable) projection of X exists, then for any stopping time (resp. predictable time) T the optional (resp. predictable) projection of X^T exists, and*

$$({}^oX)I_{[0,T]} = {}^o(X^T)I_{[0,T]} \tag{7.1}$$
$$(({}^pX)I_{[0,T]} = {}^p(X^T)I_{[0,T]}, \quad \text{resp.}).$$

Proof. We have

$$X^T = XI_{[0,T]} + X_T I_{[T<\infty]} I_{]T,\infty[}.$$

By Theorems 5.4 and 5.6 we know immediately that the optional (resp. predictable) projection of X^T exists. (7.1) follows from Theorem 5.4 easily since $X^T I_{[0,T]} = XI_{[0,T]}$. □

Remark. If the optional and predictable projections of X exist, then for any stopping time T the predictable projection of X^T exists, too. In fact,

$$X^T = X I_{[0,T]} + X_T I_{[T<\infty]} I_{]T,\infty[},$$

the existence of the predictable projection of X^T follows from Theorems 5.4 and 5.6.

5.8 Theorem. 1) *Let X be a measurable process, and (T_n) be a sequence of stopping times (resp. predictable times) such that $\sup_n T_n = +\infty$ a.s., and for each n the optional (resp. predictable) projection of $X I_{[0,T_n]}$ exists. Then the optional (resp. predictable) projection of X exists.*

2) *Let X be a measurable process, and (T_n) be a sequence of stopping times such that $\sup_n T_n = +\infty$ a.s., and for each n the predictable projection of $X I_{[0,T_n]}$ exists. Then the predictable projection of X exists.*

Proof. We only show 2). The proof of 1) is left to readers. Let S be a predictable time. Put $\Omega_n = [S \leq T_n] \cup [S = \infty]$. Then $\Omega_n \in \mathcal{F}_{S-}$, $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$ a.s., and

$$X_S I_{[S<\infty]} I_{\Omega_n} = X_S I_{[S \leq T_n]} I_{[S<\infty]}.$$

In view of the assumption, $X_S I_{[S \leq T_n]} I_{[S<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_{S-}$. By Theorem 1.23 we know that $X_S I_{[S<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_{S-}$, i.e., the predictable projection of X exists. □

5.9 Theorem. *Let T be a stopping time, and ξ be an integrable r.v..*

1) $X = \xi I_{[0,T]}$ *and* $Y = E[\xi|\mathcal{F}_{T-}] I_{[0,T[}$ *have the same optional projections.*

2) $\overline{X} = \xi I_{[0,T]}$ *and* $\overline{Y} = E[\xi|\mathcal{F}_{T-}] I_{[0,T]}$ *have the same predictable projections.*

Proof. 1) Let S be a stopping time. We have

$$E[X_S I_{[S<\infty]}] = E[\xi I_{[S<T]}] = E[E[\xi|\mathcal{F}_{T-}] I_{[S<T]}] = E[Y_S I_{[S<\infty]}].$$

By Remark 5.3.2) X and Y have the same optional projection.

2) Let S be a predictable time. We have

$$\begin{aligned} E[\overline{X}_S I_{[S<\infty]}] &= E[\xi I_{[S \leq T]} I_{[S<\infty]}] \\ &= E[E[\xi|\mathcal{F}_{T-}] I_{[S \leq T]} I_{[S<\infty]}] = E[\overline{Y}_S I_{[S<\infty]}]. \end{aligned}$$

Hence $\overline{X}$ and $\overline{Y}$ have the same predictable projection. □

Remark. Obviously, $\xi I_{[0,T]}$ and $E[\xi|\mathcal{F}_T] I_{[0,T]}$ have the same optional projection.

§2. Dual Projections of Increasing Processes

At first, we study the measures on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ generated by increasing processes.

5.10 Definition. Let A be an increasing process. Define a set function μ_A on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ as follows:

$$\mu_A(H) = E\Big[\int_{[0,\infty[} I_H(\cdot, s) dA_s(\cdot)\Big], \quad H \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+). \tag{10.1}$$

Then μ_A is a measure[1]. Put

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : A_t \geq n\}.$$

Then T_n is a r.v., $[0, T_n[\in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$, $\bigcup_n [0, T_n[= \Omega \times \boldsymbol{R}_+$ and $\mu_A([0, T_n[) \leq n$. Thus, μ_A is a σ-finite measure on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ and is said to be *generated by* A.

If A is optional (resp. predictable), then T_n, $n \geq 1$, are stopping times (resp. predictable times). Consequently, $[0, T_n[$, $n \geq 1$, are optional (resp. predictable) sets. Hence restricted on the optional (resp. predictable) σ-field, μ_A is also σ-finite.

It is easy from (10.1) to see that μ_A does not charge any evanescent set, i.e., for any evanescent set H, $\mu_A(H) = 0$, and for any $t \geq 0$, $F \in \mathcal{F}$

$$\mu_A(F \times [0,t]) = E[I_F A_t]. \tag{10.2}$$

5.11 Theorem. *A measure μ on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ is generated by an increasing process if and only if for each $t \geq 0$ the set function $Q_t(F)$, defined on $(\Omega, \mathcal{F})$ as follows:*

$$Q_t(F) = \mu(F \times [0,t]), F \in \mathcal{F}, \tag{11.1}$$

is a σ-finite measure and absolutely continuous w.r.t. P. In this case, the increasing process generating μ is uniquely determined.

Proof. The necessity is trivial (see (10.2)). We are going to show the sufficiency. Let A'_t be the Radon-Nikodym derivative $\dfrac{dQ_t}{dP}$. When $s < t$, we have $A'_s \leq A'_t$ a.s.. Assume $t_k \downarrow t$. For each n put $F_n = [A'_{t_1} \leq n]$. Then

$$\lim_{k\to\infty} E[I_{F_n}(A'_{t_k} - A'_t)] = \lim_{k\to\infty} \mu(F_n \times]t, t_k]) = 0.$$

---

[1] The term "measure" always means non-negative measure.

Since $\bigcup_n F_n = \Omega$, we obtain $\lim_{k\to\infty} A'_{t_k} = A_t$ a.s.. Define

$$A_t = \inf\{A'_r : r > t, r \in \mathbf{Q}_+\}, \quad t \geq 0.$$

Then for all $t \geq 0$ we have $A_{t+} = A_t$ and $A_t = A'_t$ a.s.. Modifying the trajectories of $A = (A_t)$ on a $\mathbf{P}$-null set (if necessary), we may consider A as an increasing process, and for all $F \in \mathcal{F}$ we have

$$\begin{aligned}\mu(F \times [0,t]) &= Q_t(F) = \int_F A_t dP \\ &= \mathbf{E}[I_F A_t] = \mathbf{E}\Big[\int_{[0,\infty[} I_{F\times[0,t]}(\cdot,s)dA_s(\cdot)\Big].\end{aligned}$$

This means that μ is generated by A.

If $B = (B_t)$ is another increasing process generating μ, then $B_t = \frac{dQ_t}{d\mathbf{P}}$ a.s.. In consequence, B is a modification of A. Owing to the right-continuity of A and B, they are indistinguishable. □

5.12 Definition. Let μ be a measure on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ not charging any evanescent set. μ is said to be *optional* (resp. *predictable*), if for any non-negative bounded measurable process X[1)]

$$\mu(X) = \mu({}^oX) \quad (\text{resp. } \mu(X) = \mu({}^pX)),$$

where $\mu(X) = \int X d\mu = \mathbf{E}_\mu[X]$.

Remark. Let X be a bounded measurable process. By Theorem 5.4 for any bounded optional (resp. predictable) measure μ we have ${}^oX = \mathbf{E}_\mu[X|\mathcal{O}]$ (resp. ${}^pX = \mathbf{E}_\mu[X|\mathcal{P}]$).

5.13 Theorem. *Let A be an increasing process, and μ_A be the measure on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$, generated by A. μ_A is optional (resp. predictable) if and only if A is adapted (resp. predictable).*

Proof. Sufficiency. Let A be adapted, and $C = (C_t)$ be the change of time associated with A (see Theorem 3.48). Let X be a non-negative bounded measurable process. By Lemma 1.38, Theorem 5.1 and Fubini's theorem we have

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\int_{[0,\infty[} X_s dA_s\Big] &= \mathbf{E}\Big[\int_0^\infty X_{C_s} I_{[C_s<\infty]} ds\Big] = \int_0^\infty \mathbf{E}[X_{C_s} I_{[C_s<\infty]}]ds \\ &= \int_0^\infty \mathbf{E}[{}^oX_{C_s} I_{[C_s<\infty]}]ds = \mathbf{E}\Big[\int_{[0,\infty[} {}^oX_s dA_s\Big].\end{aligned}$$

This is just $\mu_A(X) = \mu_A({}^oX)$. Hence μ_A is optional.

1) In fact, it is enough that the requirement is satisfied for the processes of the form $X = I_H$, where $H \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+)$.

Let A be predictable. For every $t \geq 0$, C_{t-} is a predictable time (Theorem 3.48). By using Lemma 1.38, Theorem 5.2 and Fubini's theorem in the similar way we have $\mu_A(X) = \mu_A({}^pX)$, i.e., μ_A is predictable.

Necessity. Let μ_A be optional. Take $X = I_F I_{[0,t]}$, where $F \in \mathcal{F}$. X and $\mathbf{E}[I_F|\mathcal{F}_t]I_{[0,t]}$ have the same optional projection. Hence

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[A_t I_F] &= \mu_A(X) = \mu_A({}^oX) = \mathbf{E}[A_t \mathbf{E}[I_F|\mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[A_t|\mathcal{F}_t]\mathbf{E}[I_F|\mathcal{F}_t]] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[A_t|\mathcal{F}_t]I_F].\end{aligned}$$

Therefore $A_t = \mathbf{E}[A_t|\mathcal{F}_t]$ a.s., i.e., A is adapted.

Let μ_A be predictable. For any non-negative bounded measurable process X, X and ${}^oX$ have the same predictable projection. Hence $\mu_A(X) = \mu_A({}^pX) = \mu_A({}^oX)$, i.e., μ_A is optional. In consequence, A is adapted. We are to show that A satisfies the requirements in Theorem 4.33. Let S be a totally inaccessible time. Obviously, the predictable projection of $I_{[S]}$ is 0. By predictability of μ_A,

$$\mathbf{E}[\Delta A_S] = \mu_A(I_{[S]}) = \mu_A(0) = 0.$$

Since $\Delta A_S \geq 0$, we obtain $\Delta A_S = 0$ a.s., i.e., $\mathbf{P}([A_S \neq A_{S-}, S < \infty]) = 0$. Let T be a predictable time. Take $X = I_F I_{[0,T]}$, where $F \in \mathcal{F}$. By Theorem 5.9.2) X and $Y = \mathbf{E}[I_F|\mathcal{F}_{T-}]I_{[0,T]}$ have the same predictable projection. By predictability of μ_A,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[I_F A_T] &= \mu_A(X) = \mu_A(Y) = \mathbf{E}[\mathbf{E}[I_F|\mathcal{F}_{T-}]A_T] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[I_F|\mathcal{F}_{T-}]\mathbf{E}[A_T|\mathcal{F}_{T-}]] = \mathbf{E}[I_F \mathbf{E}[A_T|\mathcal{F}_{T-}]].\end{aligned}$$

Hence $A_T = \mathbf{E}[A_T|\mathcal{F}_{T-}]$ a.s., i.e., A_T is $\mathcal{F}_{T-}$-measurable. Since $T \in \mathcal{F}_{T-}$, we have $A_T I_{[T<\infty]} \in \mathcal{F}_{T-}$. By Theorem 4.33 A is predictable. □

As a simple application of Theorem 5.13, we obtain Radon-Nikodym theorem concerning processes with finite variation.

5.14 Theorem. *Let A and B be two adapted (resp. predictable) increasing processes. Then the following statements are equivalent:*

1) *For almost all ω, $dB_\cdot(\omega) \ll dA_\cdot(\omega)$,*

2) *$\mu_B \ll \mu_A$ on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$,*

3) *$\mu_B \ll \mu_A$ on $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{P}$),*

4) *There exists a non-negative optional (resp. predictable) process H such that for almost all ω we have*

$$B_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega)dA_s(\omega). \tag{1.4.1}$$

Proof. 4) ⇒ 1) is trivial. 1) ⇒ 2) is easy by the definition of absolute continuity. 2) ⇒ 3) is trivial. At last, we show 3) ⇒ 4). Let H be the

Radon-Nikodym derivative $\frac{d\mu_B}{d\mu_A}$ on $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{P}$). Then H is optional (resp. predictable) and non-negative. Put

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : \quad B_t \geq n\}.$$

Then

$$E\Big[\int_{[0,T_n[} H_s(\omega)dA_s(\omega)\Big] = \mu_B([0,T_n[) \leq n.^{1)}$$

Hence $(\int_{[0,t]} H_s(\omega)dA_s(\omega))$ is an adapted increasing process, and generates the same measure as $(B_t(\omega))$. Therefore, it is indistinguishable from (B_t), i.e., (14.1) holds. □

5.15 Theorem. *Let A and B be two adapted (resp. predictable) increasing processes. Then the following statements are equivalent:*

1) For almost all ω $dA.(\omega) \perp dB.(\omega)$,

2) $\mu_A \perp \mu_B$ on $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{P}$),

3) $\mu_A \perp \mu_B$ on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$,

4) There exists $D \in \mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{P}$) such that for almost all ω

$$\int_{[0,\infty[} I_D(\omega,s)dA_s(\omega) = 0 \quad \text{and} \quad \int_{[0,\infty[} I_{D^c}(\omega,s)dB_s(\omega) = 0.$$

Proof. 2) $\iff$ 4) $\Rightarrow$ 3) is obvious.

3) $\Rightarrow$ 1). There exists $J \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ such that

$$\mu_A(J) = E\Big[\int_{[0,\infty)} I_J(\omega,s)dA_s(\omega)\Big] = 0,$$

$$\mu_B(J^c) = E\Big[\int_{[0,\infty)} I_{J^c}(\omega,s)dB_s(\omega)\Big] = 0.$$

Hence for almost all ω

$$\int_{[0,\infty[} I_J(\omega,s)dA_s(\omega) = 0, \quad \int_{[0,\infty[} I_{J^c}(\omega,s)dB_s(\omega) = 0.$$

i.e., $dA.(\omega) \perp dB.(\omega)$.

1) $\Rightarrow$ 2). Put $C = A + B$. By Theorem 5.14 there exist non-negative optional (resp. predictable) processes H and K such that for almost all ω

$$A_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega)dC_s(\omega), \quad B_t(\omega) = \int_{[0,t]} K_s(\omega)dC_s(\omega)$$

and $H + K = 1$, $HK = 0$. Take $J = [H = 0]$, then $J \in \mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{P}$), $J^c = [K = 0]$,

$$\mu_A(J) = 0, \quad \mu_B(J^c) = 0,$$

1) Henceforth, under the symbol of integral we use, for instance, $[S,T[$ to denote the stochastic interval $[\![S,T[\![$.

i.e., $\mu_A \perp \mu_B$ on $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{P}$). □

Remark. Let A and B be two adapted (resp. predictable) processes with finite variation. If for almost all ω, $|dB.(\omega)| \ll |dA.(\omega)|$, then there exists an optional (resp. predictable) process H such that for almost all ω

$$B_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega)dA_s(\omega), \quad t \geq 0.$$

In fact, applying Theorems 5.14 and 5.15 to A^+, A^- and $C = (\int_{[0,s]} |dA_s|)$, we know that there exists an optional (resp. predictable) process L such that $A = L.C$ and $|L| = 1$. Then $L.A = L^2.C = C$. Applying Theorem 5.14 to B^+, B^- and C, there exists an optional (resp. predictable) process K such that $B = K.C$. Finally, $B = H.A$, where $H = KL$.

5.16 Theorem. *1) Let A be an adapted increasing process and $S \leq T$ be two stopping times. For every non-negative measurable process X having optional projection*

$$E\Big[\int_{[S,T[} X_s dA_s \Big| \mathcal{F}_S\Big] = E\Big[\int_{[S,T[} {}^oX_s dA_s \Big| \mathcal{F}_S\Big]. \qquad (16.1)$$

2) Let A be a predictable increasing process, and $S \leq T$ be two predictable times. For every non-negative measurable process X having predictable projection

$$E\Big[\int_{[S,T[} X_s dA_s \Big| \mathcal{F}_{S-}\Big] = E\Big[\int_{[S,T[} {}^pX_s dA_s \Big| \mathcal{F}_{S-}\Big]. \qquad (16.2)$$

Proof. We only show 2). The proof of 1) is analogous. Let $F \in \mathcal{F}_{S-}$. Then $F \in \mathcal{F}_{T-}$, S_F and T_F are predictable times, and $[\![S_F, T_F[\![$ is predictable. We have (by Theorems 5.4 and 5.13)

$$E\Big[\Big(\int_{[S,T[} X_s dA_s\Big)I_F\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty[} I_{[\![S_F,T_F[\![}(\cdot,s)X_s dA_s\Big]$$
$$= E\Big[\int_{[0,\infty[} I_{[\![S_F,T_F[\![}(\cdot,s)\,{}^pX_s dA_s\Big] = E\Big[\Big(\int_{[S,T[} {}^pX_s dA_s\Big)I_F\Big].$$

Hence (16.2) follows. □

Remarks. 1) If in (16.1) and (16.2) $[S,T[$ is replaced by $]S,T[$, or $]S,T]$, or $[S,T]$, the equalities remain true.

2) If in (16.2) S and T are two stopping times (resp. S is predictable, resp. T is predictable), then, replacing $[\![S,T[\![$ by $]\!]S,T]\!]$ (resp. $[\![S,T]\!]$, resp. $]\!]S,T[\![$), (16.2) still holds.

Below we define the projections of measures. They are the basis of studying dual projections of increasing processes.

5.17 Definition. Let μ be a σ-finite measure on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+)$ not charging any evanescent set. For every non-negative bounded measurable process X put

$$\mu^o(X) = \mu({}^oX), \quad \mu^p(X) = \mu({}^pX).$$

Then μ^o and μ^p are optional and predictable measures on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+)$ respectively, not charging any evanescent set (but need not to be σ-finite). We call μ^o and μ^p the *optional and predictable projection* of μ respectively.

Obviously, μ is identified with μ^o on optional σ-field $\mathcal{O}$, and with μ^p on predictable σ-field $\mathcal{P}$. Besides, in order for μ to be an optional (resp. predictable) measure on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+)$ it is necessary and sufficient that $\mu = \mu^o$ (resp. $\mu = \mu^p$).

5.18 Definition. Let A be an increasing process. A is said to be *integrable*, if $A_\infty = \lim\limits_{t\uparrow\infty} A_t$ is an integrable r.v.. A is said to be *locally integrable*, if A_0 is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_0$, and there exist stopping times $T_n \uparrow +\infty$ a.s. such that for each n $A_{T_n} - A_0$ is integrable. A is said to be *prelocally integrable*, if there exist stopping times $T_n \uparrow +\infty$ a.s. such that for each n $A_{T_n-}I_{[T_n>0]}$ is integrable.

Obviously, locally integrable increasing processes are prelocally integrable. In fact, it needs only to deal with the case of $A_t \equiv A_0$, $t \geq 0$. where A_0 is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_0$. Let $E_n \in \mathcal{F}_0$ such that $E_n \uparrow \Omega$ and each $A_0 I_{E_n}$ is integrable. Put $T_n = 0 \cdot I_{E_n^c} + (+\infty)I_{E_n}$. Then $T_n \uparrow \infty$ and $A_{T_n-}I_{[T_n>0]} = A_0 I_{E_n}$. Hence A is prelocally integrable.

Let A be a process with finite variation. Put $V_t = \int_{[0,t]} |dA_s|$. If $V = (V_t)$ is an integrable (resp. locally integrable, resp. prelocally integrable) increasing process, we call A a *process with integrable* (resp. *locally integrable*, resp. *prelocally integrable*) *variation*.

Obviously, in order that A be a process with integrable (resp. locally integrable, resp. prelocally integrable) variation it is necessary and sufficient that A be the difference of two integrable (resp. locally integrable, resp. prelocally integrable) increasing processes.

5.19 Theorem. *Adapted processes with finite variation are processes with prelocally integrable variation. Predictable processes with finite variation are processes with locally integrable variation.*

Proof. We only deal with increasing processes. Let A be an adapted

increasing process. Put

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : A_t \geq n\}.$$

Then $T_n, n \geq 1$, are stopping times, $T_n \uparrow +\infty$, and $A_{T_n-}I_{[T_n>0]} \leq n$. Hence A is prelocally integrable. If A is predictable, so are $T_n, n \geq 1$. Without loss of generality, we may assume $A_0 = 0$. In this case, $T_n > 0$. For each n let $(S_{n,k})_{k\geq 1}$ be the sequence of stopping times foretelling T_n. Put $S_n = \bigvee\limits_{i=1}^{n} S_{i,n}$. Then $S_n < T_n$ and $S_n \uparrow +\infty$, $A_{S_n} \leq n$. Hence A is a locally integrable increasing process. □

5.20 Theorem. *Let μ be the measure on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(R_+)$ generated by an increasing process A, μ^o and μ^p be its optional and predictable projection respectively.*

1) In order that μ^o be generated by an (adapted) increasing process it is necessary and sufficient that A be prelocally integrable.

2) In order that μ^p be generated by an (predictable) increasing process it is necessary and sufficient that A be locally integrable.

Proof. 1) Necessity. Assume that μ^o is generated by an increasing process A^o. By Theorem 5.13 A^o is adapted. Put

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : A_t^o \geq n\}.$$

Then T_n, $n \geq 1$, are stopping times, $T_n \uparrow +\infty$, and $A^o_{T_n-}I_{[T_n>0]} \leq n$. Thus

$$E[A_{T_n-}I_{[T_n>0]}] = \mu([0,T_n[) = \mu^o([0,T_n[) = E[A^o_{T_n-}I_{[T_n>0]}] \leq n.$$

This means A is prelocally integrable.

Sufficiency. Assume that A is prelocally integrable, i.e., there exist stopping times $T_n \uparrow +\infty$ and for each n $E[A_{T_n-}I_{[T_n>0]}] < \infty$. Denote $Q_t(F) = \mu^o(F \times [0,t])$, $F \in \mathcal{F}$. Let $F_n = [T_n > t]$. Then $\bigcup\limits_n F_n = \Omega$, $F_n \times [0,t] = [0,T_n[$, $Q_t(F_n) \leq \mu^o([0,T_n[) = E[A_{T_n-}I_{[T_n>0]}] < +\infty$. Therefore, Q_t is a σ-finite measure on $(\Omega, \mathcal{F})$. Since for any P-null set F, $F \times [0,t]$ is a predictable set, $Q_t(F) = \mu^o(F \times [0,t]) = \mu(F \times [0,t]) = E[I_F A_t] = 0$. This means Q_t is absolutely continuous w.r.t. P. By Theorem 5.11 we know that μ^o is generated by an increasing process. By Theorem 5.13 this increasing process is adapted.

2) Necessity. Assume that μ^p is generated by an increasing process A^p. By Theorem 5.13 A^p is predictable. Put $F_n = [A_0^p \leq n]$. Then $F_n \in \mathcal{F}_0$, $F_n \uparrow \Omega$, and

$$E[A_0 I_{F_n}] = \mu(F_n \times \{0\}) = \mu^p(F_n \times \{0\}) = E[A_0^p I_{F_n}] \leq n.$$

Hence A_0 is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_0$. Since A^p is locally integrable (Theorem 5.19), take stopping times $T_n \uparrow +\infty$ such that for each n $A^p_{T_n} - A^p_0$ is

integrable. Then

$$E[A_{T_n} - A_0] = \mu(]0, T_n]) = \mu^p(]0, T_n]) = E[A^p_{T_n} - A^p_0] < +\infty.$$

This means A is locally integrable.

Sufficiency. Assume that A is locally integrable. Put

$$B_t = A_0, \quad B^p_t = E[A_0|\mathcal{F}_0], \quad t \geq 0.$$

Obviously, μ^p_B is generated by predictable increasing process B^p. So we may assume $A_0 = 0$ (otherwise we deal with $A - A_0$). Similar to the proof of the sufficiency in 1), one can show that $Q_t(F) = \mu^p(F \times [0,t])$ is a σ-finite measure on $(\Omega, \mathcal{F})$, and absolutely continuous w.r.t. P. Then by Theorems 5.11 and 5.13 μ^p is generated by a predictable increasing process. □

Theorem 5.20 hints us to define dual projections of increasing processes as follows.

5.21 Definition. Let A be a prelocally integrable increasing process, μ be the measure on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ generated by A, and μ^o be the optional projection of μ. By Theorem 5.20 there exists a unique adapted increasing process A^o such that μ^o is generated by A^o. A^o is called the *dual optional projection* of A (note that by Theorem 5.9 the optional projection ${}^oA$ of A also exists, but ${}^oA$ is no longer an increasing process in general). Let A be a locally integrable increasing process, μ be the measure on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ generated by A, and μ^p be the predictable projection of μ. By Theorem 5.20 there exists a unique predictable increasing process A^p such that μ^p is generated by A^p. A^p is called the *dual predictable projection* of A (similarly, by Theorem 5.9 the predictable projection ${}^pA$ of A also exists, but ${}^pA$ is no longer an increasing process in general).

Let A be a process with prelocally (resp. locally) integrable variation. A can be decomposed as the difference of two prelocally (resp. locally) integrable increasing processes A_1 and A_2. Define $A^o = A^o_1 - A^o_2$ (resp. $A^p = A^p_1 - A^p_2$). It is easy to see that A^o (resp. A^p) does not depend on the concrete decomposition. A^o (resp. A^p) is called the *dual optional* (resp. *predictable*) *projection* of A. Dual predictable projections are also called *compensators*.

5.22 Theorem. 1) *Let A be a process with prelocally integrable variation. For every optional process H we have*

$$E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s||dA^o_s|\Big] \leq E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s||dA_s|\Big]. \tag{22.1}$$

2) *Let A be a process with locally integrable variation. For every predictable process H we have*

$$E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s||dA^p_s|\Big] \leq E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s||dA_s|\Big]. \tag{22.2}$$

Proof. We only show 1), the proof of 2) is similar. Put

$$A^+_t = \frac{1}{2}\Big[\int_{[0,t]} |dA_s| + A_t\Big], \quad A^-_t = \frac{1}{2}\Big[\int_{[0,t]} |dA_s| - A_t\Big].$$

Then $A = A^+ - A^-$, A^+ and A^- are prelocally integrable increasing processes. Since $A^o = (A^+)^o - (A^-)^o$, we have

$$\begin{aligned} E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s||dA^o_s|\Big] &\leq E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s||d(A^+)^o_s|\Big] + E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s||d(A^-)^o_s|\Big] \\ &= E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s|dA^+_s\Big] + E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s|dA^-_s\Big] \\ &= E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s||dA_s|\Big]. \quad \square \end{aligned}$$

5.23 Theorem. 1) *Let A be a process with prelocally integrable variation, and H be an optional process such that $H.A$ is a process with prelocally integrable variation. Then $H.A^o$ is an adapted process with finite variation, and $(H.A)^o = H.A^o$.*

2) *Let A be a process with locally integrable variation, and H be a predictable process such that $H.A$ is a process with locally integrable variation. Then $H.A^p$ is a predictable process with finite variation, and $(H.A)^p = H.A^p$.*

Proof. We only show 1). There exists a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow +\infty$ such that

$$E\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s| I_{[0,T_n[}(\cdot, s)|dA_s|\Big] = E\Big[\int_{[0,T_n[} |H_s||dA_s|\Big] < +\infty.$$

By (22.1) we know that H is integrable w.r.t. A^o. Then $H.A^o$ is adapted by Theorem 3.46.1). Without loss of generality, we may assume that A is an increasing process and H is non-negative. Then for every non-negative bounded measurable process X we have

$$\begin{aligned} \mu_{(H.A)^o}(X) &= \mu^o_{H.A}(X) = \mu_{H.A}({}^oX) = \mu_A(H\,{}^oX) \\ &= \mu_A({}^o(HX)) = \mu^o_A(HX) = \mu_{A^o}(HX) = \mu_{H.A^o}(X). \end{aligned}$$

This implies $(H.A)^o = H.A^o$. □

5.24 Corollary. 1) *Let A be a process with prelocally (resp. locally) integrable variation. Then for every stopping time T we have $(A^T)^o = (A^o)^T$ (resp. $(A^T)^p = (A^p)^T$).*

2) Let A be a process with locally integrable variation. Then for every predictable time T we have $(A^{T-})^p = (A^p)^{T-}$, where $A^{T-} = AI_{[0,T[} + A_{T-}I_{[T,\infty[}$.

Proof. Putting $H = I_{[0,T]}$ (resp. $H = I_{[0,T[}$) in Theorem 5.23 gives 1) (resp. 2)). □

5.25 Theorem. 1) *Let A be an adapted process with finite variation, H be a measurable process having optional projection such that $H.A$ is a process with prelocally integrable variation. Then ${}^oH$ is integrable w.r.t. A, and $(H.A)^o = ({}^oH).A$.*

2) Let A be a predictable process with finite variation, H be a mea- surable process having predictable projection such that $H.A$ is a process with locally integrable variation. Then ${}^pH$ is integrable w.r.t. A, and $(H.A)^p = ({}^pH).A$.

Proof. We only show 1). There exists a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow +\infty$ such that $E[\int_{[0,T_n[} |H_s||dA_s|] < +\infty$. Since $|{}^oH| \leq {}^o(|H|)$, we have

$$E\Big[\int_{[0,T_n[} |{}^oH_s||dA_s|\Big] \leq E\Big[\int_{[0,T_n[} ({}^o|H|)_s|dA_s|\Big]$$
$$= E\Big[\int_{[0,T_n[} |H_s||dA_s|\Big] < +\infty.$$

Consequently, ${}^oH$ is integrable w.r.t. A. We may assume that A is an increasing process and H is non-negative. Then for every non-negative bounded measurable process X we have (noting that $\mu_A = \mu_{A^o}$, ${}^o({}^oHX) = {}^o(H{}^oX) = {}^oH{}^oX$)

$$\mu_{(H.A)^o}(X) = \mu_{H.A}({}^oX) = \mu_A(H{}^oX) = \mu_A({}^oHX) = \mu_{{}^oH.A}(X).$$

This implies $(H.A)^o = {}^oH.A$. □

Remark. In fact, Theorems 5.23 and 5.25 can be unified in the fol- lowing more general assertion. Let A be a process with prelocally (resp. locally) integrable variation and H be a measurable process such that $H.A$ is a process with prelocally (resp. locally) integrable variation. Then there exists an optional (resp. predictable) process K such that $(H.A)^o = K.A^o$ (resp. $(H.A)^p = K.A^p$). In addition, we have $K = E_{\mu_A}[H|\mathcal{O}]$ (resp. $K = E_{\mu_A}[H|\mathcal{P}]$).

We deal with the prelocally integrable case only. Observe that $\mu_{H.A}$ is absolutely continuous w.r.t. μ_A on $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(R_+)$ and $\dfrac{d\mu_{H.A}}{d\mu_A} = H$. Restricted on the optional σ-field $\mathcal{O}$, $\mu_{H.A}$ is σ-finite. Hence H is σ-integrable w.r.t.

$\mathcal{O}$ and $|\mu_A|$. The Radon-Nikodym derivative of $\mu_{H.A}$ w.r.t. μ_A on $\mathcal{O}$ is

$$\frac{d\mu_{H.A}}{d\mu_A}\Big|_{\mathcal{O}} = E_{\mu_A}[H|\mathcal{O}].$$

Denote $K = E_{\mu_A}[H|\mathcal{O}]$. Then $(H.A)^o = K.A^o$. Moreover, if H is optional or A is adapted and H has optional projection, it is easy to see $K = {}^oH$, $|\mu_A|$-a.e.. Theorems 5.23 and 5.25 follow immediately.

5.26 Theorem. 1) *Let A be a prelocally integrable increasing process, $S \leq T$ be two stopping times. Then for every non-negative measurable process X having optional projection we have*

$$E\Big[\int_{[S,T]} {}^oX_s dA_s\Big|\mathcal{F}_S\Big] = E\Big[\int_{[S,T]} X_s dA^o_s\Big|\mathcal{F}_S\Big] = E\Big[\int_{[S,T]} {}^oX_s dA^o_s\Big|\mathcal{F}_S\Big]. \tag{26.1}$$

2) Let A be a locally integrable increasing process, $S \leq T$ be two predictable times. Then for every non-negative measurable X having predictable projection we have

$$E\Big[\int_{[S,T[} {}^pX_s dA_s\Big|\mathcal{F}_{S-}\Big] = E\Big[\int_{[S,T[} X_s dA^p_s\Big|\mathcal{F}_{S-}\Big] = E\Big[\int_{[S,T[} {}^pX_s dA^p_s\Big|\mathcal{F}_{S-}\Big]. \tag{26.2}$$

Proof. It is completely similar to that of Theorem 5.16. We also have the remarks, similar to that after Theorem 5.16. □

The following theorem provides the computing method for jumps of dual projections.

5.27 Theorem 1) *Let A be a process with prelocally integrable variation. Then ΔA has optional projection: ${}^o(\Delta A) = \Delta A^o$, i.e., for every stopping time T*

$$\Delta A^o_T I_{[T<\infty]} = E[\Delta A_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_T] \quad a.s.. \tag{27.1}$$

2) Let A be a process with locally integrable variation. Then ΔA has predictable projection: ${}^p(\Delta A) = \Delta A^p$, i.e., for every predictable time T

$$\Delta A^p_T I_{[T<\infty]} = E[\Delta A_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] \quad a.s.. \tag{27.2}$$

Proof. We only show 1) and assume that A is an increasing process. By Theorem 5.8 we know that A has optional projection. Since $A_- \leq A$, A_- has optional projection, too. Hence so does ΔA. Then for every stopping time T, $\Delta A_T I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_T$, and for every $F \in \mathcal{F}_T$ we have

$$E[\Delta A^o_T I_{[T<\infty]} I_F] = E\Big[\int_{[0,\infty[} I_{[T_F]} dA^o_s\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty[} I_{[T_F]} dA_s\Big]$$
$$= E[\Delta A_T I_{[T<\infty]} I_F].$$

i.e., (27.1) holds. □

5.28 Corollary. 1) *Let A be a process with prelocally integrable variation. If A is continuous, so is A^o. If ΔA is bounded, so is ΔA^o.*

2) *Let A be a process with locally integrable variation. If A is continuous, so is A^p. If ΔA is bounded, so is ΔA^p.*

3) *Let A be an adapted locally integrable increasing process. A^p is continuous if and only if A is quasi-left-continuous* (see Definition 4.22).

We give two simple examples of dual projections in the next theorem.

5.29 Theorem. 1) *Let T be a stopping time, and ξ be a real r.v.. $A = \xi I_{[\![T,\infty[\![}$ is a process with prelocally integrable variation if and only if $\xi I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_T$. In this case, the dual optional projection of A is*

$$A^o = E[\xi I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_T] I_{[\![T,\infty[\![}.$$

2) *Let T be a predictable time, and ξ be a real r.v.. $A = \xi I_{[\![T,\infty[\![}$ is a process with locally integrable variation if and only if $\xi I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_{T-}$. In this case, the dual predictable projection of A is*

$$A^p = E[\xi I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] I_{[\![T,\infty[\![}.$$

Proof. We only show 1). Necessity. There is a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow +\infty$ such that for each n, $E[A_{T_n-}I_{[T_n>0]}] < +\infty$. Note that $A_{T_n-}I_{[T_n>0]} = \xi I_{[T_n>T]}$. Take $F_n = [T=\infty] \cup [T_n > T] \in \mathcal{F}_T$. Then $F_n \uparrow \Omega$ and for each n, $\xi I_{[T<\infty]} I_{F_n} = A_{T_n-}I_{[T_n>0]}$ is integrable. Hence $\xi I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_T$.

Sufficiency. We may assume that ξ is non-negative. Let μ_A be the measure generated by A. For every non-negative bounded measurable process X we have

$$\mu_A({}^oX) = E[{}^oX_T \xi I_{[T<\infty]}] = E[{}^oX_T I_{[T<\infty]} E[\xi I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_T]]$$

$$= E[X_T I_{[T<\infty]} E[\xi I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_T]] = \mu_B(X),$$

where $B = E[\xi I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_T] I_{[\![T,\infty[\![}$. Since B is adapted, by Theorem 5.23 and Definition 5.21 we know that A is prelocally integrable and $B = A^o$. □

Finally, we prove a very useful result.

5.30 Theorem. *Let A and B be two processes with integrable variation.*

1) *A and B have the same dual optional projection if and only if for every stopping time T*

$$E[A_\infty - A_{T-}I_{[T>0]}] = E[B_\infty - B_{T-}I_{[T>0]}] \tag{30.1}$$

(i.e., $(A_\infty - A_{t-}I_{[t>0]})$ and $(B_\infty - B_{t-}I_{[t>0]})$ have the same optional projection). In particular, if A and B are adapted, then A and B are indistinguishable if and only if for every stopping time T (30.1) holds.

2) *A and B have the same dual predictable projection if and only if*

$$E[A_0|\mathcal{F}_0] = E[B_0|\mathcal{F}_0] \quad a.s., \tag{30.2}$$

and for every stopping time T

$$E[A_\infty - A_T] = E[B_\infty - B_T] \tag{30.3}$$

(i.e., $(A_\infty - A_t)$ and $(B_\infty - B_t)$ have the same optional projection), or equivalently

$$E[A_0|\mathcal{F}_0] = E[B_0|\mathcal{F}_0] \qquad a.s.,$$

$$E[A_\infty - A_t|\mathcal{F}_t] = E[B_\infty - B_t|\mathcal{F}_t] \quad a.s., \quad t \geq 0. \tag{30.4}$$

In particular, if A and B are predictable, then A and B are indistinguishable if and only if $A_0 = B_0$ and for every stopping time T (30.3) holds, or equivalently, (30.4) holds.

Proof. 1) Let μ_A and μ_B be the measures generated by A and B respectively. Then (30.1) reads: $\mu_A([\![T,\infty[\![) = \mu_B([\![T,\infty[\![)$ for every stopping time T. Thus the necessity is trivial. We are going to show the sufficiency. Put $\mathcal{C} = \{[\![T,\infty[\![: T \text{ is a stopping time}\}$. Then $\mathcal{C}$ is a π-class and generates the optional σ-field (Theorem 3.17). In addition, $\Omega \times \mathbf{R}_+ = [\![0,\infty[\![\in \mathcal{C}$. By (30.1) μ_A and μ_B are identical on $\mathcal{C}$. Then μ_A and μ_B are identical on $\mathcal{O}$ by the monotone class argument. Therefore, μ_A and μ_B have the same optional projection, i.e., A and B have the same dual optional projection.

2) (30.3) reads: $\mu_A(]\!]T,\infty[\![) = \mu_B(]\!]T,\infty[\![)$ for every stopping time T, and (30.2) is equivalent to that $\mu_A([\![0_F]\!]) = \mu_B([\![0_F]\!])$ for every $F \in \mathcal{F}_0$. Put $\mathcal{C} = \{[\![0_A]\!] : A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{]\!]T,\infty[\![: T \text{ is a stopping time }\}$. Then $\mathcal{C}$ is a π-class and generates the predictable σ-field (Theorem 3.21). In the same way, if μ_A and μ_B are identical on $\mathcal{C}$, so are on $\mathcal{P}$. Then A and B have the same dual predictable projection if and only if (30.2) and (30.3) hold. If we consider

$$\mathcal{C}' = \{[\![0_A]\!] : A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{B \times]t,\infty[: B \in \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$$

instead of $\mathcal{C}$, it is easy to see that (30.4) is also a necessary and sufficient condition. □

5.31 Corollary. 1) *Let A be a (resp. adapted) process with integrable variation, and B be a predictable process with integrable variation. In*

order that B be the dual predictable projection of A it is necessary and sufficient that $B_0 = E[A_0|\mathcal{F}_0]$ and ${}^oA - B$ (resp. $A - B$) be a uniformly integrable martingale, where ${}^oA$ is the optional projection of A.

2) Let A be a process with integrable variation. Then ${}^oA - A^o$ is a uniformly integrable martingale.

Proof. 1) For all $t \geq 0$, ${}^oA_t = E[A_t|\mathcal{F}_t]$ a.s.. Thus, (30.4) holds if and only if $B_0 = E[A_0|\mathcal{F}_0]$ and for all $t \geq 0$

$$ {}^oA_t - B_t = E[A_\infty - B_\infty|\mathcal{F}_t] \quad a.s.. $$

Hence 1) is established.

2) By 1) ${}^oA - A^p$ is a uniformly integrable martingale. On the other hand, $A^o - A^p = A^o - (A^o)^p$ is also a uniformly integrable martingale. Hence so is ${}^oA - A^o$. □

§3. Applications to Stopping Times and Processes

5.32 Theorem. *Let A be an adapted increasing process, and M be a non-negative uniformly integrable cadlag martingale. Then for every stopping time T we have*

$$ E\Big[\int_{[0,T]} M_t dA_t\Big] = E[M_T A_T]. \tag{32.1} $$

Proof. Put $X = M_T I_{[0,T]}$. Since $E[M_T|\mathcal{F}_t] = M_{t\wedge T}$, $t \geq 0$, M^T is the optional projection of M_T. Hence ${}^oX = M^T I_{[0,T]} = M I_{[0,T]}$. Thus

$$ E[M_T A_T] = E\Big[\int_{[0,\infty[} X_t dA_t\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty[} {}^oX_t dA_t\Big] = E\Big[\int_{[0,T]} M_t dA_t\Big] \ \square $$

5.33 Theorem. 1) *Let A be an adapted increasing process. Suppose for all $t \geq 0$ A_t is integrable. Then A is predictable if and only if for every non-negative bounded cadlag martingale M and $t \geq 0$*

$$ E\Big[\int_{[0,t]} M_s dA_s\Big] = E\Big[\int_{[0,t]} M_{s-} dA_s\Big]. \tag{33.1} $$

2) *Let A be an adapted integrable increasing process. Then A is predictable if and only if for every non-negative bounded cadlag martingale M*

$$ E\Big[\int_{[0,\infty[} M_s dA_s\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty[} M_{s-} dA_s\Big]. \tag{33.2} $$

Proof. 1) The necessity comes from Theorem 5.13, because the predictable projection of $M I_{[0,t]}$ is $M_- I_{[0,t]}$. We are going to show the sufficiency. At first, suppose A is integrable. Put

$$ \mathcal{C} = \{F \times [0,t] : \quad t \geq 0, F \in \mathcal{F}\}. $$

Then $\mathcal{C}$ is a π-class and $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$. Let $C = F \times [0,t] \in \mathcal{C}$, and M be the cadlag modification of $(E[I_F|\mathcal{F}_t])$. Then ${}^oI_C = M I_{[0,t]}$, ${}^pI_C = M_- I_{[0,t]}$. By adaptedness of A and (33.1) we obtain

$$ \mu_A(I_C) = \mu_A({}^oI_C) = \mu_A({}^pI_C), $$

where μ_A is the measure generated by A. Put

$$ \mathcal{G} = \{C \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) : \quad \mu_A(I_C) = \mu_A({}^pI_C)\}. $$

Then $\mathcal{G}$ is a λ-class and $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$. Hence $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$, i.e., μ_A is predictable. Consequently, by Theorem 5.13 A is predictable. For general cases we consider $A^n = (A_{t\wedge n})$. Since A^n is integrable, it is shown above that A^n is predictable. At last, A is predictable.

2) If M is a non-negative bounded cadlag martingale, so is $M' = M I_{[0,t]} + M_t I_{]t,\infty[}$. By (33.2) we have

$$ \begin{aligned} E\Big[\int_{[0,t]} M_s dA_s\Big] &+ E[M_t(A_\infty - A_t)] \\ &= E\Big[\int_{[0,\infty[} M'_s dA_s\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty[} M'_{s-} dA_s\Big] \\ &= E\Big[\int_{[0,t]} M_{s-} dA_s\Big] + E[M_t(A_\infty - A_t)]. \end{aligned} \tag{33.3} $$

Substracting $E[M_t(A_\infty - A_t)]$ from the two sides of (33.3), we obtain (33.1). By 1) A is predictable. □

As an application of Theorem 5.33, we obtain a characterization for predictable times.

5.34 Theorem. *Let T be a stopping time. Then T is predictable if and only if for every non-negative bounded cadlag martingale M*

$$ E[M_{T-}] = E[M_T]. $$

Proof. The necessity follows from Theorem 4.41. We are to show the sufficiency. Put $A = I_{[T,\infty[}$. Then A is an adapted integrable increasing process, and for every non-negative bounded cadlag martingale M

$$ E\Big[\int_{[0,\infty[} M_s dA_s\Big] = E[M_T I_{[T<\infty]}] = E[M_{T-} I_{[T<\infty]}] = E\Big[\int_{[0,\infty[} M_{s-} dA_s\Big] $$

(note that $M_\infty = M_{\infty-}$). By Theorem 5.33 A is predictable, and so is T. □

The next theorem provides a useful characterization for totally inaccessible times.

5.35 Theorem. *Let $T > 0$ be a stopping time. Then T is totally inaccessible if and only if there exists a uniformly integrable martingale*

M with $M_0 = 0$ such that M is continuous outside $[\![T]\!]$ *and* $\Delta M_T = 1$ *on* $[T < \infty]$.

Proof. Necessity. Let T be a totally inaccessible time, and $A = I_{[\![T,\infty[\![}$. Then A is quasi-left-continuous, and the dual predictable projection A^p of A is continuous (Corollary 5.28.3)). Put $M = A - A^p$. Then M is a uniformly integrable martingale and $M_0 = 0$ (Corollary 5.31.1)), and satisfies the requirements.

Sufficiency. Suppose there exists a uniformly integrable martingale M satisfying the requirements. Then for any predictable time S we have

$$\Delta M_S = \Delta M_S I_{[S<\infty]} = \Delta M_T I_{[T=S<\infty]} = I_{[T=S<\infty]}.$$

By Theorem 4.41 $P[T = S < \infty] = E[\Delta M_S] = 0$. Hence T is totally inaccessible. □

The following theorem provides a characterization for quasi-left-continuous filtrations (see Definition 3.39).

5.36 Theorem. *A filtration $F = (\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous if and only if all uniformly integrable cadlag F-martingales are quasi-left-continuous.*

Proof. Necessity. Assume $(\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous. Let M be a uniformly integrable cadlag martingale. Then for any predictable time $T > 0$

$$E(M_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}) = M_{T-} I_{[T<\infty]} \quad \text{a.s.}.$$

But $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$ and $M_T I_{[T<\infty]} \in \mathcal{F}_T$, so $\Delta M_T I_{[T<\infty]} = 0$ a.s., i.e., M is quasi-left-continuous.

Sufficiency. Assume that $(\mathcal{F}_t)$ is not quasi-left-cotinuous. Then there exists a predictable time T such that $P(T < \infty) > 0$ and $\mathcal{F}_T \neq \mathcal{F}_{T-}$. Take a set $H \in \mathcal{F}_T \setminus \mathcal{F}_{T-}$. Put $M = (I_H - E[I_H|\mathcal{F}_{T-}])I_{[\![T,\infty[\![}$. M is a uniformly integrable cadlag martingale (see Problem 5.3), but not quasi-left-continuous. □

5.37 Definition. A filtration $F = (\mathcal{F}_t)$ is said to be *completely continuous* if for any stopping time T $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$. Obviously, the complete continuity of a filtration implies the quasi-left-continuity.

5.38 Theorem. *The following two statements are equivalent:*

1) *All stopping times are predictable.*

2) *All uniformly integrable cadlag martingales are continuous.*

And in this case, $(\mathcal{F}_t)$ is completely continuous.

Proof. 1) ⇒ 2). At first, we know by Theorem 3.40 that $(\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous. For any stopping time T and uniformly integrable cadlag martingale M, we have by Theorem 5.36 $M_T = M_{T-}$ a.s. since T is predictable. Hence M is indistinguishable from M_-, i.e., M is continuous. The complete continuity of $(\mathcal{F}_t)$ is trivial in this case.

2) ⇒ 1) comes from Theorem 5.34 immediately. □

5.39 Theorem. *Let $A \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$. Then $A' = [{}^p(I_A) > 0]$ is the only predictable set (up to evanescence) such that for any predictable time T $A[\![T]\!]$ is evanescent if and only if $A'[\![T]\!]$ is evanescent. A' is called the predictable support of A.*

Proof. Let T be a predictable time. Since

$${}^p(I_A)_T I_{[T<\infty]} = E[(I_A)_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] \quad \text{a.s.},$$

it is not hard to see

$${}^p(I_A)_T I_{[T<\infty]} = 0 \quad \text{a.s.} \iff (I_A)_T I_{[T<\infty]} = 0 \quad \text{a.s.}.$$

Now,

$$\begin{aligned} A[\![T]\!] \text{ is evanescent} &\iff (I_A)_T I_{[T<\infty]} = 0 \text{ a.s.} \\ A'[\![T]\!] \text{ is evanescent} &\iff (I_{A'})_T I_{[T<\infty]} = 0 \text{ a.s.} \\ &\iff {}^p(I_A)_T I_{[T<\infty]} = 0 \text{ a.s.}. \end{aligned}$$

Hence $A[\![T]\!]$ is evanescent $\iff A'[\![T]\!]$ is evanescent. The uniqueness comes from the predictable section theorem as usual. □

5.40 Lemma. *Let $A_n \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ and A'_n be the predictable support of $A_n, n \geq 1$. Then the predictable support of $\bigcup_n A_n$ is $\bigcup_n A'_n$.*

Proof. Immediately follows from the definition of predictable support. □

5.41 Lemma. *Let A be a locally integrable increasing process. Then the predictable support of $[\Delta A \neq 0]$ is $[\Delta A^p \neq 0]$, where A^p is the dual predictable projection of A.*

Proof. For any predictable time T $\Delta A^p_T I_{[T<\infty]} = E[\Delta A_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}]$, $[\Delta A \neq 0][\![T]\!]$ is evanescent $\iff \Delta A_T I_{[T<\infty]} = 0$ a.s. $\iff \Delta A^p_T I_{[T<\infty]} = 0$ a.s. $\iff [\Delta A^p \neq 0][\![T]\!]$ is evanescent. Hence predictable set $[\Delta A^p \neq 0]$ is the predictable support of $[\Delta A \neq 0]$. □

5.42 Theorem. *The predictable support of any thin set is the union of graphs of a sequence of predictable times.*

Proof. On account of Lemma 5.40, we need only to show the assertion for set $[\![T]\!]$, where $T > 0$ is a stopping time. Put $A = I_{[\![T,\infty[\![}$. Then A is an integrable increasing process. By Lemma 5.41 the predictable support

of $[\![T]\!] = [\Delta A \neq 0]$ is $[\Delta A^p \neq 0]$. Obviously, $[\Delta A^p \neq 0]$ is the union of graphs of a sequence of predictable times. □

5.43 Corollary. *Let A be a thin set and A' be its predictable support.*

1) A is totally inaccessible $\Longleftrightarrow$ A' is evanescent.

2) A is predictable $\Longleftrightarrow$ $A = A'$. In this case, A can be represented as the union of graphs of a sequence of predictable times.

3) A is accessible $\Longleftrightarrow$ $A \subset A'$. In this case, A can be represented as the union of graphs of a sequence of accessible times.

§4. Doob-Meyer Decomposition Theorem

5.44 Definition. Let $\mathcal{T}$ be the collection of all stopping times. A measurable process X is said to be *of class (D)*, if $\{X_T I_{[T<\infty]} : T \in \mathcal{T}\}$ is a uniformly integrable family of r.v..

By Doob's stopping theorem it is not hard to see that all uniformly integrable cadlag martingales or non-negative right-closed cadlag submartingales are of class (D).

5.45 Theorem. *Let $A = (A_t)$ be a predictable integrable increasing process with $A_0 = 0$, and $Z = (Z_t)$ be the optional projection of $(A_\infty - A_t)$. Then Z is a potential of class (D), and A is uniquely determined by Z. Z is called the potential generated by A.*

Proof. We have already known that the optional projection of A_∞ is the cadlag modification of the martingale $(E[A_\infty|\mathcal{F}_t])$. Hence Z is cadlag and $Z_t = E[A_\infty|\mathcal{F}_t] - A_t$ a.s.. For $s < t$

$$E[Z_t|\mathcal{F}_s] = E[A_\infty|\mathcal{F}_s] - E[A_t|\mathcal{F}_s] \leq E[A_\infty|\mathcal{F}_s] - A_s = Z_s \quad a.s.,$$

i.e., Z is a non-negative supermartingale. On the other hand,

$$\lim_{t\to\infty} E[Z_t] = \lim_{t\to\infty} E[A_\infty - A_t] = 0$$

Therefore, Z is a potential. Finally, $Z_t \leq E[A_\infty|\mathcal{F}_t]$ a.s., then Z is of class (D). Let μ_A be the measure generated by A. μ_A is finite, $\mu_A([\![0]\!]) = 0$ and for every stopping time S

$$\mu_A(]\!]S, \infty[\![) = E[A_\infty - A_S] = E[Z_S]. \tag{45.1}$$

It is clear that, being restricted on $\mathcal{P}$, μ_A is uniquely determined by Z. Since A is predictable, so A is uniquely determined by Z. □

From Theorem 5.45 it is natural to ask if any potential of class (D) is generated by a predictable integrable increasing process. The answer is affirmative. In fact, (45.1) is the key to solving this problem.

Let $\mathcal{C}$ be the field generated by

$$\{[\![0_F]\!] : F \in \mathcal{F}_0\} \cup \{]\!]S, T]\!] : S \leq T \quad \text{are stopping times}\}.$$

Then $\mathcal{C}$ generates $\mathcal{P}$ and each element H of $\mathcal{C}$ has the form $[\![0_F]\!] \cup (\bigcup_{i=1}^{m}]\!]U_i, V_i]\!])$, where $F \in \mathcal{F}_0$ and $U_i, V_i, i = 1, \cdots, m$, are stopping times. Let S_1 be the debut of $H \cap]\!]0, \infty[\![$, T_1 be the debut of $H^c \cap]\!]S_1, \infty[\![$, S_2 be the debut of $H \cap]\!]T_1, \infty[\![$, T_2 be the debut of $H^c \cap]\!]S_2, \infty[\![$, and so on. Then H can be uniquely represented as

$$H = [\![0_F]\!] \cup]\!]S_1, T_1]\!] \cup \cdots \cup]\!]S_n, T_n]\!],$$

where $F \in \mathcal{F}_0$, $S_i, T_i, i = 1, \cdots, n$, are stopping times, and $S_i < T_i$ on $[S_i < \infty]$, $i = 1, \cdots, n$; $T_i < S_{i+1}$ on $[T_i < \infty]$, $i = 1, \cdots, n-1$. This representation of H is said to be *canonical*. Denote

$$\overline{H} = [\![0_F]\!] \cup [\![S_1, T_1]\!] \cup \cdots \cup [\![S_n, T_n]\!].$$

5.46 Lemma. *Let $Z = (Z_t)$ be a potential of class (D), and $Z_\infty = 0$. Let $H \in \mathcal{C}$ with canonical representation*

$$H = [\![0_F]\!] \cup]\!]S_1, T_1]\!] \cup \cdots \cup]\!]S_n, T_n]\!]. \tag{46.1}$$

Define

$$\mu(H) = E[Z_{S_1} - Z_{T_1}] + \cdots + E[Z_{S_n} - Z_{T_n}]. \tag{46.2}$$

Then μ is a finite measure on $\mathcal{C}$.

Proof. First of all, we show the following fact: for any given $\varepsilon > 0$ and $H \in \mathcal{C}$ there exists $K \in \mathcal{C}$ such that $\overline{K} \subset H$, $K \cap [\![0]\!] = \emptyset$ and $\mu(H) \leq \mu(K) + \varepsilon$. To this end, we may suppose H has the form $]\!]S, T]\!]$, $S \leq T$ and $S < T$ on $[S < \infty]$. Put

$$S_n = \left(S + \frac{1}{n}\right)_{[S+\frac{1}{n}<T]}, \quad T_n = T_{[S+\frac{1}{n}<T]}.$$

We have $S_n \geq S$, $S = \lim_n S_n$, and $S_n > S$ on $[S < \infty]$. At the same time, $T_n \geq T$, $\lim_n T_n = T$, and $T = T_n$ on $[S_n < \infty]$. Thus for each n, $]\!]S_n, T_n]\!] \subset]\!]S, T]\!]$. Since Z is right-continuous and of class (D),

$$Z_{S_n} \xrightarrow{L^1} Z_S, \quad Z_{T_n} \xrightarrow{L^1} Z_T \quad \text{and} \quad \lim_n E[Z_{S_n} - Z_{T_n}] = E[Z_S - Z_T].$$

Take n large enough such that $E[Z_{S_n} - Z_{T_n}] \geq E[Z_S - Z_T] - \varepsilon$, and $K =]\!]S_n, T_n]\!]$. Then K satisfies the requirements.

The finiteness and finite additivity of μ are evident. What remains is to show the σ-additivity of μ, or equivalently, $H_n \in \mathcal{C}$, $H_n \downarrow \emptyset \Longrightarrow \mu(H_n) \downarrow 0$. For any given $\varepsilon > 0$, take $K_n \in \mathcal{C}$ such that $K \cap [\![0]\!] = \emptyset$, $\overline{K}_n \subset H_n$ and

$\mu(H_n) \le \mu(K_n) + \varepsilon 2^{-n}$. Put $L_n = K_1 \cap \cdots \cap K_n$. Then for all n, $L_n \in \mathcal{C}$, $\overline{L}_n \subset H$ and

$$\mu(H_n) \le \mu(L_n) + \varepsilon. \tag{46.3}$$

On the other hand, $\overline{L}_n \downarrow \emptyset$. Denote by D_n the debut of $\overline{L}_n$. Then $[\![D_n]\!] \subset \overline{L}_n$ and $D_n \uparrow +\infty$. Because $L_n \subset]\!]D_n, \infty[\![$,

$$\mu(L_n) \le \mu(]\!]D_n, \infty]\!]) = E[Z_{D_n} - Z_\infty] = E[Z_{D_n}].$$

Noting that $Z_{D_n} \xrightarrow{L_1} 0$ (Z is a potential of class (D)), we have $\lim_n \mu(L_n) = 0$. In view of (46.3), $\lim_n \mu(H_n) \le \varepsilon$. Letting $\varepsilon \downarrow 0$ gives $\lim_n \mu(H_n) = 0$. □

5.47. Theorem. *Let Z be a potential of class (D). Then there exists a unique predictable integrable increasing process A such that Z is generated by A.*

Proof. The uniqueness has been implied in Theorem 5.45. Only the existence needs to be proved. The finite measure μ on $\mathcal{C}$ defined by (46.2) can be uniquely extended onto the predictable σ-field $\mathcal{P}$, and we still denote it by μ. μ does not charge any evanescent set. In fact, for any evanescent set H its debut $D_H = \infty$ a.s. is a predictable time, and

$$H \subset [\![0_F]\!] \cup]\!]0_F, \infty[\![,$$

where $F = [D_H < \infty] \in \mathcal{F}_0$. Since $P(F) = 0$, $0_F = \infty$ a.s., we have $\mu(H) = 0$.

For every non-negative bounded measurable process X define

$$\overline{\mu}(X) = \mu({}^pX). \tag{47.1}$$

Then $\overline{\mu}$ is a finite measure on $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$, and does not charge any evanescent set. Because $\overline{\mu}$ is the extension of μ, by (47.1) we know $\overline{\mu}(X) = \overline{\mu}({}^pX)$, i.e., $\overline{\mu}$ is predictable. By Theorems 5.11 and 5.13 there exists a unique predictable integrable increasing process A such that $\overline{\mu}$ is the measure generated by A. $E[A_0] = \overline{\mu}([\![0]\!]) = \mu([\![0]\!]) = 0$, thus $A_0 = 0$ a.s.. Furthermore, by (46.2) for any stopping time S

$$E[A_\infty - A_S] = \mu(]\!]S, \infty]\!]) = E[Z_S].$$

This means Z is the optional projection of $(A_\infty - A_t)$, i.e., the potential generated by A. □

As an important application of Theorem 5.47, we obtain Doob-Meyer decomposition theorem for supermartingales of class (D).

5.48 Theorem. *Let X be a right-continuous supermartingale of class (D). Then X can be uniquely decomposed as:*

$$X = M - A, \tag{48.1}$$

where M is a uniformly integrable martingale, and A is a predictable integrable increasing process with $A_0 = 0$. (48.1) is called the Doob-Meyer decomposition of X.

Proof. Existence. Put

$$Z_t = X_t - E[X_\infty | \mathcal{F}_t].$$

Then $Z = (Z_t)$ is a potential of class (D). By Theorem 5.47 there exists a predictable integrable increasing process A such that

$$Z_t = E[A_\infty | \mathcal{F}_t] - A_t.$$

Put $M_t = E[X_\infty + A_\infty | \mathcal{F}_t]$. Then $X = M - A$ is the Doob-Meyer decomposition of X.

Uniqueness. Let $X = \overline{M} - \overline{A}$ be another Doob-Meyer decomposition of X. Then $A - \overline{A} = M - \overline{M}$ is a predictable martingale with integrable variation. By Corollary 5.31 $A - \overline{A} = 0$, $A = \overline{A}$ and $M = \overline{M}$. □

5.49 Definiton. Let X be a uniformly integrable cadlag supermartingale. X is said to be *regular*, if for any predictable time $T > 0$

$$E[X_{T-}] = E[X_T],$$

or equivalently, $X_{T-} = E[X_T | \mathcal{F}_{T-}]$ (since $X_{T-} \ge E[X_T | \mathcal{F}_{T-}]$ by Theorem 4.41).

It is easy to see that quasi-left-continuous uniformly integrable cadlag supermartingales and uniformly integrable cadlag martingales are regular, and regular predictable uniformly integrable cadlag supermartingales are continuous. The following theorem is also evident.

5.50 Theorem. *Let X be a cadlag supermartingale of class (D), and $X = M - A$ be its Doob-Meyer decomposition. Then A is continuous if and only if X is regular.*

§5. Filtrations of Discrete Type

5.51 Definition. Suppose

i) $(\mathcal{G}_n)_{n \ge 0}$ is a filtration with discrete parameter,

ii) $(T_n)_{n \ge 0}$ is a strictly increasing sequence of r.v., i.e., $\forall n \ge 0$ $T_n < \infty \Longrightarrow T_n < T_{n+1}$, with $T_0 = 0$ and $T_n \uparrow \infty$.

iii) $\forall n \ge 1$, T_n is $\mathcal{G}_n$-measurable.

Define

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathcal{G}_n \cap [T_n \le t < T_{n+1}])$$
$$= \{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n[T_n \le t < T_{n+1}] : A_n \in \mathcal{G}_n, n \ge 0\}, \qquad t \ge 0, \tag{51.1}$$

and denote it by $\mathcal{F}_t$. It is easy to see that for each $t \ge 0$, $\mathcal{F}_t$ is a σ-field. and $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0$. We will show that $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is a right-continuous filtration. and is called a *filtration of discrete type*. It is the object we deal with in this paragraph.

5.52 Theorem. *1) $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is a right-continuous filtration.*

2) $\forall n \ge 1$, T_n is an $\boldsymbol{F}$-stopping time.

3) If $\mathcal{G}'_n = \mathcal{G}_n \vee \mathcal{N}$, $\mathcal{F}'_t = \bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathcal{G}'_n \cap [T_n \le t < T_{n+1}])$, where $\mathcal{N}$ is the σ-field generated by all $\boldsymbol{P}$-null sets, $\boldsymbol{F}' = (\mathcal{F}'_t)$ is the usual augmentation of $\boldsymbol{F}$.

Proof. Let $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$ and $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k[T_k \le s < T_{k+1}]$, $A_k \in \mathcal{G}_k$. Then

$$\begin{aligned} &A[T_n \le t < T_{n+1}] \\ &= \Big\{\Big(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k[T_k \le s < T_{k+1}]\Big) \cup (A_n[T_n \le s])\Big\} \cap [T_n \le t < T_{n+1}] \\ &\in \mathcal{G}_n \cap [T_n \le t < T_{n+1}]. \end{aligned}$$

Hence $A \in \mathcal{F}_t$. Consequently, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. We are going to show $\mathcal{F}_t = \bigcap_n \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}$. Let h be $\left(\bigcap_n \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}\right)$-measurable. Then for each $n > 1$

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k^{(n)} I_{[T_k \le t+\frac{1}{n} < T_{k+1}]}, \quad h_k^{(n)} \in \mathcal{G}_k.$$

Put $h_k = \overline{\lim}_{n\to\infty} h_k^{(n)}$. For each $\omega \in [T_k \le t < T_{k+1}]$ there exists an integer n_ω such that

$$n > n_\omega \Longrightarrow \omega \in [T_k \le t + \frac{1}{n} < T_{k+1}] \Longrightarrow h(\omega) = h_k^{(n)}(\omega) = h_k(\omega).$$

Evidently, $h_k \in \mathcal{G}_k$. Hence

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k I_{[T_k \le t < T_{k+1}]} \in \mathcal{F}_t.$$

This implies $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$.

For all $n \ge 1$, $t \ge 0$

$$[T_n \le t] = \bigcup_{k=n}^{\infty} [T_k \le t < T_{k+1}] \in \mathcal{F}_t.$$

Therefore, T_n is a stopping time.

The third claim is apparent. □

5.53 Theorem. *$\mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_\infty$ if and only if for each $n \ge 0$*

$$\mathcal{G}_n \cap [T_{n+1} = \infty] = \mathcal{G}_\infty \cap [T_{n+1} = \infty]. \tag{53.1}$$

Proof. As usual, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\ge0} \mathcal{F}_t$ and $\mathcal{G}_\infty = \bigvee_{n\ge0} \mathcal{G}_n$. Obviously, $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{G}_\infty$. Sufficiency. Let $A \in \mathcal{G}_n$. For each $t \ge 0$

$$A[T_n \le t] = \bigcup_{k=n}^{\infty} A[T_k \le t < T_{k+1}] \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty.$$

(By the way, we obtain $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_{T_n}$.) Hence $A[T_n < \infty] \in \mathcal{F}_\infty$. On the other hand,

$$A[T_n = \infty] = \bigcup_{k=1}^{n} A[T_{k-1} < \infty, T_k = \infty]. \tag{53.2}$$

By (53.1), $A[T_k = \infty] = A_{k-1}[T_k = \infty]$, $A_{k-1} \in \mathcal{G}_{k-1}$. We have shown $A_{k-1}[T_{k-1} < \infty] \subset \mathcal{F}_\infty$. Thus

$$A[T_{k-1} < \infty, T_k = \infty] = A_{k-1}[T_{k-1} < \infty][T_k = \infty] \in \mathcal{F}_\infty.$$

By (53.2) we have $A[T_n = \infty] \in \mathcal{F}_\infty$. In consequence, $A \in \mathcal{F}_\infty$, $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_\infty$ and $\mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{F}_\infty$.

Necessity. For $t \ge 0$ and $A \in \mathcal{F}_t$

$$A[T_{n+1} = \infty] = \Big\{\Big(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k[T_k \le t < T_{k+1}]\Big) \cup (A_n[T_n \le t])\Big\}[T_{n+1} = \infty],$$
$$A_k \in \mathcal{G}_k.$$

Hence $A[T_{n+1} = \infty] \in \mathcal{G}_n \cap [T_{n+1} = \infty]$, i.e., $\mathcal{F}_t \cap [T_{n+1} = \infty] \subset \mathcal{G}_n \cap [T_{n+1} = \infty]$. Then

$$\mathcal{G}_\infty \cap [T_{n+1} = \infty] = \mathcal{F}_\infty \cap [T_{n+1} = \infty] \subset \mathcal{G}_n \cap [T_{n+1} = \infty],$$

(53.1) holds. □

The theorem illustrates that in order to guarantee $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_\infty$ the increase of $\mathcal{G}_n$ cannot go behind T_n. In order to satisfy (53.1) it suffices to replace $\mathcal{G}_n$ by $(\mathcal{G}_n \cap [T_{n+1} < \infty]) \cup (\mathcal{G}_\infty \cap [T_{n+1} = \infty])$, i.e., to amplify $\mathcal{G}_n$ properly. On the other hand, it is desirable to have $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{T_n}$ for each n. To this end (53.2) is necessary, as we will see later. Hence in the remainders of this paragraph we always suppose $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_\infty$.

5.54 Theorem. *$T \ge 0$ is a stopping time if and only if for each $n \ge 0$ there exists $R_n \in \mathcal{G}_n$ such that*

$$T_{[T<T_{n+1}]} = (R_n)_{[R_n<T_{n+1}]}, \tag{54.1}$$

or equivalently, any one of the following conditions holds:

$$T < T_{n+1} \Longrightarrow R_n = T \text{ and } T \geq T_{n+1} \Longrightarrow R_n \geq T_{n+1}. \tag{54.2}$$

$$R_n < T_{n+1} \Longrightarrow T = R_n \text{ and } R_n \geq T_{n+1} \Longrightarrow T \geq T_{n+1}. \tag{54.3}$$

$$T < T_{n+1} \Longleftrightarrow R_n < T_{n+1} \Longrightarrow T = R_n. \tag{54.4}$$

$$T \wedge T_{n+1} = R_n \wedge T_{n+1}. \tag{54.5}$$

Proof. The equivalence of (54.1)–(54.5) can be proved directly, and its proof is left to readers.

Sufficiency. For all $t \geq 0$

$$[T \leq t] = \bigcup_{n=0}^{\infty} ([T \leq t][T_n \leq t < T_{n+1}]) = \bigcup_{n=0}^{\infty} ([R_n \leq t][T_n \leq t < T_{n+1}]),$$

since on $[T_n \leq t < T_{n+1}]$ $T \leq t \Longrightarrow T < T_{n+1} \Longrightarrow T = R_n$, and $R_n \leq t \Longrightarrow R_n < T_{n+1} \Longrightarrow R_n = T$. Because $R_n \in \mathcal{G}_n$, we have $[T \leq t] \in \mathcal{F}_t$, and hence T is a stopping time.

Necessity. For all $n \geq 0$, $t \geq 0$ and $A \in \mathcal{F}_t$ we have

$$A[t < T_{n+1}] = \bigcup_{k=0}^{n} A_k[T_k \leq t < T_{k+1}] \in \mathcal{G}_n \cap [t < T_{n+1}], \tag{54.6}$$

where $A_k \in \mathcal{G}_k$, $k = 0, \cdots, n$. Let $F_r = [r < T_{n+1}]$, $r \in \boldsymbol{Q}_+$. Due to (54.6), there exists $G_r \in \mathcal{G}_n$ such that

$$[T < r]F_r = G_r F_r. \tag{54.7}$$

We may suppose $(G_r, r \in \boldsymbol{Q}_+)$ is monotone increasing. In fact, when $r' < r$, we have $F_{r'} \supset F_r$, and

$$G_{r'} F_r = G_{r'} F_{r'} F_r = [T < r'] F_{r'} F_r = [T < r'] F_r \subset [T < r] F_r = G_r F_r.$$

Thus

$$[T < r]F_r = (\bigcup_{r' \leq r} G_{r'}) F_r.$$

If necessary, G_r may be replaced by $\bigcup_{r' \leq r} G_{r'}$. Now define

$$R_n(\omega) = \inf\{r \in \boldsymbol{Q}_+ : \omega \in G_r\}.$$

Obviously, $R_n \geq 0$. For $t > 0$, $[R_n < t] = \bigcup_{r < t} G_r \in \mathcal{G}_n$, hence $R_n \in \mathcal{G}_n$. We show that (54.4) holds. If (54.4) does not hold, it must be that one of $T(\omega)$ and $R_n(\omega)$ is smaller than $T_{n+1}(\omega)$, and $T(\omega) \neq R_n(\omega)$. At this time, we may take $t < T_{n+1}(\omega)$ such that $T(\omega) > t > R_n(\omega)$ or $R_n(\omega) > t > T(\omega)$. In the first case, take $r \in \boldsymbol{Q}_+$ such that $r < t$ and $\omega \in G_r$. Then $\omega \notin [T < r]F_r$, but $\omega \in G_r F_r$, contradicting (54.7). In the second case, take $r \in \boldsymbol{Q}_+$ such that $T(\omega) < r < t$ and $\omega \notin G_r$. Then

$\omega \notin G_r F_r$, but $\omega \in [T < r]F_r$, contradicting (54.7) similarly. In a word, (54.4) must hold. □

5.55 Theorem. 1) *$X = (X_t)$ is optional if and only if for each $n \geq 0$ there exists a process $X^{(n)} \in \mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ such that*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)} I_{[T_n, T_{n+1}[}. \tag{55.1}$$

2) *X is predictable if and only if for each $n \geq 0$ there exists a process $X^{(n)} \in \mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ such that*

$$X = X_0 I_{[0]} + \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)} I_{]T_n, T_{n+1}]}. \tag{55.2}$$

Proof. Since $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_{T_n}$, the sufficiency is apparent. Only the necessity needs to be verified.

1) By the monotone class argument it suffices to verify (55.1) for $X = I_{[T, \infty[}$, where T is a stopping time. Suppose $R_n \in \mathcal{G}_n$, $n \geq 0$, satisfy (54.2). Put

$$X^{(n)} = I_{[R_n, \infty[}.$$

Then $X^{(n)} \in \mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$, and on $[T_n \leq t < T_{n+1}]$ $T \leq t \Longleftrightarrow R_n \leq t$, i.e.,

$$X I_{[T_n, T_{n+1}[} = X^{(n)} I_{[T_n, T_{n+1}[}.$$

(55.1) follows immediately.

2) By the monotone class argument it suffices to verify (55.2) for $X = I_{[0,T]}$, where T is a stopping time. Now put

$$X^{(n)} = I_{[0, R_n]}.$$

Similarly we have $X^{(n)} \in \mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$, on $[T_n < t \leq T_{n+1}]$ $T < t \Longleftrightarrow R_n < t$ (e.g. $T < t \Longrightarrow T < t \leq T_{n+1} \Longrightarrow T = R_n < t$), and

$$X I_{]T_n, T_{n+1}]} = X^{(n)} I_{]T_n, T_{n+1}]}.$$

(55.2) follows immediately. □

5.56 Theorem. *Let T be a stopping time. Then for each $n \geq 0$*

$$\mathcal{F}_T \cap [T_n < T < T_{n+1}] = \mathcal{G}_n \cap [T_n \leq T < T_{n+1}]. \tag{56.1}$$

Proof. Because $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_{T_n}$, we have $\mathcal{G}_n \cap [T_n \leq T] \subset \mathcal{F}_T$ and

$$\mathcal{G}_n \cap [T_n \leq T < T_{n+1}] \subset \mathcal{F}_T \cap [T_n \leq T < T_{n+1}].$$

On the other hand, if $A \in \mathcal{F}_T$, there is an optional process $X = \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)} I_{[T_n, T_{n+1}[}$ such that $I_{A[T<\infty]} = X_T I_{[T<\infty]}$, $X^{(n)} \in \mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$. On $[T_n \leq T < T_{n+1}]$, $I_A = X_T^{(n)} = X_{R_n}^{(n)}$, thus

$$A[T_n \leq T < T_{n+1}] = [X_{R_n}^{(n)} = 1][T_n \leq T < T_{n+1}], \tag{56.2}$$

where $R_n \in \mathcal{G}_n$ is determined as in Theorem 5.54. Since $[X^{(n)}_{R_n} = 1] \in \mathcal{G}_n$, by (56.2) we know

$$\mathcal{F}_T \cap [T_n \le T < T_{n+1}] \subset \mathcal{G}_n \cap [T_n \le T < T_{n+1}].$$

Hence (56.1) holds. □

5.57 Corollary.

$$\mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{G}_n, \quad n \ge 0;$$

$$\mathcal{F}_{T_n-} = \mathcal{G}_{n-1} \vee \sigma\{T_n\}, \quad n \ge 1.$$

Proof. For each $n \ge 0$

$$\mathcal{F}_n \cap [T_n < \infty] = \mathcal{F}_{T_n} \cap [T_n \le T_n < T_{n+1}]$$
$$= \mathcal{G}_n \cap [T_n \le T_n < T_{n+1}] = \mathcal{G}_n \cap [T_n < \infty].$$

By (53.1)

$$\mathcal{F}_{T_n} \cap [T_n = \infty] = \mathcal{F}_\infty \cap [T_n = \infty] = \mathcal{G}_\infty \cap [T_n = \infty] = \mathcal{G}_n \cap [T_n = \infty]$$

(here we use the assumption $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_\infty$). Since $[T_n < \infty] \in \mathcal{F}_{T_n} \cap \mathcal{G}_n$, we obtain $\mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{G}_n$.

For each $n \ge 1$, $T_{n-1} < \infty \Rightarrow T_{n-1} < T_n$. Hence $\mathcal{F}_{T_{n-1}} \subset \mathcal{F}_{T_n-}$, and $\mathcal{G}_{n-1} \vee \sigma\{T_n\} \subset \mathcal{F}_{T_n-}$. On the other hand, let $A \in \mathcal{F}_t$, then

$$A[t < T_n] = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k[T_k \le t < T_{k+1}], \quad A_k \in \mathcal{G}_k, \quad 0 \le k \le n-1.$$

Therefore $A[t < T_n] \in \mathcal{G}_{n-1} \vee \sigma\{T_n\}$ and $\mathcal{F}_{T_n-} \subset \mathcal{G}_{n-1} \vee \sigma\{T_n\}$. □

5.58 Theorem. *Suppose $\mathcal{G}_0$ is complete, i.e., F satisfies the usual conditions. A stopping time T is predictable if and only if for each $n \ge 0$ there exists $R_n \in \mathcal{G}_n$ such that*

$$T_{[T \le T_{n+1}]} = (R_n)_{[R_n \le T_{n+1}]} \tag{58.1}$$

or equivalently, any one of the following conditions holds.

$$T \le T_{n+1} \Longrightarrow R_n = T \text{ and } T > T_{n+1} \Longrightarrow R_n > T_{n+1}. \tag{58.2}$$

$$R_n \le T_{n+1} \Longrightarrow R_n = T \text{ and } R_n > T_{n+1} \Longrightarrow T > T_{n+1}. \tag{58.3}$$

$$R_n \le T_{n+1} \Longleftrightarrow T \le T_{n+1} \Longrightarrow T = R_n. \tag{58.4}$$

Proof. The equivalence of (58.1)–(58.4) can be proved directly and its proof is left to readers.

Sufficiency. Put $X = I_{[T,\infty[}$, $X^{(n)} = I_{[R_n,\infty[}$, $n \ge 1$. Then (55.2) holds, where $X_0 = I_{[T=0]}$, because on $[T_n < t \le T_{n+1}]$, $T \le t \Longleftrightarrow R_n < t$. By Theorem 5.55.2) process X is predictable, and so is T.

Necessity. Let T be a predictable time. There is a sequence (S_k) of stopping times foretelling T, i.e., $S_k \uparrow T$ and on $[T > 0]$ $S_k < T$ for all k. Let $U_{k,n} \in \mathcal{G}_n$ such that $U_{k,n} \wedge T_{n+1} = S_k \wedge T_{n+1}$. Put

$$U'_{k,n} = \max_{1 \le j \le k} U_{j,n}, \quad U_n = \lim_{k \to \infty} U'_{k,n},$$

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} [U_n = U'_{k,n}],$$

$$R_n = U_n + I_{F_n[T>0]}.$$

It is easy to see $R_n \in \mathcal{G}_n$. We show that (58.2) holds.

Assume $T \le T_{n+1}$, $n \ge 0$. If $T = 0$, then for all k, $S_k = 0$. Consequently, $U_{k,n} = 0$, $U'_{k,n} = 0$, $U_n = 0$, $R_n = 0$, and $R_n = T$. If $T > 0$, then for all k, $S_k < T_{n+1}$. It must be $S_k = U_{k,n}$. Since $S_k \uparrow T$, we have $U'_{k,n} = S_k$, $U_n = T$. Noting that $S_k < T$, $I_F = 0$, we obtain $R_n = V_n = T$

Assume $T > T_{n+1}$ (then $T > 0$). For sufficiently large k, $S_k > T_{n+1}$, then $U_{k,n} \ge T_{n+1}$, $U'_{k,n} \ge T_{n+1}$. If $I_F = 0$, $U_n > U'_{k,n} \ge T_{n+1}$, $R_n = U_n > T_{n+1}$. If $I_F = 1$, $U_n \ge U'_{k,n} \ge T_{n+1}$, $R_n = U_n + 1 > T_{n+1}$. □

Remark. In the theorem the sufficiency does not need the completeness of the filtration, and the necessity holds for any foretellable stopping time.

5.59 Corollary. *Suppose for some $k \ge 0$, $T \in \mathcal{F}_{T_k}$, $T \ge T_k$ and $T_k < \infty \Longrightarrow T_k < T$. Then T is a predictable time.*

Proof. Put

$$R_n = \begin{cases} \infty, & n < k, \\ T, & n \ge k. \end{cases}$$

Clearly, $R_n \in \mathcal{G}_n$. It suffices to show (58.2). When $n \ge k$, (58.2) is trivial, since $R_n = T$. When $n < k$, $R_n = \infty$, $T > T_{n+1} \Longrightarrow T_{n+1} < \infty \Longrightarrow R_n > T_{n+1}$. It remains to verify $T \le T_{n+1} \Longrightarrow T = R_n$. When $T = \infty$, it is trivial. But $[T < \infty, T \le T_{n+1}] = \emptyset$. In fact, if $n + 1 < k$, then $T < \infty$ and $T \le T_{n+1}$ are impossible, since $T \ge T_k$. If $n + 1 = k$, $T \le T_{n+1} \Longrightarrow T = T_k$, but $T_k < \infty \Longrightarrow T_k < T$. □

5.60 Corollary. *Suppose $\mathcal{G}_0$ is complete. For any $n \ge 1$, T_n is predictable if and only if $T_n \in \mathcal{G}_{n-1}$.*

Proof. Applying Theorem 5.58 to T_n yields the necessity: there is $R_{n-1} \in \mathcal{G}_{n-1}$ such that $T_n = R_{n-1}$. The sufficiency comes from Corollary 5.59 by taking $T = T_n$ and $k = n - 1$. □

5.61 Theorem. *Let T be a foretellable stopping time. Then for each*

$n \geq 0$

$$\mathcal{F}_{T-} \cap [T_n < T \leq T_{n+1}, T < \infty] = \mathcal{G}_n \cap [T_n < T \leq T_{n+1}, T < \infty]. \quad (61.1)$$

Proof. Since $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{T_n}$, $\mathcal{G}_n \cap [T_n < T] \in \mathcal{F}_{T-}$,

$$\mathcal{G}_n \cap [T_n < T \leq T_{n+1}] \subset \mathcal{F}_{T-} \cap [T_n < T \leq T_{n+1}].$$

Let $A \in \mathcal{F}_{T-}$. There is a predictable process $X = \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)} I_{]T_n, T_{n+1}]} + X_0 I_{[0]}$ such that $X_T I_{[T<\infty]} = I_A I_{[T<\infty]}$, $X^{(n)} \in \mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$. Hence

$$A[T_n < T \leq T_{n+1}, T < \infty] = [X^{(n)}_{R_n} I_{[R_n < \infty]} = 1][T_n < T \leq T_{n+1}, T < \infty],$$

$$\mathcal{F}_{T-} \cap [T_n < T \leq T_{n+1}, T < \infty] \subset \mathcal{G}_n \cap [T_n < T \leq T_{n+1}, T < \infty],$$

where $R_n \in \mathcal{G}_n$ is determined in Theorem 5.58. Then (61.1) follows. □

5.62 Theorem. *A stopping time T is totally inaccessible if and only if*

$$[T] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [T_n^i], \quad (62.1)$$

where T_n^i is the totally inaccessible part of T_n.

Proof. The sufficiency is easy: for any predictable time S

$$\boldsymbol{P}(T = S < \infty) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(T_n^i = S < \infty) = 0.$$

It remains to show the necessity. First, for each $n \geq 0$, T is foretellable on $[T_n < T < T_{n+1}]$. In fact, there exists $R_n \in \mathcal{F}_{T_n}$ satisfying (54.2). Put $S_k = T_n \vee \left(R_n - \frac{1}{k}\right)$, $k \geq 1$. Then $S_k \geq T_n$ and $S_k \in \mathcal{F}_{T_n}$, so S_k is a stopping time. On $[T_n < T < T_{n+1}]$, $S_k < T = R_n$, $k \geq 1$, and $S_k \uparrow T$. Hence if T is totally inaccessible, it must be $\boldsymbol{P}(T_n < T < T_{n+1}) = 0$, $n \geq 0$. On the other hand, $\boldsymbol{P}(T = T_n^a < \infty) = 0$, $n \geq 1$. (62.1) follows. □

5.63 Theorem. *A stopping time T is totally inaccessible if and only if*

i) *for all $n \geq 0$, $\boldsymbol{P}(T_n < T < T_{n+1}) = 0$,*

ii) *for all $n \geq 0$ and r.v. $R \in \mathcal{F}_{T_n}$, $\boldsymbol{P}(T = T_{n+1} = R < \infty) = 0$*

Proof. Necessity. i) has been proved in the previous theorem, similarly, it can be shown that T is foretellable on $[T = T_{n+1} = R < \infty]$. To this end, it suffices to take $S_k = T_n \vee \left(R - \frac{1}{k}\right)$. Then $(S_k)_{k \geq 1}$ foretells T on $[T = T_{n+1} = R < \infty]$. Hence $\boldsymbol{P}(T = T_{n+1} = R < \infty) = 0$.

Sufficiency. Suppose there exists a sequence $(S_k)_{k \geq 1}$ of stopping times such that $\boldsymbol{P}(A) > 0$, where $A = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty}[S_k < T]\right) \cap [S_k \uparrow T < \infty]$. By i) $\boldsymbol{P}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{P}(A[T = T_{n+1} < \infty])$, there is some $n \geq 0$ such that

$\boldsymbol{P}(A[T = T_{n+1} < \infty]) > 0$. For each $k \geq 1$ there exists $R_k \in \mathcal{F}_{T_n}$ such that $S_k < T_{n+1} \Longrightarrow S_k = R_k$. Put $R = \overline{\lim}_{k\to\infty} R_k \in \mathcal{F}_{T_n}$. On $A[T = T_{n+1} < \infty]$, $R = \overline{\lim}_{k\to\infty} R_k = \lim_{k\to\infty} S_k = T$, i.e., $A[T = T_{n+1} < \infty] \subset A[T = T_{n+1} = R < \infty]$. Hence $\boldsymbol{P}(A[T = T_{n+1} = R < \infty]) > 0$ contradicts ii). So T is totally inaccessible. □

5.64 Theorem. *Suppose $\mathcal{G}_0$ is complete. $(\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous if and only if*

i) *for each $n \geq 1$, T_n^a is predictable, where T_n^a is the accessible part of T_n,*

ii) *for each $n \geq 1$, $\mathcal{F}_{T_n^a} = \mathcal{F}_{T_n^a-}$.*

Proof. The necessity is obvious. We will show the sufficiency. Let T be a predictable time, and $A \in \mathcal{F}_T$. Then

$$A = (A[T = \infty]) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A[T_n^a = T < \infty]\right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A[T_n < T < T_{n+1}]\right) \text{ a.s.}$$

Evidently, $A[T = \infty] \in \mathcal{F}_{T-}$, $A[T = 0] \in \mathcal{F}_{T-}$. For $n \geq 1$

$$A[T_n^a = T < \infty] \in \mathcal{F}_T \cap [T_n^a = T < \infty] = \mathcal{F}_{T_n^a} \cap [T_n^a = T < \infty]$$
$$= \mathcal{F}_{T_n^a-} \cap [T_n^a = T < \infty] = \mathcal{F}_{T-} \cap [T_n^a = T < \infty].$$

Noting that $[T_n^a = T < \infty] \in \mathcal{F}_{T-}$, we have $A[T_n^a = T < \infty] \in \mathcal{F}_{T-}$.

By Theorem 5.56, $A[T_n < T < T_{n+1}] = A'[T_n < T < T_{n+1}]$, where $A' \in \mathcal{F}_{T_n}$. Thus $A'[T_n < T] \in \mathcal{F}_{T-}$. In order to show $A \in \mathcal{F}_{T-}$ it remains to verify $[T < T_{n+1}] \in \mathcal{F}_{T-}$:

$$[T < T_{n+1}] = [T < \infty] \setminus [T_{n+1} \leq T < \infty],$$
$$[T_{n+1} \leq T < \infty] = [T_{n+1}^i \leq T < \infty] \cup [T_{n+1}^a \leq T < \infty]$$
$$= [T_{n+1}^i < T < \infty] \cup [T_{n+1}^a \leq T < \infty] \text{ a.s.}$$
$$\in \mathcal{F}_{T-}. \quad □$$

5.65 Theorem. *Suppose $\mathcal{G}_0$ is complete. $(\mathcal{F}_t)$ is completely continuous if and only if*

i) *for each $n \geq 1$, T_n^a is predictable,*

ii) *for each $n \geq 1$, $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_0 \vee \sigma\{T_1, \cdots, T_n\}$.*

Proof. Necessity. i) is evident. By Corollary 5.57 for each $n \geq 1$

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_{T_n-} = \mathcal{G}_{n-1} \vee \sigma\{T_n\}.$$

ii) follows by induction.

Sufficiency. By ii) and Corollary 5.57 we have $\mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_{T_n-}$ immedi-

ately.

$$\mathcal{F}_{T_n^a} \cap [T_n^a < \infty] = \mathcal{F}_{T_n^a} \cap [T_n^a = T_n < \infty] = \mathcal{F}_{T_n} \cap [T_n^a = T_n < \infty]$$
$$= \mathcal{F}_{T_n-} \cap [T_n^a = T_n < \infty] = \mathcal{F}_{T_n^a-} \cap [T_n^a < \infty].$$

Clearly, $\mathcal{F}_{T_n^a} \cap [T_n^a = \infty] = \mathcal{F}_{T_n^a-} \cap [T_n^a = \infty]$ and $[T_n^a < \infty] \in \mathcal{F}_{T_n^a-}$, so we obtain $\mathcal{F}_{T_n^a} = \mathcal{F}_{T_n^a-}$. Similarly, $\mathcal{F}_{T_n^i} = \mathcal{F}_{T_n^i-}$.

Let T be a totally inaccessible time and $A \in \mathcal{F}_T \cap [T < \infty]$. By Theorem 5.62 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A[T = T_n^i < \infty])$ a.s.. For $n \geq 1$, $A[T = T_n^i < \infty] \in \mathcal{F}_{T_n^i} \cap [T_n^i < \infty] = \mathcal{F}_{T_n^i-} \cap [T = T_n^i < \infty] = \mathcal{F}_{T-} \cap [T = T_n^i < \infty]$. In order to obtain $A \in \mathcal{F}_{T-}$ it suffices to check $[T = T_n^i < \infty] \in \mathcal{F}_{T-}$:

$$[T = T_n^i < \infty] = [T_{n-1}^i < T \leq T_n^i][T < \infty] \in \mathcal{F}_{T-}.$$

Hence it follows that $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$.

By the previous theorem we have known that $(\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous. For any stopping time T, T^a is predictable, and

$$\mathcal{F}_T \cap [T^a < \infty] = \mathcal{F}_{T^a-} \cap [T^a < \infty].$$

In consequence,

$$\mathcal{F}_T \cap [T < \infty] = (\mathcal{F}_{T^a} \cap [T^a < \infty]) \cup (\mathcal{F}_{T^i} \cap [T^i < \infty])$$
$$= (\mathcal{F}_{T^a-} \cap [T^a < \infty]) \cap (\mathcal{F}_{T^i-} \cap [T^i < \infty])$$
$$= \mathcal{F}_{T-} \cap [T < \infty].$$

Finally, we have $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$. □

5.66 Lemma. *Let $\mathcal{H}$ be a sub-σ-field, and ξ be an integrable r.v.. Then for all $A \in \mathcal{F}$ and $H \in \mathcal{H}$*

$$\int_{AH} \xi dP = \int_{AH} \frac{E[\xi I_A|\mathcal{H}]}{E[I_A|\mathcal{H}]} dP. \tag{66.1}$$

Proof. Put $G = [E[I_A|\mathcal{H}] \neq 0]$. Then $G \in \mathcal{H}$ and

$$P(AG^c) = \int_{G^c} E[I_A|\mathcal{H}]dP = 0$$

Hence the integrand on the right-hand side of (66.1) makes sense. Now

$$\int_{AH} \frac{E[\xi I_A|\mathcal{H}]}{E[I_A|\mathcal{H}]} dP = \int_{AHG} \frac{E[\xi I_A|\mathcal{H}]}{E[I_A|\mathcal{H}]} dP = \int_{HG} \frac{E[\xi I_A|\mathcal{H}]}{E[I_A|\mathcal{H}]} I_A dP$$
$$= \int_{HG} E[\xi I_A|\mathcal{H}]dP = \int_{HG} \xi I_A dP = \int_{AH} \xi dP. \quad □$$

5.67 Theorem. *Let $W = (W_t)$ be a bounded measurable process. Then*

$$^oW_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E[W_t I_{[T_{n+1}>t]}|\mathcal{G}_n]}{E[I_{[T_{n+1}>t]}|\mathcal{G}_n]} I_{[T_n \leq t < T_{n+1}]}. \tag{67.1}$$

Moreover, suppose $\mathcal{G}_0$ is complete. Then

$$^pW_t = E[W_0|\mathcal{F}_0]I_{[t=0]} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E[W_t I_{[T_{n+1}\geq t]}|\mathcal{G}_n]}{EI_{[T_{n+1}\geq t]}|\mathcal{G}_n]} I_{[T_n < t \leq T_{n+1}]}. \tag{67.2}$$

Proof. For each $n \geq 0$ it is not difficult to choose $\mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$-measurable versions of $(E[W_t I_{[T_{n+1}>t]}|\mathcal{G}_n])$ and $(E[I_{[T_{n+1}>t]}|\mathcal{G}_n])$. By Theorem 5.55 ^oW defined by (67.1) is optional. It suffices to justify for any stopping time T

$$E[W_T I_{[T<\infty]}] = E[^oW_T I_{[T<\infty]}].$$

Let $R_n \in \mathcal{G}_n$ such that $T < T_{n+1} \Longleftrightarrow R_n < T_{n+1} \Longrightarrow T = R_n$. Using Lemma 5.66, we have

$$E[W_T I_{[T<\infty]}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[W_T I_{[T_n \leq T < T_{n+1}]}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[W_{R_n} I_{[T_n \leq R_n < T_{n+1}]}]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\Big\{\frac{E[W_{R_n} I_{[T_{n+1}>R_n]}|\mathcal{G}_n]}{E[I_{[T_{n+1}>R_n]}|\mathcal{G}_n]} I_{[T_n \leq R_n < T_{n+1}]}\Big\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\Big\{\frac{E[W_t I_{[T_{n+1}>t]}|\mathcal{G}_n]}{E[I_{[T_{n+1}>t]}|\mathcal{G}_n]}\Big|_{t=R_n} I_{[T_n \leq R_n < T_{n+1}]}\Big\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[^oW_{R_n} I_{[T_n \leq R_n < T_{n+1}]}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[^oW_T I_{[T_n \leq T < T_{n+1}]}]$$
$$= E[^oW_T I_{[T<\infty]}].$$

(67.2) can be proved in a similar way. □

5.68 Corollary. *Let ξ be an integrable r.v. and T be a stopping time.*

$$E[\xi|\mathcal{F}_T] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E[\xi I_{[T_{n+1}>T]}|\mathcal{G}_n]}{E[I_{[T_{n+1}>T]}|\mathcal{G}_n]} I_{[T_n \leq T < T_{n+1}]} + E[\xi|\mathcal{F}_\infty]I_{[T=\infty]} \quad a.s..$$

Moreover, if T is predictable and $\mathcal{G}_0$ is complete, on $[T < \infty]$

$$E[\xi|\mathcal{F}_{T-}] = E[\xi|\mathcal{F}_0]I_{[T=0]} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E[\xi I_{[T_{n+1}\geq T]}|\mathcal{G}_n]}{E[I_{[T_{n+1}\geq T]}|\mathcal{G}_n]} I_{[T_n < T \leq T_{n+1}]} \quad a.s..$$

5.69 Theorem. *Let A be an integrable increasing process. Then for each $n \geq 0$ there exist a modification $B^{(n)}$ of $(E[A_t^{T_{n+1}-}|\mathcal{G}_n])$ and a modification $C^{(n)}$ of $(E[A_t^{T_{n+1}}|\mathcal{G}_n])$ such that $B^{(n)}$ and $C^{(n)}$ all are integrable*

increasing processes. And we have

$$A_t^o = \int_{[0,t]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dB_s^{(n)}}{P[T_{n+1} > s|\mathcal{G}_n]} I_{[T_n \le s < T_{n+1}]}, \quad t \ge 0. \tag{69.1}$$

$$A_t^p = E[A_0|\mathcal{G}] + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dC_s^{(n)}}{P[T_{n+1} \ge s|\mathcal{G}_n]} I_{]T_n < s \le T_{n+1}]}, \quad t \ge 0. \tag{69.2}$$

Proof. We only deal with the predictable case. For every $r \in \boldsymbol{Q}_+$ take a version $\tilde{C}_r$ of $E[A_r^{T_{n+1}}|\mathcal{G}_n]$ such that $(\tilde{C}_r)_{r\in Q_+}$ is increasing. Put

$$C_t^{(n)} = \inf\{\tilde{C}_r : r > t, r \in \boldsymbol{Q}_+\}, \quad t \ge 0.$$

It is easy to see that $C^{(n)}$ satisfies the requirement, and for any non-negative $\mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$-measurable process H

$$E\Big[\int_{[0,\infty[} H_s dA_s^{T_{n+1}}\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty[} H_s dC_s^{(n)}\Big]. \tag{69.3}$$

At the same time, for every non-negative measurable process H we can take a $\mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ measurable version $\bar{H} = (\bar{H}_t)$ of $(E[H_t|\mathcal{G}_n])$, and

$$E\Big[\int_{[0,\infty[} H_s dC_s^{(n)}\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty[} \bar{H}_s dC_s^{(n)}\Big]. \tag{69.4}$$

(In fact, if we take a filtration $\boldsymbol{F}^{(n)} = (\mathcal{F}_t^{(n)})$ such that $\mathcal{F}_t^{(n)} \equiv \mathcal{G}_n$, $t \ge 0$, then the predictable σ-field of $\boldsymbol{F}^{(n)}$ is just $\mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$, and $C^{(n)}$ is the dual predictable projection of $A^{T_{n+1}}$ w.r.t. $\boldsymbol{F}^{(n)}$.)

Denote by $G_n(ds)$ the conditional distribution of T_{n+1} w.r.t. $\mathcal{G}_n$: $G_n([s,\infty]) = E[I_{[T_{n+1} \ge s]}|\mathcal{G}_n]$. Put $S_n = \inf\{t \ge 0 : G_n([t,\infty]) = 0\}$. Then $S_n \in \mathcal{G}_n$ and

$$P(T_{n+1} > S_n) = E[G_n(]S_n, \infty])] = 0.$$

i.e., $T_{n+1} \le S_n$ a.s.. Since $G_n([S_n,\infty]) = G_n(\{S_n\}) = E[I_{[T_{n+1}=S_n]}|\mathcal{G}_n]$, $G_n([S_n,\infty]) > 0$ a.s. on $[T_{n+1} = S_n]$. Hence A^p defined by (69.2) makes sense, and is a predictable increasing process.

Let H be a non-negative predictable process:

$$H = H_0 I_{[0]} + \sum_{n=0}^{\infty} H^{(n)} I_{]T_n, T_{n+1}]}, \quad H^{(n)} \in \mathcal{G}_n \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+).$$

Then

$$E\Big[\int_{[0,\infty[} H_s dA_s\Big] = E[H_0 A_0] + \sum_{n=0}^{\infty} E\int_{]T_n, T_{n+1}]} H_s^{(n)} dA_s^{T_{n+1}}$$

$$= E[H_0 E[A_0|\mathcal{F}_0]] + \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\int_{]0,\infty[} H_s^{(n)} I_{[T_n < s]} dC_s^{(n)}\Big] (\text{by } (69.3))$$

$$= E[H_0 A_0^p] + \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\int_{]0,\infty[} \frac{H_s^{(n)} I_{[T_n < s \le T_{n+1}]}}{G_n([s,\infty])} dC_s^{(n)}\Big]$$

$$(\text{by } (69.4) \text{ and } \int_{\{s: G_n([s,\infty])=0\}} dC_s^{(n)} = 0)$$

$$= E\Big[\int_{[0,\infty[} H_s dA_s^p\Big].$$

Therefore, A^p is the dual predictable projection of A. □

5.70 Example. Let $T > 0$ be a r.v. and $\mathcal{G} = \sigma\{T\} \vee \mathcal{N}$. Let

$$\mathcal{F}_t = (\mathcal{N} \cap [t < T]) \cup (\mathcal{G} \cap [T \le t]), \quad t \ge 0.$$

Then $(\mathcal{F}_t)$ is one of the simplest complete filtrations of discrete type. We claim

1) $S \ge 0$ is a stopping time if and only if there is a constant C (may be $+\infty$) such that $S_{[S<T]} = C_{[C<T]}$ a.s..

2) A stopping time S is predictable if and only if there is a constant C (may be $+\infty$) such that $S_{[S \le T]} = C_{[C \le T]}$ a.s.. In particular, T is predictable if and only if T is a.s. a constant.

3) $T^i = T_{[T \in B^c]}$, $T^a = T_{[T\in B]}$, where $B = \{b > 0 : P(T = b) > 0\}$.

4) A stopping time S is totally inaccessible if and only if $S = T_{[T\in A]}$ a.s., where $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ and $A \subset B^c$. In particular, T is totally inaccessible if and only if the distribution of T is continuous on $]0,\infty[$.

5) $(\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous if and only if there is a constant C (may be $+\infty$) such that $P(T > C) = 0$ and the distribution of T is continuous on $]0, C[$. In this case $(\mathcal{F}_t)$ is also completely continuous.

1) and 2) follow directly from Theorems 5.54 and 5.58 respectively. The total inaccessibility of T^i follows from Theorem 5.63. The accessibility of T^a is obvious. Then 4) follows from Theorem 5.62 and 3). In order to deduce 5) from Theorems 5.64 and 5.65 it suffices to show that T^a is predictable if and only if $B = \emptyset$ or $B = \{C\}$ and $P(T > C) = 0$. If $B = \emptyset$, $T^a = \infty$ is predictable trivially. If $B = \{C\}$ and $P(T > C) = 0$, $T^a = T_{[T=C]}$ satisfies the requirement in 2), and is predictable. Conversely, if T^a is predictable, there is a constant C satisfying the requirement in 2). If $C = \infty$, then $T < \infty \Longrightarrow T < T^a$ a.s., it must be $B = \emptyset$. If $C < \infty$, and $b \in B$, then $P(T = b) > 0$, $T = b \Longrightarrow T^a = T \ge C$

(since $T < C \Longrightarrow T < T^a$) and $T^a = C$ consequently. Hence $b = C$, i.e., $B = \{C\}$. On the other hand, if $T > C$, $T^a = T_{[T=C]} = \infty \neq C$. Hence $P(T > C) = 0$.

Problems and Complements

5.1 Let T be a stopping time, and ξ be an integrable r.v.. Put $X = \xi I_{[T]}$ and $Y = E[\xi|\mathcal{F}_T]I_{[T]}$. Then X and Y have the same optional projection.

5.2 Let T be a stopping time, and ξ be an integrable r.v..

1) The optional projection of $X = \xi I_{[0,T]}$ is $0 \Longleftrightarrow E[\xi|\mathcal{F}_{T-}]I_{[T>0]} = 0$.

2) The predictable projection of $Y = \xi I_{[0,T]}$ is $0 \Longleftrightarrow E[\xi|\mathcal{F}_{T-}] = 0$.

5.3 Let T be a stopping time, and ξ be an integrable $\mathcal{F}_T$-measurable r.v.. $X = \xi I_{[T,\infty[}$ is a martingale if and only if

$$E[\xi|\mathcal{F}_{T-}]I_{[0<T<\infty]} = 0.$$

5.4 Let X be a uniformly integrable cadlag martingale. Then for any predictable time T, $\Delta X_T I_{[T,\infty[}$ is a uniformly integrable martingale.

5.5 Let $N = (N_t)$ be a Poisson process with parameter λ. Then

$$N_t^p = \lambda t, \qquad {}^pN_t = N_{t-}, \qquad t \geq 0.$$

5.6 Let X be a bounded measurable process such that both X and ${}^oX$ are cadlag. Then

$${}^p(X_-) = ({}^oX)_-.$$

5.7 Let X be a bounded measurable process and $\alpha > 0$. Put $Y_t = \int_t^\infty {}^oX_s e^{-\alpha(s-t)}ds$, $t \geq 0$. Then $M_t = {}^oY_t - \int_0^t (\alpha {}^oY_s - {}^oX_s)ds$, $t \geq 0$, is a martingale.

5.8 Let X be a non-negative accessible process. If the predictable projection of X is evanescent, then so is X.

5.9 Let A be an adapted process with finite variation, and H be a progressive process, integrable w.r.t. A. Then ${}^oH$ is integrable w.r.t. A, and $({}^oH).A = H.A$.

5.10 Let H be an adapted measurable process. Then H has an optional modification.

5.11 Let T be a totally inaccessible time, $0 < T < \infty$. $A = I_{[T,\infty[}$. Then A_T^p is exponentially distributed with rate 1.

5.12 Let X be a cadlag supermartingale. Then there exists a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ such that for each n, X^{T_n} is of class (D).

5.13 Let X be a non-negative cadlag supermartingale, and

$$R_n = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq n\}, \qquad n \geq 1.$$

Then X is of class (D) if and only if

$$\lim_{n\to\infty} E[X_{R_n} I_{[R_n<\infty]}] = 0.$$

5.14 Let A be a predictable integrable increasing process with $A_0 = 0$, and Z be the potential generated by A. Then

$$E[A_\infty^2] = E[\int_0^\infty (Z_s + Z_{s-})dA_s].$$

($\frac{1}{2}E[A_\infty^2]$ is called the energy of A or Z.)

5.15 Let A and B be two predictable increasing processes null at 0, Y and Z be the potentials generated by A and B respectively. If $Y \leq Z$, then

$$E[A_\infty^2] \leq 4E[B_\infty^2].$$

5.16 Let X be a potential, and $T > 0$ be a stopping time. Then $(E[X_{T+t}|\mathcal{F}_t])$ is a potential of class (D).

5.17 Let $T > 0$ be a r.v. with distribution F, and $A = I_{[T,\infty[}$. Put

$$\mathcal{F}_t = (\mathcal{N} \cap [t < T]) \cup ((\mathcal{N} \vee \sigma\{T\}) \cap [T \leq t]), \quad t \geq 0.$$

Then the dual predictable projection of A is

$$\int_{]0,t\wedge T]} \frac{F(ds)}{F([s,\infty])}.$$

5.18 Let ϕ be a non-negative Borel function on R_+. Then the following statements are equivalent:

1) For any stopping time T defined on any probability space with a filtration, $\phi(T)$ is still a stopping time,

2) There exists $C \in \overline{R}_+$ such that

$$\phi(t) \begin{cases} = C, & \text{if} \quad t > C, \\ \geq t, & \text{if} \quad t \leq C. \end{cases}$$

5.19 Let T_n be the n-th jump time of Poisson process X. Then for $n \geq 1$, $T_{n-1} = \text{ess sup}\{S : S \text{ is an } F(X)\text{-stopping time and } S < T_n\}$. In particular, if S is an $F(X)$-stopping time and $S < T_1$, then $S = 0$ a.s..

5.20 Let T be an accessible time, and D be the debut of the predictable support of $[T]$. Put

$$A = \{S : S \text{ is a stopping time, } S \leq T \text{ and } S < T \text{ on } [T > 0]\}.$$

Then $D = \text{ess sup} A$.

Chapter VI

Martingales with Integrable Variation and Square Integrable Martingales

Beginning with this chapter, we start to develop modern theory of martingales and stochastic integrals. Unless otherwise stated, our starting point is always a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ with a filtration $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfying the usual conditions.

Hereinafter we use the following notations:

$\mathcal{A}$– the collection of all adapted processes with integrable variation,

$\mathcal{A}^+$ –the collection of all adapted integrable increasing processes,

$\mathcal{V}$—the collection of all adapted processes with finite variation,

$\mathcal{V}^+$ – the collection of all adapted increasing processes,

$\mathcal{M}$—the collection of all uniformly integrable martingales.

We stress that all the elements of $\mathcal{M}$ are supposed to be cadlag. Moreover, martingales always mean cadlag martingales.

For any class $\mathcal{D}$ of processes we denote by $\mathcal{D}_0$ the sub-class of $\mathcal{D}$ consisting of all elements of $\mathcal{D}$ with null initial values, e.g., $\mathcal{M}_0$ is the collection of all uniformly integrable martingales which are null at zero.

For any adapted process with locally integrable variation A we also denote by $\widetilde{A}$ the dual predictable projection or compensator of A. The process $A - \widetilde{A}$ is called the *compensation* of A.

§1. Martingales with Integrable Variation

6.1 Definition. $X = (X_t)$ is called a *martingale with integrable variation*, if it is both a martingale and a process with integrable variation.

Obviously, a martingale with integrable variation is a uniformly integrable martingale. Denote by $\mathcal{W}$ the collection of all martingales with integrable variation. Hence, $\mathcal{W} = \mathcal{M} \cap \mathcal{A}$.

From Corollary 5.31 we know that for every $A \in \mathcal{A}$, $A - \widetilde{A} \in \mathcal{W}_0$. The next theorem illustrates that this is the general form of all elements of $\mathcal{W}_0$.

6.2 Theorem. *Let M be a martingale with integrable variation. Put*

$$A_t = \sum_{0<s\leq t} \Delta M_s, \quad t \geq 0.$$

Then A is an adapted process with integrable variation having continuous compensator $\widetilde{A}$, and

$$M = M_0 + A - \widetilde{A}. \tag{2.1}$$

Moreover, for any predictable process $H = (H_t)$ we have

$$\boldsymbol{E}\Big[\int_{]0,\infty[} |H_s||dM_s|\Big] \leq 2\boldsymbol{E}\Big[\sum_{s>0} |H_s||\Delta M_s|\Big]. \tag{2.2}$$

Proof. Put $D_t = M_t - M_0$, $t \geq 0$. Then $D = (D_t) \in \mathcal{W}_0$ and

$$D = D^c + D^d = D^c + A.$$

Because $D \in \mathcal{M}_0$, by Corollary 5.31 we know that $\widetilde{A} = -D^c$. Hence, $\widetilde{A}$ is continuous, and (2.1) holds. (2.2) can be easily deduced from Theorem 5.22.2). □

6.3 Theorem. 1) *All predictable uniformly integrable martingales are continuous.*

2) *If M is a predictable martingale with integrable variation, then $M_t \equiv M_0$.*

Proof. 1) Let $M \in \mathcal{M}$. If M is predictable, then for any predictable time T, $M_T \in \mathcal{F}_{T-}$, and by Theorem 4.41,

$$M_T = \boldsymbol{E}[M_T|\mathcal{F}_{T-}] = M_{T-},$$

i.e., M and M_- are indistinguishable. So M is continuous.

2) If M is a predictable martingale with integrable variation, then by Corollary 5.31, $M = \widetilde{M}$, $\widetilde{M}_t \equiv M_0$. □

The following theorem is the key result concerning martingales with integrable variation.

6.4 Theorem. *Let M be a martingale with integrable variation. Then for any bounded martingale N we have*

$$\boldsymbol{E}[M_\infty N_\infty] = \boldsymbol{E}[M_0 N_0] + \boldsymbol{E}\Big[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s\Big]. \tag{4.1}$$

In addition, $(L_t) = (M_t N_t - \sum_{s\leq t} \Delta M_s \Delta N_s)$ is a uniformly integrable martingale.

Proof. Since N is the optional projection of N_∞,

$$E[M_\infty N_\infty] = E\Big[\int_{[0,\infty]} N_\infty dM_s\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty]} N_s dM_s\Big].$$

On the other hand, $\overline{M}_t \equiv M_0$:

$$E\Big[\int_{[0,\infty]} N_{s-} dM_s\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty]} N_{s-} d\overline{M}_s\Big] = E[M_0 N_0].$$

Hence

$$E[M_\infty N_\infty] - E[M_0 N_0] = E\Big[\int_{[0,\infty]} \Delta N_s dM_s\Big] = E\Big[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s\Big].$$

Let T be a stopping time. Applying (4.1) to N^T yields

$$E[M_T N_T] = E[M_\infty N_T] = E[M_0 N_0] + E\Big[\sum_{0<s\le T} \Delta M_s \Delta N_s\Big],$$

i.e., $E[L_T] = E[L_0]$. By Theorem 4.40 we know $L \in \mathcal{M}$. □

The next theorem illuminates the special role of predictable processes in the theory of stochastic integrals.

6.5 Theorem. *Let M be a martingale with integrable variation, and H be a predictable process such that*

$$E\Big[\int_{[0,\infty]} |H_s||dM_s|\Big] < \infty.$$

Then $H.M$ is a martingale with integrable variation.

Proof. By Theorem 5.23.2) we have

$$(\overline{H.M}) = H.\overline{M} = H_0 M_0.$$

Hence $H.M - (\overline{H.M}) = H.M - H_0 M_0 \in \mathcal{W}_0$, $H.M \in \mathcal{W}$. □

§2. Square Integrable Martingales

6.6 Definition. A martingale M is called a *square integrable martingale*, if $\sup_t E[M_t^2] < \infty$. Denote by $\mathcal{M}^2$ the collection of all square integrable martingales. By Theorem 1.7.2), $\mathcal{M}^2 \subset \mathcal{M}$.

6.7 Theorem. *Let M be a square integrable martingale. Then for any $\lambda > 0$ we have*

$$P\Big(\sup_t |M_t| \ge \lambda\Big) \le \frac{1}{\lambda^2} \sup_t E[M_t^2]. \qquad (7.1)$$

Proof. Let $\{t_1, t_2, \cdots\}$ be a countable dense set of R_+. By Corollary 2.13 we have

$$P\Big(\sup_{j\le n} |M_{t_j}| > \lambda\Big) \le \frac{1}{\lambda^2} \sup_t E[M_t^2].$$

Since $\big[\sup_t |M_t| > \lambda\big] = \bigcup_{n=1}^\infty \big[\sup_{j\le n} |M_{t_j}| > \lambda\big]$ and $\Big(\big[\sup_{j\le n} |M_{t_j}| > \lambda\big]\Big)_{n\ge 1}$ is monotone increasing,

$$P\Big(\sup_t |M_t| > \lambda\Big) \le \frac{1}{\lambda^2} \sup_t E[M_t^2]. \qquad (7.2)$$

Replacing λ by $\lambda - \varepsilon$ in (7.2) and letting $\varepsilon \downarrow 0$ give (7.1). □

(7.1) is called *Kolmogorov inequality* as usual.

6.8 Theorem. 1) *Let $M \in \mathcal{M}$. Then $M \in \mathcal{M}^2$ if and only if $E[M_\infty^2] < \infty$. In this case, we have*

$$E[M_\infty^2] = \sup_t E[M_t^2]. \qquad (8.1)$$

2) *$\mathcal{M}^2$, endowed with inner product $(M, N) = E[M_\infty N_\infty]$, is a Hilbert space, isomorphic to $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ by the mapping: $M \mapsto M_\infty$.*

Proof. 1) Let $M \in \mathcal{M}^2$. By Fatou's lemma we have

$$E[M_\infty^2] \le \sup_t E[M_t^2]. \qquad (8.2)$$

Conversely, let $M \in \mathcal{M}$ and $E[M_\infty^2] < \infty$. Since $M_t = E[M_\infty | \mathcal{F}_t]$, by Jensen's inequality, we have $M_t^2 \le E[M_\infty^2 | \mathcal{F}_t]$. Then

$$\sup_t E[M_t^2] \le E[M_\infty^2]. \qquad (8.3)$$

This implies $M \in \mathcal{M}^2$. (8.1) follows from (8.2) and (8.3).

2) is evident. □

6.9 Theorem. *Let $(M^n)_{n\ge 1} \subset \mathcal{M}^2$, $M \in \mathcal{M}^2$. If*

$$\lim_{n\to\infty} \|M^n_\infty - M_\infty\|_2 = \lim_{n\to\infty} \{E[(M^n_\infty - M_\infty)^2]\}^{1/2} = 0,$$

there exists a subsequence $(M^{n_k}, k \ge 1)$ such that for almost all ω, $(M_t^{(n_k)}(\omega))_{k\ge 1}$ converges to $M_t(\omega)$ uniformly in t.

Proof. Take a subsequence $(M^{n_k})_{k\ge 1}$ such that $\sum_{k=1}^\infty \|M^{n_k}_\infty - M_\infty\|_2 < \infty$. By Doob's inequality we have

$$E\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\sup_t|M_t^{n_k}-M_t|\Big]=\sum_{k=1}^{\infty}E\Big[\sup_t|M_t^{n_k}-M_t|\Big]$$
$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{E\Big[\sup_t(M_t^{n_k}-M_t)^2\Big]\Big\}^{1/2}$$
$$\le 2\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{E\Big[(M_\infty^{n_k}-M_\infty)^2\Big]\Big\}^{1/2}<\infty.$$

In particular, $\sum_{k=1}^{\infty}\sup_t|M_t^{n_k}-M_t|<\infty$ a.s.. This implies that for almost all ω, $(M_t^{n_k}(\omega))_{k\ge1}$ converges to $M_t(\omega)$ uniformly in t. □

6.10 Corollary. *Denote by $\mathcal{M}^{2,c}$ the collection of all continuous square integrable matingales. Then $\mathcal{M}^{2,c}$ is a closed subspace of $\mathcal{M}^2$.*

6.11 Theorem. 1) *Let $M\in\mathcal{M}^2$. Then for any stopping time T, $M^T\in\mathcal{M}^2$. Furthermore, if $(T_n)_{n\ge1}$ is a sequence of stopping times with $T_n\uparrow\infty$ a.s., then $M_{T_n}\xrightarrow{L^2}M_\infty$.*

2) *Let $(M^n)_{n\ge1}\subset\mathcal{M}^2$, $M\subset\mathcal{M}^2$. If $\|M_\infty^n-M_\infty\|_2\to0$, then for any stopping time T, $\|M_T^n-M_T\|_2\to0$.*

Proof. 1) At first, by Theorem 4.39 we know $M^T\in\mathcal{M}$. On the other hand

$$E[M_T^2]\le E\Big[\Big(\sup_t|M_t|\Big)^2\Big]\le4\sup_t E[M_t^2]<\infty,$$

by Theorem 6.8.1) we obtain $M^T\in\mathcal{M}^2$.

Let (T_n) be a sequence of stopping times with $T_n\uparrow\infty$ a.s.. By Doob's stopping theorem, $(M_{T_n})_{n\ge1}$ is a square integrable martingale w.r.t. $(\mathcal{F}_{T_n})_{n\ge1}$. By Corollary 2.20, $M_{T_n}\xrightarrow{L^2}M_\infty$.

2) Since $(M^n-M)^2$ is a submartingale, we have

$$E[(M_T^n-M_T)^2]\le E[(M_\infty^n-M_\infty)^2].$$

Then 2) follows immediately. □

6.12 Definition. Let M and N be two square integrable martingales. We say that M and N are *mutually orthogonal*, if $M_0N_0=0$ a.s. and for every stopping time T, $E[M_TN_T]=0$, and denote it by $M\perp\!\!\!\perp N$. The notation $M\perp N$ is reserved for orthogonality between M and N as two elements in the Hilbert space $\mathcal{M}^2$, i.e., $E[M_\infty N_\infty]=0$. In order to distinguish the two kinds of orthogonality, we call the latter *weak orthogonality*.

6.13 Theorem. *Let $M,N\in\mathcal{M}^2$ and $M_0N_0=0$. Then M and N are mutually orthogonal if and only if MN is a martingale.*

Proof. The necessity can be deduced directly from Theorem 4.40. Now we show the sufficiency. Let MN be a martingale. Because $\sup_t|M_t|\in L^2$ and $\sup_t|N_t|\in L^2$, we have $\sup_t|M_tN_t|\in L^1$. Hence MN is a uniformly integrable martingale. For every stopping time T, $E[M_TN_T]=E[M_0N_0]=0$, i.e., $M\perp\!\!\!\perp N$. □

6.14 Theorem. *Let $\mathcal{X}\subset\mathcal{M}^2$ and $\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$ be the closed linear subspace generated by $\mathcal{X}$. Let $N\in\mathcal{M}^2$. If $N\perp\!\!\!\perp\mathcal{X}$, then $N\perp\!\!\!\perp\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$.*

Proof. It is obvious that $N\perp\!\!\!\perp\mathcal{L}(\mathcal{X})$, where $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ is the linear subspace generated by $\mathcal{X}$. Let $M\in\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$. Take $(M^n)\subset\mathcal{L}(\mathcal{X})$ such that $\|M_\infty^n-M_\infty\|_2\to0$. By Theorem 6.11, for any stopping time T, $M_T^n\xrightarrow{L^2}M_T$, and $M_T^nN_T\xrightarrow{L^1}M_TN_T$. Hence $M_0N_0=0$ a.s. and $E[M_TN_T]=0$, i.e., $M\perp\!\!\!\perp N$. Therefore, $N\perp\!\!\!\perp\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$. □

6.15 Definition. A family of measurable processes $\mathcal{X}$ is said to be *stable*, if

i) for every stopping time T, $M\in\mathcal{X}\Longrightarrow M^T\in\mathcal{X}$,

ii) for every $A\in\mathcal{F}_0$, $M\in\mathcal{X}\Longrightarrow I_AM\in\mathcal{X}$.

Stable closed linear subspaces of $\mathcal{M}^2$ are simply called *stable subspaces* of $\mathcal{M}^2$.

6.16 Theorem. *Let $\mathcal{X}\subset\mathcal{M}^2$. If $\mathcal{X}$ is stable, then $\mathcal{X}^\perp$ and $\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$ are stable subspaces, and $\mathcal{X}^\perp\perp\!\!\!\perp\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$, where*

$$\mathcal{X}^\perp=\{M\in\mathcal{M}^2:\forall N\in\mathcal{X},M\perp N\}.$$

Proof. Let $N\in\mathcal{X}^\perp$, $M\in\mathcal{X}$. For every stopping time T, $M^T\in\mathcal{X}$. Thus

$$E[M_\infty N_\infty^T]=E[M_\infty N_T]=E[M_TN_T]=E[M_\infty^TN_\infty]=0.$$

This means $N^T\in\mathcal{X}^\perp$. On the other hand, if $A\in\mathcal{F}_0$, then $I_AM\in\mathcal{X}$, and $E[I_AN_\infty M_\infty]=0$. Consequently, $I_AN\in\mathcal{X}^\perp$. Therefore, $\mathcal{X}^\perp$ is a stabe subspace. So is $\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}=(\mathcal{X}^\perp)^\perp$.

Now let $M\in\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$ and $N\in\mathcal{X}^\perp$. For every stopping time T we have $M^T\in\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$ and $N^T\subset\mathcal{X}^\perp$. Then $E[M_TN_T]=E[M_\infty^TN_\infty^T]=0$. Furthermore, for every $A\in\mathcal{F}_0$ we have $I_AM^T\in\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$, $E[I_AM_TN_T]=0$. Especially, taking $T=0$, we obtain $M_0N_0=0$ a.s.. This means $M\perp\!\!\!\perp N$. □

6.17 Corollary. Let $\mathcal{M}^{2,d}=(\mathcal{M}^{2,c})^\perp$. Then $\mathcal{M}^{2,c}$ and $\mathcal{M}^{2,d}$ are stable subspaces, and $\mathcal{M}^{2,c}\perp\!\!\!\perp\mathcal{M}^{2,d}$.

6.18 Definition. The elements of $\mathcal{M}^{2,d}$ are called *purely discontinuous square integrable martingales.*

Let $M \in \mathcal{M}^{2,d}$. It is evident that $M_0 = 0$ a.s.[1]

Let $M \in \mathcal{M}^2$. By Corollary 6.17, M can be uniquely decomposed as follows:

$$M = M_0 + M^c + M^d,$$

where $M^c \in \mathcal{M}_0^{2,c}$, $M^d \in \mathcal{M}^{2,d}$. M^c is called the *continuous martingale part* of M, and M^d is called the *purely discontinuous martingale part* of M.

Let $M \in \mathcal{M}^2$ and T be a stopping time. Obviously, we have

$$(M^T)^c = (M^c)^T; \quad (M^T)^d = (M^d)^T.$$

§3. The Structure of Purely Discontinuous Square Integrable Martingales

6.19 Lemma. *Let $A \in \mathcal{A}^+$. Then*

$$E[\tilde{A}_\infty^2] \leq 4E[A_\infty^2].$$

Proof. Let $N = (N_t)$ be the cadlag modification of the martingale $(E[A_\infty|\mathcal{F}_t])$, $N_\infty^* = \sup_t |N_t|$. By Doob's inequality,

$$E[(N_\infty^*)^2] \leq 4E[N_\infty^2] = 4E[A_\infty^2].$$

Because $A - \tilde{A} \in \mathcal{M}$, we have

$$A_s - \tilde{A}_s = E[A_\infty - \tilde{A}_\infty|\mathcal{F}_s] = N_s - E[\tilde{A}_\infty|\mathcal{F}_s].$$

Then by Theorem 5.13,

$$\begin{aligned}
E[\tilde{A}_\infty^2] &= E\Big[\int_{[0,\infty[} \tilde{A}_\infty d\tilde{A}_s\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty[} E[\tilde{A}_\infty|\mathcal{F}_{s-}]d\tilde{A}_s\Big] \\
&= E\Big[\int_{[0,\infty[} (\tilde{A}_{s-} - A_{s-} + N_{s-})d\tilde{A}_s\Big] \\
&= E\Big[\int_{[0,\infty[} (\tilde{A}_{s-} - A_{s-} + N_{s-})dA_s\Big] \\
&\leq E[\tilde{A}_\infty A_\infty + N_\infty^* A_\infty].
\end{aligned}$$

[1] It should be stressed that in many literatures $\mathcal{M}^{2,c}$ is used for the space of all continuous square integrable martingales with initial values zero, and the initial values of purely discontinuous square integrable martingales need not be null.

But

$$E[\tilde{A}_\infty A_\infty] = E\Big[\int_{[0,\infty[} A_\infty d\tilde{A}_s\Big] = E\Big[\int_{[0,\infty[} N_{s-} dA_s\Big] \leq E[N_\infty^* A_\infty].$$

Hence we have

$$E[\tilde{A}_\infty^2] \leq 2E[N_\infty^* A_\infty] \leq 2\{E[(N_\infty^*)^2]E[A_\infty^2]\}^{1/2} \leq 4E[A_\infty^2]. \quad \square$$

6.20 Lemma. *Let $M \in \mathcal{M}^2$. Then for every stopping time T,*

$$E[(\Delta M_T)^2] \leq 16E[M_\infty^2].$$

Proof. Put $M_\infty^* = \sup_t |M_t|$. By Doob's inequality

$$E[(M_\infty^*)^2] \leq 4E[M_\infty^2] < \infty.$$

Since $|\Delta M_T| \leq 2M_\infty^*$, $E[(\Delta M_T)^2] \leq 16E[M_\infty^2]$. $\square$

Now we start to study the structure of purely discontinuous square integrable martingales.

Let $T > 0$ be a stopping time. Put

$$\mathcal{M}^2[T] = \{M \in \mathcal{M}^{2,d} : [\Delta M \neq 0] \subset [T]\}.$$

Obviously, $\mathcal{M}^2[T]$ is a stable subspace.

6.21 Theorem. *Let $T > 0$ be a totally inaccessible time or predictable time.*

1) $M \in \mathcal{M}^2[T] \iff M = A - \tilde{A}$, *where* $A = \xi I_{[T,\infty[}$, $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$.

2) *Let $M \in \mathcal{M}^2[T]$. For all $N \in \mathcal{M}^2$ we have*

$$E[M_\infty N_\infty] = E[\Delta M_T \Delta N_T]. \tag{21.1}$$

3) *Let $M \in \mathcal{M}^2$. The (orthogonal) projection of M onto $\mathcal{M}^2[T]$ is $N = A - \tilde{A}$, where $A = \Delta M_T I_{[T,\infty[}$.*

Proof 1) Sufficiency. Let $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$, $A = \xi I_{[T,\infty[}$. By Lemma 6.19, $A - \tilde{A} \in \mathcal{M}^2$. If T is a totally inaccessible time, then $\tilde{A}$ is continuous (Corollary 5.28.3)). If T is a predictable time, then $\tilde{A} = E[\xi|\mathcal{F}_{T-}]I_{[T,\infty[}$ (Theorem 5.29.2)). In both cases, $A - \tilde{A}$ is continuous outside $[T]$. What remains is to show $A - \tilde{A} \in \mathcal{M}^{2,d}$. Let $N \in \mathcal{M}^{2,c}$. Put

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |N_t| \geq n\}.$$

Then $T_n, n \geq 1$, are stopping times, and $T_n \uparrow +\infty$. For each n, N^{T_n} is a bounded continuous martingale. By Theorem 6.4,

$$E[(A - \tilde{A})_\infty N_{T_n}] = E[(A - \tilde{A})_\infty N_\infty^{T_n}] = 0.$$

By Theorem 6.11.1), $E[(A - \tilde{A})_\infty N_\infty] = 0$. This means $A - \tilde{A} \in \mathcal{M}^{2,c}$. Hence $A - \tilde{A} \in \mathcal{M}^2[T]$.

Necessity. Let $M \in \mathcal{M}^2[T]$. Put $A = \Delta M_T I_{[T,\infty[}$. As shown above, $A - \widetilde{A} \in \mathcal{M}^2[T]$. Then $M - (A - \widetilde{A}) \in \mathcal{M}^2[T]$. On the other hand, if T is a totally inaccessible time, $\widetilde{A}$ is continuous, and $\Delta(A - \widetilde{A})_T = \Delta A_T = \Delta M_T$. If T is a predictable time, $\widetilde{A} = E[\Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}] I_{[T,\infty[} = 0$ (Theorem 4.41), and $\Delta(A - \widetilde{A})_T = \Delta M_T$. This means $M - (A - \widetilde{A}) \in \mathcal{M}^{2,c}$. Hence $M - (A - \widetilde{A}) = 0$, i.e., $M = A - \widetilde{A}$.

2) Let $N^{(n)}$ be the cadlag modification of bounded martingale $(E[N_\infty I_{[|N_\infty| \le n]} | \mathcal{F}_t])$. By Theorem 6.4,

$$E[M_\infty N_\infty^{(n)}] = E[\Delta M_T \Delta N_T^{(n)}]. \tag{21.2}$$

Since $N_\infty^{(n)} = N_\infty I_{[|N_\infty| \le n]} \xrightarrow{L^2} N_\infty$ as $n \to \infty$, by Lemma 6.20, $\Delta N_T^{(n)} \xrightarrow{L^2} \Delta N_T$ as $n \to \infty$. Letting $n \to \infty$ in (21.2) yields (21.1).

3) From 1) we know that $N = A - \widetilde{A} \in \mathcal{M}^2[T]$ and $M - N$ has no jump on $[T]$. By 2), $M - N \perp \mathcal{M}^2[T]$. This implies that N is the projection of M onto $\mathcal{M}^2[T]$. □

The following theorem describes the structure of purely discontinuous square integrable martingales.

6.22 Theorem. 1) *Let $M \in \mathcal{M}^2$. Then*

$$E[M_0^2] + E\Big[\sum_s (\Delta M_s)^2\Big] \le E[M_\infty^2]. \tag{22.1}$$

Equality holds in (22.1) if and only if $M - M_0 \in \mathcal{M}^{2,d}$.

2) *Let $M \in \mathcal{M}^{2,d}$ and $(T_n)_{n \ge 1}$ be a standard sequence of stopping times exhausting the jumps of M (see Theorem 4.21). Denote by M^n the projection of M onto $\mathcal{M}^2[T_n]$ (i.e., M^n is the compensation of $\Delta M_{T_n} I_{[T_n,\infty[}$). Then the orthogonal series $\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ converges to M in $\mathcal{M}^2$.*

3) *Let $M \in \mathcal{M}^{2,d}$. M has a unique decomposition as follows:*

$$M = M^{da} + M^{di},$$

where $M^{da} \in \mathcal{M}^{2,d}$ has only accessible jumps, and $M^{di} \in \mathcal{M}^{2,d}$ has only totally inaccessible jumps.

Proof. 1) Let $(T_n)_{n \ge 1}$ be a standard sequence of stopping times exhausting the jumps of M. Put

$$A^n = \Delta M_{T_n} I_{[T_n,\infty[}, \quad M^n = A^n - \widetilde{A}^n, \quad H^k = \sum_{n=1}^{k} M^n.$$

Then $M - M_0 - H^k$ has no jump on $[T_1] \cup \cdots \cup [T_k]$. By (21.1), $M - M_0 - H^k$ is weakly orthogonal to H^k. But $M^1, \cdots, M^k$ are mutually weakly

orthogonal,

$$\begin{aligned} E[M_\infty^2] &= E[M_0^2] + E[(H_\infty^k)^2] + E[(M_\infty - M_0 - H_\infty^k)^2] \\ &= E[M_0^2] + \sum_{n=1}^{k} E[(M_\infty^n)^2] + E[(M_\infty - M_0 - H_\infty^k)^2]. \end{aligned}$$

By (21.1) $E[(M_\infty^n)^2] = E[(\Delta M_{T_n})^2]$, hence

$$E[M_\infty^2] = E[M_0^2] + \sum_{n=1}^{k} E[(\Delta M_{T_n})^2] + E[(M_\infty - M_0 - H_\infty^k)^2]. \tag{22.2}$$

In particular, the orthogonal series $\sum_1^\infty M^n$ converges to an element H in $\mathcal{M}^2$, and $H \in \mathcal{M}^{2,d}$. Moreover, by Theorem 6.9, H and M have the same jumps. Thus $M - H$ is a continuous square integrable martingale, and $M^d = H$, $M^c = M - M_0 - H$. By (22.2) we have

$$\begin{aligned} E[M_\infty^2] &= E[M_0^2] + \sum_{n=1}^{\infty} E[(\Delta M_{T_n})^2] + E[(M_\infty^c)^2] \\ &= E[M_0^2] + E\sum_s (\Delta M_s)^2 + E[(M_\infty^c)^2]. \end{aligned}$$

Hence (22.1) holds, and equality holds in (22.1) if and only if $M^c = 0$, i.e., $M - M_0 = M^d \in \mathcal{M}^{2,d}$.

Proof 2) has been included in the above proof 1).

3) Let $(T_n)_{n \ge 1}$ be a standard sequence of stopping times exhausting the jumps of M. Put $N_1 = \{n : T_n \text{ is predictable}\}$, $N_2 = \{n : T_n \text{ is totally inaccessible}\}$, and

$$M^{da} = \sum_{n \in N_1} M^n, \quad M^{di} = \sum_{n \in N_2} M^n,$$

where M^n is the compensation of $\Delta M_{T_n} I_{[T_n,\infty[}$. By Theorem 6.9 we know that M^{da} has only accessible jumps and M^{di} has only totally inaccessible jumps. By 2) we have $M = M^{da} + M^{di}$. The uniqueness of the decomposition is easy to prove (see the proof of Theorem 4.25). □

6.23 Theorem. 1) *Let $M, N \in \mathcal{M}^2$. Then*

$$E|M_0 N_0| + E\Big[\sum_s |\Delta M_s \Delta N_s|\Big] \le \sqrt{E[M_\infty^2]}\sqrt{E[N_\infty^2]}. \tag{23.1}$$

2) *Let $M \in \mathcal{M}^{2,d}$. Then for any $N \in \mathcal{M}^2$*

$$E[M_\infty N_\infty] = E\Big[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s\Big] \tag{23.2}$$

Moreover, $(L_t) = (M_t N_t - \sum_{s \le t} \Delta M_s \Delta N_s)$ is a uniformly integrable martingale.

3) $\mathcal{M}_0^2 \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{M}^{2,d}$.

Proof. 1) By Schwarz inequality we have

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}[|M_0N_0|] + \boldsymbol{E}\Big[\sum_s |\Delta M_s \Delta N_s|\Big] \\ &\quad \leq \{\boldsymbol{E}[M_0^2] + \boldsymbol{E}\sum_s (\Delta M_s)^2\}^{1/2}\{\boldsymbol{E}[N_0^2] + \boldsymbol{E}\sum_s (\Delta N_s)^2\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{23.3}$$

(23.1) follows from (23.3) and (22.1).

2) At first we assume $N \in \mathcal{M}^{2,d}$. By Theorem 6.22.1),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}[M_\infty N_\infty] &= \frac{1}{2}\{\boldsymbol{E}[(M_\infty + N_\infty)^2] - \boldsymbol{E}[M_\infty^2] - \boldsymbol{E}[N_\infty^2]\} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\Big[\sum_s (\Delta M_s + \Delta N_s)^2 - \sum_s (\Delta M_s)^2 - \sum_s (\Delta N_s)^2\Big] \\ &= \boldsymbol{E}\Big[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s\Big]. \end{aligned}$$

Hence (23.2) holds for $N \in \mathcal{M}^{2,d}$. Now assume $N \in \mathcal{M}^2$. Let N^d be the purely discontinuous martingale part of N. Then $N - N^d \in \mathcal{M}^{2,c}$, $M \perp\!\!\!\perp N - N^d$, and $\boldsymbol{E}[M_\infty(N_\infty - N_\infty^d)] = 0$. Thus

$$\boldsymbol{E}[M_\infty N_\infty] = \boldsymbol{E}[M_\infty N_\infty^d] = \boldsymbol{E}\Big[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s\Big].$$

(23.2) holds.

Let T be a stopping time. Applying (23.2) to M^T and N^T yields $\boldsymbol{E}[L_T] = 0$. By Theorem 4.40, (L_t) is a uniformly integrable martingale.

3) Let $M \in \mathcal{M}_0^2 \cap \mathcal{W}$. By Theorem 6.4, for any bounded martingale N we have

$$\boldsymbol{E}[M_\infty N_\infty] = \boldsymbol{E}\Big[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s\Big]. \tag{23.4}$$

Since the set of all bounded martingales is dense in $\mathcal{M}^2$ w.r.t. the norm $\|M\| = \sqrt{\boldsymbol{E}[M_\infty^2]}$, by (23.1) we know that (23.4) holds for all $N \in \mathcal{M}^2$. In particular, taking $N = M$, we have

$$\boldsymbol{E}[M_\infty^2] = \boldsymbol{E}\Big[\sum_s (\Delta M_s)^2\Big].$$

Noting that $M_0 = 0$, by Theorem 6.22.1) we know $M \in \mathcal{M}^{2,d}$. □

§4. Quadratic Variation

6.24 Definition. Let $M \in \mathcal{M}^2$. By Doob's inequality we know $M_\infty^* = \sup_t |M_t| \in L^2$. Hence M^2 is a submartingale of class (D). By Doob-Meyer decomposition theorem, there exists a unique predictable integrable increasing proess, denoted by $\langle M, M\rangle$ or simply $\langle M\rangle$, such that $M^2 - \langle M\rangle \in \mathcal{M}_0$. $\langle M\rangle$ is called the ***predictable quadratic variation*** or the ***angle bracket process*** of M.

Let $M, N \in \mathcal{M}^2$. Put

$$\langle M, N\rangle = \frac{1}{2}[\langle M + N\rangle - \langle M\rangle - \langle N\rangle].$$

It is called the ***predictable quadratic covariation*** of M and N.

Remark. Let $M \in \mathcal{M}^2$. Then $\langle M\rangle = 0$ if and only if $M = 0$. By Theorem 5.50 we know that if M is quasi-left-continuous, then $\langle M\rangle$ is continuous.

6.25 Example. Suppose $M = (M_t)$ is a process with independent increments and $\boldsymbol{E}[M_t] = a$ is a constant. Then M is a martingale. Furthermore, suppose M is a square integrable martingale. Then by Theorem 2.69, $M_t^2 - (M_0^2 + \boldsymbol{E}[M_t^2] - \boldsymbol{E}[M_0^2]) \in \mathcal{M}_0$. Hence $\langle M\rangle_t = M_0^2 + \boldsymbol{E}[M_t^2] - \boldsymbol{E}[M_0^2]$. In particular, if $M_0 = a$, then $\langle M\rangle_t = \boldsymbol{E}[M_t^2]$ is non-random.

Remark. If $M \in \mathcal{M}^2$, then M has orthogonal increments: for $t_1 < t_2 < t_3$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}[(M_{t_3} - M_{t_2})(M_{t_2} - M_{t_1})|\mathcal{F}_{t_2}] \\ &\qquad\qquad = (M_{t_2} - M_{t_1})\boldsymbol{E}[M_{t_3} - M_{t_2}|\mathcal{F}_{t_2}] = 0 \quad \text{a.s.}, \\ &\boldsymbol{E}[(M_{t_3} - M_{t_2})(M_{t_2} - M_{t_1})] = 0. \end{aligned}$$

The following theorem gives a characterization for $\langle M, N\rangle$.

6.26 Theorem. *Let $M, N \in \mathcal{M}^2$. Then $\langle M, N\rangle$ is the unique predictable process with integrable variation such that $MN - \langle M, N\rangle \in \mathcal{M}_0$.*

Proof. We have

$$MN - \langle M, N\rangle = \frac{1}{2}\Big[(M + N)^2 - \langle M + N\rangle - M^2 + \langle M\rangle - N^2 + \langle N\rangle\Big].$$

Hence $MN - \langle M, N\rangle \in \mathcal{M}_0$. The uniqueness can be easily deduced from Theorem 6.3.2). □

An immediate consequence of this theorem is that $\langle M, N\rangle$ is a symmetric bilinear form of M and N.

6.27 Definition. Let $M, N \in \mathcal{M}^2$. Put

$$[M, N]_t = M_0N_0 + \langle M^c, N^c\rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta M_s \Delta N_s, \quad t \geq 0, \tag{27.1}$$

where M^c and N^c are the continuous martingale parts of M and N respectively. Then $[M, N]$ is an adapted process with integrable variation

(Theorem 6.23.1)). $[M,M]$ is also denoted simply by $[M]$, and it is an adapted integrable increasing process. $[M]$ is called the ***quadratic variation*** or ***square bracket process*** of M. $[M,N]$ is called the *quadratic covariation* of M and N.

6.28 Theorem. *Let $M,N\in\mathcal{M}^2$.*

1) $[M,N]$ is the unique adapted process with integrable variation such that $MN-[M,N]\in\mathcal{M}_0$ and $\Delta[M,N]=\Delta M\Delta N$.

2) $\langle M,N\rangle$ is the dual predictable projection of $[M,N]$.

Proof. 1) Let $M=M_0+M^c+M^d$. We have $M^dN-[M^d,N]\in\mathcal{M}_0$ (Theorem 6.23.2)), $M^cN^d\in\mathcal{M}_0(M^c\perp\!\!\perp N^d)$, and

$$M^cN-[M^c,N]=N_0M^c+M^cN^c+M^cN^d-\langle M^c,N^c\rangle\in\mathcal{M}_0.$$

Hence

$$MN-[M,N]=M_0N+M^cN+M^dN-(M_0N_0+[M^c,N]+[M^d,N])\in\mathcal{M}_0.$$

$\Delta[M,N]=\Delta M\Delta N$ is obvious. The uniqueness follows from Theorem 6.3.2).

2) follows from 1) and Theorem 6.26. □

It is also easy to see from Theorem 6.28.1) that $[M,N]$ is a symmetric bilinear form of M and N.

6.29 Corollary. *Let $M,N\in\mathcal{M}^2$. The following assertions are equivalent:*

1) $M\perp N$,
2) $[M,N]\in\mathcal{M}_0$.
3) $\langle M,N\rangle=0$.

6.30 Corollary. *Let $M,N\in\mathcal{M}^2$. The following assertions are equivalent:*

1) $[M,N]=0$,
2) $M\perp\!\!\perp N$ *and* $\Delta M\Delta N=0$ *(i.e., M and N have no common jump).*

Proof. 1) $\Rightarrow$ 2). Let $[M,N]=0$. By Corollary 6.29, $M\perp\!\!\perp N$. At the same time, $\Delta M\Delta N=\Delta[M,N]=0$.

2) $\Rightarrow$ 1). Let $M\perp\!\!\perp N$ and $\Delta M\Delta N=0$. By Corollary 6.29, $[M,N]=\langle M^c,N^c\rangle$ is a predictable martingale with integrable variation, null at zero. Hence $[M,N]=0$ (Theorem 6.3 2)). □

6.31 Theorem. *Let $M,N\in\mathcal{M}^2$ and T be a stopping time. Then*

$$\langle M,N^T\rangle=\langle M,N\rangle^T, \tag{31.1}$$

$$[M,N^T]=[M,N]^T. \tag{31.2}$$

Proof. Since $(MN)^T-\langle M,N\rangle^T$ is a martingale (Theorem 4.39), in order to justify (31.1) it suffices by Theorem 6.3.2) to show that $(MN)^T-\langle M,N^T\rangle$ is a martingale. But $MN^T-\langle M,N^T\rangle$ is a martingale, what remains is to show that $(MN)^T-MN^T$ is a martingale:

$$\begin{aligned}E[(M_T-M_\infty)N_T|\mathcal{F}_t]&=E[E[(M_T-M_\infty)N_T|\mathcal{F}_{t\vee T}]|\mathcal{F}_t]\\&=E[(M_T-M_{t\vee T})N_T|\mathcal{F}_t]=E[(M_T-M_t)N_TI_{[T\le t]}|\mathcal{F}_t]\\&=(M_T-M_t)N_TI_{[T\le t]}=(M_{t\wedge T}-M_t)N_{t\wedge T}.\end{aligned}$$

Since $\langle M^c,(N^T)^c\rangle=\langle M^c,(N^c)^T\rangle=\langle M^c,N^c\rangle^T$, (31.2) follows from (31.1) and the definition of $[M,N]$. □

6.32 Lemma. *Let $M,N\in\mathcal{M}^2$. Then for almost all ω, for all $0\le s<t<\infty$ we have*

$$\begin{aligned}&|\langle M,N\rangle_t(\omega)-\langle M,N\rangle_s(\omega)|\\&\quad\le[\langle M\rangle_t(\omega)-\langle M\rangle_s(\omega)]^{1/2}[\langle N\rangle_t(\omega)-\langle N\rangle_s(\omega)]^{1/2},\end{aligned} \tag{32.1}$$

$$\begin{aligned}&|[M,N]_t(\omega)-[M,N]_s(\omega)|\\&\quad\le\{[M]_t(\omega)-[M]_s(\omega)\}^{1/2}\{[N]_t(\omega)-[N]_s(\omega)\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{32.2}$$

Proof. We only show (32.1). The proof of (32.2) is quite the same. For given $0\le s<t<\infty$, for all rationals λ

$$\langle M+\lambda N\rangle_t-\langle M+\lambda N\rangle_s\ge 0,\quad\text{a.s.}$$

Denote $\langle M,N\rangle_t-\langle M,N\rangle_s$ by $\langle M,N\rangle_s^t$. Then

$$\langle M\rangle_s^t+2\lambda\langle M,N\rangle_s^t+\lambda^2\langle N\rangle_s^t\ge 0,\quad\text{a.s.},$$

$$|\langle M,N\rangle_s^t|\le\{\langle M\rangle_s^t\}^{1/2}\{\langle N\rangle_s^t\}^{1/2},\quad\text{a.s.}$$

Because $\langle M\rangle$, $\langle N\rangle$ and $\langle M,N\rangle$ are all right-continuous, then for almost all ω, (32.1) holds for all $0\le s<t<\infty$. □

Combining Lemma 6.32 and Theorem 1.45, we obtain immediately the following *Kunita-Watanabe inequalities.*

6.33 Theorem. *Let $M,N\in\mathcal{M}^2$, and H,K be two measurable processes. Then*

$$\begin{aligned}&\int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d\langle M,N\rangle_s|\\&\quad\le\Big(\int_{[0,\infty[}H_s^2d\langle M\rangle_s\Big)^{1/2}\Big(\int_{[0,\infty[}K_s^2d\langle N\rangle_s\Big)^{1/2}\quad\text{a.s.},\end{aligned} \tag{33.1}$$

$$\int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d[M,N]_s|$$

$$\le \left(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M]_s\right)^{1/2}\left(\int_{[0,\infty[} K_s^2 d[N]_s\right)^{1/2} \quad \text{a.s.} \tag{33.2}$$

6.34 Corollary. *Let p, q be a pair of conjugate indices, i.e., $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Under the assumptions of Theorem 6.33 we have*

$$E\left[\int_{[0,\infty[} |H_s K_s||d\langle M, N\rangle_s|\right] \le \left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[} H_s^2 d\langle M\rangle_s}\right\|_p \left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[} K_s^2 d\langle N\rangle_s}\right\|_q, \tag{34.1}$$

$$E\left[\int_{[0,\infty[} |H_s K_s||d[M, N]_s|\right] \le \left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M]_s}\right\|_p \left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[} K_s^2 d[N]_s}\right\|_q. \tag{34.2}$$

Proof. It follows from Theorem 6.33 and Hölder's inequality ($E[|\xi\eta|] \le \|\xi\|_p\|\eta\|_q$). □

Problems and Complements

6.1 Let M be a continuous uniformly integrable martingale. S and T be two stopping times, $S \le T$. If for almost all ω, $M_\cdot(\omega)$ has finite variation on $[S(\omega), T(\omega) \wedge (t \vee S(\omega))]$ for each $t > 0$, then for almost all ω $M_\cdot(\omega)$ is constant on $[S(\omega), T(\omega)]$.

6.2 $\mathcal{M}_0^2$ and $L^2(\mathcal{F}_0)$ are mutually orthogonal stable subspaces of $\mathcal{M}^2$, and

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}_0^2 \oplus L^2(\mathcal{F}_0),$$

where $\oplus$ stands for the direct sum.

6.3 Let $M \in \mathcal{M}^{2,d}$. If $E\left[\sum_s |\Delta M_s|\right] < \infty$, then $M \in \mathcal{W}_0$.

6.4 Let $M \in \mathcal{W}_0$. If $E\left[\sum_s (\Delta M_s)^2\right] < \infty$, then $M \in \mathcal{M}^{2,d}$.

6.5 Let $M \in \mathcal{W}_0$ or $M \in \mathcal{M}^{2,d}$, and $T > 0$ be a stopping time. If $[\Delta M \ne 0] \subset [T]$, then $M = A - \tilde{A}$, where $A = \Delta M_T I_{[T,\infty[}$.

6.6 Let

$$\mathcal{X} = \left\{\xi I_{[T,\infty[} : \begin{array}{l} T \text{ is a stopping time, } \xi \in L^2(\mathcal{F}_T), \\ \xi I_{[T=0]} = 0,\ E[\xi I_{[0<T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] = 0 \end{array}\right\},$$

$$\mathcal{M}^{2,\sigma} = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \quad \mathcal{M}^{2,s} = \mathcal{X}^\perp.$$

1) $\mathcal{M}^{2,\sigma}$ and $\mathcal{M}^{2,s}$ are mutually orthogonal stable subspaces of $\mathcal{M}^2$, $\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}^{2,\sigma} \oplus \mathcal{M}^{2,s}$.

2) $\mathcal{M}^{2,da} \subset \mathcal{M}^{2,\sigma} \subset \mathcal{M}^{2,d}$, where $\mathcal{M}^{2,da}$ is the subspace of all purely discontinuous square integrable martingales having only accessible jump.

3) Let $M \in \mathcal{M}^2$. $M \in \mathcal{M}^{2,\sigma}$ if and only if for all stopping time S $M_S \in \mathcal{F}_{S-}$.

4) The following assertions are equivalent:

i) For all stopping times T and S, $[T \le S] \in \mathcal{F}_{S-}$.

ii) $\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}^{2,\sigma}$.

iii) $(\mathcal{F}_t)$ is completely continuous, i.e., for all stopping time S $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{S-}$.

6.7 let $M \in \mathcal{M}^2$, S and T be two stopping times, $S \le T$. Then $M^S = M^T$ if and only if $\langle M\rangle_S = \langle M\rangle_T$.

6.8 Let $M, N \in \mathcal{M}^2$. Then

$$(\langle M + N\rangle + [M + N])^{1/2} \le (\langle M\rangle + [M])^{1/2} + (\langle N\rangle + [N])^{1/2}.$$

6.9 Let $M, N \in \mathcal{M}^2$. Then

$$\left|\sqrt{[M]} - \sqrt{[N]}\right| \le \sqrt{[M - N]},$$

$$\left|\sqrt{\langle M\rangle} - \sqrt{\langle N\rangle}\right| \le \sqrt{\langle M - N\rangle}.$$

6.10 Let $\boldsymbol{G} = (\mathcal{G}_t)$ be a filtration satisfying the usual conditions, and for each $t \ge 0$, $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. Then the following statements are equivalent;

i) Every square integrable $\boldsymbol{G}$-martingale is an $\boldsymbol{F}$-martingale;

ii) For each $t \ge 0$, $\mathcal{F}_t$ and $\mathcal{G}_\infty$ is conditionally independent given $\mathcal{G}_t$;

iii) For every $\mathcal{G}_\infty \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$-measurable process A with integrable variation and $A_0 = 0$, the dual predictable projections of process A w.r.t. $\boldsymbol{G}$ and $\boldsymbol{F}$ are indistinguishable.

In this case, for every $\boldsymbol{G}$-stopping time T, $\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{G}_\infty$.

Chapter VII

Local Martingales

§1. The Localization of Classes of Processes

7.1 Definition. Let $\mathcal{D}$ be a class of processes. The *localized class* of $\mathcal{D}$, denoted by $\mathcal{D}_{loc}$, is defined as follows: a process $X = (X_t)$ belongs to $\mathcal{D}_{loc}$ if and only if $X_0 \in \mathcal{F}_0$ and there exists a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ such that for each n the stopped process $X^{T_n} - X_0 \in \mathcal{D}$. The sequence (T_n) is called a *localizing sequence* for X (w.r.t. $\mathcal{D}$). $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{loc}$ if and only if for each $X \in \mathcal{D}$, $X_0 \in \mathcal{F}_0$.

7.2 Theorem. *Let $\mathcal{D}^1$ and $\mathcal{D}^2$ be two stable classes of processes. Then*

$$(\mathcal{D}^1 \cap \mathcal{D}^2)_{loc} = \mathcal{D}^1_{loc} \cap \mathcal{D}^2_{loc}.$$

Proof. Let $X \in \mathcal{D}^1_{loc} \cap \mathcal{D}^2_{loc}$, (T_n) be a localizing sequence for X w.r.t. $\mathcal{D}^1$, and (S_n) be a localizing sequence for X w.r.t. $\mathcal{D}^2$. Then by the stability of $\mathcal{D}^1$ and $\mathcal{D}^2$, $(T_n \wedge S_n)$ is a localizing sequence for X w.r.t. $\mathcal{D}^1 \cap \mathcal{D}^2$. Hence $\mathcal{D}^1_{loc} \cap \mathcal{D}^2_{loc} \subset (\mathcal{D}^1 \cap \mathcal{D}^2)_{loc}$. The converse implication is trivial. □

7.3 Theorem. *Let $\mathcal{D}$ be a stable vector space of processes. Then so is $\mathcal{D}_{loc}$, and*

$$(\mathcal{D}_{loc})_{loc} = \mathcal{D}_{loc} \tag{3.1}$$

(i.e., it is no use iterating the localization procedure).

Proof. Only (3.1) needs to be proved. Let $X \in (\mathcal{D}_{loc})_{loc}$. For simplicity we may assume $X_0 = 0$. Let (T_n) be a localizing sequence for X w.r.t. $\mathcal{D}_{loc}$, i.e., $X^{T_n} \in \mathcal{D}_{loc}$ for each n. For each n let $(S_{n,k})_{k \geq 1}$ be a localizing sequence for X^{T_n} w.r.t. $\mathcal{D}$. Rearrange $(S_{n,k} \wedge T_n)_{n,k \geq 1}$ into a sequence (S_n). Then $\sup_n S_n = +\infty$ and $X^{S_n} \in \mathcal{D}$ for each n. Because for every pair (S, T) of stopping times,

$$X^{S \vee T} = X^S + X^T - (X^S)^T,$$

we have $X^{S_1 \vee \cdots \vee S_n} \in \mathcal{D}$ by induction. Hence $(S_1 \vee \cdots \vee S_n)$ is a localizing sequence for X w.r.t. $\mathcal{D}$, i.e., $X \in \mathcal{D}_{loc}$. □

Remark. For validity of (3.1) it suffices to assume that $\mathcal{D}$ is stable under stopping, i.e., for every $X \in \mathcal{D}$ and stopping time T, $X^T \in \mathcal{D}$. But this needs a somewhat longer proof. Theorem 7.3 is enough for us to use

The following lemma provides us a useful method to get localizing sequences. Its proof is not difficult and left to readers.

7.4 Lemma. *Let $X = (X_t)$ be an adapted cadlag process. Put*

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n\}, \quad n \geq 1. \tag{4.1}$$

Then (T_n) is a sequence of stopping times with $T_n \uparrow \infty$.

7.5 Definition. Let $\mathcal{D}$ be the class of all bounded processes. Then each process of $\mathcal{D}_{loc}$ is said to be *locally bounded*.

7.6 Theorem. *Let X be a process with $X_0 \in \mathcal{F}_0$. Then X is locally bounded if and only if there exists a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ such that for each n, $XI_{[0,T_n]}$ is bounded.*

Proof. Put $S_n = 0_{[|X_0| \geq n]}$. Then (S_n) is a sequence of stopping times such that $S_n \uparrow \infty$ and for each n, $X_0 I_{[0,S_n]} = X_0 I_{[|X_0|<n]} I_{[0,\infty[}$ is bounded. If X is locally bounded and (R_n) is a localizing sequence for X, then $XI_{[0,R_n \wedge S_n]}$ is bounded for each n. Conversely, if (T_n) is a sequence of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ and $XI_{[0,T_n]}$ is bounded for each n, then $(T_n \wedge S_n)$ is a localizing sequence for X. □

Remark. Theorem 7.6 provides a more reasonable definition for locally bounded processes. In fact, it is not natural to require $X_0 \in \mathcal{F}_0$ in the definition of locally bounded process. Since all localization procedures are applied to classes of adapted processes but not to the class of bounded processes, we reserve the requirement $X_0 \in \mathcal{F}_0$ for the sake of unification.

The next theorem gives some frequently encountered examples of locally bounded processes.

7.7 Theorem. *Let X be an adapted cadlag process.*

1) $X_- = (X_{t-})$ is a locally bounded predictable process.

2) X is locally bounded if and only if ΔX is locally bounded too.

3) If X is predictable, then X is locally bounded.

Proof. 1) Let T_n be defined as in (4.1). It is obvious that $|X_- I_{[0,T_n]}| \leq n$. Thus X_- is locally bounded by Theorem 7.6.

2) is an immediate consequence of 1) and Theorem 7.6.

The proof of 3) is quite the same as that of the second assertion in Theorem 5.19. □

7.8 Definition. Recall that $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}^+$) is the collection of all adapted processes with integrable variation (resp. integrable increasing processes). Then $\mathcal{A}_{\text{loc}}$ (resp. $\mathcal{A}^+_{\text{loc}}$) is the collection all *adapted processes with locally integrable variation* (resp. *adapted locally integrable increasing processes*). This coincides with Definition 5.18, since we are concerned with adapted processes.

For any adapted cadlag process $X = (X_t)$ we denote by $X^* = (X_t^*)$ the supremum process of X:

$$X_t^* = \sup_{s\leq t}|X_s|, \quad t \geq 0.$$

Obviously, X^* is an adapted increasing process, and $\Delta(X^*) \leq |\Delta X|$.

7.9 Theorem. *Let $A = (A_t)$ be an adapted process with finite variation. If A is locally bounded (or equivalently, ΔA is locally bounded), then $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$.*

Proof. Let (S_n) be a sequence of stopping times such that $S_n \uparrow \infty$ and $AI_{[0,S_n]}$ is bounded for each n. Put

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t |dA_s| \geq n\} \wedge S_n, \quad n \geq 1.$$

Then $T_n \uparrow \infty$, and for each n

$$\int_0^{T_n} |dA_s| = \int_{]0,T_n[} |dA_s| + |\Delta A_{T_n}| I_{[T_n>0]} \leq n + |\Delta A_{T_n}| I_{[T_n>0]}$$

is bounded. Therefore $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$. □

7.10 Theorem. *Let $A = (A_t)$ be an adapted process with finite variation. Then the following assertions are equivalent:*

1) $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$,

2) $B = \sum_{s\leq \cdot} \Delta A_s \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$,

3) $C = \sqrt{\sum_{s\leq\cdot} \Delta A_s^2} \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$,

4) $A^* \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$.

Proof. 1)⇒2)⇒3) is trivial.

3)⇒4). Because $|\Delta A| \leq C$, $A^* \leq A^*_- + |\Delta A| \leq A^*_- + C$. A^* is locally bounded (Theorem 7.7.1)), and $C \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$. Then $A^* \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$.

4)⇒1). Let (S_n) be a sequence of stopping times such that $S_n \uparrow \infty$ and $A^*_{S_n} - A^*_0$ is integrable for each n. Put

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t |dA_s| \geq n\} \wedge S_n, \quad n \geq 1.$$

Then $T_n \uparrow \infty$ and for each n

$$\int_0^{T_n} |dA_s| = \int_{]0,T_n[} |dA_s| + |\Delta A_{T_n}| \leq n + 2(A^*_{S_n} - A^*_{A_0})$$

is integrable. Therefore $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$. □

7.11 Definition. Recall that $\mathcal{M}$ is the collection of all uniformly integrable martingales. A process $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ is called a *local martingale*. Obviously, a local martingale is an adapted cadlag process. In the same manner, $\mathcal{W}_{\text{loc}}$ is the collection of all *local martingales with locally integrable variation*, $\mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ (resp. $\mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$, resp. $\mathcal{M}^{2,d}_{\text{loc}}$) is the collection of all (resp. *continuous*, resp. *purely discontinous*) *locally square integrable martingales*. Obviously, $\mathcal{M}_{\text{loc}}, \mathcal{W}_{\text{loc}}, \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ all are stable vector spaces.

Remarks. It is easy to see that

1) a (cadlag) martingale is a local martingale (by taking $(n)_{n\geq 1}$ as a localizing sequence);

2) a predictable local martingale is continuous (see Theorem 6.3.1));

3) if M is a predictable local martingale with locally integrable variation, then $M_t = M_0$ a.s. for all $t > 0$ (see Theorem 6.3.2));

4) if $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$, then its dual predictable projection $\tilde{A}$ is the unique predictable process with finite variation such that $A - \tilde{A} \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$ (see Corollary 5.31);

5) if $M_t \equiv M_0 \in \mathcal{F}_0$, $M = (M_t)$ is a local martingale (by taking $(0_{[|M_0|\geq n]})$ as a localizing sequence).

7.12 Theorem. *Let M be a local martingale. Then $M \in \mathcal{M}$ if and only if M is of class (D).*

Proof. Only the sufficiency needs to be justified. Let M be of class (D). Then M_0 is integrable. If (T_n) is a localizing sequence for M, then $M^{T_n} \in \mathcal{M}$ for each n. For $0 \leq s < t < \infty$ we have

$$E[M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s] = M_{s\wedge T_n} \quad \text{a.s.}. \tag{12.1}$$

Since $(M_{t\wedge T_n})_{n\geq 1}$ is uniformly integrable and $\lim_{n\to\infty} M_{t\wedge T_n} = M_t$,

$$E[M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s] \xrightarrow{L^1} E[M_t|\mathcal{F}_s] \quad \text{as } n \to \infty.$$

Letting $n \to \infty$ in (12.1) yields

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s \quad \text{a.s.},$$

This means M is a martingale. Then $M \in \mathcal{M}$. □

7.13 Theorem. *Let M be a local martingale. Then ΔM has predictable projection, and ${}^p(\Delta M) = 0$.*

Proof. It follows immediately from Theorem 4.41 and Theorem 5.8.2). □

7.14 Theorem. *Let $A \in \mathcal{A}_{loc}$ and*

$$A = A^c + A^{da} + A^{di},$$

where A^c is the continuous part of A, A^{da} is the accessible jump part of A, and A^{di} is the totally inaccessible jump part of A (see Theorem 4.25). *Then*

1) $\widetilde{A^{da}}$ *is purely discontinuous, $\widetilde{A^{di}}$ is continuous,*

2) $\tilde{A}$ *is continuous if and only if A^{da} is a local martingale,*

3) $\tilde{A}$ *is purely discontinuous if and only if $A_0 = 0$ and $A^c + A^{di}$ is a local martingale.*

Proof. 2) and 3) can be easily deduced from 1). Only 1) needs to be justified. Let (T_n) be a sequence of predictable times exhausting the jumps of A^{da}. Denote $H = \bigcup_n [T_n]$. By Theorem 5.22 we have

$$E\Big[\int_{[0,\infty[} I_{H^c}(\cdot,s)|d\widetilde{A^{da}_s}(\cdot)|\Big] \le E\Big[\int_{[0,\infty[} I_{H^c}(\cdot,s)|dA^{da}_s(\cdot)|\Big] = 0,$$

i.e., for almost all ω measure $d\widetilde{A^{da}}(\omega)$ has no charge outside $\bigcup_n [T_n(\omega)]$. Hence $\widetilde{A^{da}}$ is purely discontinuous.

Because A^{di} is quasi-left-continuous, $\widetilde{A^{di}}$ is continuous by Corollary 5.28.3). □

7.15 Theorem. *Let $M \in \mathcal{W}_{loc}$. Put*

$$A = \sum_{s \le \cdot} \Delta M_s.$$

Then $A \in \mathcal{A}_{loc}$, $\tilde{A}$ is continuous, and

$$M = M_0 + A - \tilde{A}.$$

(Hence M is also called a compensated sum of jumps.)

Moreover, if M has only accessible jumps, then

$$M = M_0 + \sum_{s \le \cdot} \Delta M_s.$$

Proof. The first part follows from Theorem 6.2. If M has only accessible jumps, so does A. Since $\tilde{A}$ is continuous, $A = A^{da}$ is a local martingale by Theorem 7.14.2). Therefore $\tilde{A} = 0$, and $M = M_0 + A$. □

§2. The Decomposition of Local Martingales

7.16 Lemma. *Let M be a local martingale, and $\varepsilon > 0$. Put*

$$A = \sum_{s \le \cdot} \Delta M_s I_{[|\Delta M_s| > \varepsilon]}.$$

Then $A \in \mathcal{A}_{loc}$.

Proof. It is well known that A is an adapted process with finite variation. Let (S_n) be a localizing sequence for M. Put

$$T_n = \inf\{t \ge 0 : |M_t - M_0| \ge n \text{ or } \sum_{s \le t} |\Delta A_s| \ge n\} \wedge S_n.$$

Then $T_n \uparrow \infty$ and

$$|\Delta A_{T_n}| \le |\Delta M_{T_n}| \le n + |M_{T_n} - M_0|,$$

$$\sum_{s \le T_n} |\Delta A_s| \le \sum_{s < T_n} |\Delta A_s| + |\Delta A_{T_n}| \le n + |\Delta A_{T_n}| \le 2n + |M_{T_n} - M_0|.$$

Since $T_n \le S_n$, we have $E[|M_{T_n} - M_0|] < \infty$. Hence $A \in \mathcal{A}_{loc}$. □

The following theorem is the fundamental theorem for local martingales. It plays an important role in the theory of local martingales.

7.17 Theorem. *Let M be a local martingale. For any given $\varepsilon > 0$, M can be decomposed as follows:*

$$M = M_0 + U + V, \tag{17.1}$$

where U is a locally bounded martingale[1] with $U_0 = 0$ and $|\Delta U| \le \varepsilon$, V is a local martingale with locally integrable variation and $V_0 = 0$. Furthermore, if M is quasi-left-continuous, U and V can be chosen quasi-left-continuous, having no common jump.

Proof. Without loss of generality we may assume $M_0 = 0$. Put

$$A = \sum_{s \le \cdot} \Delta M_s I_{[|\Delta M_s| > \frac{\varepsilon}{2}]}.$$

Then $A \in \mathcal{A}_{loc}$ by Lemma 7.16, and $V = A - \tilde{A} \in \mathcal{W}_{loc,0}$, $U = M - V \in \mathcal{M}_{loc,0}$. For any predictable time T we have

$$E[\Delta M_T I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_{T-}] = 0,$$

$$\Delta \tilde{A}_T I_{[T<\infty]} = E[\Delta A_T I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_{T-}] = E[(\Delta A_T - \Delta M_T) I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_T].$$

But

$$|(\Delta A_T - \Delta M_T) I_{[T<\infty]}| = |\Delta M_T I_{[|\Delta M_T| \le \frac{\varepsilon}{2}, T<\infty]}| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

---

[1] The class of locally bounded martingales is the localized class of the class of bounded martingales. A locally bounded martingale is a local martingale which is locally bounded at the same time.

thus on $[T < \infty]$ we have

$$|\Delta \tilde{A}_T| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\Delta U_T| \leq |\Delta M_T - \Delta A_T| + |\Delta \bar{A}_T| \leq \varepsilon \quad \text{a.s.}.$$

For any totally inaccessible time T on $[T < \infty]$ we have $\Delta \tilde{A}_T = 0$ a.s., and $|\Delta U_T| = |\Delta M_T - \Delta A_T| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. In a word, for any stopping time T,

$$|\Delta U_T I_{[T<\infty]}| \leq \varepsilon \quad \text{a.s.},$$

i.e., $|\Delta U| \leq \varepsilon$. Hence U is a locally bounded martingale.

If M is quasi-left-continuous, so is A. Then $\bar{A}$ is continuous, U and V are quasi-left-continuous. In addition, $\Delta V = \Delta M I_{[|\Delta M| > \frac{\varepsilon}{2}]}$, $\Delta U = \Delta M I_{[|\Delta M| \leq \frac{\varepsilon}{2}]}$, U and V have no common jump. □

7.18 Corollary. *Let M be a local martingale. Then its supremum process $M^* \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$.*

7.19 Theorem. *If M is both a local martingale and a process with finite variation, then $M \in \mathcal{W}_{\text{loc}}$, i.e.,*

$$\mathcal{M}_{\text{loc}} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}_{\text{loc}}.$$

Proof. Let $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \cap \mathcal{V}$, and be decomposed as in (17.1):

$$M = M_0 + U + V,$$

where $V \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$ and U is a locally bounded martingale with $U_0 = 0$. Since $U \in \mathcal{V}$ is locally bounded , by Theorem 7.9 we have $U \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$. At last, we have $M \in \mathcal{W}_{\text{loc}}$. □

7.20 Corollary. *Let $A \in \mathcal{V}$. $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$ if and only if there exists a predictable process $B \in \mathcal{V}$ such that $A - B$ is a local martingale.*

7.21 Definition. Let M be a local martingale. M is said to be *purely discontinuous* if $M_0 = 0$ and M can be decomposed as follows:

$$M = U + V,$$

where $U \in \mathcal{M}^{2,d}_{\text{loc}}$ and $V \in \mathcal{W}_{\text{loc}}$. We denote by $\mathcal{M}^d_{\text{loc}}$ the collection of all purely discontinuous local martingales. And the collection of all continuous local martingales is denoted by $\mathcal{M}^c_{\text{loc}}$. If we denote by $\mathcal{M}^c$ the collection of all continuous uniformly integrable martingales, then $\mathcal{M}^c_{\text{loc}}$ is exactly the localized class of $\mathcal{M}^c$. Obviously, we have $\mathcal{M}^c_{\text{loc}} = \mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$. It is natural to define $\mathcal{M}^d = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^d_{\text{loc}}$.

7.22 Lemma. *Let M be a local martingale. If M is both continuous and purely discontinuous, then $M = 0$.*

Proof. Since $M \in \mathcal{M}^d_{\text{loc}}$, $M = U + V$, where $U \in \mathcal{M}^{2,d}_{\text{loc}}$, $V \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$. On the other hand, $M \in \mathcal{M}^c_{\text{loc}} = \mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$. Thus $V \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$, and by Theorem 6.23.3) $V \in \mathcal{M}^{2,d}_{\text{loc}}$. Then there is a localizing sequence (T_n) for M such that for each n, M^{T_n} is both continuous and purely discontinuous square integrable martingale. Hence $M^{T_n} = 0$ for each n, and $M = 0$. □

7.23 Corollary. *Let M and N be two purely discontinuous local martingales, and $\Delta M = \Delta N$. Then $M = N$.*

7.24 Lemma. *Let $V \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$ and $V = V^c + V^{da} + V^{di}$ (see Theorem 4.25). Then V^{da} is a local martingale, and $V^c = -\widetilde{V^{di}}$.*

Proof. We have

$$0 = \tilde{V} = V^c + \widetilde{V^{da}} + \widetilde{V^{di}}.$$

But by Theorem 7.14, $\widetilde{V^{da}}$ is purely discontinuous and $\widetilde{V^{di}}$ is continuous. It must be that $\widetilde{V^{da}} = 0$, i.e., $V^{da} \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$. Then $V^c = -\widetilde{V^{di}}$. □

7.25 Theorem. *Let M be a local martingale. M can be uniquely decomposed as follows:*

$$M = M_0 + M^c + M^{da} + M^{di},$$

where $M^c \in \mathcal{M}^c_{\text{loc},0}$, $M^{da} \in \mathcal{M}^d_{\text{loc}}$ has only accessible jumps, and $M^{di} \in \mathcal{M}^d_{\text{loc}}$ has only totally inaccessible jumps.

M^c and $M^d = M^{da} + M^{di}$ are called the continuous martingale part and purely discontinuous martingale part of M respectively. For any stopping time T we have

$$(M^T)^c = (M^c)^T \text{ and } (M^T)^d = (M^d)^T.$$

Proof. Existence. Put

$$M = M_0 + U + V,$$

where $U \in \mathcal{M}^2_{\text{loc},0}$ and $V \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$. By Theorem 6.22.3), U has the following decomposition:

$$U = U^c + U^{da} + U^{di},$$

where $U^c \in \mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc},0}$, $U^{da} \in \mathcal{M}^{2,d}_{\text{loc}}$ has only accessible jumps, and $U^{di} \in \mathcal{M}^{2,d}_{\text{loc}}$ has only totally inaccessible jumps. By Lemma 7.24

$$V = V^c + V^{da} + V^{di},$$

where $V^{da} \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$ has only accessible jumps, $V^c + V^{di} \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$ has only totally inaccessible jumps. Put

$$M^c = U^c, \; M^{da} = U^{da} + V^{da}, \; M^{di} = U^{di} + V^c + V^{di}.$$

Then $M = M_0 + M^c + M^{da} + M^{di}$ is the required decomposition.

Uniqueness. Let $M = M_0+\overline{M}^c+\overline{M}^{da}+\overline{M}^{di}$ be another decomposition satisfying the requirements. Then by Lemma 7.22 $M^c = \overline{M}^c$. Thus $M^{da} - \overline{M}^{da} = \overline{M}^{di} - M^{di}$ has neither accessible nor totally inaccessible jump, i.e., $M^{da} - \overline{M}^{da}$ is continuous. Again by Lemma 7.22, $M^{da} = \overline{M}^{da}$ and $M^{di} = \overline{M}^{di}$.

The last assertion follows from the uniqueness easily. □

The next Theorem is a supplement to Theorem 7.19.

7.26 Theorem. *Let M be a purely discontinuous local martingale. If for all $t > 0$, $\sum_{s\le t}|\Delta M_s| < \infty$ a.s., then $M \in \mathcal{W}_{loc}$.*

Proof. Put
$$A = \sum_{s\le \cdot}\Delta M_s.$$
By Theorem 7.17, we know $A \in \mathcal{A}_{loc}$. Put $N = A - \tilde{A}$. Then $N \in \mathcal{W}_{loc,0}$. By Theorems 5.27.2) and 7.14, we have
$$\Delta\tilde{A} = {}^p(\Delta A) = {}^p(\Delta M) = 0.$$
Hence $\Delta M = \Delta N$. By Corollary 7.23, $M = N$ and $M \in \mathcal{W}_{loc,0}$. □

Now we start to define quadratic variation for local martingales.

7.27 Lemma. *Let M be a local martingal. Then for all $t \geq 0$,*
$$\sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2 < \infty \quad a.s..$$

Proof. Let $M = M_0 + U + V$, where $U \in \mathcal{M}^2_{loc,0}$ and $V \in \mathcal{W}_{loc,0}$. Let (T_n) be a localizing sequence for M such that for each n, $U^{T_n} \in \mathcal{M}^2$ and $V^{T_n} \in \mathcal{W}$. Then
$$\sum_{0<s\le T_n}(\Delta M_s)^2 \le 2\Big\{\sum_{s\le T_n}(\Delta U_s)^2 + \sum_{s\le T_n}(\Delta V_s)^2\Big\}$$
$$\le 2\Big\{\sum_{s\le T_n}(\Delta U_s)^2 + \Big[\sum_{s\le T_n}|\Delta V_s|\Big]^2\Big\} < \infty \quad a.s.. \quad □$$

7.28 Lemma. 1) *For any $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ there exists a unique predictable locally integrable increasing process, denoted by $\langle M,M\rangle$ or simply $\langle M\rangle$, such that $M^2 - \langle M\rangle \in \mathcal{M}^2_{loc,0}$.*

2) *For any $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$ there exists a unique predictable process with locally integrable variation, denoted by $\langle M,N\rangle$, such that $MN - \langle M,N\rangle \in \mathcal{M}^2_{loc,0}$.*

Proof. 1) is a special case of 2). We are to show 2). Let $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$, and (T_n) be a common localizing sequence for M and N. For each n

$\langle (M - M_0)^{T_n}, (N - N_0)^{T_n}\rangle$ is well defined. Now piece them together into a process:
$$\langle M,N\rangle = M_0N_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\langle (M-M_0)^{T_n},(N-N_0)^{T_n}\rangle I_{]T_{n-1},T_n]},$$
where $T_0 = 0$. Then it is not difficult to verify that $\langle M,N\rangle$ satisfies the requirements. □

Remark. Similarly to the remark after Definition 6.24, if $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ is quasi-left-continuous, then $\langle M\rangle$ is continuous.

7.29 Definition. Let M and N be two local martingales, M^c and N^c be their continuous martingale parts respectively. Define
$$[M,N] = M_0N_0 + \langle M^c,N^c\rangle + \sum_{s\le\cdot}\Delta M_s\Delta N_s \qquad (29.1)$$
$[M,N]$ is an adapted process with finite variation. In particular, $[M,M]$ is an adapted increasing process. It is also denoted simply by $[M]$.

$[M]$ is called the *quadratic variation* of M. It is easy to see that $M = 0$ if and only if $[M] = 0$, $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ if and only if $[M]$ is continuous, $M \in \mathcal{M}^d_{loc}$ if and only if $[M]$ is purely discontinuous.

$[M,N]$ is called the *quadratic covariation* of M and N. If $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$, by localization we know that $[M,N] \in \mathcal{A}_{loc}$ and $\langle M,N\rangle$ is the dual predictable projection of $[M,N]$, in particular, $[M] \in \mathcal{A}^+_{loc}$ and $\langle M\rangle$ is the dual predictable projection of $[M]$. In general, for $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$ if $[M,N] \in \mathcal{A}_{loc}$, we define $\langle M,N\rangle$ as the dual predictable projection of $[M,N]$. $\langle M,N\rangle$ is also called the *predictable quadratic covariation* of local martingales M and N, and $\langle M\rangle$ (if $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$) the *predictable quadratic variation* of M.

It is easy to see that $[M,N]$ (resp. $\langle M,N\rangle$, if exists) is symmetric and bilinear in M and N, and for any stopping time T,
$$[M^T,N] = [M,N]^T \quad (\text{resp. } \langle M^T,N\rangle = \langle M,N\rangle^T).$$

7.30 Theorem. *Let M be local martingale. Then $\sqrt{[M]}$ is a locally integrable increasing process.*

Proof. Since
$$\sqrt{[M]} - |M_0| \le \sqrt{[M] - M_0^2} \le \sqrt{[M - M_0]},$$
we may assume $M_0 = 0$. Let
$$M = U + V,$$

where $U \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc},0}$ and $V \in \mathcal{W}_{\mathrm{loc},0}$. Because Kunita-Watanabe inequality still holds for quadratic covariation of local martingales, we have

$$\sqrt{[M]} \le \sqrt{[U] + [V] + 2\sqrt{[U][V]}} \le \sqrt{[U]} + \sqrt{[V]}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[U] + \sqrt{\sum_{s\le \cdot}(\Delta V_s)^2} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[U] + \sum_{s\le \cdot} |\Delta V_s| .$$

Since $[U] \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ and $\sum_{s\le \cdot} |\Delta V_s| \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$, $\sqrt{[M]} \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$. □

7.31 Theorem. *Let M and N be two local martingales. Then $[M,N]$ is the unique adapted process with finite variation such that $MN - [M,N] \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$ and $\Delta[M,N] = \Delta M \Delta N$.*

Proof. At first, we show that $MN - [M,N]$ is a local martingale. To this end, it suffices to deal with the case of $M = N$. We may also assume $M_0 = 0$. Let $M = U + V$, where U is a locally bounded martingale with $U_0 = 0$ and $V \in \mathcal{W}_{\mathrm{loc},0}$. We have

$$M^2 - [M] = U^2 - [U] + V^2 - [V] + 2(UV - [U,V]). \tag{31.1}$$

We know $U^2 - [U] \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc},0}$ by Lemma 7.28.1), and $UV - [U,V] \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$ by the localized Theorem 6.4. By the formula of integration by parts, we have

$$V_t^2 - [V]_t = V_t^2 - \sum_{s\le t}(\Delta V_s)^2 = 2\int_{]0,t]} V_{s-}\,dV_s.$$

Since V_- is locally bounded, $V^2 - [V] \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$ by the localized Theorem 6.5. Hence by (31.1) we obtain $M^2 - [M] \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$.

$\Delta[M,N] = \Delta M \Delta N$ is trivial by definition.

Now let A be another adapted process with finite variation such that $MN - A \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$ and $\Delta A = \Delta M \Delta N$. Then $A - [M,N]$ is continuous and $A - [M,N] \in \mathcal{W}_{\mathrm{loc},0}$. By Lemma 7.22, $A = [M,N]$. □

7.32 Theorem. *Let M be a local martingale. Then $M \in \mathcal{M}^2$ if and only if $\boldsymbol{E}[M]_\infty < \infty$.*

Proof. Only the sufficiency needs to be justified. Let (T_n) be a localizing sequence for $M^2 - [M]$. Then for any stopping time T,

$$\boldsymbol{E}[M^2_{T\wedge T_n}] = \boldsymbol{E}[M]_{T\wedge T_n} \le \boldsymbol{E}[M]_\infty.$$

By Fatou's lemma we have

$$\boldsymbol{E}[M_T^2 I_{[T<\infty]}] \le \boldsymbol{E}[M]_\infty < \infty. \tag{32.1}$$

This implies that M is of class (D), and $M \in \mathcal{M}$ by Theorem 7.12. Again by (32.1) we have $\sup_t \boldsymbol{E}[M_t^2] < \infty$, i.e. $M \in \mathcal{M}^2$. □

7.33 Definition. Let M and N be two local martingales. If $MN \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$, i.e., $[M,N] \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$, we say that M and N are *mutually orthogonal*, and denote it by $M \perp\!\!\!\perp N$.

If $M \in \mathcal{M}^d_{\mathrm{loc}}$, $N \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, then $[M,N] = 0$ by definition, i.e., every purely discontinuous local martingale is orthogonal to every continuous local martingale. Below we will show that this property can be used to characterize purely discontinuous or continuous local martingales.

7.34 Theorem. *Let M be a local martingale with $M_0 = 0$. If M is orthogonal to every continuous bounded martingale, M is purely discontinuous.*

Proof. Let $M = M^c + M^d$, where $M^c \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc},0}$, $M^d \in \mathcal{M}^d_{\mathrm{loc}}$. Put

$$T_n = \inf\{t \ge 0 : |M^c| \ge n\}.$$

Then $T_n \uparrow \infty$, and for each n, $(M^c)^{T_n}$ is a continuous bounded martingale. By the assumption we have $\langle (M^c)^{T_n}\rangle = \langle M^c\rangle^{T_n} = [M,(M^c)^{T_n}] \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$. Since $\langle (M^c)^{T_n}\rangle$ is non negative, it must be $\langle (M^c)^{T_n}\rangle = 0$ (see Problem 7.6), i.e., $(M^c)^{T_n} = 0$. Hence $M^c = 0$, and $M = M^d$ is purely discontinuous. □

7.35 Theorem. *Let M be a local martingale. If M is orthogonal to every purely discontinuous local martingale, M is continuous.*

Proof. Let $M = M_0 + M^c + M^d$. Then $MM^d = (M_0 + M^c)M^d + (M^d)^2$. By the assumption, $MM^d \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$. But $(M_0 + M^c)M^d \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$. Hence $(M^d)^2 \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$. It must be $M^d = 0$. $M = M_0 + M^c$ is continuous. □

7.36 Theorem. *Let M be a local martingale. If M is orthogonal to every bounded martingale, then $M = 0$.*

Proof. Apparently, $M_0 = 0$. Let (T_n) be a localizing sequence for M and N be a bounded martingale. Then by the assumption we have

$$[M^{T_n}, N] = [M, N^{T_n}] \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0},$$

i.e., $M^{T_n}N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$. But $M^{T_n}N$ is of class (D), so $M^{T_n}N \in \mathcal{M}_0$ and

$$\boldsymbol{E}[M_{T_n}N_\infty] = \boldsymbol{E}[M_0N_0] = 0.$$

Since $M_{T_n} \in \mathcal{F}_\infty$ and N_∞ may be any bounded $\mathcal{F}_\infty$-measurable r.v., we have $M_{T_n} = 0$ a.s.. Hence $M^{T_n} = 0$ for each n. Letting $n \to \infty$ yields $M = 0$. □

7.37 Examples. 1) Let $W = (W_t)$ be a standard Wiener process. Then W is a continuous local martingale. By Theorem 2.69 we know that $(W_t^2 - t)$ is a (local) martingale, therefore

$$[W]_t = \langle W\rangle_t = t, \quad t \ge 0.$$

2) Let $P = (P_t)$ be a (homogeneous) Poisson process with parameter 1. Since $(P_t - t)$ is a (local) martingale, the dual predictable projection of P is

$$\tilde{P}_t = t, \quad t \geq 0.$$

Hence put

$$N_t = P_t - t, \quad t \geq 0,$$

$N = (N_t)$ is a martingale with locally integrable variation: $N \in \mathcal{W}_{\mathrm{loc},0}$ (N is also called a compensated Poisson process), and

$$[N]_t = \sum_{s \leq t} (\Delta N_s)^2 = \sum_{s \leq t} (\Delta P_s)^2 = \sum_{s \leq t} \Delta P_s = P_t, \quad t \geq 0,$$

$$\langle N \rangle_t = \widetilde{[N]}_t = \tilde{P}_t = t, \quad t \geq 0.$$

3) Put $L = W + N$, $M = W - N$. Then $L, M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$, and

$$[L, M]_t = [W]_t - [N]_t = t - P_t, \quad t \geq 0,$$

i.e., $[L, M] \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$, $L \perp\!\!\!\perp M$. But

$$L^c = M^c = W, \quad L^d = N = -M^d.$$

This illustrates that even though L and M are mutually orthogonal, neither L^c and M^c nor L^d and M^d need be mutually orthogonal.

7.38 Theorem. *Let M be a local martingale, T be a stopping time and ξ be a real $\mathcal{F}_T$-measurable r.v.. Then*

$$N = \xi(M - M^T)$$

is a local martingale, and for any local martingale L,

$$[N, L] = \xi([M, L] - [M, L]^T).$$

Proof. At first, we assume that M is a uniformly integrable martingale and ξ is bounded. Then for $t \geq 0$,

$$E[N_\infty | \mathcal{F}_t] = E[\xi(M_\infty - M_T) | \mathcal{F}_t] = E[\xi(M_\infty - M_T) | \mathcal{F}_{t \vee T} | \mathcal{F}_t]$$
$$= E[\xi(M_{t \vee T} - M_T) | \mathcal{F}_t] = \xi I_{[T \leq t]}(M_t - M_{t \wedge T}) = N_t,$$

i.e., N is a uniformly integrable martingale.

In the general case, without loss of generality we may assume $M_0 = 0$. Let (T_n) be a localizing sequence for M. Put

$$S_n = T_n \wedge T_{[|\xi| > n]}, \quad n \geq 1.$$

Then $S_n \uparrow \infty$ and (S_n) is a localizing sequence for N: for each n,

$$N^{S_n} = [\xi(M - M^T)]^{S_n} = \xi I_{[|\xi| \leq n]}(M - M^T)^{T_n}$$
$$= \xi I_{[|\xi| \leq n]}(M^{T_n} - M^{T_n \wedge T}) \in \mathcal{M}_0.$$

Finally, for any local martingale L, put

$$A = \xi([M, L] - [M, L]^T).$$

We have $\Delta A = \xi \Delta([M, L] - [M, L]^T) = \xi \Delta(M - M^T) \Delta L = \Delta N \Delta L$ and

$$NL - A = \xi(M - M^T)L - \xi([M, L] - [M, L]^T)$$
$$= \xi\{(ML - [M, L]) - (ML - [M, L])^T\} - \xi M_T I_{[T < \infty]}(L - L^T)$$

is a local martingale by Theorem 7.31. Again by Theorem 7.31 we conclude $A = [N, L]$. □

§3. The Characterization of Jumps of Local Martingales

7.39 Definition. An optional process $X = (X_t)$ is said to be *thin* if $[X \neq 0]$ is a thin set. A typical example of thin process is the jump ΔX of an adapted cadlag process X.

For any thin process $X = (X_t)$, if for all $t > 0$,

$$\sum_{s \leq t} |X_s| < \infty \quad \text{a.s.},$$

we define the *summation process* ΣX of X as follows:

$$\Sigma X = \sum_{s \leq \cdot} X_s \quad \text{or} \quad (\Sigma X)_t = \sum_{s \leq t} X_s, \quad t \geq 0.$$

ΣX is an adapted process with finite variation. In fact, if $[X \neq 0] = \bigcup_n [T_n]$, where (T_n) is a sequence of stopping times with disjoint graphs, then

$$\Sigma X = \sum_n X_{T_n} I_{[T_n, \infty[}.$$

In reality, we have already encountered the summation processes of thin processes for many times before.

7.40 Theorem. *Let $M \in \mathcal{M}^d_{\mathrm{loc}}$.*

1) *$M \in \mathcal{M}^{2,d}_{\mathrm{loc}}$ if and only if $\Sigma(\Delta M)^2 \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$.*

2) *$M \in \mathcal{W}_{\mathrm{loc},0}$ if and only if $\Sigma|\Delta M| \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$.*

Proof. 1) follows from the localized Theorem 6.22 and Theorem 7.32. 2) follows from Theorems 7.15 and 7.26. □

7.41 Lemma. *Let H be a thin process with $H_0 = 0$. The following assertions are equivalent:*

1) *$A = \sqrt{\Sigma H^2} \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$.*

2) *$B = \Sigma(H^2 I_{[|H| \leq b]} + |H| I_{[|H| > b]}) \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ for any $b > 0$.*

3) $C = \Sigma \frac{H^2}{1+|H|} \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$,

4) $D = \Sigma(1-\sqrt{1+H})^2 \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$ *if* $H \geq -1$.

Proof. Since

$$C \leq B \leq (1+b)\Sigma \frac{H^2}{1+|H|} I_{[|H| \leq b]} + \frac{1+b}{b} \Sigma \frac{H^2}{1+|H|} I_{[|H|>b]} \leq (1+b+\frac{1}{b})C,$$

we have 2)$\Longleftrightarrow$3) immediately. Noting that if $y \geq -1$,

$$(1-\sqrt{1+y})^2 = \frac{y^2}{(1+\sqrt{1+y})^2},$$

$$(1-\sqrt{1+y})^2 \Big/ \frac{y^2}{1+|y|} \to \begin{cases} 1, & y \to \infty, \\ 1/4, & y \to 0, \\ 2, & y \to -1, \end{cases}$$

we have two constants $K_1 > 0, K_2 > 0$ such that

$$K_1 \frac{y^2}{1+|y|} \leq (1-\sqrt{1+y})^2 \leq K_2 \frac{y^2}{1+|y|}, \quad y \geq -1.$$

Therefore, if $H \geq -1$, 3)$\Longleftrightarrow$4).

2) $\Rightarrow$ 1). Let (S_n) be a sequence of stopping times with $S_n \uparrow \infty$ such that $E[B_{S_n}] < \infty$. Then $A \in \mathcal{V}^+$. In fact, for all $t > 0$, $\sum_{s \leq t} |H_s|^2 I_{[|H_s|>b]}$ is only a sum of a finite number of terms. Put $T_n = \inf\{t \geq 0 : A_t \geq n\}$. We have $T_n \uparrow \infty$ and

$$A_{T_n \wedge S_n} \leq n + \Delta A_{T_n \wedge S_n} \leq n + |H_{T_n \wedge S_n}| \leq n + b + B_{S_n}.$$

Hence $E[A_{T_n \wedge S_n}] < \infty$, and $A \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$.

1) $\Rightarrow$ 2). Let (S_n) be a sequence of stopping times with $S_n \uparrow \infty$ such that $E[A_{S_n}] < \infty$. Then $B \in \mathcal{V}^+$. In fact, for all $t > 0$, $\sum_{s \leq t} |H_s| I_{[|H_s|>b]}$ is only a sum of a finite number of terms. Put $T_n = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq n\}$. We have $T_n \uparrow \infty$ and

$$B_{T_n \wedge S_n} \leq n + \Delta B_{T_n \wedge S_n} \leq n + b^2 + A_{S_n}.$$

Hence $E[B_{T_n \wedge S_n}] < \infty$, and $B \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$. □

The following theorem describes the characterization for jumps of local martingales. It is also a fundamental result of local martingales, and will play an important role in the theory of stochastic integrals. Lemma 7.41 provides a useful technique when this characterization is concerned.

7.42 Theorem. *In order that a thin process H be the jump ΔM of a local martingale M it is necessary and sufficient that*

i) ${}^pH = 0$,

ii) $\sqrt{\Sigma H^2} \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$.

Proof. The necessity follows from Theorems 7.13 and 7.30.

Sufficiency. At first, we assume $\Sigma H^2 \in \mathcal{A}^+$. Let (T_n) be a sequence of strictly positive stopping times with disjoint graphs such that $[H \neq 0] \subset \bigcup_n [T_n]$ and each T_n is either predictable or totally inaccessible. Put

$$A^n = H_{T_n} I_{[T_n, \infty[}, \quad M^n = A^n - \widetilde{A^n}.$$

Then as in the proof of Theorem 6.22, we know that the orthogonal series ΣM^n in $\mathcal{M}^{2,d}_{\text{loc}}$ converges to an element $M \in \mathcal{M}^{2,d}$ and $H = \Delta M$.

Now we assume $\Sigma H^2 \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$. Let (T_n) be a sequence of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ such that $(\Sigma H^2)^{T_n} \in \mathcal{A}^+$. Then for each n there exists $M^n \in \mathcal{M}^{2,d}$ such that $\Delta M^n = H I_{[0,T_n]}$. By Corollary 7.23 we have

$$(M^{n+1})^{T_n} = M^n, \quad n \geq 1.$$

Then $(M^n)_{n \geq 1}$ can be pieced together into a process

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M^n I_{]T_{n-1}, T_n]} \quad (T_0 = 0).$$

Obviously, $M \in (\mathcal{M}^d_{\text{loc}})_{\text{loc}} = \mathcal{M}^d_{\text{loc}}$ and $\Delta M = H$.

If $\Sigma|H| \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$, then $M = \Sigma H - (\widetilde{\Sigma H}) \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$ and

$$\Delta M = H - {}^pH = H.$$

Now we are in a position to deal with the general case. Put

$$A = \Sigma H^2, \ K = H I_{[|H|>1]}, \ H'' = K - {}^pK, \ H' = H - H'', \ B = \Sigma|K|.$$

It is not difficult to see that H'' and H' are thin processes and ${}^p(H'') = {}^p(H') = 0$. Since $\sqrt{\Sigma K^2} \leq A$, by Theorem 7.10 we have $B \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$. On the other hand,

$$\Sigma|{}^pK| \leq \Sigma{}^p(|K|) \leq \tilde{B} \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}.$$

Therefore $\Sigma|H''| \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$. There exists $M'' \in \mathcal{M}^d_{\text{loc}}$ such that $\Delta M'' = H''$.

Because $|H'|^2 \leq 2(|H|^2 + |H''|^2)$, $\Sigma(H')^2 \in \mathcal{V}^+$. Since ${}^pH = 0$,

$$H' = H - K + {}^pK = H I_{[|H| \leq 1]} - {}^p(H I_{[|H| \leq 1]}), \ |H'| \leq 2.$$

Hence $\Sigma(H')^2 \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$ and there exists $M' \in \mathcal{M}^{2,d}_{\text{loc}}$ such that $\Delta M' = H'$. Then $M = M' + M''$ is the required local martingale. □

7.43 Corollary. *Let H be a thin process such that ${}^pH = 0$.*

1) *There exists $M \in \mathcal{M}^{2,d}$ (resp. $\mathcal{M}^{2,d}_{\text{loc}}$) such that $H = \Delta M$ if and only if $\Sigma H^2 \in \mathcal{A}^+$ (resp. $\mathcal{A}^+_{\text{loc}}$).*

2) There exists $M \in \mathcal{W}_0$ (resp. $\mathcal{W}_{loc,0}$) such that $H = \Delta M$ if and only if $\Sigma|H| \in \mathcal{A}^+$ (resp. $\mathcal{A}^+_{loc}$).

Problems and Complements

7.1 Let $\mathcal{D}$ be a stable vector space of adapted processes such that if ξ is a bounded $\mathcal{F}_0$-measurable r.v. and $X_t \equiv \xi$, then $X = (X_t) \in \mathcal{D}$. $X \in \mathcal{D}_{loc}$ if and only if there exists an increasing sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ such that for each n, $X^{T_n} I_{[T_n>0]} \in \mathcal{D}$.

7.2 Let A be a predictable process with finite variation, and $a \neq 0$. If $[\Delta A = -a]$ is an evanescent set, then $\dfrac{1}{a + \Delta A}$ is a locally bounded process.

7.3 Let M be a local martingale. If $M \geq 0$ and $E[M_0] < \infty$, then M is a supermartingale.

7.4 Let M be a local martingale. If $\Delta M \geq 0$, M is quasi-left-continuous.

7.5 Let M be a continuous local martingale, and T be a stopping time. Then for almost all $\omega \in [T < \infty]$ either there exists $\varepsilon > 0$ such that $M_\cdot(\omega)$ is constant on $[T(\omega), T(\omega) + \varepsilon]$, or there exist two sequences (t_n) and (s_n) with $t_n \downarrow T(\omega)$ and $s_n \downarrow T(\omega)$ such that for all n, $s_{n+1} < t_{n+1} < s_n < t_n$, $M_{t_n}(\omega) > M_{T(\omega)}(\omega) > M_{s_n}(\omega)$.

7.6 If $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$ and $M \geq 0$, then $M = 0$.

7.7 Each cadlag supermartingale X can be uniquely decomposed as:

$$X = M - A,$$

where M is a local martingale, and A is a predictable increasing process with $A_0 = 0$. Moreover, if $X \geq 0$, then A is integrable.

7.8 Let $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$, $M \geq 0$ and $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$. Then for any $a > 0$,

$$P[\sup_t |M_t| \geq a | \mathcal{F}_0] = 1 \wedge \frac{M_0}{a}.$$

7.9 Let W be a standard Wiener process and P be a Poisson process with parameter 1. Put

$$M_t = W_t - P_t - t, \quad t \geq 0,$$

$$L = M^S, \quad S = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq 2\}.$$

Then L is a bounded martingale, but L^c is not a bounded martingale.

7.10 Let M be a locally bounded martingale. Then for any local martingale N $\langle M, N\rangle$ exists.

7.11 Let M be a local martingale and T be a stopping time. Set

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T+t}, \quad \overline{M}_t = M_{T+t} I_{[T<\infty]}, \quad t \geq 0.$$

Then

1) $\overline{M} = (\overline{M}_t)$ is a $(\mathcal{G}_t)$-local martingale.
2) $[\overline{M}]_t = ([M]_{T+t} - [M]_T + M_T^2) I_{[T<\infty]}$,
3) $\overline{M}^c_t = (M^c_{T+t} - M^c_T) I_{[T<\infty]}$, $\overline{M}^d_t = (M^d_{T+t} - M^d_T) I_{[T<\infty]}$,

where $[\overline{M}]$, $\overline{M}^c$ and $\overline{M}^d$ are all defined w.r.t. $(\mathcal{G}_t)$.

7.12 Let $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$, $S = \inf\{t \geq 0 : [M]_t > 0\}$ and $T = \inf\{t \geq 0 : [N]_t > 0\}$. Then $[M, N]^2 = [M][N]$ if and only if there exist two r.v. $\xi \in \mathcal{F}_S$ and $\eta \in \mathcal{F}_T$ such that $[S \vee T < \infty] = [S = T < \infty]$ and

$$\xi \neq 0, \quad \eta \neq 0, \quad \xi M - \eta N = 0 \qquad \text{on} \quad [S \vee T < \infty].$$

7.13 Let $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $S = \inf\{t \geq 0 : \langle M\rangle_t > 0\}$ and $T = \inf\{t \geq 0 : \langle N\rangle_t > 0\}$.

1) If $\langle M, N\rangle^2 = \langle M\rangle\langle N\rangle$, then there exists a r.v. $\xi \in \mathcal{F}_S$ (resp. $\eta \in \mathcal{F}_T$) such that $[\xi \neq 0]$(resp. $[\eta \neq 0]$) $= [S \vee T < \infty] = [S = T < \infty]$ and

$$\xi M - N = 0 \quad (\text{resp. } M - \eta N = 0) \qquad \text{on} \quad [S \vee T < \infty].$$

2) If there exists a r.v. $\xi \in \mathcal{F}_{S-}$ (resp. $\eta \in \mathcal{F}_{T-}$) such that $[\xi \neq 0]$ (resp. $[\eta \neq 0]$) $= [S \vee T < \infty] = [S = T < \infty]$ and

$$\xi M - N = 0 \quad (\text{resp. } M - \eta N = 0) \qquad \text{on } [S \vee T < \infty],$$

then $\langle M, N\rangle^2 = \langle M\rangle\langle N\rangle$.

7.14 Let M be a local martingale, and F be an optional set. Then the following two assertions are equivalent:

1) $M = M^1 + M^2$, where $M^1, M^2 \in \mathcal{M}_{loc}$, $\Delta M^1 I_{F^c} = 0$ and $\Delta M^2 I_F = 0$,

2) ${}^p(\Delta M I_F) = 0$.

Chapter VIII

Semimartingales and Quasimartingales

§1. Semimartingales and Special Semimartingales

8.1 Definition. A process $X = (X_t)$ is called a *semimartingale*, if X can be decomposed as follows:

$$X = M + A, \tag{1.1}$$

where M is a local martingale, and A is an adapted process with finite variation. Apparently, a semimartingale is an adapted cadlag process. The class of all semimartingales is denoted by $\mathcal{S}$. Obviously, $\mathcal{S}$ is a stable vector space. In addition, if X is a semimartingale and T is a stopping time, then

$$X^{T-} = XI_{[0,T[} + X_{T-}I_{[T,\infty[} = X^T - \Delta X_T I_{[T,\infty[}$$

is also a semimartingale.

By the fundamental theorem for local martingales (Theorem 7.17) we know that in the decomposition (1.1) of a semimartingale X we may assume that M is a locally bounded martingale (even the jump ΔM of M is bounded). But the continuous martingale part M^c of M does not depend on the decomposition (1.1), and is uniquely determined by X (Lemma 7.22). We denote it by X^c. X^c is also called the *continuous martingale part* of semimartingale X. It is easy to see for any stopping time T

$$(X^T)^c = (X^c)^T, \ (X^{T-})^c = (X^c)^T.$$

8.2 Definition. Let X and Y be two semimartingales. Define

$$[X, Y]_t = X_0Y_0 + \langle X^c, Y^c\rangle_t + \sum_{s\le t}(\Delta X_s \Delta Y_s), \quad t \ge 0.$$

$[X, Y]$ is an adapted process with finite variation, and is called the *quadratic covariation* of X and Y. In fact, by Lemma 7.27 and (1.1) we know

that for any semimartingale X and $t > 0$

$$\sum_{s\le t}(\Delta X_s)^2 < \infty \quad \text{a.s.},$$

$[X, X]$, also denoted simply by $[X]$, is an adapted increasing process, and is called the *quadratic variation* of X. It is easy to see that for any stopping time T

$$[X, Y^T] = [X, Y]^T, \qquad [X, Y^{T-}] = [X, Y]^{T-}.$$

If $[X, Y] \in \mathcal{A}_{loc}$, its dual predictable projection is denoted by $\langle X, Y\rangle$, and is called the *predictable quadratic covariation* of X and Y. In this case we say that $\langle X, Y\rangle$ exists. In particular, if $[X] \in \mathcal{A}^+_{loc}$, its dual predictable projection is denoted by $\langle X\rangle$, and is called *predictable quadratic variation* of X.

It is easy to see that Kunita-Watanabe inequality holds for semimartingales.

8.3 Theorem. *Let X and Y be two semimartingales, H and K be two measureable processes, p and q be a pair of conjugate indices. Then*

$$\int_{[0,\infty[} |H_sK_s||d[X, Y]_s| \le \{\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[X]_s \int_{[0,\infty[} K_s^2 d[Y]_s\}^{1/2} \ \text{a.s.}, \tag{3.1}$$

$$E[\int_{[0,\infty[} |H_sK_s||d[X, Y]_s|] \le \left\| \sqrt{\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[X]_s} \right\|_{L^p} \left\| \sqrt{\int_{[0,\infty[} K_s^2 d[Y]_s} \right\|_{L^q}. \tag{3.2}$$

Remark. If $\langle X\rangle, \langle Y\rangle$ and $\langle X, Y\rangle$ all exist, we have the corresponding Kunita-Watanabe inequatity.

8.4 Definition. A semimartingale X is called a *special semimartingale*, if it can be decomposed as follows:

$$X = M + A,$$

where M is a local martingale, and A is an adapted process with locally integrable variation. If the special semimartingale X has another decomposition: $X = N + B$, where N is local martingale and B is an adapted process with finite variation, then B must be an adapted process with locally integrable variation, too. In fact, $B - A = M - N$ is a local martingale with finite variation. By Theorem 7.19, $B - A \in \mathcal{W}_{loc}$ and hence $B \in \mathcal{A}_{loc}$. The class of all special semimartingales is denoted by $\mathcal{S}_p$. Obviously, $\mathcal{S}_p$ is a stable vector space.

8.5 Theorem. *Every special semimartingale X can be uniquely decomposed as follows:*

$$X = M + A, \tag{5.1}$$

where M is a local martingale, A is a predictable process with finite variation and $A_0 = 0$. Hereinafter, we call this decomposition the canonical decomposition of X.

Proof. Let $X = N + B$, where $N \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ and $B \in \mathcal{A}_{\text{loc},0}$. Putting $A = \tilde{B}$ and $M = N + B - \tilde{B}$, we obtain the required decomposition (5.1). The uniqueness follows from Remark 3) after Definition 7.11. □

The following theorem gives several useful characterizations for special semimartingales.

8.6 Theorem. *Let X be a semimartingale. Then the following statements are equivalent:*

1) *X is a special semimartingale,*
2) *$\sqrt{[X]}$ is a locally integrable increasing process,*
3) *$X^* = (X_t^*)$ is a locally integrable increasing process.*

Proof. 1)⇒2). Let X be a special semimartingale, and $X = M + A$ be its canonical decomposition. By Kunita-Watanabe inequality

$$\sqrt{[X]} \le \sqrt{[M] + [A] + 2\sqrt{[M][A]}} = \sqrt{[M]} + \sqrt{[A]}.$$

Because $\sqrt{[M]} \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$ (Theorem 7.30) and $\sqrt{[A]} = \sqrt{\Sigma(\Delta A)^2} \le \Sigma|\Delta A| \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$, we have $\sqrt{[X]} \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$.

2)⇒3). Let $\sqrt{[X]} \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$. Since $(\Delta X)^* \le \sqrt{\Sigma(\Delta X)^2} \le \sqrt{[X]}$, $X^* \le (\Delta X)^* + (X_-)^*$, and X_- is locally bounded (Theorem 7.7.1)), we have $X^* \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$.

3)⇒1). Let $X^* \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$, and $X = M + A$, where $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, $A \in \mathcal{V}_0$. Since $M^* \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$ (Corollary 7.18), we have $A^* \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$. Furthermore, by Theorem 7.10 we know $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$. Hence $X \in \mathcal{S}_p$. □

8.7 Corollary. *A locally bounded semimartingale is a special semimartingale. In particular, a semimartingale with bounded jump or a predictable semimartingale is a special semimartingale.*

8.8 Theorem. *Let X be a special semimartingale, and $X = M + A$ be its canonical decomposition. If there exists a constant $C > 0$ such that for any predictable time $T > 0$, $|\Delta X_T| \le C$ a.s., then $|\Delta A| \le C$.*

Proof. Let $T > 0$ be a predictable time. By Theorem 7.13 we have

$$\Delta A_T = \boldsymbol{E}[\Delta A_T|\mathcal{F}_{T-}] = \boldsymbol{E}[\Delta X_T - \Delta M_T|\mathcal{F}_{T-}] = \boldsymbol{E}[\Delta X_T|\mathcal{F}_{T-}] \text{ a.s.}.$$

Thus $|\Delta A_T| \le C$ a.s.. But ΔA is predictable. Therefore $|\Delta A| \le C$. □

8.9 Corollary. *Let X be a quasi-left-continuous (resp. continuous) special semimartingale, and $X = M + A$ be its canonical decomposition. Then A is continuous and M is quasi-left-continuous (resp. continuous).*

8.10 Theorem. *$\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}_p$ are stable under localization, i.e., $\mathcal{S}_{\text{loc}} = \mathcal{S}$ and $(\mathcal{S}_p)_{\text{loc}} = \mathcal{S}_p$.*

Proof. Let $X \in (\mathcal{S}_p)_{\text{loc}}$ and (T_n) be a localizing sequence for X. Without loss of generality we may assume $X_0 = 0$. Then each X^{T_n} is a special semimartingale. Let

$$X^{T_n} = M^n + A^n$$

be its canonical decomposition. By the uniqueness of canonical decomposition we have

$$(M^{n+1})^{T_n} = M^n, \quad (A^{n+1})^{T_n} = A^n.$$

Put

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M^n I_{]T_{n-1},T_n]}, \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} A^n I_{]T_{n-1},T_n]} \quad (T_0 = 0).$$

Then M is a local martingale, A is a predictable process with finite variation, and $X = M + A$, i.e., X is a special semimartingale. Hence $(\mathcal{S}_p)_{\text{loc}} = \mathcal{S}_p$.

Now let $X \in \mathcal{S}_{\text{loc}}$, and (T_n) be a localizing sequence for X. Since each $X^{T_n} \in \mathcal{S}$, X is an adapted cadlag process. Put

$$V_t = \sum_{s \le t} \Delta X_s I_{[|\Delta X_s|>1]}, \quad t \ge 0.$$

$V = (V_t)$ is an adapted process with finite variation. Then each $(X - V)^{T_n} = X^{T_n} - V^{T_n}$ is a semimartingale, and its jump is bounded by 1. Hence each $(X - V)^{T_n}$ is a special semimartingale (Corollary 8.7) and $X - V$ itself is a special semimartingale. Finally, $X = (X - V) + V$ is a semimartingale. Hence $\mathcal{S}_{\text{loc}} = \mathcal{S}$. □

Finally, we show that the semimartingale property is stable under change of time.

8.11 Theorem. *Assume that X is a semimartingale. Let $\tau = (\tau_t)$ be a change of time, and for each $t \ge 0$, $\tau_t < \infty$. Put*

$$Y_t = X_{\tau_t}, \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}, \quad t \ge 0.$$

Then $Y = (Y_t)$ is a semimartingale w.r.t. $\boldsymbol{G} = (\mathcal{G}_t)$.

Proof. Let $X = M + A$, where M is an $(\mathcal{F}_t)$-local martingale with $M_0 = 0$, and A is an $(\mathcal{F}_t)$-adapted process with finite variation. Then

$$Y = N + B, \quad N_t = M_{\tau_t}, \quad B_t = A_{\tau_t}, \quad t \ge 0.$$

Obviously, $B = (B_t)$ is a $(\mathcal{G}_t)$-adapted process with finite variation. It remains to show that $N = (N_t)$ is a $(\mathcal{G}_t)$-semimartingale. Let (T_n) be a localizing sequence for M, i.e., for each n, M^{T_n} is a uniformly integrable $(\mathcal{F}_t)$-martingale. Put

$$\overline{T}_n = \inf\{t \geq 0 : \tau_t \geq T_n\}, \quad n \geq 1.$$

Since for each $t \geq 0$, $[\overline{T}_n < t] = [\tau_t \geq T_n] \in \mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{G}_t$, each $\overline{T}_n$ is a $(\mathcal{G}_t)$-stopping time, and $\overline{T}_n \uparrow \infty$. Put

$$N_t^n = M_{\tau_t}^{T_n} = M_{\tau_t \wedge T_n}, \; t \geq 0.$$

By Doob's stopping theorem we know that each N^n is a uniformly integrable $(\mathcal{G}_t)$-martingale. Furthermore, we have $[\overline{T}_n > t] = [\tau_t < T_n]$,

$$N_t^n I_{[0,\overline{T}_n[} = M_{\tau_t \wedge T_n} I_{[0,\overline{T}_n[} = M_{\tau_t} I_{[0,\overline{T}_n[} = N_t I_{[0,\overline{T}_n[}$$

and

$$\begin{aligned} N^{\overline{T}_n} &= N I_{[0,\overline{T}_n[} + N_{\overline{T}_n} I_{[\overline{T}_n,\infty[} = N^n I_{[0,\overline{T}_n[} + N_{\overline{T}_n} I_{[\overline{T}_n,\infty[} \\ &= N^n + (N_{\overline{T}_n} - N^n_{\overline{T}_n}) I_{[\overline{T}_n,\infty[}. \end{aligned}$$

This means $N^{\overline{T}_n}$ is a $(\mathcal{G}_t)$-semimartingale. By Theorem 8.10 N is a $(\mathcal{G}_t)$-semimartingale. □

§2. Quasimartingales and Their Rao Decompositions

8.12 Definition. Let X be an adapted cadlag process. X is called a *quasimartingale*, if for all $t \geq 0$, X_t is integrable and

$$\mathrm{Var}(X) = \sup_{\tau} \Big\{ \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{E}[|X_{t_i} - \boldsymbol{E}[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}]|] + \boldsymbol{E}[|X_{t_n}|] \Big\} < +\infty, \quad (12.1)$$

where $\tau : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < +\infty$ is a finite partition of $[0, \infty[$, and the supremum is taken over the set of all finite partitions of $[0, \infty[$.

If an adapted cadlag process X is not a quasimartingale, we denote $\mathrm{Var}(X) = +\infty$.

Let X be a uniformly integrable martingale. Then

$$\mathrm{Var}(X) = \sup_t \boldsymbol{E}[|X_t|] = \boldsymbol{E}[|X_\infty|] < \infty,$$

and X is a quasimartingale.

Let X be a non-negative cadlag supermartingale. Then

$$\mathrm{Var}(X) = \boldsymbol{E}[X_0] < \infty,$$

and hence X is a quasimartingale, too.

Obviously, if X and Y are two quasimartingales, so is $X + Y$. In addition, we have

$$\mathrm{Var}(X + Y) \leq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y). \quad (12.2)$$

The following theorem is called *Rao's decomposition theorem* for quasimartingales.

8.13 Theorem. *Let X be an adapted cadlag process. Then X is a quasimartingale if and only if X is the difference of two non-negative cadlag supermartingales. In this case, X can be uniquely decomposed as follows:*

$$X = X' - X'', \quad (13.1)$$

where X' and X'' are two non-negative cadlag supermartingales such that

$$\mathrm{Var}(X) = \boldsymbol{E}[X'_0 + X''_0]. \quad (13.2)$$

(13.1) is called the Rao decomposition of quasimartingale X.

Proof. The sufficiency is trivial. We are to show the necessity. Let X be a quasimartingale, and $\tau : t = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ be a finite partition of $[t, \infty[$. Put

$$U'_t(\tau) = \boldsymbol{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i} - \boldsymbol{E}[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}])^+ + X_{t_n}^+ \Big| \mathcal{F}_t\Big],$$

$$U''_t(\tau) = \boldsymbol{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i} - \boldsymbol{E}[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}])^- + X_{t_n}^- \Big| \mathcal{F}_t\Big].$$

For $t \leq s < u < v$ we have

$$\begin{aligned} (X_s - \boldsymbol{E}[X_v|\mathcal{F}_s])^+ &= (X_s - \boldsymbol{E}[X_u|\mathcal{F}_s] + \boldsymbol{E}[X_u|\mathcal{F}_s] - \boldsymbol{E}[X_v|\mathcal{F}_s])^+ \\ &\leq (X_s - \boldsymbol{E}[X_u|\mathcal{F}_s])^+ + (\boldsymbol{E}[X_u - \boldsymbol{E}[X_v|\mathcal{F}_u]|\mathcal{F}_s])^+ \\ &\leq (X_s - \boldsymbol{E}[X_u|\mathcal{F}_s])^+ + \boldsymbol{E}[(X_u - \boldsymbol{E}[X_v|\mathcal{F}_u])^+|\mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}[(X_s - \boldsymbol{E}[X_v|\mathcal{F}_s])^+|\mathcal{F}_t] \leq \\ &\quad \boldsymbol{E}[(X_s - \boldsymbol{E}[X_u|\mathcal{F}_s])^+|\mathcal{F}_t] + \boldsymbol{E}[(X_u - \boldsymbol{E}[X_v|\mathcal{F}_u])^+|\mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

In the same way we have

$$E[X_u^+|\mathcal{F}_t] \le E[(X_s - E[X_u|\mathcal{F}_u])^+|\mathcal{F}_t] + E[X_u^+|\mathcal{F}_t].$$

Therefore, if partition τ' is a refinement of partition τ,

$$U_t'(\tau) \le U_t'(\tau'),\ U_t''(\tau) \le U_t''(\tau').$$

But for any finite partition τ of $[t,\infty[$,

$$E[U_t'(\tau)] \le \mathrm{Var}(X),\ E[U_t''(\tau)] \le \mathrm{Var}(X).$$

Then in the direction of partly ordered set of all finite partitions of $[t,\infty[$ $U_t'(\tau)$ and $U_t''(\tau)$ converge in L^1. Their limits are denoted by U_t' and U_t'' respectively (In fact, $U_t' = \operatorname{ess\,sup}_\tau U_t'(\tau)$ and $U_t'' = \operatorname{ess\,sup}_\tau U_t''(\tau)$.). For $s < t$,

$$E[U_t'(\tau)|\mathcal{F}_s] = E\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i} - E[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}])^+ + X_{t_n}^+|\mathcal{F}_s\Big]$$

$$\le E[(X_s - E[X_t|\mathcal{F}_s])^+ + \sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i} - E[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}])^+ + X_{t_n}^+|\mathcal{F}_s]$$

$$= U_s'(\bar\tau) \le U_s', \quad \text{a.s.},$$

where $\bar\tau$ is a finite partition of $[s,\infty[$. Thus we have

$$E[U_t'|\mathcal{F}_s] \le U_s', \quad \text{a.s.},$$

i.e., (U_t') is a non-negative supermartingale. By the same reason, (U_t'') is a non-negative supermartingale, too. By Föllmer's lemma there exist two non-negative cadlag supermartingales (X_t') and (X_t'') such that for almost all ω we have

$$X_t'(\omega) = \lim_{s\in Q_+, s\downarrow\downarrow t} U_s'(\omega),\ X_t''(\omega) = \lim_{s\in Q_+, s\downarrow\downarrow t} U_s''(\omega)$$

for all $t \ge 0$. Since for any finite partition τ of $[t,\infty[$

$$X_t = U_t'(\tau) - U_t''(\tau) \quad \text{a.s.},$$

we have $X_t = U_t' - U_t''$ a.s.. By the right-continuity of X, $X_t = X_t' - X_t''$ a.s.. Again by the right-continuity of X, X' and X'' we conclude that X is indistinguishable from $X' - X''$. Moreover,

$$\mathrm{Var}(X) = \sup_\tau E[U_0'(\tau) + U_0''(\tau)] = E[U_0' + U_0'']$$

$$\ge \lim_{s\in Q_+, s\downarrow 0} E[U_s' + U_s''] \ge E[X_0' + X_0''] \quad \text{(by Fatou's lemma)}$$

$$= \mathrm{Var}(X') + \mathrm{Var}(X'').$$

By virtue of (12.2), (13.2) holds.

What remains is to show the uniqueness. Let $X = X^1 - X^2$, where X^1 and X^2 are two non-negative cadlag supermartingales such that

$$\mathrm{Var}(X) = E[X_0^1 + X_0^2].$$

For $s < t$,

$$(E[X_s - X_t|\mathcal{F}_s])^+ = (E[X_s^1 - X_t^1|\mathcal{F}_s] - E[X_s^2 - X_t^2|\mathcal{F}_s])^+ \le E[X_s^1 - X_t^1|\mathcal{F}_s].$$

Whence it is easy to deduce

$$U_t' \le X_t^1, \qquad E[U_s' - U_t'|\mathcal{F}_s] \le E[X_s^1 - X_t^1|\mathcal{F}_s].$$

Hence $X^1 - U'$ is a non-negative supermartingale, and $X^1 - X'$ is a non-negative cadlag supermartingale. By the same reason, $X^2 - X''$ is a non-negative cadlag supermartingale, too. By the assumption, $E[X_0' + X_0''] = \mathrm{Var}(X) = E[X_0^1 + X_0^2]$, thus $X_0^1 - X_0' = X_0^2 - X_0'' = 0$ a.s.. Furthermore for all $t > 0$, $X_t^1 - X_t' = X_t^2 - X_t'' = 0$ a.s.. Then $X^1 = X'$ and $X^2 = X''$. □

8.14 Theorem. *Assume that X is a quasimartingale. Let $\tau = (\tau_t)$ be a change of time, and for each $t \ge 0$, $\tau_t < \infty$. Put*

$$Y_t = X_{\tau_t}, \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}, \quad t \ge 0.$$

Then $Y = (Y_t)$ is a quasimartingale w.r.t. $(\mathcal{G}_t)$.

Proof. By Theorem 8.13 we may assume that X is a non-negative cadlag supermartingale (w.r.t. $(\mathcal{F}_t)$). In this case, by Doob's stopping theorem we know immediately that Y is a non-negative cadlag supermartingale w.r.t. $(\mathcal{G}_t)$. Hence Y is a quasimartingale w.r.t. $(\mathcal{G}_t)$. □

The quasimartingale property is stable not only under change of time but also under reduction of filtration.

8.15 Theorem. *Let $(\mathcal{G}_t)$ be a filtration satisfying the usual conditions such that for each $t \ge 0$, $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. Suppose X is an $(\mathcal{F}_t)$-quasimartingale and $(\mathcal{G}_t)$-adapted. Then X is a $(\mathcal{G}_t)$-quasimartingale.*

Proof. For $0 \le s < t < \infty$,

$$E[|X_s - E[X_t|\mathcal{G}_s]|] = E[|E[X_s - X_t|\mathcal{F}_s]|\mathcal{G}_s]|]$$

$$\le E[|E[X_s - X_t|\mathcal{F}_s]|] = E[|X_s - E[X_t|\mathcal{F}_s]|].$$

By (12.1) we have

$$\mathrm{Var}(X)(\mathcal{G}_t) \le \mathrm{Var}(X)(\mathcal{F}_t) < \infty,$$

i.e., X is a $(\mathcal{G}_t)$-quasimartingale. □

§3. Semimartingales on Stochastic Sets of Interval Type

8.16 Definition. $B \subset \Omega \times R_+$ is called a *set of interval type* if there is a non-negative r.v. T such that for each ω the section B_ω is $[0, T(\omega)[$ or $[0, T(\omega)]$ and $B_\omega \neq \emptyset$.

8.17 Theorem. *B is an optional set of interval type if and only if*

$$I_B = I_F I_{[0,T[} + I_{F^c} I_{[0,T]}, \tag{17.1}$$

where T is a stopping time, $F \in \mathcal{F}_T$ and $T_F > 0$.

Proof. The sufficiency is trivial. We want to show the necessity. Put

$$T(\omega) = \inf\{t : (\omega, t) \in B^c\}, \tag{17.2}$$

$$F = \{\omega : T(\omega) < \infty,\ (\omega, T(\omega)) \in B^c\}. \tag{17.3}$$

Then T is a stopping time. Since $I_F = 1 \iff I_{B^c}(T) I_{[T<\infty]} = 1$, we have $F \in \mathcal{F}_T$. Now it is easy to verify (17.1) □

8.18 Theorem. *The following statements are equivalent:*

1) *B is a predictable set of interval type.*

2) *$I_B = I_F I_{[0,T[} + I_{F^c} I_{[0,T]}$, where T is a stopping time, $F \in \mathcal{F}_{T-}$ and $T_F > 0$ is a predictable time.*

3) *$B = \bigcup_n [0, T_n]$, where (T_n) is an increasing sequence of stopping times (it is called a fundamental sequence for B).*

Proof. 1)⇒2). Let T and F be defined by (17.2) and (17.3). Since B is predictable, we have $F \in \mathcal{F}_{T-}$. Since $[T_F] = [0, T] \cap B^c$ is predictable, T_F is a predictable time.

2)⇒3). We may suppose $F \subset [T < \infty]$. Otherwise, we may replace F by $F[T < \infty]$, and (17.1) remains true. Let (S_n) be a sequence of stopping times foretelling T_F. Put $T_n = S_n \wedge T$. Then it is straightforward to check $B = \bigcup_n [0, T_n]$.

3)⇒1) is obvious. □

8.19 Definition. Let B be an optional set of interval type, and X be a process defined on B (i.e., XI_B is an ordinary process). If there exists an increasing sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow T$ (T is the debut of B^c) and a sequence of semimartingales (X^n) such that

$$\bigcup_n [0, T_n] \supset B \quad \text{and} \quad (XI_B)^{T_n} = (X^n I_B)^{T_n}, \tag{19.1}$$

X is called a *semimartingale on B*, and (T_n, X^n) is called a *fundamental coupled sequence for X*. The collection of all semimartingales on B is denoted by $\mathcal{S}^B$. In the same manner we can define $(\mathcal{S}_p)^B, (\mathcal{M}_{loc})^B, (\mathcal{M}^c_{loc})^B, (\mathcal{M}^d_{loc})^B, (\mathcal{A}_{loc})^B, \mathcal{V}^B, \cdots$.

8.20 Theorem. *Let B be an optional set of interval type and $X \in \mathcal{S}^B$. Let S be a stopping time such that $[0, S] \subset B$. Then $X^S \in \mathcal{S}$.*

Proof. Let (T_n, X^n) be a fundamental coupled sequence for X. Put

$$S_n = (T_n)_{[T_n < S]}.$$

Since $\bigcup_n [T_n \geq S] = \Omega$, $S_n \uparrow \infty$. It is easy to see from (19.1) that

$$(X^S)^{S_n} = X^{S \wedge T_n} = (X^n)^{S \wedge T_n} \in \mathcal{S}.$$

Hence $X^S \in \mathcal{S}_{loc} = \mathcal{S}$. □

Remark. The theorem holds for any class $\mathcal{D}^B$ (e.g. $(\mathcal{M}_{loc})^B, (\mathcal{S}_p)^B, (\mathcal{A}_{loc})^B, \cdots\cdots$), whenever $\mathcal{D}$ is stable under localization: $\mathcal{D}_{loc} = \mathcal{D}$.

8.21 Theorem. *Let B be a predictable set of interval type and X be a process defined on B. Then the following statements are equivalent:*

1) *$X \in \mathcal{S}^B$,*

2) *For each stopping time S satisfying $[0, S] \subset B$, $X^S \in \mathcal{S}$,*

3) *There is a fundamental sequence (T_n) for B such that for each n, $X^{T_n} \in \mathcal{S}$.*

Proof. 1)⇒2) follows from Theorem 8.20. 2)⇒3) it trivial. 3)⇒1) is easy, since in this case (T_n, X^{T_n}) is a fundamental coupled sequence for X. □

8.22 Theorem. *Let B be an optional set of interval type, and X be a process defined on B. If $X \in \mathcal{S}^B$, then there exists a predictable set of interval type $\tilde{B} \supset B$ and $\tilde{X} \in \mathcal{S}^{\tilde{B}}$ such that $XI_B = \tilde{X} I_B$, i.e., X is the restriction of $\tilde{X}$ on B.*

Proof. Let (T_n, X^n) be a fundamental coupled sequence for X, and T be the debut of B^c. Put

$$A_1 = [T_1 = T < \infty], \quad A_k = [T_k = T < \infty, T_{k-1} < T], \quad k > 2.$$

Then $(A_k)_{k \geq 1}$ is a sequence of disjoint sets. Define

$$\tilde{X} = XI_{[0,T[} + \sum_{k=1}^{\infty} X^k_T I_{A_k} I_{[T,\infty[}.$$

It is not difficult to see that $\tilde{X}$ coincides with X on B, and by induction,

$$\tilde{X}^{T_1} = (X^1 I_{[0,T[})^{T_1} + X^1_T I_{[T_1 = T < \infty]} I_{[T,\infty[} = (X^1)^{T_1},$$

$$\tilde{X}^{T_{n+1}} = (X^{n+1} I_{[0,T[})^{T_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n+1} X_T^k I_{A_k} I_{[T,\infty[}$$

$$= (X^{n+1} I_{[0,T[})^{T_{n+1}} + \tilde{X}^{T_n} - (X I_{[0,T[})^{T_n} + X_T^{n+1} I_{A_{n+1}} I_{[T,\infty[}$$

$$= \tilde{X}^{T_n} + (X^{n+1} I_{[0,T[})^{T_{n+1}} - (X^{n+1} I_{[0,T[})^{T_n}$$

$$+ X_T^{n+1} (I_{[T_{n+1}=T<\infty]} - I_{[T_n=T<\infty]}) I_{[T,\infty[}$$

$$= \tilde{X}^{T_n} + (X^{n+1})^{T_{n+1}} - (X^{n+1})^{T_n}.$$

Thus for each n, $\tilde{X}^{T_n} \in \mathcal{S}$, and $\tilde{X} \in \mathcal{S}^{\tilde{B}}$, where $\tilde{B} = \bigcup_n [0, T_n] \supset B$. □

Remark. The theorem holds for any class $\mathcal{D}^B$ whenever $\mathcal{D}$ is stable under stopping.

Theorems 8.22 and 8.21 open a way to investigate semimartingales, local martingales, $\cdots$ on an optional set of interval type. As an example, we discuss the decomposition of local martingales.

8.23 Theorem. *Let B be an optional set of interval type and $M \in (\mathcal{M}_{loc})^B$. Then M can be uniquely decomposed as*

$$M = M_0 + M^c + M^d,$$

where $M^c \in (\mathcal{M}^c_{loc,0})^B$ and $M^d \in (\mathcal{M}^d_{loc})^B$.

Proof. In order to show the existence, by Theorem 8.22 we may consider B as a predictable set of interval type. Let (T_n) be a fundamental sequence for B. For each n,

$$M^{T_n} = M_0 + L^n + N^n,$$

where $L^n \in \mathcal{M}^c_{loc,0}$ and $N^n \in \mathcal{M}^d_{loc}$. By the uniqueness of decomposition

$$(L^{n+1})^{T_n} = L^n, \quad (N^{n+1})^{T_n} = N^n.$$

Then it is easy to see

$$M^c = \sum_{n=1}^{\infty} L^n I_{]T_{n-1},T_n]} \quad \text{and} \quad M^d = \sum_{n=1}^{\infty} N^n I_{]T_{n-1},T_n]} \quad (T_0 = 0)$$

satisfy all the requirements.

We want to show the uniqueness. If M has another decomposition of the same type:

$$M = M_0 + \widetilde{M}^c + \widetilde{M}^d.$$

By Theorem 8.22 we may consider M^c and $\widetilde{M}^c$ (resp. M^d and $\widetilde{M}^d$) as continuous (resp. purely discontinuous) local martingales on a predictable set of interval type $\tilde{B} \supset B$. Then $N = (M^c + M^d) - (\widetilde{M}^c + \widetilde{M}^d) \in$

$(\mathcal{M}_{loc,0})^{\tilde{B}}$, and $N I_B = 0$. Let (T_n) be a fundamental sequence for $\tilde{B}$, and T be the debut of B^c. For each n,

$$N^{T_n} = N_T I_{[T_n = T < \infty]} I_{[T,\infty[} \in \mathcal{M}^d_{loc}.$$

Hence $0 = (N^{T_n})^c = (M^c)^{T_n} - (\widetilde{M}^c)^{T_n}$. Therefore, $M^c I_B = \widetilde{M}^c I_B$, and the uniqueness is established. □

8.24 Remark. It is odd enough that a local martingale on an optional set of interval type B with continuous trajectories on B need not be a continuous local martingale on B. For example, let $T > 0$ be a totally inaccessible time with $P(T < \infty) > 0$, and $B = [0, T[$. Put $A = I_{[T,\infty[}$ and $M = \tilde{A} I_{[0,T[}$. Then $M \in (\mathcal{M}_{loc})^B$, and all the trajectories of M are continuous on B. But M is not a continuous local martingale on B.

By the same argument used in the proof of Theorem 8.23 one may show the following theorems. The details are left to readers.

8.25 Theorem. *Let B be an optional set of interval type, and $M, N \in (\mathcal{M}_{loc})^B$. Then there exists a unique process $[M, N] \in \mathcal{V}^B$ such that $MN - [M, N] \in (\mathcal{M}_{loc,0})^B$ and $\Delta[M, N] = \Delta M \Delta N$ on B.*

8.26 Theorem. *Let B be an optional set of interval type, and $X \in (\mathcal{S}_p)^B$. Then X has the following unique canonical decomposition*

$$X = M + A,$$

where $M \in (\mathcal{M}_{loc})^B$ and $A \in (\mathcal{A}_{loc,0})^B$ is predictable (i.e., A is the restriction of a predictable process on B).

In particular, for any $A \in (\mathcal{A}_{loc})^B$ there exists a unique predictable $\tilde{A} \in (\mathcal{A}_{loc})^B$ such that $A - \tilde{A} \in (\mathcal{M}_{loc,0})^B$. $\tilde{A}$ is also called the dual predictable projection or compensator of A.

§4. Convergence Theorems for Semimartingales

8.27 Definition. Let $X = (X_t)_{t \geq 0}$ be an adapted process. Denote

$$[X \to] = \{\omega : \lim_{t \to \infty} X_t(\omega) \text{ exists and is finite.}\}.$$

It is natural to define $X_\infty = \lim_{t \to \infty} X_t$ on $[X \to]$.

8.28 Theorem. *Let $X = M + B$, where $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$ and $B \in \mathcal{A}^+_{loc,0}$.*

If for every stopping time T, $E[X_T^+ \wedge (\Delta X_T)^+ I_{[T<\infty]}] < \infty$, *then*

$$[M \to][B \to] = [X \to] = [\sup_t |X_t| < \infty] = [\sup_t X_t < \infty] \quad a.s.$$

Proof. Clearly, we have

$$[M \to][B \to] \subset [X \to] \subset [\sup_t |X_t| < \infty] \subset [\sup_t X_t < \infty].$$

Put $S_n = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq n\}$. Then $S_n > 0$ and

$$X^{S_n} \leq n + [X_{S_n}^+ \wedge (\Delta X_{S_n})^+] I_{[S_n<\infty]} = U_n,$$

where $U_n \geq 0$ and $E[U_n] < \infty$. Let $Y^{(n)}$ be a uniformly integrable martingale such that $Y_t^{(n)} = E[U_n|\mathcal{F}_t]$ a.s.. Then

$$Z^{(n)} = Y^{(n)} - X^{S_n} \geq 0.$$

By the assumption there exists a localizing sequence (T_k) for M and B, i.e., for each k, $M^{T_k} \in \mathcal{M}$ and $B^{T_k} \in \mathcal{A}^+$. Thus $(Z^{(n)})^{T_k}$ is a supermartingale. But $E[Z_0^{(n)}] < \infty$, by means of Fatou's lemma we know that $Z^{(n)}$ is a non-negative supermartingale, and

$$P([Z^{(n)} \to]) = 1.$$

Since $P([Y^{(n)} \to]) = 1$, we obtain $P([X^{S_n} \to]) = 1$.

Obviously, we have

$$[\sup_t X_t < \infty] \subset \bigcup_n [S_n = \infty] \subset [X \to] \quad \text{a.s.} \tag{28.2}$$

Since $B \geq 0$,

$$M^{S_n} = X^{S_n} - B^{S_n} \leq X^{S_n} \leq U_n.$$

Applying the above argument to $W^{(n)} = Y^{(n)} - M^{S_n} \geq 0$ yields

$$[\sup_t X_t < \infty] \subset \bigcup_n [S_n = \infty] \subset [M \to] \quad \text{a.s.} \tag{28.3}$$

Combining (28.3) with (28.2) gives

$$[\sup_t X_t < \infty] \subset [X \to][M \to] = [M \to][B \to] \quad \text{a.s.}$$

Hence (28.1) holds. □

8.29 Theorem. *Let $X = M + B$, where M is a local martingale, and B is a predictable increasing process with $B_0 = 0$. If $X \geq 0$ and $E[X_0] < \infty$, then*

$$[B \to] = [X \to][M \to] \quad a.s. \tag{29.1}$$

Proof. Put $T_n = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq n\}$. Then $T_n > 0$ is predictable, and

$$Y^{(n)} = -M^{T_n-} + X_0 = B^{T_n-} - X^{T_n-} + X_0 \leq n + X_0.$$

Since $Y^{(n)}$ is a local martingale and for every stopping time T, $E[(Y_T^{(n)})^+ I_{[T<\infty]}] < \infty$, applying Theorem 8.28 to $Y^{(n)}$ yields

$$P([M^{T_n-} \to]) = P\Big(\sup_t(-M_t^{T_n-}) < \infty\Big) = 1.$$

Clearly, we have

$$[B \to] \subset \bigcup_n [T_n = \infty] \subset [M \to], \quad \text{a.s.},$$

$$[B \to] \subset [M \to][X \to] \quad \text{a.s.}.$$

The reverse implication is trivial. Hence (29.1) holds. □

8.30 Corollary. *Let B be an adapted locally integrable increasing process. Then*

1) $[\tilde{B}_\infty < \infty] \subset [B_\infty < \infty]$.

2) *If for every stopping time T, $E[\Delta B_T I_{[T<\infty]}] < \infty$, then*

$$[\tilde{B}_\infty < \infty] = [B_\infty < \infty].$$

Proof. Without loss of generality, we may assume $B_0 = \tilde{B}_0 = 0$. Since $B = M + \tilde{B}$, $M = B - \tilde{B} \in \mathcal{M}_{loc,0}$, applying Theorem 8.29 to B gives 1) and applying Theorem 8.28 leads to 2). □

8.31 Corollary. *Let M be a local martingale. If for every stopping time T, $E[(|M_T| \wedge |\Delta M_T|) I_{[T<\infty]}] < \infty$, then*

$$[M \to] = [\sup_t M_t < \infty] = [\inf_t M_t > -\infty] \quad a.s.,$$

i.e., for almost all ω either $\lim_{t\to\infty} M_t(\infty)$ exists and is finite, or we have both $\limsup_{t\to\infty} M_t(\omega) = +\infty$ and $\liminf_{t\to\infty} M_t(\omega) = -\infty$.

Proof. We may assume $M_0 = 0$. Then it suffices to apply Theorem 8.28 to M and $-M$ ($B = 0$) respectively. □

8.32 Theorem. *Let M be a locally square integrable martingale. Then*

$$[\langle M \rangle \to] \subset [M \to], \quad \text{a.s.}.$$

Moreover, if for every stopping time T, $E[(\Delta M_T)^2 I_{[T<\infty]}] < \infty$, then

$$[\langle M \rangle \to] = [[M] \to] = [M \to], \quad a.s.$$

Proof. We may assume $M_0 = 0$. Put

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t \geq n\}.$$

Then T_n is predictable, and M^{T_n-} is a local martingale. Because

$$\langle M^{T_n-} \rangle = \langle M \rangle^{T_n-} \leq n,$$

M^{T_n-} is a square integrable martingale, and $P([M^{T_n-} \to]) = 1$. Hence

$$[\langle M\rangle \to] \subset \bigcup_n [T_n = \infty] \subset [M \to] \quad \text{a.s.}.$$

If for every stopping time T, $E[(\Delta M_T)^2 I_{[T<\infty]}] < \infty$, by Corollary 8.30, $[\langle M\rangle \to] = [[M] \to]$ a.s.. Put

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}.$$

Then

$$M^{S_n} \leq n + |\Delta M_{S_n}| I_{[S_n<\infty]}.$$

M^{S_n} is a square integrable martingale, and $\langle M\rangle_{S_n} = \langle M^{S_n}\rangle_\infty < \infty$ a.s..
Hence

$$[M \to] \subset \bigcup_n [S_n = \infty] \subset [\langle M\rangle \to] \quad \text{a.s.}. \quad \square$$

8.33 Theorem. *Let $X = M + B$, where M is a local martingale and B is a predictable increasing process. If ΔX is bounded, then*

$$[X \to] = [M \to][B \to] = [\langle M\rangle + B \to] = [\langle X\rangle + B \to] \quad a.s..$$

Proof. We may assume $M_0 = B_0 = 0$. By Theorem 8.8 we know that ΔB is bounded, and so is ΔM. Hence M is a locally square integrable martingale. By Theorems 8.28 and 8.32 we have

$$[X \to] = [M \to][B \to] = [\langle M\rangle + B \to] \quad \text{a.s.}.$$

On the other hand, $[X] = [M] + 2[M, B] + [B]$, $[B]$ is predictable, $[M, B] = (\Delta M).B$ is a local martingale ($[M, B] \in \mathcal{A}_{loc}$ and $\widetilde{[M, B]} = {}^p(\Delta M).B = 0$), we have

$$\langle X\rangle = \langle M\rangle + [B].$$

Evidently, on $[B \to]$, $\sum_{s>0} \Delta B_s \leq B_\infty < \infty$, and $[B]_\infty = \sum_{s>0} (\Delta B_s)^2 < \infty$.

Hence

$$[\langle M\rangle + B \to] = [\langle X\rangle + B \to] \quad \text{a.s.}. \quad \square$$

The above convergence results are also available for local martingales and semimartingales defined on stochastic sets of interval type discussed in the previous paragraph.

Problems and Complements

8.1 Let X be an adapted cadlag process. If there exists a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ and a sequence $(X^{(n)})$ of semimartingales such that for each n $X^{T_n-} = (X^{(n)})^{T_n-}$, then X is a semimartingale.

8.2 Let X be a special semimartingale and T be a stopping time. Then $\Delta X_T I_{[T<\infty]}$ is σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_{T-}$.

8.3 Denote by $\mathcal{D}$ the collection of all optional processes of class (D). Then $\mathcal{S}_p = \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_{loc}$.

8.4 X is a predictable semimartingale if and only if $X = M + A$, where M is a continuous local martingale and A is a predictable process with finite variation.

8.5 Let $X \in \mathcal{S}$. If $E[[X]_\infty] < \infty$, then $X \in \mathcal{S}_p$. In addition, if $X = M + A$ is the canonical decomposition of X, then $M \in \mathcal{M}^2$.

8.6 Put $\mathcal{S}^* = \{X \in \mathcal{S} : X = M + A, M \in \mathcal{M}^c_{loc}, A \in \mathcal{V}_0\}$. 1) Let $X \in \mathcal{S}$. Then $X \in \mathcal{S}^*$ if and only if for each $t > 0$, $\sum_{s\leq t} |\Delta X_s| < \infty$, a.s.. 2) $X \in \mathcal{S}^*$ if there exists a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ and a sequence $(X^{(n)})$ of elements in $\mathcal{S}^*$ such that for each n, $X^{T_n-} = (X^{(n)})^{T_n-}$. In particular, $(\mathcal{S}^*)_{loc} = \mathcal{S}^*$.

8.7 Let X be an adapted integrable increasing process. Then X is a quasimartingale. Find its Rao decomposition.

8.8 Let X be a cadlag supermartingale. Then X is a quasimartingale if and only if $\sup_t E[X_t^-] < \infty$, and $\text{Var}(X) = E[X_0] + 2\sup_t E[X_t^-]$.

8.9 Let X be an adapted cadlag process.

1) If $S \geq T$ are two stopping times, then $\text{Var}(X^S) \geq \text{Var}(X^T)$.

2) If (T_n) is a sequence of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$, then $\text{Var}(X) = \sup_n \text{Var}(X^{T_n})$.

8.10 Let $\mathcal{T}_b$ be the collection of all bounded stopping times. Let M be an optional process. Put $\|M\|_1 = \sup\{E[|M_T|] : T \in \mathcal{T}_b\}$. If $\|M\|_1 < \infty$, we say that M is bounded in L^1.

Let M be a local martingale. Then M is a quasimartingale if and only if M is bounded in L^1. In this case, $\text{Var}(M) = \|M\|_1$.

8.11 Let X be an adapted cadlag process. Then X is a quasimartingale if and only if $X = M + A$, where M is a local martingale, bounded in L^1, and A is a predictable process with integrable variation and $A_0 = 0$. In addition, such decomposition of a quasimartingale is unique.

8.12 Denote by $\mathcal{Q}$ the class of all quasimartingales. Then $\mathcal{S}_p = \mathcal{Q}_{loc}$.

8.13 Let M be a local martingale, bounded in L^1. Then M can be uniquely decomposed as follows: $M = M' - M''$, where M' and M'' are non-negative local martingales and $\|M\|_1 = \|M'\|_1 + \|M''\|_1$. (This decomposition is called *Krickeberg-Kazamaki decomposition*.)

8.14 Let M be a local martingale, bounded in L^1. Let $(\mathcal{G}_t)$ be a filtration satisfying the usuall conditions such that for each $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. If M is $(\mathcal{G}_t)$-adapted, then M is also a $(\mathcal{G}_t)$-local martingale, bounded in

L^1.

8.15 Let X be a local martingale. Let (τ_t) be a continuous change of time such that for each $t \geq 0, \tau_t < \infty$. Put $Y_t = X_{\tau_t}$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$, $t \geq 0$. Then $Y = (Y_t)$ is a $(\mathcal{G}_t)$-local martingale.

8.16 Let B be a predictable set of interval type, and M be a local martingale on B. Then there exists a fundamental sequence (T_n) for B such that for each n, M^{T_n} is a uniformly integrable martingale.

8.17 Let (T_n) be a sequence of stopping times, $\sup_n T_n = T$, and M be a process defined on $[\![0, T[\![$. If for each n, M is a local martingale on $[\![0, T_n]\!]$, then M is a local martingale on $[\![0, T[\![$.

8.18 Let $X = M + B$, where M is a local martingale and B is a predictable process with finite variation and $B_0 = 0$. If $X > 0$ and $E[X_0] < \infty$, then $[B^+ \to] = [X \to][M \to][B^- \to]$.

8.19 Let $X = M + B$, where M is a local martingale and B is a predictable process with finite variation and $B_0 = 0$. If ΔX is bounded, then $[M \to, B^+ + B^- \to] = [\inf_t X_t > -\infty][B^+ \to] = [\sup_t X_t < \infty][B^- \to]$.

8.20 Let $X \in \mathcal{S}$ and $X = M + A$ be a decomposition of X, where $M \in \mathcal{M}_{loc}$ and $A \in \mathcal{V}$. Set

$$j_n(M, A) = E\left[1 \wedge \left(\sqrt{[M]_n} + \int_{[0,n]} |dA|\right)\right] + \sup_T E[1 \wedge |\Delta M_{T\wedge n}|],$$

where T runs through the set of all stopping times,

$$\|X\|_{\mathcal{S},n} = \inf_{X=M+A} j_n(M, A),$$

where infimum is taken over all decompositions of X, and

$$\|X\|_{\mathcal{S}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|X\|_{\mathcal{S},n}.$$

Then 1) $\mathcal{S}$ with $d(X, Y) = \|X - Y\|_{\mathcal{S}}$ is a complete metric space (the topology induced by this metric is called *Emery topology*).

2) Let $X^n, X \in \mathcal{S}$. If there exists a sequence (T_k) of stopping times with $T_k \uparrow \infty$ such that for each k, $(X^n - X)^*_{T_k -} \xrightarrow{P} 0$ then $\|X^n - X\|_{\mathcal{S}} \to 0$.

3) Let $X^n, X \in \mathcal{S}$. If $\|X^n - X\|_{\mathcal{S}} \to 0$, then there exists a subsequence $(X^{n'})$ and a sequence (T_k) of stopping times with $T_k \uparrow \infty$ such that for each k, $(X^{n'} - X)^*_{T_k -} \xrightarrow{P} 0$.

Chapter IX

Stochastic Integrals

The stochastic integrals we will define are of the form $\int_{[0,t]} H_s dX_s$ or $\int_0^t H_s dX_s$, where both the integrand (H_t) and the integrator (X_t) are stochastic processes. In 1944, K. Itô first defined the stochastic integrals of adapted measurable processes w.r.t. a Brownian motion. The key character of this kind of stochastic integrals is that the processes produced by integration are martingales (or, more generally, local martingales). In 1967, H. Kunita and S. Watanabe defined the stochastic integrals of a class of adapted measurable processes w.r.t. general square integrable martingales, and took a crucial step in developing modern theory of stochastic integrals. In 1970, C. Doléans-Dade and P. A. Meyer investigated the stochastic integrals of locally bounded predictable processes w.r.t. local martingales or semimartingales. In 1976, P. A. Meyer discussed the stochastic integrals of optional processes w.r.t. local martingales. In 1979, J. Jacod found the reasonable way to define the stochastic integrals of non-bounded predictable processes w.r.t. semimartingales. In this chapter we introduce the definition and fundamental properties of stochastic integrals (§1–§3). In §4 we present the very useful Lenglart's inequality, and by means of it study the continuity of stochastic integrals w.r.t. integrand processes. In §5 we deal with the change of variables formula (Itô formula) and Doléans-Dade exponential formula for semimartingales. In §6 we introduce local times of semimartingales and a generalization of Itô formula. In §7 a short discussion on stochastic differential equations, by using Métivier-Pellaumail's approach, is given.

§1. Stochastic Integrals of Predictable Processes with Respect to Local Martingales

In this paragraph, we will define (indefinite) stochastic integrals of predictable processes w.r.t. local martingales such that the resulted integrals are still local martingales. At first, for elementary predictable processes we can define stochastic integrals in a natural manner. And it is easy to find the characterization for this kind of stochastic integrals. Then, based on this characterization, the definition of stochastic intergals for general predictable processes is given.

Let S and T be a pair of stopping times, and $S \leq T$. Let ξ be a real $\mathcal{F}_S$-measurable r.v.. Put $H = \xi I_{]S,T]}$. Then H is a predictable process. Let M be a local martingale. The stochastic integral of H w.r.t. M, denoted also by $H.M$, should be defined reasonably as

$$(H.M)_t = \xi(M_{t\wedge T} - M_{t\wedge S}), \quad t \geq 0.$$

By Theorem 7.38 we know that $H.M$ is a local martingale, and for every local martingale N we have

$$[H.M, N] = \xi([M,N]^T - [M,N]^S) = H.[M,N],$$

where $H.[M,N]$ is an indefinite Stieltjes integral. In addition, by Theorem 7.31 we know that $H.M$, defined above, is the unique local martingale L such that for every local martingale N,

$$[L,N] = H.[M,N]. \tag{1.1}$$

Enlightened by this example, we introduce the following definition of stochastic integrals.

9.1 Definition. Let M be a local martingale, and H be a predictable process. If there exists a local martingale L such that (1.1) holds for every local martingale N (this tacitly implies that H is integrable w.r.t. $[M,N]$), then we say that H is *integrable w.r.t. M* in the domain of local martingales (or simply, *integrable*), and L (it is uniquely determined by Theorem 7.31) is called the *stochastic integral of H w.r.t. M*, and denoted by $H.M$. The collection of all predictable processes which are integrable w.r.t. M is denoted by $L_m(M)$.

The following theorem gives the characterization for elements in the $L_m(M)$.

9.2 Theorem. *Let M be a local martingale, and H be a predictable process. Then $H \in L_m(M)$ if and only if $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathcal{A}^+_{loc}$.*

Proof. Necessity. Putting $N = H.M$ in (1.1) yields

$$[H.M] = H.[M, H.M] = H^2.[M].$$

Since $H.M \in \mathcal{M}_{loc}$, by Theorem 7.30 $\sqrt{H^2.[M]} = \sqrt{[H.M]} \in \mathcal{A}^+_{loc}$.

Sufficiency. It suffices to show that there exist $L' \in \mathcal{M}^c_{loc,0}$ and $L'' \in \mathcal{M}^d_{loc}$ such that for every $N \in \mathcal{M}_{loc}$,

$$[L', N] = H.[M^c, N], \tag{2.1}$$

$$[L'', N] = H.[M^d, N]. \tag{2.2}$$

Then $L = H_0M_0 + L' + L''$ is the required local martingale.

By Theorem 7.42 and Corollary 7.23, there exists a unique $L'' \in \mathcal{M}^d_{loc}$ such that $\Delta L'' = H\Delta M$. Hence (2.2) holds.

We want to show the existence of L'. At first, we assume

$$E[(H^2.[M^c])_\infty] < \infty.$$

By Kunita-Watanabe inequality (Theorem 6.33), for every $N \in \mathcal{M}^{2,c}_0$

$$E\Big[\int_0^\infty |H_s||d[M^c,N]_s|\Big] \leq \Big(E\Big[\int_0^\infty H_s^2 d[M^c]_s\Big)^{\frac{1}{2}}(E[N]_\infty)^{1/2}.$$

Thus $\varphi(N) = E\Big[\int_0^\infty H_s d[M^c,N]_s\Big]$ is a bounded linear functional on the Hilbert space $\mathcal{M}^{2,c}_0$. By Riesz representation theorem, there exists a unique $L' \in \mathcal{M}^{2,c}_0$ such that for all $N \in \mathcal{M}^{2,c}_0$,

$$E[L',N]_\infty = E[L'_\infty N_\infty] = E\Big[\int_0^\infty H_s d[M^c,N]_s\Big]. \tag{2.3}$$

Let T be a stopping time. Replacing N by N^T in (2.3) yields

$$E[L',N]_T = E\Big[\int_0^T H_s d[M^c,N]_s\Big].$$

By Theorem 4.40 we know $A = [L',N] - H.[M^c,N] \in \mathcal{M}$. But A is a continuous adapted process with finite variation and $A_0 = 0$. By Theorem 6.3.2) $A = 0$, i.e.,

$$[L',N] = H.[M^c,N].$$

Now it is easy to see that (2.1) holds for every $N \in \mathcal{M}_{loc}$.

Generally, we have a sequence (T_n) of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ and for each n, $E[(H^2.[M^c])_{T_n}] < \infty$. Applying the result obtained above to each local martingale $(M^c)^{T_n}$, we have $L^{(n)} \in \mathcal{M}_0^{2,c}$ such that for all $N \in \mathcal{M}_{loc}$,

$$[L^{(n)}, N] = H.[M^c, N]^{T_n}.$$

In view of the uniqueness, for each n, $(L^{(n+1)})^{T_n} = L^{(n)}$. By "piecing together", we have $L' \in \mathcal{M}_{loc,0}^{2,c}$ and (2.1) holds for all $N \in \mathcal{M}_{loc}$. □

The following theorem summarizes the fundamental properties of stochastic integrals.

9.3 Theorem. *Let M be a local martingale, $H, K \in L_m(M)$.*

1) $L_m(M) = L_m(M^c) \cap L_m(M^d)$, $(H.M)_0 = H_0 M_0$, $(H.M)^c = H.M^c$, $(H.M)^d = H.M^d$.

2) $\Delta(H.M) = H\Delta M$.

3) $H + K \in L_m(M)$, *and* $(H+K).M = H.M + K.M$.

4) *Let H' be a predictable process. Then $H' \in L_m(H.M)$ if and only if $(HH') \in L_m(M)$. In this case, we have*

$$H'.(H.M) = (H'H).M.$$

5) *Let T be a stopping time. Then*

$$(H.M)^T = H.M^T = (HI_{[0,T]}).M.$$

Proof. 1) and 2) have been included in the proof of Theorem 9.2. 3)–5) are apparent. □

As usual, we also use the following notations for stochastic integrals: for $t \geq 0$,

$$\int_{[0,t]} H_s dM_s = (H.M)_t,$$

$$\int_0^t H_s dM_s = \int_{]0,t]} H_s dM_s = ((HI_{]0,\infty[}).M)_t.$$

The concept of stochastic integral will be generalized below, but we always use the same notations for stochastic integrals.

9.4 Examples. 1) Let M be a local martingale, and A be a predictable process with finite variation. Then $\Delta A \in L_m(M)$ and

$$(\Delta A).M = [M, A] - M_0 A_0. \tag{4.1}$$

In fact, ΔA is locally bounded (Theorem 7.7), ΔA is integrable w.r.t. $[M, N]$ for all $N \in \mathcal{M}_{loc}$. On the other hand, we have already known that $[M, A] - M_0 A_0$ is a local martingale (see the proof of Theorem 8.33). It is easy to see for all $N \in \mathcal{M}_{loc}$,

$$[[M, A] - M_0 A_0, N] = \sum(\Delta M \Delta A \Delta N) = (\Delta A).[M, N].$$

By Definition 9.1, (4.1) holds.

This result is called *Yoeurp's lemma*.

2) Let M be a local martingale, and $T > 0$ be a predictable time. Then

$$I_{[T]}.M = \Delta M_T I_{[T,\infty[}.$$

In fact, it is well known that $\Delta M_T I_{[T,\infty[}$ is a local martingale and for all $N \in \mathcal{M}_{loc}$, $[\Delta M_T I_{[T,\infty[}, N] = \Delta M_T \Delta N_T I_{[T,\infty[} = I_{[T]}.[M, N]$.

9.5 Theorem. *Let M be a local martingale with locally integrable variation, and H be a predictable process.*

1) *If $\sum |H\Delta M| \in \mathcal{A}_{loc}^+$, then $H \in L_m(M)$ and*

$$(H.M)_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega) dM_s(\omega), \quad t \geq 0, \tag{5.1}$$

where the right hand side of (5.1) is a Stieltjes integral. For the sake of clarity, we denote it by $H_S M$ sometimes.

2) *If $\sum |H\Delta M| \in \mathcal{V}^+$ and $H \in L_m(M)$, then (5.1) holds as well.*

Proof. 1) Since $\sum |H\Delta M| \in \mathcal{A}_{loc}^+$, by Theorem 6.2 the Stieltjes integral $H_S M$ exists, and $H_S M \in \mathcal{M}_{loc}$ by Theorem 6.5. On the other hand,

$$\sqrt{H^2.[M]} \leq \sum |H\Delta M| \in \mathcal{A}_{loc}^+,$$

thus $H.M$ exists, and $\Delta(H.M) = H\Delta M = \Delta(H_S M)$. Because $H.M - (H.M)_0$ and $H_S M - (H_S M)_0$ are all purely discontinuous local martingales, and $(H.M)_0 = H_0 M_0 = (H_S M)_0$, we have $H.M = H_S M$.

2) Let (T_n) be a sequence of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ and for each n, $E\left[\sqrt{\sum_{s \leq T_n} H_s^2 \Delta M_s^2}\right] < \infty$. Put

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : \sum_{s \leq t} |H_s \Delta M_s| > n\} \wedge T_n.$$

Then $S_n \uparrow \infty$ and for each n, $E\left[\sum_{s \leq S_n} |H_s \Delta M_s|\right] < \infty$. Hence $\sum |H\Delta M| \in \mathcal{A}_{loc}^+$ and 2) follows from 1). □

Theorem 9.5 illustrates that our predictable stochastic integrals (i.e., the integrals of predictable processes) are just Stieltjes integrals when in-tegrators are local martingales with finite variation and the corresponding Stieltjes integrals exist. This is another reason which justifies our definition of stochastic integrals.

§2. Compensated Stochastic Integrals of Progressive Processes with Respect to Local Martingales

We will extend the class of integrands to progressive processes.

9.6 Lemma. *Let M be a continuous local martingale, and H be a progressive process. Then there exists $L \in \mathcal{M}_{loc}$ such that (1.1) holds for all $N \in \mathcal{M}_{loc}$ if and only if $H^2.[M] \in \mathcal{V}^+$. In this case, there exists a predictable process $K \in L_m(M)$ such that $K.M = L$. We say that H is integrable w.r.t. M, and L is called the stochastic integral of H w.r.t. M, denoted by $H.M$.*

Proof. The necessity is easy (putting $N = L$ in (1.1)). Now assume $H^2.[M] \in \mathcal{V}^+$. Let ${}^oH$ be the optional projection of H. We have $({}^oH)^2.[M] = H^2.[M]$ (refer to Problem 5.9). By Theorem 3.20 there exists a predictable process K such that $[K \neq {}^oH]$ is a thin set. Thus we have $K^2.[M] = ({}^oH)^2.[M] = H^2.[M]$. Put $L = K.M$. Then for all $N \in \mathcal{M}_{loc}$ we have

$$[L,N] = K.[M,N] = {}^oH.[M,N] = H.[M,N]. \quad \square$$

9.7 Definition. Let M be a purely discontinuous local martingale, and H be a progressive process. If $H\Delta M$ has predictable projection, and there exists a purely discontinuous local martingale L such that $\Delta L = H\Delta M - {}^p(H\Delta M)$, we call L the *compensated stochastic integral of H w.r.t. M*, and denote $L = H_{\dot c}M$.

It is easy to see that if H is predictable, Definition 9.7 coincides with Definition 9.1. In general, the predictable projection of $H\Delta M$ (if exists) is not zero. We have no longer $\Delta(H_{\dot c}M) = H\Delta M$, but $\Delta(H_{\dot c}M) = H\Delta M - {}^p(H\Delta M)$. The following is a typical example of compensated stochastic integrals.

9.8 Lemma. *Let M be a purely discontinuous local martingale. Put*

$H = I_{[\Delta M \neq 0]}$. Then the compensated stochastic integral of H w.r.t. M exists, and $H_{\dot c}M = M$.

Proof. We have $H\Delta M = \Delta M$, and ${}^p[H\Delta M] = 0$. Then by definition $M = H_{\dot c}M$. $\square$

9.9 Definition. Let M be a local martingale, and H be a progressive process. If $H^2.[M^c] \in \mathcal{V}^+$, ${}^p(H\Delta M)$ exists and

$$\sqrt{\sum (H\Delta M - {}^p(H\Delta M))^2} \in \mathcal{A}^+_{loc},$$

define

$$H_{\dot c}M = H_0M_0 + H.M^c + H_{\dot c}M^d.$$

$H_{\dot c}M$ is called the *compensated stochastic integrl of H w.r.t. M.*

Evidently, the compensated stochastic integral is a generalization of the predictable stochastic integral in Definition 9.1. The conditions, given above, for the existence of compensated stochastic integrals are the most general ones, but they are hard to be verified. Besides, we have no characterization for compensated stochastic integrals. The following theorem remedies these two defects to some extent. In fact, it is the definition of compensated stochastic integrals given first by P. A. Meyer.

9.10 Theorem. *Let M be a local martingale, and H be a progressive process. If $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathcal{A}^+_{loc}$, then $H_{\dot c}M$ exists, and it is the unique local martingale L such that for every bounded martingale N, $[L,N] - H.[M,N] \in \mathcal{M}_{loc,0}$.*

Proof. Without loss of generality we may assume $M_0 = 0$. Put

$$W = H\Delta M I_{[|H\Delta M|>1]}, \quad U = H\Delta M I_{[|H\Delta M| \leq 1]}.$$

Then $A = \sum W \in \mathcal{A}_{loc}$. We have ${}^p(W) = {}^p(\Delta A) = \Delta(A^p)$. Since $H\Delta M = W + U$, ${}^p(H\Delta M)$ exists. At the same time, $B = \sum(U^2) \in \mathcal{A}^+_{loc}$ and $\Delta(B^p) = {}^p(U^2)$,

$$\sum({}^pU)^2 \leq \sum {}^p(U^2) \leq \sum \Delta(B^p) \leq B^p.$$

Put $Z = H\Delta M - {}^p(H\Delta M)$. Then

$$\sum(Z^2) \leq 2\left\{H^2.[M] + \sum({}^p(H\Delta M))^2\right\}$$
$$\leq 2\left\{H^2.[M] + 2\sum({}^pW)^2 + 2\sum({}^pU)^2\right\},$$

$\sqrt{\sum(Z^2)} \in \mathcal{A}^+_{loc}$. On the other hand, $H^2.[M^c] \leq H^2.[M] \in \mathcal{V}^+$. Hence $H_{\dot c}M$ exists.

Now let N be a bounded martingale. By Kunita Watanabe inequality we know

$$V = [H_{\natural}M, N] - H.[M,N] \in \mathcal{A}_{loc}.$$

Evidently, $\Delta V = -{}^p(H\Delta M)\Delta N$. Thus $\Delta(V^p) = {}^p(\Delta V) = 0$, i.e. V^p is a continuous process with finite variation. Since $V^c = [H.M^c, N^c] - H.[M^c, N^c] = 0$, $V = \sum(\Delta V)$ is a purely discontinuous process with finite variation having only accessible jumps (note that ${}^p(H\Delta M)$ is a predictable thin process). By Theorem 7.14.1) V^p should be a purely discontinuous process with finite variation. Hence, it must be $V^p = 0$, i.e., $V \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Finally, by Theorem 7.36 the local martingale satisfying this requirement is unique. □

Remarks. 1) In the theorem, if H^2 is integrable w.r.t. $[M]$, then the condition $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathcal{A}^+_{loc}$ is also necessary for the existence of $H_{\natural}M$. The details are left to the reader.

2) Hereinafter compensated stochastic integrals are also called simply stochastic integrals, and the notation $H_{\natural}M$ is replaced by $H.M$.

To conclude this paragraph, we expound how to define the stochastic integrals of adapted measurable process w.r.t. a class of continuous local martingales. They generalize Itô's stochastic integrals w.r.t. a Brownian motion.

9.11 Theorem. *Let M be a continuous local martingale with $M_0 = 0$, and $a = (a_t)$ be a continuous increasing (non-random) function such that for almost all ω, $d[M](\omega) \ll da$. Let H be an adapted measurable process. Then there exists $L \in \mathcal{M}_{loc}$ such that (1.1) holds for all $N \in \mathcal{M}_{loc}$ if and only if $H^2.[M] \in \mathcal{V}^+$. In this case, there exists a predictable process K such that $K \in L_m(M)$ and $K.M = L$. L is called the stochastic integral of H w.r.t. M, and denoted by $H.M$.*

Proof. Only the sufficiency is required to be proved. Let $\overline{H}$ be an optional modification of H (i.e., $\overline{H}$ is optional and $\forall t \in \mathbf{R}_+$ $\overline{H}_t = H_t$ a.s., refer to Problem 5.10). Since $d[M]$ is absolutely continuous w.r.t. da, by Fubini's theorem we know

$$\overline{H}^2.[M] = H^2.[M].$$

In fact, let (T_n) be a sequence of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ and

$$E\Big[\int_0^{T_n} H_s^2 d[M]_s\Big] < \infty, \qquad \forall n \geq 1.$$

Then for every stopping time T,

$$\begin{aligned} E\Big[\int_0^{T\wedge T_n} H_s^2 d[M]_s\Big] &= \int_0^\infty E\Big[H_s^2 I_{]0,T\wedge T_n]} \frac{d[M]}{da}\Big] da_s \\ &= \int_0^\infty E\Big[\overline{H}_s^2 I_{]0,T\wedge T_n]} \frac{d[M]}{da}\Big] da_s \\ &= E\Big[\int_0^{T\wedge T_n} \overline{H}_s^2 d[M]_s\Big]. \end{aligned}$$

By Lemma 9.6 $\overline{H}.M$ exists, and for all $N \in \mathcal{M}_{loc}$

$$[\overline{H}.M, N] = \overline{H}.[M,N] = H.[M,N],$$

where the second equality follows from Kunita-Watanabe inequality and $(\overline{H} - H)^2.[M] = 0$ (again by Fubini's theorem). The other assertions follow directly from Lemma 9.6. □

§3. Stochastic Integrals of Predictable Processes with Respect to Semimartingales

Since every semimartingale can be decomposed as the sum of a local martingale and an adapted process of finite variation, naturally the stochastic integral w.r.t. a semimartingale can be considered as the sum of integrals w.r.t. the two parts. The crucial point lies in that the sum of integrals should be independent of the decompositions of this semimartingale. The following lemma guarantees it.

9.12 Lemma. *Let X be a semimartingale, and H be a predictable process. Let $X = M + A$ and $X = N + B$ be two decompositions of X, where $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$ and $A, B \in \mathcal{V}_0$. If $H \in L_m(M) \cap L_m(N)$, $H_{\natural}A$ and $H_{\natural}B$ exist, then*

$$H.M + H_{\natural}A = H.N + H_{\natural}B. \tag{12.1}$$

Proof. Since $M - N = B - A \in \mathcal{W}_{loc,0}$, by Theorem 9.5.2) $H.(M-N) = H_{\natural}(B-A)$, i.e., (12.1) holds. □

Based on Lemma 9.12, we may give the following definition.

9.13 Definition. Let X be a semimartingale, and H be a predictable process. If there exists a decomposition $X = M + A$, where $M \in \mathcal{M}_{loc}$ and $A \in \mathcal{V}_0$, such that $H \in L_m(M)$ and $H_{\natural}A$ exists, we say that H is *integrable*

w.r.t. X in the domain of semimartingales (or simply H is X *integrable*), and $X = M + A$ is an *H-decomposition of X*. At this time, put

$$H.X = H.M + H_{\S}A. \tag{13.1}$$

$H.X$ is independent of H-decompositions of X, and is called the *stochastic integral of H w.r.t. X*.

9.14 Remarks. 1) Let X be a semimartingale and $X = M + A$ be a decomposition of X, where $M \in \mathcal{M}_{loc}$ and $A \in \mathcal{V}_0$. Then for any locally bounded predictable process H, H is X-integrable, and $X = M + A$ is an H-decomposition of X.

2) Definition 9.13 of stochastic integrals of predictable processes w.r.t. semimartingale is a natural generalization of Definition 9.1 of stochastic integrals of predictable processes w.r.t. local martingales. In fact, if M is a local martingale, H is a predictable process, and H is integrable w.r.t. M in the domain of local martingales, then H is also integrable w.r.t. M in the domain of semimartingales, and the stochastic integrals in the two senses coincide. But if H is integrable w.r.t. M in the domain of semimartingales, in general we cannot assert that $H.M$ is still a local martingale, i.e., H need not be integrable w.r.t. M in the domain of local martingales. For example, let $M \in \mathcal{W}_{loc,0}$ and H be a predictable process. If the Stieltjes integral $H_{\S}M$ exists, but $H_{\S}M \notin \mathcal{A}_{loc}$, then $H \notin L_m(M)$.

The next theorem summarizes the fundamental properties of stochastic integrals of predictable processes w.r.t. semimartingales. Its proof is easy. Hereforth we denote by $L(X)$ the collection of all predictable processes which are integrable w.r.t. a semimartingale X.

9.15 Theorem. *Let X be a semimartingale, and $H \in L(X)$.*

1) $(H.X)^c = H.X^c$, $\Delta(H.X) = H\Delta X$, $(H.X)_0 = H_0X_0$.

2) *For any stopping time T,*

$$(H.X)^T = H.X^T = (HI_{[0,T]}).X, (H.X)^{T-} = H.X^{T-}.$$

3) *For any semimartingale Y,*

$$[H.X, Y] = H.[X, Y].$$

4) *If Y is a semimartingale and $H \in L(Y)$, then $H \in L(X + Y)$ and $H.(X + Y) = H.X + H.Y$.*

5) *If K is a predictable process and $|K| \leq |H|$, then $K \in L(X)$.*

9.16 Theorem. *Let X be a special semimartingale, and $X = M + A$ be its canonical decomposition. Assume $H \in L(X)$. Then $H.X$ is also a special semimartingale if and only if $X = M + A$ is an H-decomposition of X.*

Proof. The sufficiency is trivial. We are to show the necessity. Let $X = N + B$ be an H-decomposition of X, where $N \in \mathcal{M}_{loc}$ and $B \in \mathcal{V}_0$. Then $H.X = H.N + H.B \in \mathcal{S}_p$ and $H.B \in \mathcal{A}_{loc}$. Because $A = \tilde{B}$, by Theorem 5.23.2) H is integrable w.r.t. A and $H.A = \widetilde{H.B}$. We have

$$\sqrt{H^2.[M]} \leq \sqrt{H^2.[X]} + \sqrt{H^2.[A]} \leq \sqrt{[H.X]} + \sum |H\Delta A|.$$

Since $\sqrt{[H.X]} \in \mathcal{A}^+_{loc}$ (Theorem 8.6), $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathcal{A}^+_{loc}$, i.e., $H \in L_m(M)$. In a word, $X = M + A$ is an H-decomposition of X. □

The next theorem is an important consequence of the above theorem.

9.17 Theorem. *Let X be a semimartingale and $H \in L(X)$. Let U be an optional set such that $U \supset [|H\Delta X| > 1$ or $|\Delta X| > 1]$ and for almost all ω, $\{s : (\omega, s) \in U\} \cap [0, t]$ contains at most a finite number of points for each $t > 0$. Put*

$$A_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s I_{\{(\cdot,s)\in U\}}, \quad Z_t = X_t - A_t, \ t \geq 0.$$

Then $H \in L(Z)$, and the canonical decomposition $Z = N + B$ of the special semimartingale Z is an H-decomposition of Z.

Proof. Under the assumption of the theorem, the definition of (A_t) is meaningful, and A is a process with finite variation whose trajectories are all step functions. Hence H is integrable w.r.t. A, and thus integrable w.r.t. Z. In addition, we have $|\Delta Z| \leq 1$, $|\Delta(H.Z)| = |H\Delta Z| \leq 1$. Thus Z and $H.Z$ are special semimartingales. By Theorem 9.16 the canonical decomposition $Z = N + B$ is an H-decomposition of Z. □

Remark. In the theorem, if $U = [|H\Delta X| > 1$ or $|\Delta X| > 1]$, then $X = N + (B + A)$ is an H-decomposition of X, where $N \in \mathcal{M}_{loc}$. But $|\Delta N| \leq 2$ (since $|\Delta B| \leq 1$), so N is a locally bounded martingale.

Below we continue to investigate the properties of stochastic integrals by making use of Theorem 9.17.

9.18 Theorem. *Let X be a semimartingale.*

1) $H, K \in L(X) \Longrightarrow H + K \in L(X)$.

2) Let $H \in L(X)$ and K be a predictable process. Then $K \in L(H.X)$ if and only if $KH \in L(X)$. In this case, we have $K.(H.X) = (KH).X$.

Proof. 1) In Theorem 9.17 put $U = [|H\Delta X| > 1$ or $|K\Delta X| > 1$ or $|\Delta X| > 1]$. Then $X = N + (A + B)$ is both an H-decomposition and a K-decomposition. So it is an $(H+K)$-decomposition, i.e., $H + K \in L(X)$.

2) The necessity is easy. We want to show the sufficiency. Let $KH \in L(X)$. In Theorem 9.17 put $U = [|H\Delta X| > 1$ or $|KH\Delta X| > 1$ or $|\Delta X| > 1]$. Then $X = N + (A + B)$ is both an H-decomposition and an HK-decomposition. This implies that $H.X = H.N + H.(A + B)$ is a K-decomposition of $H.X$. Hence $K \in L(H.X)$ and

$$K.(H.X) = K.(H.N) + K.(H.(A+B))$$
$$= (KH).N + (KH).(A+B) = (KH).X. \quad \square$$

9.19 Theorem. *Let X be a semimartingale and H be a predictable process. If there exists a sequence (T_n) of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ and $H \in L(X^{T_n})$ for each n, then $H \in L(X)$.*

Proof. Since $H^2.[X]^{T_n} = [H.X^{T_n}]$, $H^2.[X]$ is an increasing process. Put

$$A = \sum(\Delta X I_{[|H\Delta X|>1 \text{ or } |\Delta X|>1]}), \; Z = X - A.$$

Then A is a process with finite variation whose trajectories are all step functions. Hence $H.A$ exists. It remains to prove $H \in L(Z)$. Let $Z = N + B$ be the canonical decomposition of $Z \in \mathcal{S}_p$. For each n, $Z^{T_n} = N^{T_n} + B^{T_n}$ is the canonical decomposition of Z^{T_n}. Since $|\Delta(H.Z^{T_n})| = |H\Delta Z^{T_n}| \le 1$, $H.Z^{T_n} \in \mathcal{S}_p$. By Theorem 9.16, $H.N^{T_n}$ and $H.B^{T_n}$ exist. Therefore $H.N$ and $H.B$ exist, i.e., $H \in L(Z)$. $\square$

§4. Lenglart's Inequality and Convergence Theorems for Stochastic Integrals

In this paragraph we first introduce Lenglart's inequality, then by means of it we study the continuity of stochastic integrals w.r.t. integrands.

9.20 Definition. Let X be an optional process, and A be an adapted increasing process. It is said that X is *dominated by A* if for any bounded

stopping time T,

$$E[|X_T|] \le E[A_T]. \tag{20.1}$$

In this case, (20.1) holds also for any finite stopping time T.

9.21 Examples. 1) Let M be a locally square integrable martingale. Then M^2 is dominated by $[M]$ or $\langle M\rangle$. In fact, if (T_n) is a localizing sequence for M, for any bounded stopping time T,

$$E[M^2_{T\wedge T_n}] = E[[M]_{T\wedge T_n}] = E[\langle M\rangle_{T\wedge T_n}]. \tag{21.1}$$

Letting $n \to \infty$ in (21.1) yields by Fatou's lemma,

$$E[M^2_T] \le E[[M]_T] = E[\langle M\rangle_T].$$

2) Let A be an adapted locally integrable increasing process. Then A and its dual predictable projection $\tilde{A}$ are dominated by each other.

9.22 Lemma. *Let X be an adapted cadlag process, dominated by an adapted increasing process A. Then for any constant $C > 0$ and stopping time S we have*

$$P(X^*_S \ge C) = \frac{1}{C}E[A_S]. \tag{22.1}$$

Moreover, if S is predictable, we have

$$P(X^*_{S-} \ge C) \le \frac{1}{C}EA_{S-}. \tag{22.2}$$

Proof. Put $T = \inf\{t \ge 0 : |X_t| \ge C\} \wedge S \wedge n$. Then

$$E[A_S] > E[A_T] \ge E[|X_T|] \ge \int_{[X^*_{S\wedge n} > C]} |X_T| dP \ge CP(X^*_{S\wedge n} > C).$$

Letting $n \to \infty$ yields

$$P(X^*_S > C) \le \frac{1}{C}E[A_S]. \tag{22.3}$$

Replacing C by $C - \varepsilon$ in (22.3) and letting $\varepsilon \downarrow 0$, we find (22.1).

If S is predictable, take a sequence (S_n) of stopping times foretelling S. Since

$$P(X^*_{S_n} > C) \le \frac{1}{C}E[A_{S_n}].$$

Letting $n \to \infty$, we get

$$P(X^*_{S-} > C) \le \frac{1}{C}E[A_{S-}].$$

In the same manner we can obtain (22.2). $\square$

9.23 Theorem. *Let X be an adapted cadlag process, dominated by an adapted increasing process A. Then for arbitrary constants $C > 0$, $d > 0$, stopping time T and measurable set H we have*

$$P(H \cap [X_T^* \geq C]) \leq \frac{1}{C} E[A_T \wedge (d + (\Delta A)_T^*)] + P(H \cap [A_T \geq d]). \quad (23.1)$$

Moreover, if A is predictable, we have

$$P(H \cap [X_T^* \geq C]) \leq \frac{1}{C} E[A_T \wedge d] + P(H \cap [A_T \geq d]). \quad (23.2)$$

(23.1) or (23.2) is called Lenglart's inequality.

Proof. Put $S = \inf\{t \geq 0 : A_t \geq d\}$. Then $A_S \leq d + \Delta A_S$, $A_S \leq A_\infty \wedge (d + (\Delta A)_\infty^*)$, and

$$H \cap [X_\infty^* \geq C] \subset [X_S^* \geq C] \cup (H \cap [S < \infty])$$
$$\subset [X_S^* \geq C] \cup (H \cap [A_\infty \geq d]).$$

By Lemma 9.22 we have

$$\begin{aligned} P(H \cap [X_\infty^* \geq C]) &\leq P(X_S^* \geq C) + P(H \cap [A_\infty \geq d]) \\ &\leq \frac{1}{C} E[A_S] + P(H \cap [A_\infty \geq d]) \\ &\leq \frac{1}{C} E[A_\infty \wedge (d + (\Delta A)_\infty^*)] + P(H \cap [A_\infty \geq d]). \end{aligned} \quad (23.3)$$

Replacing X and A by X^T and A^T respectively yields (23.1).

If A is predictable, so is S. Similarly, we have

$$H \cap [X_\infty^* \geq C] \subset [X_{S-}^* \geq C] \cup (H \cap [A_\infty \geq d])$$

$$\begin{aligned} P(H \cap [X_\infty^* \geq C]) &\leq P(X_{S-}^* \geq C) + P(H \cap [A_\infty \geq d]) \\ &\leq \frac{1}{C} P[A_{S-}] + P(H \cap [A_\infty \geq d]) \\ &\leq \frac{1}{C} E[A_\infty \wedge d] + P(H \cap [A_\infty > d]). \end{aligned}$$

Replacing X and A by X^T and A^T respectively yields (23.2). □

9.24 Corollary. *Let X be an adapted cadlag process, dominated by an adapted increasing process A. If $|\Delta A| \leq a$ (constant) (or A is predictable), then for arbitrary constants $C > 0$, $d > 0$, stopping time T and measurable set H,*

$$P(H \cap [X_T^* \geq C]) \leq \frac{a + d}{c} + P(H \cap [A_T \geq d])$$

(or

$$P(H \cap [X_T^* \geq c]) \leq \frac{d}{c} + P(H \cap [A_T \geq d]))$$

9.25 Corollary. *For each n let $X^{(n)}$ be an adapted cadlag process, dominated by a predictable increasing process $A^{(n)}$. Let T be a stopping time and H be a measurable set. If $I_H A_T^{(n)} \xrightarrow{P} 0$, then $I_H \sup_{t \leq T} |X_t^{(n)}| \xrightarrow{P} 0$.*

Proof. By Corollary 9.24 for $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$,

$$P(H \cap [(X^{(n)})_T^* \geq \varepsilon]) \leq \frac{\delta}{\varepsilon} + P(H \cap [A_T^{(n)} \geq \delta]). \quad (25.1)$$

Letting $n \to \infty$ and $\delta \downarrow 0$ consecutively in (25.1), we obtain immediately the required assertion. □

Now we turn to study the continuity of stochastic integrals. Let M be a locally square integrable martingale, and H be a predictable process such that $H.M$ is a locally square integrable martingale. Since $[H.M] = H^2.[M]$, we have $\langle H.M \rangle = H^2.\langle M \rangle$. Thus $(H.M)^2$ is dominated by $H^2.\langle M \rangle$. By Corollary 9.25 we obtain the following theorem immediately.

9.26 Theorem. *Let M be a locally square integrable martingale, T be a stopping time, and B be a measurable set. Assume H, $H^{(n)} \in L_m(M)$, $n \geq 1$, and $(H - H^{(n)}).M \in \mathcal{M}_{loc}^2$, $n \geq 1$. If*

$$I_B \int_{[0,T]} (H_s - H_s^{(n)})^2 d\langle M \rangle_s \xrightarrow{P} 0,$$

then

$$I_B \sup_{s \leq T} |(H.M)_s - (H^{(n)}.M)_s| \xrightarrow{P} 0.$$

The next theorem is a convergence theorem for stochastic integrals w.r.t. semimartingales.

9.27 Theorem. *Let X be a semimartingale, T be a finite stopping time, B be a measurable set, and $H, H^{(n)}, n \geq 1$, be all locally bounded predictable processes. If for almost all $\omega \in B$, $(H^{(n)}(\omega))_{n \geq 1}$ is uniformly bounded and convergent to $H.(\omega)$ on $[0, T(\omega)]$, then*

$$I_B \sup_{t \leq T} |(H^{(n)}.X)_t - (H.X)_t| \xrightarrow{P} 0. \quad (27.1)$$

Proof. Let $X = M + A$, where M is a locally bounded martingale and A is an adapted process with finite variation. Under the assumption of the theorem, by Lebesgue dominated convergence theorem we have

$$I_B \int_{[0,T]} (H_t^{(n)} - H_t)^2 d\langle M \rangle_t \to 0 \quad a.s..$$

Then by Theorem 9.26

$$I_B \sup_{t \le T} |(H^{(n)}.M)_t - (H.M)_t| \xrightarrow{P} 0.$$

Again by Lebesgue dominated convergence theorem we have

$$I_B \sup_{t \le T} |(H^{(n)}.A)_t - (H.A)_t| \le I_B \int_0^T |H_t^{(n)} - H_t||dA_t| \to 0 \quad a.s..$$

Thus (27.1) follows. □

As an application of Theorem 9.27 we obtain Riemann-Stieltjes approximations for a class of stochastic integrals.

9.28 Definition. Let T be a finite stopping time, and $(T_n)_{n \ge 0}$ be an increasing sequence of stopping times with $T_0 = 0$ and $\sup_n T_n = T$. We say that $\tau : 0 = T_0 \le T_1 \le \cdots$ is a *stochastic partition of interval* $[0,T]$, if for almost all ω, the sequence $(T_n(\omega))$ is stationary (i.e., there exists a natural number $n(\omega)$ such that $T_n(\omega) = T(\omega)$ when $n \ge n(\omega)$). in other words, for almost all ω, $(T_n(\omega))$ forms a finite partition of interval $[0, T(\omega)]$. Put

$$\delta(\tau) = \sup_j |T_{j+1} - T_j|.$$

$\delta(\tau)$ is a finite r.v., and is called the *mesh of partition* τ.

9.29 Theorem. *Let X be a semimartingale, H be an adapted cadlag or left-continuous process, and T be a finite stopping time. Let*

$$\tau^{(n)} : 0 = T_0^{(n)} \le T_1^{(n)} \le \cdots, \ n \ge 1,$$

be a sequence of stochastic partitions of $[0,T]$ such that $\lim_n \delta(\tau^{(n)}) = 0$ a.s.. Then

$$\sup_{t \le T} \Big| \sum_i H_{T_i^{(n)}} (X_{T_{i+1}^{(n)} \wedge t} - X_{T_i^{(n)} \wedge t}) - \int_0^t H_{s-} dX_s \Big| \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{29.1}$$

Proof. Put $H^{(n)} = H_0 I_{[0]} + \sum_i H_{T_i^{(n)}} I_{]T_i^{(n)}, T_{i+1}^{(n)}]}$. Then $H^{(n)}$ is a locally bounded predictable process and

$$(H^{(n)}.X)_t = \sum_i H_{T_i^{(n)}} (X_{T_{i+1}^{(n)} \wedge t} - X_{T_i^{(n)} \wedge t}) + H_0 X_0.$$

Since $H_.(\omega)$ is bounded on the finite interval $[0, T(\omega)]$, $(H_.^{(n)}(\omega))_{n \ge 1}$ is uniformly bounded on $[0, T(\omega)]$. In addition, for almost all ω we have

$$\lim_{n \to \infty} H_t^{(n)}(\omega) = H_{t-}(\omega)$$

for all $t \in [0, T(\omega)]$. (29.1) follows from Theorem 9.27. □

The following theorem is the dominated convergence theorem for stochastic integrals.

9.30 Theorem. *Let X be a semimartingale, $H \in L(X)$, $K^{(n)}$ and K be predictable processes such that $|K^{(n)}| \le |H|$, $|K| \le |H|$. Let $B \in \mathcal{F}$ and T be a finite stopping time. If for almost all $\omega \in B$ we have $\lim_{n \to \infty} K_t^{(n)}(\omega) = K_t(\omega)$ for all $t \in [0, T(\omega)]$, then*

$$I_B \sup_{t \le T} \Big|(K^{(n)}.X)_t - (K.X)_t\Big| \xrightarrow{P} 0, \ n \to \infty. \tag{30.1}$$

Proof. Without loss of generality we may assume $X_0 = 0$. Put

$$A = \sum (\Delta X I_{[|H \Delta X| > 1 \text{ or } |\Delta X| > 1]}), \ Z = X - A.$$

Let $Z = N + B$ be the canonical decomposition of $Z \in \mathcal{S}_p$. By Theorem 9.17 $X = N + (B + A)$ is an H-decomposition of X. Besides, we have $|\Delta Z| \le 1$, $|\Delta(H.Z)| = |H \Delta Z| \le 1$. By Theorem 8.8 we know $|\Delta N| \le 2$, $|\Delta(H.N)| < 2$. In particular, $N, H.N \in \mathcal{M}^2_{loc,0}$. By the assumption $|K^{(n)}| \le |H|$, $|K| \le |H|$, thus $K^{(n)}.N$, $K.N \in \mathcal{M}^2_{loc,0}$. The remainders of the proof are similar to that of Theorem 9.27. □

Remark. Let X be a semimartingale, $H \in L(X)$. Put $H^{(n)} = H I_{[|H| \le n]}$. Then by the theorem we know for all $t \ge 0$,

$$\sup_{s \le t} \Big|(H^{(n)}.X)_s - (H.X)_s\Big| \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty.$$

Finally, we should point out that the stochastic integrals of predictable processes w.r.t an adapted process with finite variation in the domain of semimartingales need not be Stieltjes integrals. But we have the following result.

9.31 Theorem. *Let A be a predictable process with finite variation, and H be a predictable process. If H is integrable w.r.t. A in the domain of semimartingales, then in the sense of Stieltjes integrals H is also integrable w.r.t. A, and the two kinds of integrals coincide.*

Proof. Put $H^{(n)} = HI_{[|H|\le n]}$. Evidently, the conclusion of the theorem is valid for each $H^{(n)}$. In particular, each $H^{(n)}.A$ is a predictable semimartingale. By Theorem 9.30 $H.A$ is also a predictable semimartingale, thus it is a special semimartingale (Corollary 8.7). Then the conclusion of the theorem follows from Theorem 9.16. □

§5. Itô Formula and Doléans-Dade Exponential Formula

In this paragraph we will establish the change of variables formula for semimartingales, that is, the famous Itô formula. It is the most powerful tool in stochastic calculus. As its applications, we show the strong law of large number for semimartingales and Doléans-Dade exponential formula.

9.32 Lemma. *Let M be a locally bounded martingale, and A be a predictable process with finite variation. Then $MA - (M_-).A$ is a local martingale.*

Proof. By localization we may suppose that M is a bounded martingale and A is a predictable process with integrable variation. Put $L = MA - (M_-).A$. By Theorems 5.32 and 5.33 we know that for any stopping time T, $E[L_T] = 0$. Then by Theorem 4.40, $L \in \mathcal{M}$. □

9.33 Theorem. *Let X and Y be a pair of semimartingales. Then*

$$X_tY_t = \int_0^t X_{s-}dY_s + \int_0^t Y_{s-}dX_s + [X,Y]_t, \quad t \ge 0. \tag{33.1}$$

(33.1) is called the formula of integration by parts.

Proof. By polarization it suffices to prove (33.1) for the case of $X = Y$, i.e.,

$$X^2 = 2(X_-).X - 2X_0^2 + [X]. \tag{33.2}$$

To this end, put $A = X^2 - 2(X_-).X + 2X_0^2$. First, we want to show that A is an increasing process and $\Delta A = (\Delta X)^2$. Let $t > 0$ and

$$\tau_n : 0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m(n)}^n = t$$

be a sequence of finite partitions of $[0,t]$ with $\delta(\tau^n)$ tending to zero. Then

$$\begin{aligned} X_t^2 - X_0^2 &= \sum_i (X^2_{t^n_{i+1}} - X^2_{t^n_i}) \\ &= 2\sum_i X_{t^n_i}(X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i}) + \sum_i (X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2. \end{aligned}$$

By Theorem 9.29 we know

$$A_t = X_0^2 + P\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_i (X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2, \quad a.s.. \tag{33.3}$$

In particular, by (33.3) A is an increasing process. By the definition of A, we have

$$\Delta A = \Delta(X^2) - 2X_-\Delta X = (X_- + \Delta X)^2 - X_-^2 - 2X_-\Delta X = (\Delta X)^2.$$

In order to show (33.2) we first assume that X is bounded. In this case X is a special semimartingale. Let $X = M + A$ be its canonical decomposition, where M is a locally bounded martingale and A is a predictable process with finite variation and $A_0 = 0$. Put

$$B = X^2 - 2(X_-).X + 2X_0^2 - [X] = A - [X].$$

It is shown above that B is a continous process with finite variation and $B_0 = 0$. On the other hand, noting $X_0 = M_0$, we have

$$\begin{aligned} B &= (M + A)^2 - 2(M_- + A_-).(M + A) + 2M_0^2 - [M + A] \\ &= (M^2 - [M]) - 2(M_-.M - M_0^2) + 2(MA - M_-.A) \\ &\quad -2A_-.M - 2[M,A]. \end{aligned} \tag{33.4}$$

Here we have made use of the formula of integration by parts for Stieltjes integrals (Lemma 1.39). By Lemmas 9.4 and 9.32 we know that each term in (33.4) is a local martingale. Hence B is a local martingale. Consequently, it must be $B = 0$, i.e., (33.2) holds.

In general cases, put $T_n = \inf\{t \ge 0 : |X_t| > n\}$. Then $X^{T_n-}I_{[T_n>0]}$ is a bounded semimartingale, and

$$\begin{aligned} (X^2)^{T_n-} = (X^{T_n-})^2 &= 2X_-^{T_n-}.X^{T_n-} - 2X_0^2 + [X^{T_n-}] \\ &= (2X_-.X - 2X_0^2 + [X])^{T_n-}. \end{aligned}$$

Since $T_n \uparrow \infty$, (33.2) remains valid. □

Remark. In the above proof we have shown for $t \ge 0$,

$$X_0^2 + \sum_i (X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2 \xrightarrow{P} [X]_t$$

This is why we call $[X]$ the quadratic variation of X.

9.34 Corollary. *Let X be a semimartingale and A be a predictable process with finite variation. Then*

$$XA = A.X + (X_-).A - X_0A_0. \tag{34.1}$$

Proof. Let $X = X_0 + M + B$, $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$, $B \in \mathcal{V}_0$. By Yoeurp's lemma (Example 9.4.1)) we have

$$\begin{aligned}[X, A] &= X_0 A_0 - [M, A] + [B, A] \\ &= X_0 A_0 + (\Delta A).M + (\Delta A).B \\ &= X_0 A_0 + (\Delta A).X. \end{aligned} \tag{34.2}$$

Then (34.1) follows from (33.1) and (34.2). □

9.35 Theorem. *Let $X^1, \cdots, X^d$ be semimartingales, and F be a C^2-function on $\mathbf{R}^d$ (i.e. F has continuous partial derivatives of the first and the second orders). Put $X_t = (X_t^1, \cdots, X_t^d)$ ((X_t) is also called an d-dimensional semimartingale). Then*

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{j=1}^d \int_0^t D_j F(X_{s-}) dX_s^j + \sum_{0<s\le t} \eta_s(F) + \frac{1}{2} A_t(F), \tag{35.1}$$

where

$$\eta_s(F) = F(X_s) - F(X_{s-}) - \sum_{j=1}^d D_j F(X_{s-}) \Delta X_s^j, \tag{35.2}$$

$$A_t(F) = \sum_{i,j=1}^d \int_0^t D_{ij} F(X_{s-}) d\langle (X^i)^c, (X^j)^c\rangle_s, \tag{35.3}$$

$D_j F = \dfrac{\partial F}{\partial x_j}$, $D_{ij} F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$, *and the series* $\sum_{0<s\le t} \eta_s(F)$ *is absolutely convergent.*

(35.1) is the famous *Itô formula*[11].

Proof. We adopt the line of C. Dellacherie and P. A. Meyer to show Itô formula, starting from the formula of integration by parts.

We may suppose all $X^1, \cdots, X^d$ are bounded: $|X^j| \le C$, $j = 1, \cdots, d$, where $C > 0$ is a constant. Otherwise, put $T_n = \inf\{t \ge 0 : |X_t^1| > n$ or $|X_t^2| > n, \cdots,$ or $|X_t^d| > n\}$, and deal with $X^{T_n -} I_{[T_n > 0]}$ as in Theorem 9.33. If (35.1) holds for each $X_{T_n -} I_{[T_n > 0]}$, then (35.1) holds for X, since $T_n \uparrow \infty$. Under the boundedness assumption we can choose a sequence (F_n) of polynomials on $\mathbf{R}^d$ such that F_n, $D_i F_n$ and $D_{ij} F_n$ uniformly converge to $F, D_j F$ and $D_{ij} F$, $i, j = 1, \cdots, d$, on $[-C, C]^d$ respectively. If (35.1) holds for each F_n, then by Theorem 9.30, (35.1) holds for F as well. Hence we may suppose F is a polynomial on $\mathbf{R}^d$.

[11] It is easy to see that F may be a complex-valued function in Itô formula.

If $F(x^1, \cdots, x^d) = x^i x^j$, (35.1) reduces to (33.1). By induction it suffices to show the following statement: if (35.1) holds for a polynomial F on $\mathbf{R}^d$, then (35.1) holds also for $G(x^1, \cdots, x^d) = x^i F(x^1, \cdots, x^d)$. Since

$$\begin{aligned}\eta_s(G) = G(X_s) - G(X_{s-}) - \sum_{j=1}^d D_j G(X_{s-}) \Delta X_s^j \\ - X_{s-}^i \eta_s(F) + \Delta[X^i, F(X)]_s \end{aligned}$$

and (X_{s-}^i) is locally bounded, the series $\sum_{0<s\le t} \eta_s(G)$ is absolutely convergent. In addition, we have

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} A_t(G) &= \frac{1}{2} \int_0^t X_{s-}^i dA_s(F) + \sum_{j=1}^d \int_0^t D_j F(X_{s-}) d\langle (X^i)^c, (X^j)^c\rangle_s \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t X_{s-}^i dA_s(F) + \langle (X^i)^c, (F(X))^c\rangle_t - X_0^i F(X_0), \end{aligned} \tag{35.4}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^d \int_0^t D_j G(X_{s-}) dX_s^j \\ &= \int_0^t F(X_{s-}) dX_s^i + \sum_{j=1}^d \int_0^t X_{s-}^i D_j F(X_{s-}) dX_s^j. \end{aligned} \tag{35.5}$$

Then from (33.1), (35.4) and (35.5) we obtain

$$\begin{aligned}&G(X_t) - G(X_0) = X_t^i F(X_t) - X_0^i F(X_0) \\ &= \int_0^t X_{s-}^i \, dF(X_s) + \int_0^t F(X_{s-}) dX_s^i + [X^i, F(X)]_t - X_0^i F(X_0) \\ &= \sum_{j=1}^d \int_0^t D_j G(X_{s-}) dX_s^j + \sum_{0<s\le t} \eta_s(G) + \frac{1}{2} A_t(G), \end{aligned}$$

i.e., (35.1) holds for G. □

The next theorem is a refinement of Theorem 9.35, its proof is completely analogous, and is omitted.

9.36 Theorem. *Let $X^1, \cdots, X^n$ be semimartingales, and $X^{n+1}, \cdots, X^{n+m}$ be adapted processes with finite variation. Let F be a continuous function on $\mathbf{R}^{n+m}$, of class C^2 w.r.t. the first n variables and of class C^1 w.r.t. the last m variables (it may be $n = 0$ or $m = 0$). Put $X_t = (X_t^1, \cdots, X_t^{n+m})$. Then*

$$\begin{aligned}F(X_t) - F(X_0) = \sum_{j=1}^{n+m} \int_0^t D_j F(X_{s-}) dX_s^j + \sum_{0<s\le t} \eta_s(F) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t D_{ij} F(X_{s-}) d\langle (X^i)^c, (X^j)^c\rangle_s. \end{aligned}$$

9.37 Theorem. *Let X be a semimartingale and A be a predictable increasing process with $A_\infty = \infty$ a.s.. If $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+A}.X\right)_t$ exists and is finite a.s., then*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{A_t}=0 \qquad \text{a.s.}.$$

Proof. Put $Y=\frac{1}{1+A}.X$. Then $(1+A).Y=X$ (Theorem 9.18.2)) and

$$(1+A)Y=(1+A).Y+(Y_-).A-A_0Y_0=X+(Y_-).A-A_0Y_0$$

by Corollary 9.34. Thus

$$\frac{X_t}{1+A_t}=\frac{Y_t+A_0Y_0}{1+A_t}+\frac{\int_{[0,t]}(Y_t-Y_{s-})dA_s}{1+A_t},$$

the second term on the right hand side is a Stieltjes integral.

For almost all ω and any $\varepsilon>0$ there exists $t_\varepsilon(\omega)$ such that

$$|Y_t(\omega)-Y_\infty|<\varepsilon,\quad t\geq t_\varepsilon(\omega).$$

Then for $t\geq t_\varepsilon$ we have

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{1+A_t}\int_{[0,t]}(Y_t-Y_{s-})dA_s\right|\\ &\leq\frac{1}{1+A_t}\left\{\int_{[0,t_\varepsilon]}|Y_t-Y_{s-}|dA_s+\int_{t_\varepsilon}^t(|Y_t-Y_\infty|+|Y_{s-}-Y_\infty|)dA_s\right\}\\ &\leq\frac{2Y^*_\infty A_{t_\varepsilon}}{1+A_t}+\frac{2\varepsilon A_t}{1+A_t}.\end{aligned}$$

Letting $t\to\infty$ and $\varepsilon\downarrow 0$ consecutively, we find

$$\frac{1}{1+A_t}\int_{[0,t]}(Y_t-Y_{s-})dA_s\to 0,\quad t\to\infty.$$

Evidently,

$$\left|\frac{Y_t+A_0Y_0}{1+A_t}\right|\leq\frac{Y^*_\infty(1+A_0)}{1+A_t}\to 0,\quad t\to\infty.$$

Hence

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{A_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{1+A_t}=0\ \text{ a.s.}.\quad\square$$

9.38 Corollary. *Let M be a locally square integrable martingale with $\langle M\rangle_\infty=\infty$ a.s.. Then*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_t}{\langle M\rangle_t}=0\quad a.s..$$

Proof. Since

$$\left(\frac{1}{1+\langle M\rangle}\right)^2\cdot\langle M\rangle\leq\frac{1}{(1+\langle M\rangle)(1+\langle M\rangle_-)}\cdot\langle M\rangle\leq 1,$$

by Theorem 8.32 $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+\langle M\rangle}.M\right)_t$ exists and is finite a.s.. Now applying Theorem 9.37 to M and $\langle M\rangle$ leads to the required assertion. $\square$

Theorem 9.37 is the strong law of large number for semimartingales in the general form. It is a primary application of the formula of integration by parts — a special case of Itô formula. Now we give another important application of Itô formula — Doléans-Dade exponential formula.

9.39 Theorem. *Let X be a semimartingale. Put*

$$V_t=\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}\quad (V_0=1).\tag{39.1}$$

Then for almost all ω the infinite product on the right hand side of (39.1) is absolutely convergent for all $t>0$, and $V=(V_t)$ is an adapted purely discontinuous process with finite variation. Put

$$Z_t=\exp\left\{X_t-X_0-\frac{1}{2}\langle X^c\rangle_t\right\}\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}.\tag{39.2}$$

Then $Z=(Z_t)$ is the unique semimartingale satisfying the following stochastic integral equation

$$Z_t=1+\int_0^t Z_{s-}dX_s.\tag{39.3}$$

Proof. Put

$$V'_t=\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta X_sI_{[|\Delta X_s|>\frac{1}{2}]})\exp\{-\Delta X_sI_{[|\Delta X_s|>\frac{1}{2}]}\},$$

$$V''_t=\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta X_sI_{[|\Delta X_s|\leq\frac{1}{2}]})\exp\{-\Delta X_sI_{[|\Delta X_s|\leq\frac{1}{2}]}\}.$$

Obviously, the product defining V'_t is of a finite number of terms. Since

$$e^{-x^2}\leq(1+x)e^{-x}\leq e^{-\frac{1}{3}x^2},\quad |x|\leq\frac{1}{2},$$

the infinite product defining V''_t is absolutely convergent. Hence the infinite product in (39.1) is absolutely convergent. Apparently, $(\log V'_t)$ and $(\log V''_t)$ are adapted purely discontinuous processes with finite variation, so are (V'_t) and (V''_t) by Itô formula. Because $V_t=V'_tV''_t$, again by Itô formula V is an adapted purely discontinuous process with finite variation.

Denote $F(x,y)=e^x y$ and $K = X - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c\rangle$. Then $Z = F(K,V)$ and $K^c = X^c$, $\Delta K = \Delta X$. Noting $Z_s = Z_{s-}(1+\Delta X_s)$, by Itô formula we have

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}dK_s + \int_0^t e^{K_{s-}}dV_s + \frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}d\langle K^c\rangle_s + \sum_{0<s\le t}(\Delta Z_s - Z_{s-}\Delta K_s - e^{-K_{s-}}\Delta V_s)$$
$$= 1 + \int_0^t Z_{s-}dX_s,$$

i.e., Z satisfies (39.3).

Now assume that $Y=(Y_t)$ is another semimartingle satisfying (39.3). Then $\Delta Y = Y_-\Delta X$, $\langle X^c, Y^c\rangle = (Y_-).\langle X^c\rangle$. Put

$$W = e^{-K}Y. \tag{39.4}$$

By Itô formula we have $W_0 = 1$ and

$$W_t = 1 - \int_0^t W_{s-}dK_s + \int_0^t e^{-K_{s-}}dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t W_{s-}d\langle X^c\rangle_s - \int_0^t e^{-K_{s-}}d\langle X^c,Y^c\rangle_s + \sum_{0<s\le t}(\Delta W_s + W_{s-}\Delta X_s - e^{-K_{s-}}\Delta Y_s)$$
$$= 1 + \sum_{0<s\le t}\Delta W_s.$$

On the other hand, by (39.4) $W_t = W_{t-}e^{-\Delta X_t}(1+\Delta X_t)$,

$$\Delta W_t = W_{t-}[e^{-\Delta X_t}(1+\Delta X_t) - 1].$$

Put $A_t = \sum_{0<s\le t}[e^{-\Delta X_s}(1+\Delta X_s) - 1]$. $A = (A_t)$ is an adapted purely discontinuous process with finite variation. W satisfies

$$W_t = 1 + \int_0^t W_{s-}dA_s.$$

This means W is an adapted purely discontinuous process with finite variation. Of course, $V = e^{-K}X$ also satisfies the same equation. Put $U = V - W$. Then U satisfies the homogeneous equation

$$U_t = \int_0^t U_{s-}dA_s. \tag{39.5}$$

Put $B_t = \int_0^t |dA_s|$. Making use of the formula of integration by parts and by induction, it is not difficult to show

$$\int_0^t (B_{s-})^n dB_s \le \frac{1}{n+1}(B_t)^{n+1}. \tag{39.6}$$

By iterating (39.5) and induction, from (39.6) we obtain

$$|U_s| \le \frac{1}{n!}U_t^*(B_t)^n, \quad |U_{s-}| \le \frac{1}{n}U_t^*(B_t)^n, \quad s\in[0,t].$$

Hence $U_t = 0$ a.s. for each $t\ge 0$. Consequently, $U=0$, $W=V$, and $Y = e^K W = e^K V = Z$. □

(39.2) is called *Doléans-Dade exponential formula*, semimartingale Z is called the *exponential of semimartingale* X and denoted by $\mathcal{E}(X)$. By (39.3) we know that if X is a local martingale (resp. a special semimartingale, resp. an adapted process with finite variation), so is $\mathcal{E}(X)$. Besides, $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X - X_0)$ and for any stopping time T, $\mathcal{E}(X)^T = \mathcal{E}(X^T)$.

It is easy to check that if X is a standard Brownian motion, then $\mathcal{E}(X)_t = \exp\left\{X_t - \frac{1}{2}t\right\}$, and if X is a Poisson process, then $\mathcal{E}(X)_t = 2^{X_t}$.

A process Z is called an *exponential semimartingale* if there exists a semimartingale X such that $Z = Z_0\mathcal{E}(X)$, i.e., Z is the unique semimartingale satisfying

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t Z_{s-}dX_s.$$

We want to characterize the class of exponential semimartingales.

9.40 Lemma. *Let X be a semimartingale. Put*

$$T = \inf\{t>0: \ \Delta X_t = -1\},$$
$$S = \inf\{t>0: \ \mathcal{E}(X)_t = 0 \ \text{ or } \ \mathcal{E}(X)_{t-} = 0\}.$$

Then $T = S$ a.s..

Proof. If $T<\infty$, then $\Delta X_T = -1$. By the exponential formula

$$\mathcal{E}(X)I_{[T,\infty[} = 0.$$

Hence $S\le T$ a.s.. On the other hand, if $t<T$, from the proof of Theorem 9.39 one can see $V_t'\ne 0$ and $V_{t-}'\ne 0$. But V_t'' and V_{t-}'' are always positive. Thus $\mathcal{E}(X)_t = V_t'V_t''e^{K_t}\ne 0$, $\mathcal{E}(X)_{t-} = V_{t-}'V_{t-}''e^{K_{t-}}\ne 0$, and $T\le S$ a.s.. Therefore, $S = T$ a.s.. □

9.41 Theorem. *Let Z be a semimartingale, and $T = \inf\{t>0: Z_t = 0$ or $Z_{t-} = 0\}$. Then Z is an exponential semimartingale if and only if the following conditions are satisfied:*

1) $Z = ZI_{[0,T[}$.

2) $H = \frac{1}{Z_-}I_{[Z_-\ne 0]}$ *is integrable w.r.t. Z.*

Proof. Necessity. Let $Z = Z_0\mathcal{E}(X)$, $X \in \mathcal{S}$. On $[Z_0 = 0]$ we have $Z = 0 = ZI_{[0,T[}$. On $[Z_0 > 0]$ we have $T = \inf\{t > 0 : \Delta X_t = -1\}$ and $\mathcal{E}(X)I_{[T,\infty[} = 0$. By Lemma 9.40, again we get $Z = ZI_{[0,T[}$.

Obviously, $|HZ_-| \le 1$. $HZ_- \in L(X)$ and $Z_- \in L(X)$. By Theorem 9.18.2) $H \in L((Z_-).X)$. But $Z = Z_0 + (Z_-).X - Z_0X_0$, so $H \in L(Z)$.

Sufficiency. Put $X = H.Z$. Then $Z_0X_0 - Z_0I_{[Z_0\neq 0]} = Z_0$, and

$$(Z_-).X = (HZ_-).Z = I_{[Z_-\neq 0]}.Z.$$

Put $R = T_{[Z_{T-}=0, 0<T<\infty]}$. R is a predictable time, because it is foretold by $R_n = \inf\left\{t > 0 : t < T, |Z_t| \le \frac{1}{n}\right\} \wedge n$. Now

$$\begin{aligned} I_{[Z_-\neq 0]}.Z &= (I_{[0_{[T=0]}]} + I_{[R]} + I_{]T,\infty[}).Z \\ &= Z_0 I_{[T=0]} + I_{[R]}.Z \\ &= \Delta Z_R I_{[R,\infty[} = 0 \quad \text{(due to 9.4.2))}. \end{aligned}$$

Hence $Z = (Z_-).X = Z_0 + (Z_-).X - Z_0X_0 = Z_0\mathcal{E}(X)$. □

§6. Local Times of Semimartingales

9.42 Lemma. *Let X be a semimartingale, f be a continuous convex function on $\mathbf{R}$, and f' be its left derivative. Then $f(X)$ is a semimartingale and*

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \int_0^t f'(X_{s-})dX_s \\ &+ \sum_{0<s\le t}[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s] + C_t, \end{aligned} \tag{42.1}$$

where $C = (C_t)$ is a continuous adapted increasing process with $C_0 = 0$.

Proof. Take a non-negative function $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ such that $[-a, 0]$ $(a > 0)$ is its support and $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)ds = 1$. Put

$$f_n(t) = n\int_{-\infty}^{\infty} f(t+s)\varphi(ns)ds = \int_{-a}^{0} f\left(t + \frac{s}{n}\right)\varphi(s)ds.$$

Then $f_n(t)$ is convex, $f_n(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$ and as $n \to \infty$ we have

$$f_n(t) \to f(t),$$
$$f_n'(t) = \int_{-a}^{0} f'\left(t + \frac{s}{n}\right)\varphi(s)ds \uparrow f'(t)$$

($f'(t)$ is left-continuous and monotone increasing).

Apply Itô formula to f_n and X,

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_0^t f_n'(X_{s-})dX_s + B_t^{(n)}, \tag{42.2}$$

where

$$B_t^{(n)} = \sum_{0<s\le t}[f_n(X_s) - f_n(X_{s-}) - f_n'(X_{s-})\Delta X_s] + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_{s-})d\langle X^c\rangle_s$$

is an adapted increasing process in view of the convexity of f_n.

We may suppose $X \cdot I_{]0,\infty[}$ is bounded. Otherwise, we may deal with X^{T_n}, where $T_n = \inf\{t \ge 0 : |X_t| > n\}$. Since f' is bounded on each finite interval, letting $n \to \infty$ in (42.2) yields

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + B_t$$

(for all $t \ge 0$, $B_t = P\text{-}\lim_n B_t^{(n)}$), where $B = (B_t)$ is an adapted increasing process with $B_0 = 0$ and

$$\Delta B_t = \Delta f(X_t) - f'(X_{t-})\Delta X_t = f(X_t) - f(X_{t-}) - f'(X_{t-})\Delta X_t \ge 0.$$

Let C be the continuous part of B. Then (42.1) follows. □

9.43 Theorem. *Let X be a semimartingale and $a \in \mathbf{R}$. Then*

$$\begin{aligned} (X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ &+ \int_0^t I_{[X_{s-}>a]}dX_s + \sum_{0<s\le t}[I_{[X_{s-}>a]}(X_s - a)^- \\ &+ I_{[X_{s-}\le a]}(X_s - a)^+] + \frac{1}{2}L_t^a(X), \end{aligned} \tag{43.1}$$

$$\begin{aligned} (X_t - a)^- = (X_0 - a)^- &- \int_0^t I_{[X_{s-}\le a]}dX_s + \sum_{0<s\le t}[I_{[X_{s-}>a]}(X_s - a) \\ &+ I_{[X_{s-}\le a]}(X_s - a)^+] + \frac{1}{2}L_t^a(X), \end{aligned} \tag{43.2}$$

where $L_t^a(X)$ is a continuous adapted increasing process with $L_0^a(X) = 0$. It is called the local time of X at a. (43.1) or (43.2) is called Tanaka-Meyer formula.

Proof. Let $f(x) = (x-a)^+$. Then f is convex, $f'(x) = I_{]a,\infty[}(x)$ and

$$f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) = \begin{cases} (y-a)^-, & \text{if } x > a, \\ (y-a)^+, & \text{if } x \le a. \end{cases}$$

Applying (42.1) to $(x - a)^+$, we have

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t I_{[X_{s-}>a]}dX_s$$

$$+\sum_{0<s\le t}\left[I_{[X_{s-}>a]}(X_s-a)^- + I_{[X_{s-}\le a]}(X_s-a)^+\right] + C_t. \quad (43.3)$$

where (C_t) is a continuous adapted increasing process with $C_0 = 0$.

Similarly, applying (42.1) to $(x-a)^-$, we have

$$(X_t-a)^- = (X_0-a)^- - \int_0^t I_{[X_{s-}\le a]}dX_S$$
$$+\sum_{0<s\le t}\left[I_{[X_{s-}>a]}(X_s-a)^- + I_{[X_{s-}\le a]}(X_s-a)^+\right] + D_t. \quad (43.4)$$

where (D_t) is also a continuous adapted increasing process with $D_0 = 0$.

Subtracting (43.4) from (43.3) yields

$$(X_t-a)^+ - (X_t-a)^- = (X_0-a)^+ - (X_0-a)^- + \int_0^t dX_s + C_t - D_t.$$

Hence $C = D$. Denote them by $\frac{1}{2}L^a(X)$, and therefore we have (43.1) and (43.2). □

9.44 Theorem. *Let X be a semimartingale and $a \in R$. Then for almost all ω the measure $dL^a_\cdot(X)(\omega)$ does not charge the set $\{t : X_{t-}(\omega) \ne a\}$ and the interior of $\{t : X_{t-}(\omega) = a\}$.*

Proof. Let S and T be two stopping times, and $0 < S \le T$. If $]S,T[\subset [X_- < a]$, then $[S,T[\subset [X \le a]$ and $]S,T]\subset [X_- \le a]$. From (43.1) we know on $[T<\infty]$

$$(X_T-a)^+ - (X_S-a)^+ = (X_T-a)^+ + \frac{1}{2}L^a_T(X) - \frac{1}{2}L^a_S(X) \quad \text{a.s.}, \quad (44.1)$$

$$L^a_T(X) = L^a_S(X) \quad \text{a.s.} \quad (44.2)$$

Similarly, if $]S,T[\subset [X_- = a]$, then $[S,T[\subset [X = a]$ and $]S,T]\subset [X_- = a]$, (44.1) and (44.2) remain true.

Let $r > 0$ be a rational. Put

$$S(r) = \begin{cases} r, & \text{if } X_{r-} < a, \\ \infty, & \text{if } X_{r-} \ge a, \end{cases}$$
$$T(r) = \inf\{t > S(r) : X_{t-} \ge a\},$$
$$H = \bigcup_{r>0}]S(r), T(r)[.$$

For each ω the section H_ω is the interior of $\{t : X_{t-}(\omega) < a\}$. From (44.2) we know that for almost all ω, $dL^a_\cdot(X)(\omega)$ does not charge H_ω. Analogously, it can be shown that for almost all ω $dL^a_\cdot(X)(\omega)$ does not charge the interior of $\{t : X_{t-}(\omega) > a\}$. Apparently, $\{t : X_{t-}(\omega) < a\}$

and $\{t : X_{t-}(\omega) > a\}$ differ from their interiors by at most countable sets. Thus for almost all ω, $dL^a_\cdot(X)(\omega)$ does not charge $\{t : X_{t-}(\omega) \ne a\}$. Now put

$$U(r) = \begin{cases} r, & \text{if } X_{r-} = a, \\ \infty, & \text{if } X_{r-} \ne a, \end{cases}$$
$$V(r) = \inf\{t > U(r) : X_{t-} \ne a\},$$
$$W = \bigcup_{r>0}]U(r), V(r)[.$$

For each ω the section W_ω is the interior of $\{t : X_{t-}(\omega) = a\}$. By the same argument, for almost all ω, $dL^a_\cdot(X)(\omega)$ does not charge W_ω. □

Integrating $I_{[X_-=a]}$ and $I_{[X_-\le a]}$ w.r.t. the two sides of (43.1), we obtain the following two formulae for local times.

9.45 Corollary. *Let X be a semimartingale and $a \in R$. Then*

$$L^a_t(X) = 2\Big[\int_0^t I_{[X_{s-}=a]}d(X_s-a)^+ - \sum_{0<s\le t} I_{[X_{s-}=a]}(X_s-a)^+\Big],$$
$$L^a_t(X) = 2\Big[\int_0^t I_{[X_{s-}\le a]}d(X_s-a)^+ - \sum_{0<s\le t} I_{[X_{s-}\le a]}(X_s-a)^+\Big].$$

Below we will give another expression for (C_t) in (42.1) by means of local times, and obtain a generalization of Itô formula.

9.46 Theorem. *Let X be a semimartingale, f be a continuous convex function on R, and f' be its left derivative. Then*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s$$
$$+\sum_{0<s\le t}\Big[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s\Big] + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} L^a_t(X)\rho(da), \quad (46.1)$$

where ρ is the second order derivative of f in the sense of generalized functions (ρ is a Radon measure).

Proof. First assume that the measure ρ is finite and has compact support. Put $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^+\rho(da)$. Then f and g have the same second order derivative, and hence $f(x) = a + bx + g(x)$, $a, b \in R$. Evidently, (46.1) holds for $f(x) = a + bx$. Hence we may assume $f(x) = g(x)$. Thus $f'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{[x>a]}\rho(da)$. Since $I_{[X_{s-}>a]}(X_s-a)^- + I_{[X_{s-}\le a]}(X_s-a)^+ =$

$(X_s - a)^+ - (X_{s-} - a)^+ - I_{[X_{s-}>a]}\Delta X_s$, (46.1) follows by integrating the two sides of (43.1) w.r.t. $\rho(da)$ on $(-\infty, \infty)$.

For an arbitrary convex function f, put

$$f_n(x) = \begin{cases} f(n) + f'(n)(x-n), & x \geq n, \\ f(x), & -n < x < n, \\ f(-n) + f'(-n)(x+n), & x \leq -n, \end{cases}$$

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n \text{ or } |X_{t-}| \geq n\}.$$

Then $\rho_n(da) = I_{]-n,n[}(a)\rho(da)$, and $f_n(X) = f(X)$ on $[0, T_n[$. In addition, when $|a| \geq n$, we have $L^a_{f_n}(X) = 0$. Thus

$$\int_{-\infty}^{\infty} L^a_t(X)\rho_n(da) = \int_{-\infty}^{\infty} L^a_t(X)\rho(da), \quad t < T_n.$$

Applying the result obtained above to f_n, we know that (46.1) holds on $[0, T_n[$. Then (46.1) follows by letting $n \to \infty$. □

Remark. In the proof of Theorem 9.46 we need to deal with the stochastic integrals with parameters and the results of Fubini theorem type. The treatments are ordinary, and the details are omitted (cf. Stricker and Yor[1]).

9.47 Corollary. *Let X be a semimartingale, and g be a non-negative or bounded Borel function. Then*

$$\int_0^t g(X_s)d\langle X^c\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} L^a_t(X)g(a)da. \tag{47.1}$$

Proof. Let $f \in C^2(\mathbf{R})$. Comparing (46.1) with Itô formula, we obtain

$$\int_0^t f''(X_s)d\langle X^c\rangle_s = \int_0^t f''(X_{s-})d\langle X^c\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} L^a_t(X)f''(a)da. \tag{47.2}$$

Then (47.1) follows from (47.2) by the monotone class argument. □

9.48 Remark. Let A be a Borel set in $\mathbf{R}$. From (47.1) we get

$$\int_0^t I_A(X_s)d\langle X^c\rangle_s = \int_A L^a_t(X)da. \tag{48.1}$$

Thereby we have the following interpretation for local times. Taking $d\langle X^c\rangle$ as the measure of the "intrinsic" time of X, (48.1) means $L^a_t(X)$ is the density of the "intrinsic" occupation time of X at a up to moment t.

§7. Stochastic Differential Equations: Métivier-Pellaumail's Method

In this paragraph we will investigate stochastic differential equations by using Métivier-Pellaumail's method. This method is based on a stopped Doob's inequality (51.1), due to M. Métivier and J. Pellaumail.

9.49 Lemma. *Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $\mathcal{G}$ be a sub-σ-field of $\mathcal{F}$. Assume that $A \in \mathcal{F}$ and X is a $\mathcal{G} \vee \{A\}$-measurable square integrable r.v. such that $E[X|\mathcal{G}] = 0$. Then*

$$E[I_{A^c}X^2] = E[I_A E[X^2|\mathcal{G}]]. \tag{49.1}$$

Here $\mathcal{G} \vee \{A\}$ stands for the σ-field generated by $\mathcal{G} \cup \{A\}$.

Proof. Put

$$a = E[I_A|\mathcal{G}], \quad b = E[I_{A^c}|\mathcal{G}].$$

Then $a + b = 1$. Since X can be expressed as $\xi I_A + \eta I_{A^c}$ with $\xi, \eta \in L^2(\mathcal{G})$, we have $a\xi + b\eta = 0$, and

$$E[I_A E[X^2|\mathcal{G}]] = E[I_A(\xi^2 a + \eta^2 b)] = E[\xi^2 a^2 + \eta^2 ab],$$
$$E[I_{A^c}X^2] = E[\eta^2 b] = E[\eta^2 b(a+b)] = E[\eta^2 b^2 + \eta^2 ab].$$

Thus we get (49.1), because $\xi^2 a^2 - \eta^2 b^2 = (\xi a + \eta b)(\xi a - \eta b) = 0$. □

9.50 Lemma. *Let M be a square integrable martingale. For any stopping time T we have*

$$E[(E[\Delta M_T|\mathcal{F}_{T-}])^2] \leq E[\langle M\rangle_{T-}]. \tag{50.1}$$

Proof. If M is quasi-left-continuous, then

$$E[(E[\Delta M_T|\mathcal{F}_{T-}])^2] \leq E[(\Delta M_T^2)] \leq E[M]_T$$
$$= E[\langle M\rangle_T] - E[\langle M\rangle_{T-}].$$

If M is accessible, we take a sequence (S_n) of predictable times with disjoint graphs such that $\bigcup[S_n] \supset [T^a]$ where T^a is the accessible part of T. We may further assume $S_n \leq T$ on $[S_n < \infty]$, otherwise we can replace S_n by $(S_n)_{[S_n \leq T]}$. Under this assumption we get

$$(E[\Delta M_T|\mathcal{F}_{T-}])^2 = (E[\Delta M_T I_{[T=T^a]}|\mathcal{F}_{T-}])^2$$
$$= \sum_n (E[\Delta M_T|\mathcal{F}_{T-}])^2 I_{[T=S_n]} = \sum_n (E[\Delta M_{S_n}|\mathcal{F}_{T-}])^2 I_{[T=S_n]}.$$

Since $\mathcal{F}_{T-} \cap [T = S_n] = \mathcal{F}_{S_n-} \cap [T = S_n] = (\mathcal{F}_{S_n-} \vee \{[T = S_n]\}) \cap [T = S_n]$ and $\mathcal{F}_{S_n-} \vee \{[T = S_n]\} = \mathcal{F}_{S_n-} \vee \{[S_n < T]\}$, we have

$$(\boldsymbol{E}[\Delta M_{S_n} | \mathcal{F}_{T-}])^2 I_{[T=S_n]} = (\boldsymbol{E}[\Delta M_{S_n} | \mathcal{F}_{S_n-} \vee \{[S_n < T]\}])^2 I_{[T=S_n]}.$$

Set

$$X_n = \boldsymbol{E}[\Delta M_{S_n} | \mathcal{F}_{S_n-} \vee \{[S_n < T]\}].$$

Since $\Delta M_{S_n} I_{[T<S_n]} = 0$, we have $X_n^2 I_{[T=S_n]} = X_n^2 I_{[T\le S_n]}$. Therefore, by Lemma 9.49

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[X_n^2 I_{[T=S_n]}] &= \boldsymbol{E}[X_n^2 I_{[T\le S_n]}] = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[X_n^2 | \mathcal{F}_{S_n-}] I_{[S_n<T]}] \\ &\le \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\Delta M_{S_n}^2 | \mathcal{F}_{S_n-}] I_{[S_n<T]}] = \boldsymbol{E}[\Delta\langle M\rangle_{S_n} I_{[S_n<T]}],\end{aligned}$$

whence

$$\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{E}[\Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}])^2] \le \sum_n \boldsymbol{E}[\Delta\langle M\rangle_{S_n} I_{[S_n<T]}] \le \boldsymbol{E}[\langle M\rangle_{T-}].$$

Thus we have proved (50.1) for the quasi-left-continuous case and the accessible case. For general cases, let $M^i = M_0 + M^c + M^{di}$ and $M^a = M^{da}$ (see Theorem 6.22.3)), T^i (resp. T^a) be the totally inaccessible part (resp. accessible part) of T. Then (50.1) follows from the facts that $\langle M\rangle = \langle M^i\rangle + \langle M^a\rangle$ and

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}[\Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}])^2 &= (\boldsymbol{E}[\Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}])^2 I_{[T=T^i]} + (\boldsymbol{E}[\Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}])^2 I_{[T=T^a]} \\ &= (\boldsymbol{E}[\Delta M_T^i | \mathcal{F}_{T-}])^2 + (\boldsymbol{E}[\Delta M_T^a | \mathcal{F}_{T-}])^2. \quad \square\end{aligned}$$

9.51 Theorem. *Let M be a square integrable martingale. Then for any stopping time T we have*

$$\boldsymbol{E}[(M_{T-}^*)^2] \le 4\boldsymbol{E}[\langle M\rangle_{T-} + [M^{da}]_{T-}]. \tag{51.1}$$

Proof. Put

$$\widetilde{M} = M - (\Delta M_T^a - \boldsymbol{E}[\Delta M_T^a | \mathcal{F}_{T-}]) I_{[T,\infty[}. \qquad (M^a = M^{da}.)$$

Then $\widetilde{M}$ is a square integrable martingale (see Problem 5.3) and $\widetilde{M}$ coincides with M on $[0, T[$. By Doob's inequality we have

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[M_{T-}^{*2}] &= \boldsymbol{E}[\widetilde{M}_{T-}^{*2}] \le \boldsymbol{E}[\widetilde{M}_T^{*2}] \le 4\boldsymbol{E}[\widetilde{M}_T^2] = 4\boldsymbol{E}[[\widetilde{M}]_T] \\ &= 4\boldsymbol{E}[[M]_T - (\Delta M_T^a)^2 + (\boldsymbol{E}[\Delta M_T^a | \mathcal{F}_{T-}])^2],\end{aligned}$$

which together with (50.1) gives (51.1), because

$$\boldsymbol{E}[[M]_T - (\Delta M_T^a)^2] = \boldsymbol{E}[[M^a]_{T-} + [M^i]_T]$$

$(M^i = M_0 + M^c + M^{di})$, and

$$\boldsymbol{E}[[M^i]_T] = \boldsymbol{E}[\langle M^i\rangle_T] = \boldsymbol{E}[\langle M^i\rangle_{T-}]. \qquad \square$$

The following theorem, due to M. Métivier and J. Pellaumail again, is essential for studying stochastic differential equations.

9.52 Theorem. *Let X be a semimartingale. There exists an adapted increasing process A which controls X in the following sense: for any stopping time T and any bounded predictable process H,*

$$\boldsymbol{E}[(H.X)_{T-}^{*2}] \le \boldsymbol{E}[A_{T-}(H^2.A)_{T-}]. \tag{52.1}$$

Proof. If X is an adapted process with finite variation, then X is controled by its variation process A: $A_t = \int_{[0,t]} |dX_s|$. In fact, by Schwarz inequality we have

$$(H.X)_{T-}^{*2} \le (|H|.A)_{T-}^2 \le A_{T-}(H^2.A)_{T-}.$$

If X is a locally square integrable martingale, then by Theorem 9.51 we have

$$\boldsymbol{E}[(H.X)_{T-}^{*2}] \le \boldsymbol{E}[(H^2.B)_{T-}],$$

where $B = 4([X] + \langle X\rangle)$. Let $A = \sqrt{2B}$, then A controls X, because $dB \le AdA$.

$$\boldsymbol{E}[(H.X)_{T-}^{*2}] \le \boldsymbol{E}[((H^2A).A)_{T-}] \le \boldsymbol{E}[A_{T-}(H^2.A)_{T-}].$$

Finally, for a semimartingale X, let $X = M + V$, $M \in \mathcal{M}_{loc}^2$ and $V \in \mathcal{V}_0$. Put $A = \sqrt{2}\int_0^\cdot |dV_s| + 4([M] + \langle M\rangle)^{\frac{1}{2}}$, then it is easy to see that A controls X. In fact, if A' controls X', and A'' controls X'', then $\sqrt{2}(A' + A'')$ controls $X' + X''$. $\square$

Remark. Métivier-Pellaumail's inequality (52.1) indeed gives a characterization for semimartingales (see Problem 9.29).

Now we are in a position to study the following stochastic differential equation:

$$X = H + \sum_{i=1}^n (F_i X).Z^i, \tag{53.1}$$

where $Z = (Z^1, \cdots, Z^n)$ is an n-dimensional semimartingales with $Z_0 = 0$. $H = (H^1, \cdots, H^m)$ is an m-dimensional cadlag adapted process (i.e., each component H^i is a cadlag adapted process) and $F_i, 1 \le i \le n$, are mappings from the set of all m-dimensional cadlag adapted processes to the set of all n-dimensional locally bounded predictable processes such that for each stopping time T, $F_i(X^{T-})$ coincides with $F_i X$ on $]0, T]$. $X = (X^1, \cdots, X^m)$ is the unknown process. For instance, let $f_i(\omega, s, x_1, \cdots, x_m)$

be an n-dimensional measurable function on $\Omega \times \boldsymbol{R}_+ \times R^m$ such that 1) for fixed $x_1, \cdots x_m$ and s, $f_i(\cdot, s, x_1, \cdots, x_m)$ is $\mathcal{F}_s$-measurable; 2) for almost all ω and for fixed $x_1, \cdots, x_m$, $f_i(\omega, \cdot, x_1, \cdots, x_m)$ is left-continuous with right limits; 3) for almost all ω and all s, $f_i(\omega, s, \cdot)$ is continuous. Put $(F_i X)_t = f_i(\omega, t, X^1_{t-}, \cdots, X^m_{t-})$. Then F_i meets the above requirements. Obviously, the exponential equation (39.3) is a special case of (53.1).

9.53 Theorem. *If each F_i satisfies the following Lipschitz condition*

$$\boldsymbol{E}[(F_i X - F_i Y)^{*2}_{\infty}] \leq C\boldsymbol{E}\Big[\sum_{i=1}^{m}(X^i - Y^i)^{*2}_{\infty}\Big], \tag{53.2}$$

where C is a constant, then equation (53.1) has a unique solution.

Proof. For the notational simplicity we only prove the theorem for the case $n = m = 1$. Let A be an adapted increasing process with $A_0 = 0$ such that A controls the semimartingale Z. Put $T_0 = 0$ and define a sequence (T_n) of stopping times as follows:

$$T_{n+1} = \inf\Big\{t > T_n : A_t^2 - A_{T_n}^2 > \frac{1}{2C}\Big\}.$$

Then $T_n \uparrow +\infty$, and $A^2_{T_{n+1}-} - A^2_{T_n} \leq \dfrac{1}{2C}$ on $[T_n < \infty]$. In order to prove the theorem it suffices to show that if equation (53.1) has a unique solution on $[0, T_n]$, it also has a unique solution on $[0, T_{n+1}]$. To this end, set $\Phi(X) = H + (FX).Z$. Assume that X is a solution of (53.1) on $[0, T_n]$, and X is unique up to T_n. Let Y and W be two cadlag adapted processes such that $Y^{T_n} = W^{T_n} = X^{T_n}$. We have

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[((\Phi(Y) - \Phi(W))^*_{T_{n+1}-})^2] &= \boldsymbol{E}[((FY - FW).Z)^*_{T_{n+1}-}]^2 \\
&\leq \boldsymbol{E}\Big[A_{T_{n+1}-}\int_{[0,T_{n+1}[}(FY - FW)^2_s dA_s\Big] \\
&= \boldsymbol{E}\Big[A_{T_{n+1}-}\int_{]T_n,T_{n+1}[}(FY - FW)^2_s dA_s\Big] \\
&\leq \boldsymbol{E}[A_{T_{n+1}-}(A_{T_{n+1}-} - A_{T_n})(FY - FW)^{*2}_{T_{n+1}-}] \\
&\leq \frac{1}{2}\boldsymbol{E}[(Y - W)^*_{T_{n+1}-}]^2.
\end{aligned}$$

Then by the fixed point theorem there exists a cadlag adapted process Y such that $Y^{T_n} = X^{T_n}$ and $\Phi(Y)^{T_{n+1}-} = Y^{T_{n+1}-}$. Moreover, such a process Y is unique on $[0, T_{n+1}[$. Put

$$\overline{Y} = Y^{T_{n+1}-} + (\Delta H_{T_{n+1}} + (FY)_{T_{n+1}}\Delta Z_{T_{n+1}})I_{[T_{n+1},\infty[}.$$

Then $\overline{Y}$ is a solution of (53.1) on $[0, T_{n+1}]$ and $\overline{Y}$ is unique on $[0, T_{n+1}]$. Thus we are done. □

9.54 Corollary. *Let $W = (W^1, \cdots, W^n)$ be an n-dimensional standard Wiener process, i.e., $W^1, \cdots, W^n$ are independent standard Wiener processes, ξ be an n-dimensional $\mathcal{F}_0$-measurable r.v.. Let $b^j(t,x)$, $\sigma^j_i(t,x)$, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$, be measurable functions on $\boldsymbol{R}_+ \times R^m$ such that*

$$\sum_{j=1}^{m}|b^j(t,x) - b^j(t,y)| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|\sigma^j_i(t,x) - \sigma^j_i(t,y)| \leq C\Big(\sum_{j=1}^{m}|x^j - y^j|^2\Big)^{1/2}, \tag{54.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\big|b^j(t,x)\big|^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big|\sigma^j_i(t,x)\big|^2 \leq C^2\Big(1 + \sum_{j=1}^{m}|x^j|^2\Big), \tag{54.2}$$

where $C > 0$ is a constant. Then the equation

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, t \geq 0, \tag{54.3}$$

has a unique continuous solution, where $b(t,x) = (b^1(t,x), \cdots, b^m(t,x))$, $\sigma(t,x) = (\sigma^j_i(t,x))$.

Usually, equation (54.3) is called an Itô equation.

Proof. It suffices to deal with the equation

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_{s-})ds + \int_0^t \sigma(s, X_{s-})dW_s, t \geq 0. \tag{54.4}$$

The condition (54.2) guarantees that $b(t, X_{t-})$ and $\sigma(t, X_{t-})$ are locally bounded. Then by Theorem 9.53 (54.4) has a unique solution, which is continuous. Hence (54.3) has the same unique continuous solution as (54.4). □

9.55 Example. Let W be a Wiener process, ξ be an $\mathcal{F}_0$-measurable r.v. and $a > 0$. Then the equation

$$X_t = \xi - a\int_0^t X_s ds + W_t, \quad t \geq 0 \tag{55.1}$$

has a unique solution

$$X_t = \xi e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s. \tag{55.2}$$

Indeed, (55.1) is the famous Langevin's equation, and its solution (55.2) is called an *Ornstein-Uhlenbeck process*, which is used to model the velocity process of a Brownian motion.

Problems and Complements

9.1 Let M be a local martingale, and H be a progressive process.

1) If $H^2.[M] \in \mathcal{A}^+$, then $H_{\natural}M$ is the unique $L \in \mathcal{M}^2$ such that for all $N \in \mathcal{M}^2$ $E[(H.[M,N])_\infty] = E[L_\infty N_\infty]$.

2) If $H^2.[M] \in \mathcal{A}^+_{loc}$, then $H_{\natural}M \in \mathcal{M}^2_{loc}$.

9.2 Let M be a quasi-left-continuous local martingale, and H be a progressive process such that $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathcal{A}^+_{loc}$. Then for all $N \in \mathcal{M}_{loc}$ we have $[H_{\natural}M] = H.[M.N]$ and $\Delta(H_{\natural}M) = H\Delta M$.

9.3 Let X be a semimartingale, and M be a local martingale. The compensated stochastic integral $(\Delta X)_{\natural}M$ exists if and only if $\langle X, M\rangle$ exists. In this case we have $(\Delta X)_{\natural}M = [X, M] - \langle X, M\rangle$.

9.4 Let M be a local martingale, and H be a progressive process. If $H_{\natural}M$ exists and $H^2.[M] \in \mathcal{V}^+$, then $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathcal{A}^+_{loc}$.

9.5 Let $\mathcal{H}$ be a closed subspace of $\mathcal{M}^2$. $\mathcal{H}$ is stable if and only if for any $M \in \mathcal{H}$ and predictable process H with $E[(H^2.[M])_\infty] < \infty$ we have $H.M \in \mathcal{H}$.

9.6 Let $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$. Then there exists a predictable process H and $L \in \mathcal{M}^2_{loc}$ such that $N = H.M + L$, and $L \perp\!\!\!\perp M$.

9.7 Let X be a semimartingale, and H be a predictable process, integrable w.r.t. X. Let $X = M + A$, where $M \in \mathcal{M}_{loc}$ and $A \in \mathcal{V}_0$. This decomposition is an H-decomposition of X if and only if $H \in L_m(M)$ and for each $t > 0$ $\sum_{s \le t} |H_s \Delta A_s| < \infty$ a.s..

9.8 Let M be a local martingale and $H \in L(M)$. If $H.M$ is a special semimartingale, then $H \in L_m(M)$.

9.9 Let X be a semimartingale and $H \in L(X)$. Then the process $H.X - HX$ is predictable.

9.10 Let X be a cadlag adapted process, dominated by a predictable increasing process A. Then $[A_\infty < \infty] \subset [X^*_\infty < \infty]$ a.s., and for every stopping time T, $[A_T = 0] \subset [X^*_T = 0]$ a.s..

9.11 Let X and Y be a pair of semimartingales. Let T be a finite stopping time, and $\tau_n : 0 = T^n_0 \le T^n_1 \le \cdots$ be a sequence of stochastic partitions of $[0, T]$ with $\delta(\tau_n)$ tending to zero. Then

$$\sup_{t \le T}\Big|\sum_i (X_{T^n_{i+1}\wedge t} - X_{T^n_i\wedge t})(Y_{T^n_{i+1}\wedge t} - Y_{T^n_i\wedge t}) + X_0Y_0 - [X, Y]_t\Big| \xrightarrow{P} 0.$$

9.12 Let M and N be a pair of continuous local martingales with $M_0 = N_0 = 0$. If M and N are independent, then $\langle M, N\rangle = 0$.

9.13 Let X and Y be a pair of semimartingales. Let $t > 0$ and $\tau_n : 0 = t^n_0 < t^n_1 < \cdots < t^n_{m(n)} = t$ be a sequence of finite partitions of $[0, t]$ with $\delta(\tau_n)$ tending to zero. Show that as $n \to \infty$

$$I_n(t) = \sum_i \frac{1}{2}(Y_{t^n_i} + Y_{t^n_{i+1}})(X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})$$
$$\xrightarrow{P} \int_0^t Y_{s-}dX_s + \frac{1}{2}([X, Y]_t - X_0Y_0).$$

Denote the limit by $\int_0^t Y_s \circ dX_s$, and call it the *Stratonovich integral* of Y w.r.t. X. Find the chang of variables formula for Stratonovich integrals.

9.14 Let $W = (W_t)$ be a standard Wiener process.

1) For each $n \ge 1$

$$\int_0^t W^n_s dW_s = \frac{1}{n+1} W^{n+1}_t - \frac{n}{2}\int_0^t W^{n-1}_s ds.$$

2) If $H = \frac{1}{2W} I_{[W \ne 0]}$ and $M_t = W^2_t - t$, $t \ge 0$, then $H.M = W$.

9.15 Let N be a Poisson process and T_n be its n-th jump time. Let H be a bounded predictable process. Then $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t H_s ds$ exists and is finite a.s. if and only if $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n H_{T_k}$ exists and is finite a.s.. In this case, the two limits are identical a.s.. This property is called *"Poisson arrivals see time average"* in queueing theory.

9.16 Let X and Y be a pair of semimartingales. If $[Y = 0$ or $Y_- = 0]$ is evanescent, X/Y is a semimartingale.

9.17 Let $X, Y \in \mathcal{S}$. Then $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + [X, Y])$.

9.18 Let $X \in \mathcal{S}_0$. If $\mathcal{E}(X) = 1$, then $X = 0$.

9.19 Let $X, Y \in \mathcal{S}$. If $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(Y)$ and $[\mathcal{E}(X) = 0]$ is an evanescent set, then $X - X_0 = Y - Y_0$.

9.20 Let $X \in \mathcal{S}_{p,0}$ and $X = M + A$ be its canonical decomposition. If $[\Delta A = -1]$ is an evanescent set, then there exists $N \in \mathcal{M}_{loc,0}$ such that $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(N)\mathcal{E}(A)$.

9.21 Let $X, Y \in \mathcal{S}_0$. If $[\Delta Y = -1]$ is an evanescent set, then there exists $Z \in \mathcal{S}_0$ such that $\mathcal{E}(X + Y) = \mathcal{E}(Z)\mathcal{E}(Y)$, and there exists a unique $Y' \in \mathcal{S}_0$ such that $\mathcal{E}(Y)\mathcal{E}(Y') = 1$.

9.22 Let $H \in \mathcal{S}$ and $Z \in \mathcal{S}$ be continuous. Then the unique solution of the equation

$$X_t = H_t + \int_0^t X_{s-}dZ_s, \quad t \ge 0,$$

is given by

$$X_t = \mathcal{E}(Z)_t\Big\{H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(Z)_s^{-1}d(H_s - [H,Z]_s)\Big\}.$$

9.23 Let $X \in \mathcal{S}_0$. Suppose ΔX is bounded, and there exists $\varepsilon > 0$ such that for each $\lambda \in]0, \varepsilon[$ $\mathcal{E}(\lambda X) \in \mathcal{M}_{loc}$. Then $X \in \mathcal{M}_{loc}$.

9.24 Let X be a complex semimartingale, i.e., $X = X' + iX''$, where X' and X'' are real semimartingales. Then

$$Z_t = \exp\Big\{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c\rangle_t\Big\}\prod_{s\le t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}$$

is the unique complex semimartingale satisfying

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}dX_s,$$

where $\langle X^c\rangle = \langle (X')^c\rangle - \langle (X'')^c\rangle + 2i\langle (X')^c, (X'')^c\rangle$.

9.25 Let $Z = X + iY$ be a continuous complex semimartingale such that $[X, Y] = 0$, and f be an analytic function. Then

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s)d\langle Z\rangle_s.$$

In particular, if Z is a complex Brownian motion, i.e., X and Y are independent standard Brownian motions, then $f(Z)$ is a local martingale.

9.26 Let X be a semimartingale. Then for all $t > 0$ $\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dX_s^c =$ 0 a.s..

9.27 Let X be a continuous local martingale with $X_0 = 0$. Then $|X| = M + L^0(X)$, where M is a continuous local martingale with $M_0 = 0$ and $L_t^0(X) = \sup_{s\le t}(-M_s)$. Moreover, if X is a standard Wiener process, so is M.

9.28 Let X be a semimartingale. Denote

$$\widehat{L}_t^a(X) = \frac{1}{2}[L_t^a(X) + L_t^{-a}(-X)], \quad a \in \boldsymbol{R}.$$

1) For any continuous convex function f on $\boldsymbol{R}$

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + \sum_{0<s\le t}[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s] + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{L}_t^a(X)\rho(da),$$

where ρ is the second order derivative of f in the sense of generalized functions.

2) If $L^0(X) \not\equiv 0$, then for all $\beta \in (0,1)$, $|X|^\beta$ is not a semimartingale.

3) Assume that f is a non-negative continuous convex function on $\boldsymbol{R}$ and $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. Put $\widehat{f}' = \frac{1}{2}(f'_+ + f'_-)$, where f'_+ and f'_- are the right and left derivatives of f respectively. Then

$$\widehat{L}_t^0(f(X)) = \widehat{f}'(0)\Big[\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dX_s - \sum_{0<s\le t} I_{[X_{s-}=0]}X_s\Big] + \frac{1}{2}\rho(\{0\})\widehat{L}_t(X).$$

9.29 Let X be an adapted cadlag process. If there exists an adapted increasing process A such that (52.1) holds for any bounded elementary predictable process H (i.e., $H = \sum_{i=0}^{n-1}\xi_i I_{]T_i,T_{i+1}]}$, where $T_0 \le T_1 \le \cdots \le T_n$ are stopping times and $\xi_i \in b\mathcal{F}_{T_i}$, $i = 0, \cdots, n-1$), then X is a semimartingale.

9.30 Let $X, Y \in \mathcal{S}$. We have the following formulae:

$$L_t(X\vee Y) = L_t(X^+ - Y^+) + \int_0^t I_{[X_s\le 0]}dL_s(Y),$$

$$L_t(X\vee Y) = \int_0^t I_{[Y_s<0]}dL_s(X) + \int_0^t I_{[X_s\le 0]}dL_s(Y),$$
$$+ \int_0^t I_{[X_{s-}=Y_{s-}=0]}dL_s(X^+ - Y^+),$$

$$L_t(X\vee Y) + L_t(X\wedge Y) = L_t(X) + L_t(Y).$$

If $L(X - Y) = 0$, then

$$L_t(X\vee Y) = \int_0^t I_{[Y_{s-}<0]}dL_s(X) + \int_0^t I_{[X_{s-}\le 0]}dL_s(Y).$$

9.31 Let $X \in \mathcal{S}$ and f be the difference of two continuous convex functions on $\boldsymbol{R}$. For any $a \in \boldsymbol{R}$ we set

$$B(a) = \{x : f(x) = a, |f'_r(x)| + |f'_l(x)| > 0\},$$

where f'_r (resp. f'_l) stands for the right (resp. left) derivative of f. Then $B(a)$ is at most countable and we have

$$L_t^a(f(X)) = \sum_{x\in B(a)}[f'_r(x)^+ L_t^x(X) + f'_l(x)^- L_t^{-x}(-X)].$$

9.32 Let W be a Wiener process and $a > 0$. Then $X_t = e^{-at}W_{2at}$, $t \ge 0$, is an Ornstein-Uhlenbeck process.

Chapter X

Martingale Spaces $\mathcal{H}^1$ and BMO

The contents of this chapter belong to the fine and difficult parts of modern martingale theory. The terms, spaces $\mathcal{H}^1$ and BMO, are borrowed from modern analysis. $\mathcal{H}$ comes from Hardy and BMO is the abbreviation of "bounded mean oscillation".

§1. $\mathcal{H}^1$-Martingales and BMO-Martingales

10.1 Definition. Let M be a local martingale. Put

$$\|M\|_{\mathcal{H}^1} = \boldsymbol{E}[\sqrt{[M]_\infty}]. \tag{1.1}$$

Denote

$$\mathcal{H}^1 = \{M \in \mathcal{M}_{\text{loc}} : \|M\|_{\mathcal{H}^1} < \infty\}.$$

Each element of $\mathcal{H}^1$ is called an $\mathcal{H}^1$-martingale. Obviously, $\mathcal{H}^1$ is a linear space.

10.2 Remark. 1) It is easy to check $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$ is a norm on $\mathcal{H}^1$. In particular, if $\|M\|_{\mathcal{H}^1} = 0$, then $M = 0$.

2) Let $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ and $\boldsymbol{E}[|M_0|] < \infty$. Then by Theorem 7.30 we know that there exists a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ such that for each n, $M^{T_n} \in \mathcal{H}^1$.

3) Let $M \in \mathcal{M}^2$. Since $\boldsymbol{E}[\sqrt{[M]_\infty}] \leq \sqrt{\boldsymbol{E}[M]_\infty} < \infty$, we have $M \in \mathcal{H}^1$ and $\|M\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|M\|_{\mathcal{M}^2}$.

4) Let $M \in \mathcal{W}$. Since $\sqrt{[M]_\infty} = \sqrt{M_0^2 + \sum_s (\Delta M_s)^2} \leq |M_0| + \sum_s |\Delta M_s|$, we have $M \in \mathcal{H}^1$ and $\|M\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|M\|_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{E}[\int_{[0,\infty]} |dM_s|]$.

5) Let $M \in \mathcal{H}^1$. Then for any stopping time T we have $M^T \in \mathcal{H}^1$ and $\|M^T\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|M\|_{\mathcal{H}^1}$.

The following lemma is a refinement of the fundamental theorem for local martingales (Theorem 7.17). By means of it, many problems concerning local martingales can be reduced to ones for bounded martingales and the compensations of single step processes with integrable variation, then solving these problems is simplified greatly.

10.3 Lemma. *Let M be a local martingale with $M_0 = 0$. Put*

$$A = \sum(\Delta M I_{[|\Delta M| > 1]}), \; V = A - \widetilde{A}, \; U = M - V. \tag{3.1}$$

Then there is a localizing sequence (T_n) for M such that for each n, U^{T_n} is a bounded martingale and V^{T_n} is the sum of a finite number of compensations of adapted single step processes with integrable variation. Here we call the processes of form $\xi I_{[T,\infty[}$ single step processes.

Proof. Let $S_1 = \inf\{t > 0 : |\Delta A_t| \geq 1\}$, and define $(S_k)_{k \geq 2}$ by induction as follows:

$$S_{k+1} = \inf\{t > S_k : |\Delta A_t| > 1\}.$$

Then each S_k is a stopping time and $S_k \uparrow +\infty$, $[S_k] \cap [S_j] = \emptyset$ when $k \neq j$. In addition, we have

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta M_{S_k} I_{[S_k,\infty[}.$$

By Theorem 7.17 there is a localizing sequence (R_n) for M such that for each n, U^{R_n} is a bounded martingale and A^{R_n} is a process with integrable variation. Put $T_n = S_n \wedge R_n$. Then $T_n \uparrow \infty$ and

$$A^{T_n} = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_{S_k} I_{[S_k \leq T_n]} I_{[S_k,\infty[}, \quad V^{T_n} = A^{T_n} - \widetilde{A}^{T_n}.$$

But

$$\sum_{s \leq T_n} |\Delta A_s| \leq \sum_{k=1}^{n} |\Delta M_{S_k}| I_{[S_k \leq T_n]}.$$

$\Delta M_{S_k} I_{[S_k \leq T_n]}$ is integrable and $\mathcal{F}_{S_k}$-measurable, i.e., $\Delta M_{S_k} I_{[S_k \leq T_n]} I_{[S_k,\infty[}$ is an adapted single step process with integrable variation, $1 \leq k \leq n$. □

10.4 Lemma. *Let $M \in \mathcal{H}^1$ and (T_n) be a sequence of stopping times such that $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$. Then $\lim_{n\to\infty} \|M - M^{T_n}\|_{\mathcal{H}^1} = 0$.*

Proof. Since $\xi_n = \sqrt{[M - M^{T_n}]_\infty} = \sqrt{[M]_\infty - [M]_{T_n}} \to 0$ and $\xi_n \leq \sqrt{[M]_\infty}$, we have $\boldsymbol{E}[\xi_n] \to 0$, i.e., $\lim_{n\to\infty} \|M - M^{T_n}\|_{\mathcal{H}^1} = 0$. □

10.5 Theorem. *The collection of all bounded martingale (denoted by $\mathcal{M}^\infty$) is dense in $\mathcal{H}^1$.*

Proof. Since $\mathcal{M}^\infty$ is dense in $\mathcal{M}^2$ and the norm of $\mathcal{M}^2$ is stronger than the norm of $\mathcal{H}^1$, it suffices to show that $\mathcal{M}^2$ is dense in $\mathcal{H}^1$.

Let $M \in \mathcal{H}^1$. We want to show that there is $(M^{(n)}) \subset \mathcal{M}^2$ such that $\|M^{(n)} - M\|_{\mathcal{H}^1} \to 0$. Obviously, we may assume that $M_0 = 0$ and M is the compensation of a single step process by Lemmas 10.3 and 10.4.

Let $T > 0$ be a stopping time and $\xi \in \mathcal{F}_T$ be an integrable r.v.. Put

$$A = \xi I_{[T,\infty[}, \quad M = A - \tilde{A}.$$

$$A^{(n)} = \xi I_{[|\xi| \le n]} I_{[T,\infty[}, \quad M^{(n)} = A^{(n)} - \tilde{A}^{(n)}.$$

Then $M^{(n)} \in \mathcal{M}^2$ and by Remark 10.2.4) we have

$$\|M^{(n)} - M\|_{\mathcal{H}^1} \le \|M^{(n)} - M\|_{\mathcal{A}} \le 2\|A^{(n)} - A\|_{\mathcal{A}} \le 2E[\xi I_{[|\xi|>n]}] \to 0,$$

where the second inequality follows from Theorem 5.22.2). □

10.6 Definition. Let M be a square integrable martingale. Put

$$\|M\|_{\mathcal{BMO}} = \sup_{T \in \mathcal{T}} \sqrt{\frac{E(M_\infty - M_{T-} I_{[T>0]})^2}{P(T < \infty)}}, \tag{6.1}$$

where $\mathcal{T}$ is the collection of all stopping times and $\frac{0}{0} = 0$ by convention. Put

$$\mathcal{BMO} = \{M \in \mathcal{M}^2 : \|M\|_{\mathcal{BMO}} < \infty\}. \tag{6.2}$$

Each element of $\mathcal{BMO}$ is called a $\mathcal{BMO}$-martingale. It is easy to check that $\mathcal{BMO}$ is a linear space, $\|\cdot\|_{\mathcal{BMO}}$ is a norm on $\mathcal{BMO}$ and $\|M\|_{\mathcal{M}^2} \le \|M\|_{\mathcal{BMO}}$ for $M \in \mathcal{M}^2$.

10.7 Lemma. *Let $M \in \mathcal{M}^2$. Then for any stopping time T*

$$E[(M_\infty - M_{T-} I_{[T>0]})^2 | \mathcal{F}_T] = E[[M]_\infty | \mathcal{F}_T] - [M]_T + M_0^2 I_{[T=0]} + (\Delta M_T)^2 \quad \text{a.s.}. \tag{7.1}$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} E[(M_\infty - M_{T-} I_{[T>0]})^2 | \mathcal{F}_T] &= E[(M_\infty - M_{T-} + M_0 I_{[T=0]})^2 | \mathcal{F}_T] \\ &= E[M_\infty^2 | \mathcal{F}_T] + (M_{T-})^2 + M_0^2 I_{[T=0]} - 2M_T M_{T-} \\ &= E[M_\infty^2 - M_T^2 | \mathcal{F}_T] + M_0^2 I_{[T=0]} + (\Delta M_T)^2 \\ &= E[[M]_\infty - [M]_T | \mathcal{F}_T] + M_0^2 I_{[T=0]} + (\Delta M_T)^2, \text{ a.s.} \end{aligned}$$ □

10.8 Lemma. *Let $M \in \mathcal{M}^2$. Then $M \in \mathcal{BMO}$ if and only if there exists a constant $c > 0$ such that for any stopping time T*

$$E[(M_\infty - M_{T-} I_{[T>0]})^2 | \mathcal{F}_T] \le c^2 \quad \text{a.s.}. \tag{8.1}$$

Proof. Necessity. Let $M \in \mathcal{BMO}$ and $c = \|M\|_{\mathcal{BMO}}$. Then for any stopping time T

$$E[(M_{\infty-} - M_{T-} I_{[T>0]})^2] \le c^2 P(T < \infty). \tag{8.2}$$

Let $A \in \mathcal{F}_T$. Replacing T by T_A in (8.2) yields

$$E[(M_{\infty-} - M_{T-} I_{[T>0]})^2] \le c^2 P(A \cap [T < \infty]) \le c^2 P(A).$$

Hence (8.1) follows.

Sufficiency. Because (8.1) holds for any stopping time T, we have

$$\begin{aligned} E[(M_{\infty-} - M_{T-} I_{[T>0]})^2 | \mathcal{F}_T] &= E[(M_{\infty-} - M_{T-} I_{[T>0]})^2 | \mathcal{F}_T] I_{[T<\infty]} \\ &\le c^2 I_{[T<\infty]}, \quad \text{a.s.}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Taking expectations in (8.3), we obtain (8.2). Then $M \in \mathcal{BMO}$. □

10.9 Theorem. *Let M be a local martingale. Then the following statements are equivalent:*

1) $M \in \mathcal{BMO}$,

2) *There exist constants $c_1, c_2 > 0$ such that $|M_0| \le c_1$ a.s., and for any stopping time T, $|\Delta M_T| \le c_1$ a.s. and*

$$E([M]_\infty - [M]_T) \le c_2^2 P(T < \infty), \tag{9.1}$$

3) *There exist constants $c_1, c_2 > 0$ such that $|M_0| \le c_1$ a.s., and for any stopping time T, $|\Delta M_T| \le c_1$ a.s. and*

$$E[[M]_\infty | \mathcal{F}_T] - [M]_T \le c_2^2 \quad \text{a.s.}, \tag{9.2}$$

4) *There exists constants $c_1, c_2 > 0$ such that $|M_0| \le c_1$ a.s., $|\Delta M| \le c_1$ and for all $t \ge 0$*

$$E[[M]_\infty | \mathcal{F}_t] - [M]_t \le c_2^2 \quad \text{a.s.}. \tag{9.3}$$

In particular, $\mathcal{BMO}$-martingales are locally bounded martingales.

Proof. 1)$\Longleftrightarrow$3) can be seen from Lemmas 10.7 and 10.8. The proof of 2)$\Longleftrightarrow$3) is similar to that of Lemma 10.8. 3) $\Rightarrow$ 4) is trivial. It remains to show 4)$\Rightarrow$3). Let (X_t) be the cadlag modification of $(E[[M]_\infty | \mathcal{F}_t])$. Then by (9.3) and the right-continuity of $X - [M]$, for almost all ω we have

$$X_t(\omega) - [M]_t(\omega) \le c_2^2$$

for all $t \ge 0$. In particular, for all stopping time T

$$X_T - [M]_T \le c_2^2 \quad \text{a.s.},$$

i.e. (9.2) holds. □

10.10 Remarks. 1) Let $M \in \mathcal{BMO}$. By Theorem 10.9.2) we have $\|M^c\|_{\mathcal{BMO}} \le \|M\|_{\mathcal{BMO}}$ and $\|M^d\|_{\mathcal{BMO}} \le \|M\|_{\mathcal{BMO}}$.

2) Let ξ be an a.s. bounded r.v.. Denote by $\|\xi\|_{L^\infty}$ the a.s. supremum of ξ. It can be seen from Lemmas 10.7 and 10.8 that for $M \in \mathcal{M}^2$

$$\|M\|^2_{BMO} = \sup_{T\in\mathcal{T}} \|E[[M]_\infty - [M]_{T-}I_{[T>0]}|\mathcal{F}_T]\|_{L^\infty}$$
$$= \sup_{T\in\mathcal{T}} \|E[(M_{\infty-} - M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathcal{F}_T]\|_{L^\infty}.$$

In particular, by Lemma 10.7 for $M \in BMO$, $|M_0| \le \|M\|_{BMO}$ a.s. and $|\Delta M| \le \|M\|_{BMO}$. If $M \in \mathcal{M}_{loc}$ and $M \notin BMO$, we define $\|M\|_{BMO} = +\infty$.

Below we give some useful examples of BMO martingales.

10.11 Theorem. *Let M be a bounded martingale. Then $M \in BMO$ and*

$$\|M\|_{BMO} \le 2\|M_\infty\|_{L^\infty}.$$

Proof. Let $c = \|M_\infty\|_{L^\infty}$. Then for any stopping time T

$$|M_T| = |E[M_\infty|\mathcal{F}_T]| \le c \quad \text{a.s.,}$$
$$E[(M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathcal{F}_T] \le (2c)^2 \quad \text{a.s..}$$

Hence $\|M\|_{BMO} \le 2c$. □

10.12 Theorem. *Let $A = (A_t)$ be an adapted integrable increasing process, and $M = (M_t)$ be the cadlag modification of $(E[A_\infty|\mathcal{F}_t])$. If there is a constant $c > 0$ such that $0 \le M - A_-I_{]0,\infty]} \le c$, then $M \in BMO$ and*

$$\|M\|_{BMO} \le \sqrt{3}c.$$

Proof. Let $X = M - A_-I_{]0,\infty]}$. Then $0 \le X \le c$ and for any stopping time T

$$E[(M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathcal{F}_T] \le E[(A_\infty - A_{T-}I_{[T>0]})^2 + X^2_{T-}I_{[T>0]}|\mathcal{F}_T]$$
$$\le [(A_\infty - A_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathcal{F}_T] + c^2 \quad \text{a.s..} \quad (12.1)$$

For any increasing function (a_t) and $t > 0$ we have

$$a^2_\infty - a^2_{t-} = \int_{[t,\infty[} a_{s-}da_s + \int_{[t,\infty[} a_s da_s \ge 2\int_{[t,\infty[} a_{s-}da_s,$$
$$(a_\infty - a_{t-})^2 \le 2\int_{[t,\infty[} (a_\infty - a_{s-})da_s.$$

Noting that (X_t) is the optional projection of $(A_\infty - A_{t-}I_{[t>0]})$, we get

$$E[(A_\infty - A_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathcal{F}_T] \le 2E\Big[\int_{[T,\infty[} (A_\infty - A_{s-}I_{[s>0]})dA_s|\mathcal{F}_T\Big]$$
$$= 2E\Big[\int_{[T,\infty[} X_s dA_s|\mathcal{F}_T\Big] \le 2cE[A_\infty - A_{T-}I_{[T>0]}|\mathcal{F}_T]$$
$$= 2c[M_T - A_{T-}I_{[T>0]}] \le 2c^2 \quad \text{a.s..}$$

Hence, by (12.1) we find

$$E[(M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathcal{F}_T] \le 3c^2 \quad \text{a.s.,}$$

and therefore by Remark 10.10.2) we have $\|M\|_{BMO} \le \sqrt{3}c$. □

10.13 Theorem. *Let $A = (A_t)$ be a predictable integrable increasing process with $A_0 = 0$, and $M = (M_t)$ be the cadlag modification of $(E[A_\infty|\mathcal{F}_t])$. If there is a constant $c > 0$ such that for all $t \ge 0$, $M_t - A_t \le c$ a.s., then $M \in BMO$ and $\|M\|_{BMO} \le 2\sqrt{3}c$.*

Proof. Let $Y = M - A$. Then $0 \le Y \le c$. Y is a special semimartingale and $Y = M + (-A)$ is its canonical decomposition. By Theorem 8.8 we have $0 \le \Delta A \le c$. Hence, $M - A_-I_{]0,\infty[} = M - A_- = Y + \Delta A \le 2c$.

By Theorem 10.12 we know $M \in BMO$ and $\|M\|_{BMO} \le 2\sqrt{3}c$. □

10.14 Theorem. *Let $M \in \mathcal{M}^2$, B be an adapted increasing process and $L = (B_-).M$. If for all $t \ge 0$, $|B_tM_t| \le 1$ a.s., then $L \in BMO$ and $\|L\|_{BMO} \le 2$.*

Proof. Let T be a stopping time. Since $[L] = B^2_-.[M]$, by the formula of integration by parts we have

$$[L]_\infty - [L]_{T-}I_{[T>0]} = \int_{[T,\infty[} B^2_{s-}d[M]_s$$
$$= \int_{[T,\infty[} ([M]_\infty - [M]_s)dB^2_s + ([M]_\infty - [M]_{T-})B^2_{T-}I_{[T>0]}. \quad (14.1)$$

Because $[M] - M^2 \in \mathcal{M}$, $([M]_\infty - [M]_t)$ and $(M^2_\infty - M^2_t)$ have the same optional projection. By Theorem 5.16.1) we obtain

$$E\Big[\int_{[T,\infty[} ([M]_\infty - [M]_s)dB^2_s|\mathcal{F}_T\Big] = E\Big[\int_{[T,\infty[} (M^2_\infty - M^2_s)dB^2_s|\mathcal{F}_T\Big]$$
$$\le E[M^2_\infty(B^2_\infty - B^2_{T-}I_{[T>0]})|\mathcal{F}_T]$$
$$\le 1 - E[M^2_\infty|\mathcal{F}_T]B^2_{T-}I_{[T>0]} \quad \text{a.s..}$$

(14.2)

On the other hand,

$$
\begin{aligned}
&E[([M]_\infty - [M]_{T-})B_{T-}^2 I_{[T>0]}|\mathcal{F}_T] \\
&\quad = E[([M]_\infty - [M]_T)|\mathcal{F}_T]B_{T-}^2 I_{[T>0]} + \Delta M_T^2 B_{T-}^2 I_{[T>0]} \\
&\quad = E[M_\infty^2 - M_T^2|\mathcal{F}_T]B_{T-}^2 I_{[T>0]} + \Delta M_T^2 B_{T-}^2 I_{[T>0]} \\
&\quad \le E[M_\infty^2|\mathcal{F}_T]B_{T-}^2 I_{[T>0]} - M_T^2 B_{T-}^2 I_{[T>0]} \\
&\quad +2(M_T^2 + M_{T-}^2)B_{T-}^2 I_{[T>0]} \\
&\quad \le E[M_\infty^2|\mathcal{F}_T]B_{T-}^2 I_{[T>0]} + M_T^2 B_{T-}^2 + 2M_{T-}^2 B_{T-}^2 \\
&\quad \le E[M_\infty^2|\mathcal{F}_T]B_{T-}^2 I_{[T>0]} + 3.
\end{aligned}
\tag{14.3}
$$

By (14.1)–(14.3) we get

$$E[[L]_\infty - [L]_{T-} I_{[T>0]}|\mathcal{F}_T] \le 4 \quad \text{a.s.}.$$

Hence $L \in BMO$ and $\|L\|_{BMO} \le 2$. □

10.15 Corollary. *Let $M \in \mathcal{M}^2$ and H be a predictable process. If there exists an adapted increasing process B such that $|BM| \le 1$ and $|H| \le B_-$, then $H.M \in BMO$ and $\|H.M\|_{BMO} \le 2$.*

Proof. Let $L = B_-.M$. Then for any stopping time T

$$
\begin{aligned}
[H.M]_\infty - [H.M]_{T-} I_{[T>0]} &= \int_{[T,\infty[} H_s^2 d[M]_s \\
&\le \int_{[T,\infty[} B_{s-}^2 d[M]_s = [L]_\infty - [L]_{T-} I_{[T>0]}.
\end{aligned}
$$

Since $L \in BMO$, we know $H.M \in BMO$ and $\|H.M\|_{BMO} \le \|L\|_{BMO} \le 2$. □

Finally, we conclude this paragraph with an interesting property of BMO-martingales.

10.16 Theorem. *Let $M \in BMO$. Then for any stopping time T*

$$\|M^T\|_{BMO} \le \|M\|_{BMO}, \quad \|M - M^T\|_{BMO} \le \|M\|_{BMO}. \tag{16.1}$$

Moreover, if stopping times $T_n \uparrow \infty$ a.s., $\|M^{T_n}\|_{BMO} \uparrow \|M\|_{BMO}$.

Proof. Let S be a stopping time.

$$
\begin{aligned}
[M^T]_\infty - [M^T]_{S-} I_{[S>0]} &= ([M]_T - [M]_{S-} I_{[S>0]}) I_{[S\le T]} \\
&\le [M]_\infty - [M]_{S-} I_{[S>0]},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[M - M^T]_\infty - [M - M^T]_{S-} I_{[S>0]} \\
&\quad = [M]_\infty - [M]_{S-} I_{[S>0]} - [M]_T + ([M]^T)_{S-} I_{[S>0]} \\
&\quad \le [M]_\infty - [M]_{S-} I_{[S>0]}.
\end{aligned}
$$

Thus (16.1) holds.

If stopping times $T_n \uparrow \infty$ a.s., for any stopping time S

$$[M^{T_n}]_\infty - [M^{T_n}]_{S-} I_{[S>0]} \uparrow [M]_\infty - [M]_{S-} I_{[S>0]}.$$

By Remark 10.10.2) it is easy to see $\|M^{T_n}\|_{BMO} \uparrow \|M\|_{BMO}$. □

Remark. We have $\|M - M^{T_n}\|_{BMO} \downarrow$. But it need not be $\|M - M^{T_n}\|_{BMO} \downarrow 0$ in general. In fact, Dellacherie, Meyer and Yor[1] showed that if $\mathcal{M}^\infty \neq BMO$, then $\mathcal{M}^\infty$ is neither a closed set nor a dense set in BMO.

§2. Fefferman's Inequality

Fefferman's inequality, given in the following theorem, is the most important result concerning $\mathcal{H}^1$- and BMO-martingales. It is much deeper than Kunita-Watanabe inequality.

10.17 Theorem. *Let M and N be a pair of local martingales, and U be a progressive process. Then*

$$E\Big[\int_{[0,\infty[} |U_s||d[M,N]_s|\Big] \le \sqrt{2}E\Big[\Big(\int_{[0,\infty[} U_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big]\|N\|_{BMO}. \tag{17.1}$$

In particular, putting $U = 1$, we have

$$E\Big[\int_{[0,\infty[} |d[M,N]_s|\Big] \le \sqrt{2}\|M\|_{\mathcal{H}^1}\|N\|_{BMO}. \tag{17.2}$$

Proof. We may assume that the right-hand side of (17.1) is finite. Put

$$C_t = \int_{[0,t]} U_s^2 d[M]_s.$$

We define two non-negative optional processes H and K as follows:

$$H_t^2 = \frac{U_t^2}{\sqrt{C_t} + \sqrt{C_{t-} I_{[t>0]}}} I_{[C_t>0]}, \quad K_t^2 = \sqrt{C_t}.$$

Thus

$$H_t^2 K_t^2 \ge \frac{1}{2} U_t^2 I_{[C_t>0]},$$

and by the formula of integration by parts

$$H_t^2 d[M]_t = I_{[C_t>0]} \frac{dC_t}{\sqrt{C_t} + \sqrt{C_{t-} I_{[t>0]}}} = I_{[C_t>0]} d\sqrt{C_t}.$$

Since (by Kunita-Watanabe inequality)

$$\int_{]0,\infty[}|U_s|I_{[C_s=0]}|d[M,N]_s| \le \Big(\int_{]0,\infty[}U_s^2 I_{[C_s=0]}d[M]_s\Big)^{1/2}([N]_\infty)^{1/2}$$
$$= \Big(\int_{]0,\infty[}I_{[C_s=0]}dC_s\Big)^{1/2}([N]_\infty)^{1/2} = 0, \quad \text{a.s.},$$

we have

$$\frac{1}{\sqrt{2}}E\Big[\int_{]0,\infty[}|U_s||d[M,N]_s|\Big] = \frac{1}{\sqrt{2}}E\Big[\int_{]0,\infty[}|I_{[C_s>0]}U_s||d[M,N]_s|\Big]$$
$$\le E\Big[\int_{]0,\infty[}|H_sK_s||d[M,N]_s|\Big] \le \sqrt{E_1}\sqrt{E_2}, \tag{17.3}$$

where

$$E_1 = E\Big[\int_{]0,\infty[}H_s^2 d[M]_s\Big] \le E\Big[\int_{]0,\infty[}d\sqrt{C_s}\Big]$$
$$= E[\sqrt{C_\infty}] = E\Big[\Big(\int_{]0,\infty[}U_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big],$$

$$E_2 = E\Big[\int_{]0,\infty[}K_s^2 d[N]_s\Big] = E\Big[\int_{]0,\infty[}([N]_\infty - [N]_{s-})dK_s^2\Big]. \tag{17.4}$$

Because the optional projection of $([N]_\infty - [N]_{t-})$ is $(E([N]_\infty|\mathcal{F}_t) - [N]_{t-})$ and the latter is bounded by $\|N\|^2_{BMO}$ on $]0,\infty[$, we have

$$E_2 = E\Big[\int_{]0,\infty[}(E[[N]_\infty|\mathcal{F}_s] - [N]_{s-})dK_s^2\Big] \le \|N\|^2_{BMO}E[\sqrt{C_\infty}]. \tag{17.5}$$

Then (17.1) follows from (17.3)–(17.5). □

The following theorem is a strengthened form of Fefferman's inequality.

10.18 Theorem. *Let M and N be a pair of local martingales, U be an optional process and T be a stopping time. Then*

$$E\Big[\int_{[T,\infty[}|U_s||d[M,N]_s|\Big] \le \sqrt{2}E\Big[\Big(\int_{[T,\infty[}U_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big]\|N\|_{BMO}. \tag{18.1}$$

$$E\Big[\int_{[T,\infty[}|U_s||d[M,N]_s|\,\Big|\,\mathcal{F}_T\Big] \le \sqrt{2}E\Big[\Big(\int_{[T,\infty[}U_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big|\mathcal{F}_T\Big]\|N\|_{BMO}. \tag{18.2}$$

Proof. Replacing U by $UI_{[T,\infty[}$ in (17.1) yields (18.1). For any $A \in \mathcal{F}_T$, replacing T by T_A in (18.1) gives (18.2). □

As an application of Fefferman's inequality we will show that $\mathcal{H}^1$-martingales are uniformly integrable martingales.

10.19 Theorem. *Let $M \in \mathcal{H}^1$. Then M is a uniformly integrable martingale, and*

$$\|M_\infty\|_1 \le 2\sqrt{2}\|M\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{19.1}$$

Proof. First of all, assume that M is the sum of a bounded martingale and a martingale with integrable variation. Then for any bounded martingale N by Theorem 6.4, Theorem 6.28.1) and Fefferman's inequality the inequality

$$|E[M_\infty N_\infty]| = |E[M,N]_\infty| \le \sqrt{2}\|M\|_{\mathcal{H}^1}\|N\|_{BMO}$$
$$\le 2\sqrt{2}\|M\|_{\mathcal{H}^1}\|N_\infty\|_{L^\infty}, \tag{19.2}$$

comes from Theorem 10.11. Putting $N_\infty = \operatorname{sgn} M_\infty$ in (19.2) yields

$$\|M_\infty\|_1 \le 2\sqrt{2}\|M\|_{\mathcal{H}^1},$$

where $\operatorname{sgn}(x) = 1, 0$ or -1 while $x > 0$, $x = 0$ or $x < 0$.

For an arbitrary $M \in \mathcal{H}^1$ there exists a sequence (S_n) of stopping times such that $S_n \uparrow \infty$ and for each n, M^{S_n} is the sum of a bounded martingale and a martingale with integrable variation. Then

$$\|M_{S_n} - M_{S_m}\|_1 \le 2\sqrt{2}\|M^{S_n} - M^{S_m}\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{19.3}$$

Since $\|M^{S_n} - M\|_{\mathcal{H}^1} \to 0$ as $n \to \infty$, (19.3) means that (M_{S_n}) is a fundamental sequence in L^1. Hence $M_{S_n} \xrightarrow{L^1} \xi \in L^1$. Let (ξ_t) be the cadlag modification of $(E[\xi|\mathcal{F}_t])$. For any given m

$$\xi_{t\wedge S_m} = E[\xi|\mathcal{F}_{t\wedge S_m}] = L^1\text{-}\lim_{n\to\infty}E[M_{S_n}|\mathcal{F}_{t\wedge S_m}] = M_{t\wedge S_m} \quad \text{a.s.}.$$

Thus for all $t \ge 0$, $M_t = \xi_t$ a.s.. In particular, M is a uniformly integrable martingale and $M_\infty = \xi$ a.s.. In addition, we have

$$\|M_\infty\|_1 = \lim_{n\to\infty}\|M_{S_n}\|_1 \le 2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\|M^{S_n}\|_{\mathcal{H}^1} = 2\sqrt{2}\|M\|_{\mathcal{H}^1}. \quad □$$

§3. The Dual Space of $\mathcal{H}^1$

First of all, we give a useful characterization for BMO-martingales.

10.20 Theorem. *Let $N \in \mathcal{M}^2$. Then $N \in BMO$ if and only if there is a constant $c > 0$ such that for all $M \in \mathcal{M}^2$* [1]

$$|E[M,N]_\infty| \le c\|M\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{20.1}$$

In this case, $\|N\|_{BMO} \le \sqrt{5}c$.

Proof. The necessity comes directly from Fefferman's inequality by taking $c = \sqrt{2}\|N\|_{BMO}$. We want to show the sufficiency.

[1] It is easy to see that this is equivalent to that (20.1) holds for any bounded martingale M.

First of all, we are to show $|N_0| \le c$ a.s.. Let $B = [|N_0| > c]$. Suppose $P(B) > 0$. Put $\xi = \frac{\operatorname{sgn} N_0}{P(B)} I_B$. Then $|\xi| = \frac{1}{P(B)} I_B$, $E[|\xi|] = 1$. Put $M_t = \xi, t \ge 0$. Then $M \in \mathcal{M}^2$, $\|M\|_{\mathcal{H}^1} = E[|\xi|] = 1$, and

$$|E[M,N]_\infty| = E[M_0 N_0] = E\Big[\frac{|N_0| I_{[|N_0|>c]}}{P(|N_0| > c)}\Big] > c = c\|M\|_{\mathcal{H}^1}.$$

This contradicts the assumption. Hence, it must be $P(B) = 0$.

Secondly, we want to show $|\Delta N| \le 2c$. Let T be a predictable time or totally inaccessible time, and $T > 0$. Suppose $P([|\Delta N_T| > 2c]) > 0$. Put

$$\xi = \frac{\operatorname{sgn}(\Delta N_T)}{P([|\Delta N_T| > 2c])} I_{[|\Delta N_T|>2c]}.$$

Then $\xi \in b\mathcal{F}_T$, and $\xi I_{[T=\infty]} = 0$. Put $M = \xi I_{[T,\infty[} - (\xi I_{[T,\infty[})^p$. Then $M \in \mathcal{M}^2$ and only at T, M has a jump:

$$\Delta M_T = \begin{cases} \xi - E[\xi|\mathcal{F}_{T-}], & \text{if } T \text{ is predictable}, \\ \xi, & \text{if } T \text{ is totally inaccessible}. \end{cases}$$

At the same time, we have $\|M\|_{\mathcal{H}^1} \le \|M\|_{\mathcal{A}} \le 2\|\xi I_{[T,\infty[}\|_{\mathcal{A}} \le 2E[|\xi|] = 2$. Because $E[\Delta N_T|\mathcal{F}_{T-}] = 0$ for predictable T, in any case by Theorem 6.28 we have

$$E[[M,N]_\infty] = E[\Delta M_T \Delta N_T] = E[\xi \Delta N_T]$$
$$= E\Big[\frac{|\Delta N_T| I_{[|\Delta N_T|>2c]}}{P([|\Delta N_T| > 2c])}\Big] > 2c \ge c\|M\|_{\mathcal{H}^1}.$$

This contradicts the assumption. Hence, it must be $P(|\Delta N_T| > 2c) = 0$, i.e., $|\Delta N_T| \le 2c$ a.s.. Therefore, for all stopping time T, $|\Delta N_T| \le 2c$ a.s..

Finally, Let T be a stopping time, $M = N - N^T$, $\xi = [N]_\infty - [N]_T$. Then $M \in \mathcal{M}^2$ and $[M]_\infty = [M,N]_\infty = \xi$. By the assumption we have

$$E[\xi] = E[M,N]_\infty \le c\|M\|_{\mathcal{H}^1} = cE[\sqrt{\xi}] = cE[\sqrt{\xi} I_{[T<\infty]}]$$
$$\le c(E[\xi])^{1/2}[P(T < \infty)]^{1/2},$$
$$E[[N]_\infty - [N]_T] = E[\xi] \le c^2 P(T < \infty).$$

Now by Theorem 10.9 we know $N \in \mathcal{BMO}$ and

$$\|N\|_{\mathcal{BMO}} \le \sqrt{c^2 + (2c)^2} = \sqrt{5}c. \quad \square$$

Now we are ready to show the dual space of $\mathcal{H}^1$ is $\mathcal{BMO}$. More precisely, we have

10.21 Theorem. *Let $(\mathcal{H}^1)^*$ be the Banach space formed by all bounded linear functionals on $\mathcal{H}^1$ (i.e., $(\mathcal{H}^1)^*$ is the dual space of $\mathcal{H}^1$). Let $N \in \mathcal{BMO}$. Put*

$$\varphi_N(M) = E[[M,N]_\infty], \quad M \in \mathcal{H}^1. \tag{21.1}$$

Then $N \mapsto \varphi_N$ is a one to one linear mapping from $\mathcal{BMO}$ onto $\mathcal{H}^1$ and

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|\varphi_N\| \le \|N\|_{\mathcal{BMO}} \le \sqrt{5}\|\varphi_N\|, \tag{21.2}$$

where $\|\varphi\|$ denotes the norm of bounded linear function φ.

In particular, $\mathcal{BMO}$ with norm $\|\cdot\|_{\mathcal{BMO}}$ is a Banach space.

Proof. Let $N \in \mathcal{BMO}$. By Fefferman's inequality

$$|\varphi_N(M)| = |E[M,N]_\infty| \le \sqrt{2}\|N\|_{\mathcal{BMO}}\|M\|_{\mathcal{H}^1}, \quad M \in \mathcal{H}^1.$$

Thus $\varphi_N \in (\mathcal{H}^1)^*$ and $\|\varphi_N\| \le \sqrt{2}\|N\|_{\mathcal{BMO}}$.

If $\varphi_N \equiv 0$, taking account of the fact that $\mathcal{BMO} \subset \mathcal{M}^2 \subset \mathcal{H}^1$, we have $E[[N]_\infty] = \varphi_N(N) = 0$ and $N = 0$. This means $N \mapsto \varphi_N$ is a one to one linear mapping from $\mathcal{BMO}$ into $(\mathcal{H}^1)^*$ (linearity is trivial). It remains to show the image space of φ is the whole space $(\mathcal{H}^1)^*$ and $\|N\|_{\mathcal{BMO}} \le \sqrt{5}\|\varphi_N\|$.

Let $\varphi \in (\mathcal{H}^1)^*$. Since $\mathcal{M}^2 \subset \mathcal{H}^1$ and $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1} \le \|\cdot\|_{\mathcal{M}^2}$, for all $M \in \mathcal{M}^2$

$$|\varphi(M)| \le \|\varphi\|\|M\|_{\mathcal{H}^1} \le \|\varphi\|\|M\|_{\mathcal{M}^2}.$$

This means that φ, restricted on Hilbert space $\mathcal{M}^2$, is a bounded linear functional on $\mathcal{M}^2$. Hence, there exists a unique $N \in \mathcal{M}^2$ such that for all $M \in \mathcal{M}^2$

$$|\varphi(M)| = |E[M_\infty N_\infty]| = |E[[M,N]_\infty]| \le \|\varphi\|\|M\|_{\mathcal{H}^1}.$$

By Theorem 10.20 we know $N \in \mathcal{BMO}$ and $\|N\|_{\mathcal{BMO}} \le \sqrt{5}\|\varphi\|$. Furthermore, φ_N coincides with φ on $\mathcal{M}^2$. But $\mathcal{M}^2$ is dense in $\mathcal{H}^1$ (Theorem 10.5), so φ_N and φ are the same element of $(\mathcal{H}^1)^*$. Hence

$$(\mathcal{H}^1)^* = \{\varphi_N : N \in \mathcal{BMO}\},$$

and $\mathcal{BMO}$ with norm $\|\varphi_N\|$ is isomorphic to $(\mathcal{H}^1)^*$. By (21.2) $\|\varphi_N\|$ and $\|N\|_{\mathcal{BMO}}$ are equivalent norms. Thus $\mathcal{BMO}$ with norm $\|\cdot\|_{\mathcal{BMO}}$ is complete. $\square$

Remark. By the theorem we know that each bounded linear functional on $\mathcal{H}^1$ has the form of (21.1). Replacing $\mathcal{M}^2$ by $\mathcal{M}_0^2$ in the proof of Theorem 10.21, we obtain immediately the next theorem.

10.22 Theorem. *Let $N \in \mathcal{BMO}_0$. Put*

$$\varphi_N(M) = E([M,N]_\infty), \quad M \in \mathcal{H}_0^1.$$

Then $N \mapsto \varphi_N$ is a one to one linear mapping from $\mathcal{BMO}_0$ onto $(\mathcal{H}_0^1)^*$ and

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|\varphi_N\| \le \|N\|_{\mathcal{BMO}} \le \sqrt{5}\|\varphi_N\|.$$

§4. Davis Inequalities

10.23 Lemma. *Let M be a local martingale, and H be a progressive process such that $H.\, M \in \mathcal{H}^1$ and*

$$\boldsymbol{E}\Big[\Big(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big] < \infty.$$

Then for any $N \in BMO$, $[H.\, M, N] - H.\, [M,N]$ is a martingale with integrable variatoin. In particular, $\boldsymbol{E}[H.\, M, N]_\infty = \boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty]} H_s d[M,N]_s\Big]$.

Proof. Since $N \in BMO$, N is a locally bounded martingale. By Theorem 9.10 $[H.\, M, N] - H.\, [M,N]$ is a local martingale. By Fefferman's inequality we have

$$\boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty]} |d[H.\, M, N]_s|\Big] \leq \sqrt{2}\|H.\, M\|_{\mathcal{H}^1}\|N\|_{BMO} < \infty.$$

$$\boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty[} |H_s||d[M,N]_s|\Big] \leq \sqrt{2}\boldsymbol{E}\Big[\Big(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big]\|N\|_{BMO} < \infty.$$

Hence $[H.\, M, N] - H.\, [M,N] \in \mathcal{W}_0$. □

The following theorem is the first Davis inequality. In fact, its form given here is a generalization of its ordinary one.

10.24 Theorem. *Let M be a local martingale, H be a progressive process such that $\sqrt{H^2.[M]}$ is locally integrable. Then*

$$\boldsymbol{E}[(H.\, M)^*_\infty] \leq 2\sqrt{6}\boldsymbol{E}\Big[\Big(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big]. \tag{24.1}$$

In particular, we have

$$\boldsymbol{E}[M^*_\infty] \leq 2\sqrt{6}\|M\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{24.2}$$

Proof. Evidently, we may assume $\boldsymbol{E}\Big[\Big(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big] < \infty$. In this case $(H.\, M)_0$ is integrable. Thus we may assume further $H.\, M \in \mathcal{H}^1$. Otherwise, we may take a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ such that for each n, $H.\, M^{T_n} = (H.\, M)^{T_n} \in \mathcal{H}^1$. At the same time, we have $(H.\, M^{T_n})^*_\infty \uparrow (H.\, M)^*_\infty$.

Let S be a non-negative finite r.v. and $B = \mathrm{sgn}(H.\, M)_S I_{[S,\infty[}$. Let A be the dual optional projection of B. Then for any stopping time T

$$\boldsymbol{E}\Big[\int_{[T,\infty]} |dA_s|\Big|\mathcal{F}_T\Big] \leq \boldsymbol{E}\Big[\int_{[T,\infty[} |dB_s|\Big|\mathcal{F}_T\Big] \leq 1 \quad \text{a.s.}.$$

Hence

$$\boldsymbol{E}[A^+_\infty - A^+_{T-}I_{[T>0]}|\mathcal{F}_T] \leq 1, \quad \boldsymbol{E}[A^-_\infty - A^-_{T-}I_{[T>0]}|\mathcal{F}_T] \leq 1 \text{ a.s.},$$

where A^+ and A^- are the positive and negative variation parts of A respectively. Let $N = (N_t)$ be the cadlag modification of $(\boldsymbol{E}[A_\infty|\mathcal{F}_t])$. By Theorem 10.12 we know $N \in BMO$ and $\|N\|_{BMO} \leq 2\sqrt{3}$.

Write $L = H.\, M \in \mathcal{H}^1$. Let (T_n) be a sequence of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ and for each n, N^{T_n} is a bounded martingale and L^{T_n} is the sum of a bounded martingale and a martingale with integrable variation. Thus we have

$$\boldsymbol{E}[N_{T_n} L_{T_n}] = \boldsymbol{E}[L,N]_{T_n} = \boldsymbol{E}[L, N^{T_n}]_\infty. \tag{24.3}$$

By Lemma 10.23 and Fefferman's inequality we have

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}[L_{S\wedge T_n}\mathrm{sgn}(L_S)] \\
&= \boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty[} L_s^{T_n} dB_s\Big] = \boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty]} L_s^{T_n} dA_s\Big] = \boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty]} L_{T_n} dA_s\Big] \\
&= \boldsymbol{E}[L_{T_n} A_\infty] = \boldsymbol{E}[L_{T_n} N_\infty] = \boldsymbol{E}[L_{T_n} N_{T_n}] = \boldsymbol{E}[L, N^{T_n}]_\infty \\
&= \boldsymbol{E}\Big[\int_{[0,\infty]} H_s d[M, N^{T_n}]_s\Big] \leq \sqrt{2}\boldsymbol{E}\Big[\Big(\int_{[0,\infty]} H_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big]\|N^{T_n}\|_{BMO} \\
&\leq 2\sqrt{6}\boldsymbol{E}\Big[\Big(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big].
\end{aligned} \tag{24.4}$$

The last inequality holds, because $\|N^{T_n}\|_{BMO} \leq \|N\|_{BMO} \leq 2\sqrt{3}$ (Theorem 10.16). On the other hand,

$$L_{S\wedge T_n}\mathrm{sgn}(L_S) = |L_S|I_{[S\leq T_n]} + L_{T_n}\mathrm{sgn}(L_S)I_{[T_n<S]}.$$

Since $[T_n < S] \downarrow \emptyset$ and (L_{T_n}) is uniformly integrable (since $L \in \mathcal{H}^1$, we have $L \in \mathcal{M}$ by Theorem 10.19), $\boldsymbol{E}[L_{T_n}\mathrm{sgn}(L_S)I_{[T_n<S]}] \to 0$ as $n \to \infty$ and

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}[L_{S\wedge T_n}\mathrm{sgn}(L_S)] = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}[|L_S|I_{[S\leq T_n]}] = \boldsymbol{E}[|L_S|].$$

By (24.4) we have

$$\boldsymbol{E}[|L_S|] \leq 2\sqrt{6}\boldsymbol{E}\Big[\Big(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big]. \tag{24.5}$$

Now for any given $\varepsilon > 0$ put $S(\omega) = \inf\{t \geq 0 : |L_t(\omega)| \geq L^*_\infty(\omega) - \varepsilon\}$. Since $L \in \mathcal{M}$ and $L^*_\infty < \infty$ a.s., $S \geq 0$ takes on finite values, and $|L_S| \geq L^*_\infty - \varepsilon$ a.s.. Applying (24.5) to it yields

$$\boldsymbol{E}[L^*_\infty] - \varepsilon \leq \boldsymbol{E}[|L_S|] \leq 2\sqrt{6}\boldsymbol{E}\Big[\Big(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big]. \tag{24.6}$$

Letting $\varepsilon \downarrow 0$ in (24.6) gives (24.1). □

The next theorem gives a strengthened form of the first Davis inequality (24.2).

10.25 Theorem. *Let $M \in \mathcal{H}^1$. Then for any stopping time T*

$$E[M^*_\infty - M^*_{T-}I_{[T>0]}|\mathcal{F}_T] \leq 4\sqrt{3}E\Big[\sqrt{[M]_\infty - [M]_{T-}I_{[T>0]}}\Big|\mathcal{F}_T\Big]. \quad (25.1)$$

Proof. Put $\overline{M}_t = (M_{T+t} - M_{T-}I_{[T>0]})I_{[T<\infty]}$ and $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T+t}$, $t \geq 0$. Then $\overline{M} = (\overline{M}_t)$ is a $(\mathcal{G}_t)$-local martingale (refer to Problem 7.14), and $[\overline{M}]_t = [M]_{T+t} - [M]_{T-}I_{[T>0]}$. Hence $E[\sqrt{[\overline{M}]_\infty}] < \infty$ and $\overline{M}$ is an $\mathcal{H}^1$-martingale w.r.t. $(\mathcal{G}_t)$. By Davis inequality (24.2)

$$E[\overline{M}^*_\infty] \leq 2\sqrt{6}E[\sqrt{[M]_\infty - [M]_{T-}I_{[T>0]}}].$$

Evidently, $M^*_\infty \leq \overline{M}^*_\infty + M^*_{T-}I_{[T>0]}$. Thus

$$E[M^* - M^*_{T-}I_{[T>0]}] \leq 2\sqrt{6}E[\sqrt{[M]_\infty - [M]_{T-}I_{[T>0]}}]. \quad (25.2)$$

For all $A \in \mathcal{F}_T$, replacing T by T_A in (25.2) yields (25.1). □

The next theorem is an easy generalization of Theorem 10.24.

10.26 Theorem. *Let M be a local martingale and H be a progressive process such that $\sqrt{H^2.[M]}$ is locally integrable. For any stopping time T we have*

$$E[(H.M)^*_T] \leq 2\sqrt{6}E\Big[\Big(\int_{[0,T]} H_s^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big]. \quad (26.1)$$

Proof. Since $(H.M)^*_T = (H.M^T)^*_\infty = (HI_{[0,T]}.M)^*_\infty$, (26.1) follows from (24.1). □

As an application of Theorem 10.26, we obtain the following convergence theorem for stochastic integrals.

10.27 Theorem. *Let M be a local martingale. Denote*

$$L^0(M) = \{H : H \text{ is an optional process with } \sqrt{H^2.[M]} \in \mathcal{A}^+_{loc}\}.$$

Let $(H^{(n)}) \subset L^0(M)$, $H \in L^0(M)$ and T be a stopping time.

1) *If* $E\Big[\Big(\int_{[0,T]}(H^{(n)}_s - H_s)^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big] \to 0$, *then*

$$E\Big[\sup_{t\leq T}|(H^{(n)}.M)_t - (H.M)_t|\Big] \to 0.$$

2) *If* $\sum_{n=1}^{\infty} E\Big[\Big(\int_{[0,T]}(H^{(n)}_s - H_s)^2 d[M]_s\Big)^{1/2}\Big] < \infty$, *then*

$$\sup_{t\leq T}\Big|(H^{(n)}.M)_t - (H.M)_t\Big| \to 0, \quad a.s..$$

The following theorem is the second Davis inequality.

10.28 Theorem. *Let M be a local martingale. We have*

$$\|M\|_{\mathcal{H}^1} \leq (7 + 4\sqrt{2})E[M^*_\infty]. \quad (28.1)$$

Moreover, for any stopping time T

$$E\Big[\sqrt{[M]_\infty - [M]_{T-}I_{[T>0]}}\Big|\mathcal{F}_T\Big] \leq 2(7 + 4\sqrt{2})E[M^*_\infty|\mathcal{F}_T]. \quad (28.2)$$

Proof. We may suppose $E[M^*_\infty] < \infty$. First we deal with the case of $M_0 = 0$. For given $\epsilon > 0$ put $\overline{M} = M + \epsilon$. Then $\overline{M}^*_\infty \geq \epsilon$, $\dfrac{1}{\overline{M}^*_\infty} \leq \dfrac{1}{\epsilon}$. Applying Corollary 10.15 to the bounded martingale $H_t = E\Big[\dfrac{1}{\overline{M}^*_\infty}|\mathcal{F}_t\Big]$ and adapted increasing process $B_t = \overline{M}^*_t$, we know $L = (\overline{M}_-).H \in BMO$ and $\|L\|_{BMO} \leq 2$. By Fefferman's inequality

$$E\Big[\int_{[0,\infty[}|d[\overline{M}, L]_s|\Big] \leq \sqrt{2}\|\overline{M}\|_{\mathcal{H}^1}\|L\|_{BMO} \leq 2\sqrt{2}\|\overline{M}\|_{\mathcal{H}^1}. \quad (28.3)$$

Put $K = \overline{M}^2 - [\overline{M}] = 2(\overline{M}_- I_{]0,\infty[}).\overline{M}$. Then

$$\begin{aligned}[K, H] &= 2(\overline{M}_- I_{]0,\infty[}).[\overline{M}, H] = 2I_{]0,\infty[}.[\overline{M}, (\overline{M}_-).H] \\ &= 2([\overline{M}, L] - [\overline{M}, L]_0)\end{aligned}$$

and by (28.3) we have

$$E\Big[\int_{]0,\infty[}|d[K, H]_s|\Big] \leq 4\sqrt{2}\|\overline{M}\|_{\mathcal{H}^1}. \quad (28.4)$$

Now we assume $\overline{M}, K \in \mathcal{H}^1$. Let (S_n) be a sequence of stopping times such that $S_n \uparrow \infty$ and $(KH)^{S_n} - [K, H]^{S_n} \in \mathcal{M}_0$. By (28.4)

$$|E[K_{S_n}H_{S_n}]| = |E[K, H]_{S_n}| \leq 4\sqrt{2}\|\overline{M}\|_{\mathcal{H}^1}.$$

But H is bounded and $K \in \mathcal{M}$, so $K_{S_n}H_{S_n} \xrightarrow{L^1} K_\infty H_\infty$. Thus

$$\Big|E\Big[\frac{\overline{M}^2_\infty - [\overline{M}]_\infty}{\overline{M}^*_\infty}\Big]\Big| = |E[K_\infty H_\infty]| \leq 4\sqrt{2}\|\overline{M}\|_{\mathcal{H}^1}.$$

Since $\dfrac{\overline{M}^2_\infty}{\overline{M}^*_\infty} \leq \overline{M}^*_\infty$, we have

$$E\Big[\frac{[\overline{M}]_\infty}{\overline{M}^*_\infty}\Big] \leq E[\overline{M}^*_\infty] + 4\sqrt{2}\|\overline{M}\|_{\mathcal{H}^1}.$$

By Schwarz inequality

$$\begin{aligned}\|\overline{M}\|_{\mathcal{H}^1} = E\Big[\sqrt{[\overline{M}]_\infty}\Big] &\leq (E[\overline{M}^*_\infty])^{1/2}\Big(E\Big[\frac{[\overline{M}]_\infty}{\overline{M}^*_\infty}\Big]\Big)^{1/2} \\ &\leq (E[\overline{M}^*_\infty])^{1/2}(E[\overline{M}^*_\infty] + 4\sqrt{2}\|\overline{M}\|_{\mathcal{H}^1})^{1/2}.\end{aligned}$$

Solving this inequality, we get

$$\|\overline{M}\|_{\mathcal{H}^1} \leq (2\sqrt{2}+3)E[\overline{M}^*_\infty]. \tag{28.5}$$

In order to relax the assumption that $\overline{M}, K \in \mathcal{H}^1$, we take a sequence (T_n) of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ and $\overline{M}^{T_n}, K^{T_n} \in \mathcal{H}^1$. Then by (28.5)

$$\|\overline{M}^{T_n}\|_{\mathcal{H}^1} \leq (2\sqrt{2}+3)E[(\overline{M}^{T_n})^*_\infty] \leq (2\sqrt{2}+3)E[\overline{M}^*_\infty].$$

Letting $n \to \infty$, (28.5) remains valid. Noting that $[\overline{M}]_\infty = [M]_\infty + \varepsilon^2$, from (28.5) we have

$$\|M\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|\overline{M}\|_{\mathcal{H}^1} \leq (2\sqrt{2}+3)(E[M^*_\infty] + \varepsilon).$$

Letting $\varepsilon \downarrow 0$ yields

$$\|M\|_{\mathcal{H}^1} \leq (2\sqrt{2}+3)E[M^*_\infty]. \tag{28.6}$$

Finally, we relax the assumption $M_0 = 0$. Put $M' = M - M_0$. We have $(M')^*_\infty \leq M^*_\infty + |M_0| \leq 2M^*_\infty$ and by (28.6)

$$\begin{aligned}\|M\|_{\mathcal{H}^1} &= E[\sqrt{[M]_\infty}] = E\left[\sqrt{[M']_\infty + M_0^2}\right] \leq \|M'\|_{\mathcal{H}^1} + E[|M_0|] \\ &\leq (2\sqrt{2}+3)E[(M')^*_\infty] + E[M^*_\infty] \leq (7+4\sqrt{2})E[M^*_\infty].\end{aligned}$$

The proof of (28.2) is similar to that of Theorem 10.25. □

As an important consequence of Davis inequalities, we have

10.29 Theorem. *Let M be a local martingale. Then $M \in \mathcal{H}^1$ if and only if $E[M^*_\infty] < \infty$. Furthermore, $\|M\|_{\mathcal{H}^1}$ and $\|M^*_\infty\|_1$ are two equivalent norms on $\mathcal{H}^1$. In particular, $\mathcal{H}^1$ with norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$ is a Banach space.*

§5. Burkholder-Davis-Gundy Inequality

At first, we give two results from pure analysis. One is the classical Young inequality, and another is concerning moderate convex functions.

10.30 Definition. Let $\Phi(t)$ be a non-negative monotone increasing convex function on R_+, and $\Phi(0) = 0$. It is easy to see that there is a non-negative right-continuous increasing function φ on R_+ such that $\Phi(t) = \int_{[0,t]} \varphi(s)ds$. We call φ the right derivative of Φ. Put

$$\psi(t) = \inf\{s \geq 0 : \varphi(s) > t\}, \quad t \geq 0. \tag{30.1}$$

Then ψ is also a non-negative right-continuous increasing function on R_+ (the right-inverse function of φ, see Lemma 1.37). Put

$$\Psi(t) = \int_{[0,t]} \psi(s)ds. \tag{30.2}$$

Then $\Psi(t)$ is a non-negative monotone increasing convex function on R_+[1] and is called the *conjugate convex function* of $\Phi(t)$.

10.31 Lemma. *Let $\Phi(t)$ be a non-negative monotone increasing convex function on R_+ with $\Phi(0) = 0$, and $\Psi(t)$ be its conjugate convex function. Then for all $u, v > 0$ we have the following Young inequality*

$$uv \leq \Phi(u) + \Psi(v). \tag{31.1}$$

Proof. We adopt the notations in Definition 10.30:

$$\Phi(u) + \Psi(v) = \int_{[0,u]} \varphi(s)ds + \int_{[0,v]} \psi(s)ds.$$

If $\varphi(u) > v$, then $\psi(v) \leq u$. By Lebesgue's lemma (Lemma 1.38) we have (noting that $\sup\{s : \psi(s) \leq u\} = \varphi(u)$)

$$\begin{aligned}\Phi(u) + \Psi(v) &= u\varphi(u) - \int_{[0,u]} s\,d\varphi(s) + \int_{[0,v]} \psi(s)ds \\ &= u\varphi(u) - \int_{\{s:\psi(s)\leq u\}\cap]v,\infty]} \psi(s)ds \\ &\geq u\varphi(u) - u(\varphi(u) - v) = uv.\end{aligned}$$

If $\varphi(u) \leq v$, then $\psi(v) \geq u$. (31.1) can be shown in the same manner. □

10.32 Definition. Let $\Phi(t)$ be a non-negative monotone increasing convex function R_+ with $\Phi(0) = 0$. $\Phi(t)$ is called a *moderate convex function* if there is a constant $c > 0$ such that for all $t \geq 0$

$$\Phi(2t) \leq c\Phi(t).$$

Let $\Phi(t)$ be a moderate convex function and φ be its right derivative. We introduce another constant p:

$$p = \sup_{u \geq 0} \frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}. \tag{32.1}$$

The next lemma summarizes the main properties of moderate convex functions.

[1] If $\varphi(\infty) = t_0 < +\infty$, then $\psi(t) = +\infty$ when $t \geq t_0$. Consequently, $\Psi(t) = +\infty$ when $t > t_0$. But it is possible that $\Psi(t_0) < +\infty$. In this case, $\Psi(t)$ is only left-continuous at t_0.

10.33 Lemma. *Let $\Phi(t)$ be a moderate convex function on $\boldsymbol{R}_+$, $\Psi(t)$ be its conjugate convex function, φ and ψ be the right derivatives of Φ and Ψ respectively. Then*

1) $c \geq 2,\ 1 \leq \rho \leq c-1$,

2) *for all* $t \geq 1,\ u \geq 0,\ \Phi(tu) \leq t^\rho \Phi(u)$.

3) *for all* $u > 0,\ \Psi(\varphi(u)) \leq (\rho-1)\Phi(u)$.

Proof. 1) We have

$$\Phi(u) = \int_{[0,u]} \varphi(s)ds \leq u\varphi(u) \leq \int_u^{2u} \varphi(s)ds$$
$$= \Phi(2u) - \Phi(u) \leq (c-1)\Phi(u).$$

Hence $1 \leq \rho \leq c-1$. In particular, $c \geq \rho + 1 \geq 2$.

2) By the definition of ρ we know that for all $s > 0$ and $u \geq 0$

$$\frac{su\varphi(su)}{\Phi(su)} \leq \rho.$$

Then for all $t \geq 1$

$$\log\frac{\Phi(tu)}{\Phi(u)} = \int_1^t \frac{u\varphi(su)}{\Phi(su)}ds \leq \int_1^t \frac{\rho}{s}ds = \rho\log t,$$

i.e., $\Phi(tu) \leq t^\rho\Phi(u)$.

3) By Lebesgue's lemma we have (noting that $\sup\{s : \psi(s) \leq u\} = \varphi(u)$)

$$\int_{[0,u]} s d\varphi(s) = \int_{\{s:\psi(s)\leq u\}} \psi(s)ds = \int_{[0,\varphi(u)]} \psi(s)ds,$$

$$\Psi(\varphi(u)) + \Phi(u) = \int_{[0,\varphi(u)]} \psi(s)ds + u\varphi(u) - \int_{[0,u]} s d\varphi(s)$$
$$= u\varphi(u) \leq \rho\Phi(u).$$

Thus 3) follows. □

Making use of the above two lemmas, we can show the following

10.34 Lemma. *Let Φ be a moderate convex function on $\boldsymbol{R}_+$, φ be its right derivative, ξ and η be a pair of non-negative r.v.. If*

$$\boldsymbol{E}[\Phi(\xi)] < \infty, \quad \boldsymbol{E}[\Phi(\xi)] \leq \boldsymbol{E}[\eta\varphi(\xi)], \tag{34.1}$$

then

$$\boldsymbol{E}[\Phi(\xi)] \leq \rho^{\rho+1}\boldsymbol{E}[\Phi(\eta)]. \tag{34.2}$$

Proof. Let Ψ be the conjugate convex function of Φ, and ψ be its right derivative. By the convexity of Ψ and $\rho \geq 1$ we have

$$\Psi\Big(\frac{\varphi(\xi)}{\rho}\Big) \leq \frac{1}{\rho}\Psi(\varphi(\xi)).$$

By Lemmas 10.31 and 10.33 we have

$$\eta\varphi(\xi) = \rho\eta\frac{\varphi(\xi)}{\rho} \leq \Phi(\rho\eta) + \Psi\Big(\frac{\varphi(\xi)}{\rho}\Big)$$
$$\leq \rho^\rho\Phi(\eta) + \frac{1}{\rho}\Psi(\varphi(\xi)) \leq \rho^\rho\Phi(\eta) + \frac{\rho-1}{\rho}\Phi(\xi).$$

From (34.1) we obtain

$$\boldsymbol{E}[\Phi(\xi)] \leq \rho^\rho\boldsymbol{E}[\Phi(\eta)] + \frac{\rho-1}{\rho}\boldsymbol{E}[\Phi(\xi)].$$

Thus (34.2) follows. □

Remark. If in the lemma $\Phi(t) = t^p (1 < p < \infty)$, then directly from Hölder inequality we get

$$\boldsymbol{E}[\eta\varphi(\xi)] = \boldsymbol{E}[\eta(p\xi^{p-1})] \leq p(\boldsymbol{E}[\xi^p])^{\frac{p-1}{p}}(\boldsymbol{E}[\eta^p])^{\frac{1}{p}}.$$

From (34.1) we have

$$\boldsymbol{E}[\xi^p] \leq p^p\boldsymbol{E}[\eta^p]. \tag{34.3}$$

It is finer than the corresponding (34.2) (in this case $\rho = p$).

The following lemma is called *Garsia's lemma*.

10.35 Lemma. *Let $A = (A_t)$ be an adapted increasing process, ξ and η be a pair of non-negative integrable r.v.. If $\xi \geq A_\infty$ a.s. and one of the following two conditions holds:*

a) *$\xi \in \mathcal{F}_\infty$, and for any stopping time T*

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{F}_T] - A_{T-}I_{[T>0]} \leq \boldsymbol{E}[\eta|\mathcal{F}_T] \quad a.s., \tag{35.1}$$

b) *$\xi \in \mathcal{F}_\infty$, A is predictable, $A_0 = 0$ and for any predictable time T*

$$\boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{F}_T] - A_T \leq \boldsymbol{E}[\eta|\mathcal{F}_T] \quad a.s., \tag{35.2}$$

then for all $\lambda > 0$ we have

$$\int_{[\xi\geq\lambda]}(\xi - \lambda)d\boldsymbol{P} \leq \int_{[\xi\geq\lambda]}\eta d\boldsymbol{P}. \tag{35.3}$$

Furthermore, if Φ is a non-negative monotone increasing convex function on $\boldsymbol{R}_+$ with $\Phi(0) = 0$, then

$$\boldsymbol{E}[\Phi(\xi)] \leq \boldsymbol{E}[\eta\varphi(\xi)], \tag{35.4}$$

where φ is the right derivative of Φ.

Proof. First of all, we point out that (35.3) and (35.4) are equivalent. In fact, putting $\Phi(t) = (t-\lambda)^+$ and $\varphi(t) = I_{[\lambda,\infty[}(t)$ in (35.4) yields (35.3). Conversely, integrating the two sides of (35.3) w.r.t. $d\varphi(\lambda)$ yields (35.4).

Now we turn to show (35.3). Assume first a) holds. Put

$$T = \inf\{t : A_t > \lambda\}.$$

Then $A_{T-}I_{[T>0]} \le \lambda$. Since $[\xi \ge \lambda] = [T < \infty] \cup [T = \infty, \xi \ge \lambda] \in \mathcal{F}_T$, by (35.1) we have

$$\int_{[\xi\ge\lambda]}(\xi-\lambda)dP \le \int_{[\xi\ge\lambda]}(\xi - A_{T-}I_{[T>0]})dP \le \int_{[\xi\ge\lambda]}\eta dP.$$

Now assume b) holds. In this case, $T = \inf\{t : A_t \ge \lambda\}$ is a predictable time and $T > 0$. Let (T_n) be a sequence of predictable times foretelling T. By (35.2)

$$E[\xi|\mathcal{F}_{T_n}] - A_{T_n} \le E[\eta|\mathcal{F}_{T_n}] \quad \text{a.s.}.$$

Letting $n \to \infty$, we obtain (Corollary 2.19 and Theorem 3.4.11))

$$E[\xi|\mathcal{F}_T] - A_{T-} \le E[\eta|\mathcal{F}_{T-}] \quad \text{a.s.}. \tag{35.5}$$

Since $[\xi \ge \lambda] = [T < \infty] \cup [T = \infty, \xi \ge \lambda] \in \mathcal{F}_{T-}$ and $A_{T-} \le \lambda$, (35.3) follows from (35.5). □

By using of Garsia's lemma and Lemma 10.34, we obtain Burkholder-Davis-Gundy inequality (or B-D-G inequality briefly) immediately.

10.36 Theorem. *Let M be a local martingale and Φ be a moderate convex function on $\mathbf{R}_+$ such that $\Phi(M^*_\infty)$ and $\Phi(\sqrt{[M]_\infty})$ are integrable. Then*

$$\begin{aligned}\rho^{-(\rho+1)}(7+4\sqrt{2})^{-\rho}E[\Phi(\sqrt{[M]_\infty})] \\ \le E[\Phi(M^*_\infty)] \le \rho^{\rho+1}(2\sqrt{6})^{\rho}E[\Phi(\sqrt{[\sqrt{M}]_\infty})],\end{aligned} \tag{36.1}$$

where ρ is defined by (32.1).

Proof. Set $A = M^*, \xi = M^*_\infty, \eta = 2\sqrt{6}\sqrt{[M]_\infty}$. By Theorem 10.25 and Lemma 10.35 we have $E[\Phi(\xi)] \le E[\eta\varphi(\xi)]$. Then by Lemma 10.34 we get

$$E[\Phi(\xi)] \le \rho^{\rho+1}E[\Phi(\eta)]. \tag{36.2}$$

By Lemma 10.33 $\Phi(\eta) \le (2\sqrt{6})^{\rho}\Phi(\sqrt{[M]_\infty})$. Thus the second inequality of (36.1) follows from (36.2). The first inequality of (36.1) can be deduced in the same manner. □

Remark. Let $\Phi(t) = t^p (p > 1)$. The corresponding inequality (36.1) is usually called *Burkholder's inequality.*

§6. Martingale Space $\mathcal{H}^p$, $p > 1$

10.37 Definition. Let M be a local martingale, $1 < p < \infty$. Put

$$\begin{aligned}\|M\|_{\mathcal{H}^p} &= (E[(\sqrt{[M]_\infty})^p])^{1/p} = \|\sqrt{[M]_\infty}\|_p, \\ \mathcal{H}^p &= \{M \in \mathcal{M}_{loc} : \|M\|_{\mathcal{H}^p} < \infty\}.\end{aligned} \tag{37.1}$$

Each element of $\mathcal{H}^p$ is called an *$\mathcal{H}^p$-martingale*. Obviously, $\mathcal{H}^p$ is a linear space.

10.38 Theorem. *Let $1 < p < \infty$. Put*

$$\mathcal{M}^p = \{M \in \mathcal{M} : \|M_\infty\|_p < \infty\}.$$

Then $\mathcal{H}^p = \mathcal{M}^p$, $\|M\|_{\mathcal{H}^p}$, $\|M^*_\infty\|_p$ and $\|M_\infty\|_p$ are all equivalent norms.

Proof. Firstly, by Burkholder's inequality we know that $\|M\|_{\mathcal{H}^p}$ and $\|M^*_\infty\|_p$ are two equivalent norms on $\mathcal{H}^p$. Secondly, by Doob's inequality we know that $\|M_\infty\|_p$ and $\|M^*_\infty\|_p$ are two equivalent norms on $\mathcal{M}^p$. Hence $\mathcal{H}^p = \mathcal{M}^p$, $\|M\|_{\mathcal{H}^p}$, $\|M^*_\infty\|_p$ and $\|M_\infty\|_p$ are equivalent pairwise. □

10.39 Theorem. *Let (p, q) be a pair of conjugate indices. Then the dual space of $\mathcal{H}^p$ is $\mathcal{H}^q$. Moreover, if $M \in \mathcal{H}^p$ and $N \in \mathcal{H}^q$, then $K = MN - [M, N] \in \mathcal{H}^1$.*

Proof. Since the dual space of L^p is L^q and $\mathcal{M}^p$ is isomorphic to L^p, by Theorem 10.38 we know that the dual space of $\mathcal{H}^p$ is $\mathcal{H}^q$. Let $M \in \mathcal{H}^p$ and $N \in \mathcal{H}^q$. By Kunita-Watanabe inequality we have

$$E\Big[\int_{[0,\infty[}|d[M,N]_s|\Big] \le \|M\|_{\mathcal{H}^p}\|N\|_{\mathcal{H}^q} < \infty.$$

Because $K^*_\infty \le M^*_\infty N^*_\infty + \int_{[0,\infty[}|d[M,N]_s| \in L^1$, so $K \in \mathcal{H}^1$. □

The next theorem is similar to Theorem 10.24. It gives a sufficient condition for $H.M \in \mathcal{H}^p$.

10.40 Theorem. *Let M be a local martingale, $p > 1$ and H be an optional process such that*

$$E\Big[\Big(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M]_s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big] < \infty.$$

Then

$$\|H.M\|_{\mathcal{H}^p} \le C_p\Big(E\Big[\Big(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M]_s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\Big)^{1/p}, \tag{40.1}$$

where C_p is a constant depending on p only.

Proof. Denote $L = H.M$. For any bounded martingale N, $K = LN - H.[M,N]$ is a local martingale. By Kunita-Watanabe inequality

$$E\Big[\int_{[0,\infty[}|H_s||d[M,N]_s|\Big] \le \Big(E\Big[\Big(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M]_s\Big)^{p/2}\Big]\Big)^{1/p}\|N\|_{\mathcal{H}^q} < \infty,$$

where q is the conjugate index of p (i.e. $1/p+1/q=1$). By Theorem 10.24 we have $E[L_\infty^*] < \infty$, then $K_\infty^* \le L_\infty^* N_\infty^* + \int_{[0,\infty[}|H_s||d[M,N]_s| \in L^1$ and $K \in \mathcal{M}$. In particular,

$$\begin{aligned} E[L_\infty N_\infty] &= E\Big[\int_{[0,\infty[}H_s d[M,N]_s\Big] \\ &\le \Big(E\Big[\Big(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M]_s\Big)^{p/2}\Big]\Big)^{1/p}\|N\|_{\mathcal{H}^q} \\ &\le \overline{C}_p\|N_\infty\|_q\Big(E\Big[\Big(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M]_s\Big)^{p/2}\Big]\Big)^{1/p}, \end{aligned} \tag{40.2}$$

where $\overline{C}_p$ is a constant depending on p only. Because the collection of all bounded measurable functions is dense in L^q, from (40.2) we conclude

$$\|L_\infty\|_p < \overline{C}_p\Big(E\Big[\Big(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M]_s\Big)^{p/2}\Big]\Big)^{1/p}.$$

Whence (40.1) is deduced. □

§7. John-Nirenberg Inequality

The following lemma is due to Strook[1].

10.41 Lemma. *Let $X = (X_t)$ be an adapted cadlag process. Assume that $\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty$ a.s. exists and is finite. If there is a non-negative integrable r.v. ξ such that for any stopping time T*

$$E[|X_\infty - X_{T-}I_{[T>0]}||\mathcal{F}_T] \le E[\xi|\mathcal{F}_T] \quad a.s., \tag{41.1}$$

then for all $\lambda \ge 0$, $\mu > 0$ we have

$$\mu P(X_\infty^* \ge \lambda + \mu) \le 2\int_{[X_\infty^* \ge \lambda]}\xi dP. \tag{41.2}$$

Proof. Let $0 < \mu' < \mu$. Put

$$T = \inf\{t : |X_t| \ge \lambda\}, \; S = \inf\{t : |X_t| \ge \lambda + \mu'\}.$$

Then $T \le S$, $X_{T-}I_{[T>0]} < \lambda$ and
$[X_\infty^* > \lambda + \mu'] \subset [|X_S| \ge \lambda + \mu'] \subset [|X_T| \ge \lambda] \cap [|X_S - X_{T-}I_{[T>0]}| \ge \mu']$.

Because $|X_S - X_{T-}I_{[T>0]}| \le |X_\infty - X_{T-}I_{[T>0]}| + |X_\infty - X_S|$, so

$$\begin{aligned} P(X_\infty^* > \lambda + \mu') &\le \frac{1}{\mu'}\int_{[|X_T|\ge\lambda]}|X_S - X_{T-}I_{[T>0]}|dP \\ &\le \frac{1}{\mu'}\Big[\int_{[|X_T|\ge\lambda]}|X_\infty - X_{T-}I_{[T>0]}|dP \\ &\quad + \int_{[|X_T|\ge\lambda]}|X_\infty - X_S|dP\Big]. \end{aligned} \tag{41.3}$$

Since $[|X_T| \ge \lambda] \in \mathcal{F}_T$, by (41.1) we have

$$\int_{[|X_T|\ge\lambda]}|X_\infty - X_{T-}I_{[T>0]}|dP \le \int_{[|X_T|\ge\lambda]}\xi dP \le \int_{[X_\infty^*\ge\lambda]}\xi dP.$$

Moreover, since $\lim_{n\to\infty} X_{(S+\frac{1}{n})-} = X_S$, by Fatou's lemma

$$\int_{[|X_T|\ge\lambda]}|X_\infty - X_S|dP$$

$$\le \varliminf_{n\to\infty}\int_{[|X_T|\ge\lambda]}|X_\infty - X_{(S+\frac{1}{n})-}|dP \le \int_{[|X_T|\ge\lambda]}\xi dP.$$

Hence, by (41.3) we obtain

$$\mu' P(X_\infty^* > \lambda + \mu') \le 2\int_{[X_\infty^*\ge\lambda]}\xi dP. \tag{41.4}$$

Letting $\mu' \uparrow \mu$ in (41.4) yields (41.2). □

Remark. Let $A \in \mathcal{F}_0$. Imitating the proof of the theorem, we know that for all $\lambda \ge 0, \mu > 0$

$$\mu P([X_\infty^* \ge \lambda + \mu] \cap A) \le 2\int_{[X_\infty^*\ge\lambda]\cap A}\xi dP. \tag{41.5}$$

The next theorem is called *John-Nirenberg inequality* as usual.

10.42 Theorem. *Assume that $X = (X_t)$ is an adapted cadlag process, and $\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty$ a.s. exists and is finite. If there is a constant $c > 0$ such that for any stopping time T*

$$E[|X_\infty - X_{T-}I_{[T>0]}||\mathcal{F}_T] \le c \quad a.s., \tag{42.1}$$

then for $0 \le \lambda < \dfrac{1}{8c}$ we have

$$E[e^{\lambda X_\infty^*}] < \frac{6}{1-8c\lambda}, \tag{42.2}$$

and for any stopping time T

$$E[\exp(\lambda|X_\infty - X_{T-}I_{[T>0]}|)|\mathcal{F}_T] < \frac{6}{1-8c\lambda} \quad a.s.. \tag{42.3}$$

Proof. By Theorem 10.41 we have

$$4cP(X_\infty^* \geq 4nc) \leq 2cP(X_\infty^* \geq 4(n-1)c), \quad n \geq 1.$$

Thus

$$P(X_\infty^* \geq 4nc) \leq 2^{-n} \leq e^{-\frac{n}{2}}.$$

When $0 \leq \lambda < \frac{1}{8c}$,

$$\begin{aligned} E[e^{\lambda X_\infty^*}] &\leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{4c\lambda(n+1)} P(4cn \leq X_\infty^* < 4c(n+1)) \\ &\leq e^{4c\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}-4c\lambda)n} = e^{4c\lambda}[1 - e^{-(\frac{1}{2}-4c\lambda)}]^{-1}. \end{aligned} \tag{42.4}$$

Since $e^{-\alpha} \leq 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{e}}$ for $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, by (42.4) we obtain

$$E[e^{\lambda X_\infty^*}] \leq e^{\frac{1}{2}+4c\lambda}[\frac{1}{2} - 4c\lambda]^{-1} < \frac{2e}{1-8c\lambda} < \frac{6}{1-8c\lambda}.$$

Let $A \in \mathcal{F}_0$ and $P(A) > 0$. Making use of (41.4), by the same argument we can obtain

$$E[e^{\lambda X_\infty^*} I_A] < \frac{6}{1-8c\lambda} P(A).$$

Hence we have

$$E[e^{\lambda X_\infty^*} | \mathcal{F}_0] < \frac{6}{1-8c\lambda} \quad \text{a.s.}. \tag{42.5}$$

Let T be a stopping time. Applying (42.5) to $(\mathcal{F}_{T+t})_{t\geq 0}$-adapted process $(X_{T+t} - X_{T-}I_{[T>0]})_{t\geq 0}$ yields

$$E\Big[\exp\Big(\lambda \sup_{t\geq T} |X_t - X_{T-}I_{[T>0]}|\Big)\Big|\mathcal{F}_T\Big] < \frac{6}{1-8c\lambda} \quad \text{a.s.}.$$

In particular, (42.3) holds. □

The next theorem is a John-Nirenberg type inequality for BMO martingales.

10.43 Theorem. *Let $M \in BMO$ and $\|M\|_{BMO} = m$.*

1) When $\lambda < \frac{1}{8m}$, we have

$$E[e^{\lambda M_\infty^*}] < \frac{6}{1-8m\lambda}. \tag{43.1}$$

2) When $\lambda < \frac{1}{m^2}$, for any stopping time T we have

$$E[\exp\{\lambda([M]_\infty - [M]_{T-}I_{[T>0]})\}|\mathcal{F}_T] \leq \frac{1}{1-\lambda m^2}. \tag{43.2}$$

Proof. 1) Let T be a stopping time. By Jensen's inequality we have

$$E[|M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]}||\mathcal{F}_T] \leq (E[(M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathcal{F}_T])^{1/2} \leq m.$$

Then (43.1) is deduced from Theorem 10.42.

2) Consider the increasing process $A = [M]$. Since $M \in BMO$, for any stopping time T we have $E[A_\infty - A_{T-}I_{[T>0]}|\mathcal{F}_T] \leq m^2$ a.s.. By Garsia's lemma (Lemma 10.35), $E[A_\infty^n] \leq E[m^2(nA_\infty^{n-1})]$, $n \geq 1$. Thus by induction we obtain

$$E[A_\infty^n] \leq m^{2n} n!, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

and

$$E[\exp(\lambda A_\infty)] \leq \frac{1}{1-\lambda m^2}.$$

Then (43.2) can be shown in the same way as (42.3). □

Remark. If we do not use Garsia's lemma and apply directly Theorem 10.42 to $[M]$, we can obtain the following weaker result: when $\lambda < \frac{1}{8m^2}$ for all stopping time T we have

$$E[\exp\{\lambda([M]_\infty - [M]_{T-}I_{[T>0]})\}|\mathcal{F}_T] < \frac{6}{1-8m^2\lambda}.$$

The following theorem gives another characterization for BMO-martingales.

10.44 Theorem. *Let M be a uniformly integrable martingale. Then $M \in BMO$ if and only if there is a constant $c > 0$ such that for any stopping time T*

$$E[|M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]}||\mathcal{F}_T] \leq c \quad \text{a.s.}. \tag{44.1}$$

Proof. The necessity comes from Jensen's inequality. We want to show the sufficiency. By Theorem 10.42, for $\lambda < \frac{1}{8c}$ we have

$$E[\exp(\lambda|M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]}|)|\mathcal{F}_T] < \frac{6}{1-8c\lambda}.$$

Hence

$$E[(M_\infty - M_{T-}I_{[T>0]})^2|\mathcal{F}_T] < \frac{12}{(1-8c\lambda)\lambda^2} \quad \text{a.s.}$$

and therefore $M \in BMO$. □

Problems and Complements

10.1 Let M be a local martingale and H be an optional process such that $H.M \in \mathcal{M}^2$. Then for any stopping time T we have

$$E[((H.M)_\infty - (H.M)_T)^2|\mathcal{F}_T] \le E\Big[\int_{]T,\infty[} H_s^2 d[M]_s|\mathcal{F}_T\Big] \quad \text{a.s.}.$$

10.2 Let $M \in BMO$ and H be an optional process with $|H| \le 1$. Then $\|H.M\|_{BMO} \le \sqrt{5}\|M\|_{BMO}$.

10.3 $\mathcal{H}^{1,c} = \mathcal{H}^1 \cap \mathcal{M}^c_{loc}$ and $\mathcal{H}^{1,d} = \mathcal{H}^1 \cap \mathcal{M}^d_{loc}$ are all closed subspaces of $\mathcal{H}^1$.

10.4 Let $M \in BMO_0$. If $\Delta M \ge -1 + \varepsilon, \varepsilon \in]0,1]$, then $\mathcal{E}(M) \in \mathcal{M}$.

10.5 Let $M \in \mathcal{M}^c_{loc,0}$.

1) If $E[\exp\{\frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty\}] < \infty$, then $\mathcal{E}(M) \in \mathcal{M}$.

2) If $E[\exp\{\frac{r}{2}\langle M\rangle_\infty\}] < \infty$, $r > 1$, then $\mathcal{E}(M) \in \mathcal{H}^p$, $p = \frac{r^2}{2r-1}$.

10.6 Let $M \in \mathcal{M}_{loc}$ and for any stopping time T, $E[|\Delta M_T|I_{[T<\infty]}] < \infty$. Then

$$[M \rightarrow] = [[M]_\infty < \infty] \quad \text{a.s.}.$$

10.7 Let $A \in \mathcal{A}^+_{loc}$ with $\tilde{A}_\infty = \infty$ and for any stopping time T $E[\Delta A_T I_{[T<\infty]}] < \infty$. Then

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_t}{\tilde{A}_t} = 1, \qquad \text{a.s.}.$$

10.8 Let $M \in \mathcal{M}_{loc}$. Let

$$B = \langle M^c\rangle + \sum \frac{\Delta M^2}{1 + |\Delta M|},$$

and A be the compensator of B.

1) $[A_\infty < \infty] \subset [M \rightarrow]$ a.s..

2) if for any stopping time T, $E[|\Delta M_T|I_{[T<\infty]}] < \infty$,

$$[A_\infty < \infty] = [M \rightarrow] \quad \text{a.s.}.$$

3) If $E[A_\infty] < \infty$, $M \in \mathcal{M}$.

10.9 Let M be a martingale, and $\sup_{t\ge 0} E[|M_t|] < \infty$. Let $N \in \mathcal{M}_{loc}$, and $[N] \le [M]$. Then

$$P([N \rightarrow]) = 1.$$

10.10 Let $X \in \mathcal{S}$, and $p > 1$. Set

$$\|X\|_{\mathcal{S}^p} = \inf\Big\{\Big\|\sqrt{[M]}_\infty + \int_{[0,\infty[} |dA_s|\Big\|_p : X = M + A,$$

$$M \in \mathcal{M}_{loc},\ A \in \mathcal{V}\Big\},$$

$$\mathcal{S}^p = \{X \in \mathcal{S} : \|X\|_{\mathcal{S}^p} < \infty\}.$$

1) $\mathcal{S}^p$ is a vector space, and $\mathcal{S}^p \subset \mathcal{S}_p$.

2) $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{S}^p$, and for $M \in \mathcal{H}^p$, $\|M\|_{\mathcal{H}^p} = \|M\|_{\mathcal{S}^p}$.

3) For each $X \in \mathcal{S}^p$

$$\|X^*_\infty\|_p \le C_p\|X\|_{\mathcal{S}^p},$$

where C_p is a constant depending on p only.

4) Let $X \in \mathcal{S}^p$, and $X = M + A$ be its canonical decomposition. Then

$$\Big\|\sqrt{[M]_\infty} + \int_{[0,\infty[} |dA_s|\Big\|_p \le 2(1+p)\|X\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Whence $\mathcal{S}^p$ is a Banach space.

10.11 Let $p \ge 1, q \ge 1, r \ge 1$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Suppose $X \in \mathcal{S}^p$ and H is a predictable process with $\|H^*_\infty\|_q < \infty$. Then H is X-integrable, and

$$\|H.X\|_{\mathcal{H}^r} \le \|H^*_\infty\|_q\|X\|_{\mathcal{S}^p},$$

$$\|(H.X)^*_\infty\|_r \le C_r\|H^*_\infty\|_q\|X\|_{\mathcal{S}^p},$$

where C_r is a constant, depending on r only.

10.12 Let $X, X^{(n)} \in \mathcal{S}^p$. We say that $(X^{(n)})$ converges prelocally in $\mathcal{S}^p$ to X if there exists a sequence (T_k) of stopping times with $T_k \uparrow \infty$ such that for each k

$$\lim_{n\to\infty} \|(X^{(n)} - X)^{T_k-}\|_{\mathcal{S}^p} = 0.$$

The following two statements are equivalent:

1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} E[(X^{(n)} - X)^*_k \wedge 1] = 0$.

2) From each subsequence of $(X^{(n)})$ one can extract a subsequence, which converges prelocally in $\mathcal{S}^p$ to X (see Problem 8.20).

Chapter XI

The Characteristics of Semimartingales

In this chapter we first introduce random measures which are the most useful tools to investigate the jumps of semimartingales. Then by using jump measures we establish the integral representation of semimartingales, in connection with which the predictable characteristics of semimartingales are introduced. It is interesting that the classical Lévy-Itô decomposition for processes with independent increments is just a special form of the general representation of semimartingales. In the last paragraph we study another simple but useful type of semimartingales—step processes, which play an important role in applied probability and statistics.

§1. Random Measures

11.1 Definition. Let $(E, \mathcal{B}(E))$ be a measurable space. Define

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) = (\Omega \times \boldsymbol{R}_+ \times E,\ \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E)),$$

$$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \times \mathcal{B}(E), \quad \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times \mathcal{B}(E).$$

$\tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$) is called *optional* (resp. *predictable*) *σ-field* in $\tilde{\Omega}$. An $\tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$)-measurable function defined on $\tilde{\Omega}$ is called an *optional* (resp. *predictable*) *function* on $\tilde{\Omega}$.

$(E, \mathcal{B}(E))$ is supposed to be a Lusin space, i.e., a Borel subspace of a compact metric space with its Borel field. For example, $(E, \mathcal{B}(E))$ may be a discrete space, $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$ or the n-dimensional space $(\boldsymbol{R}^n, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n))$. In our book we discuss mainly real stochastic processes. By convention, $(E, \mathcal{B}(E))$ is taken as $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$, unless otherwise stated.

11.2 Lemma. *Let W be an optional (resp. predictable) function on $\tilde{\Omega}$, (α_t) be an optional (resp. predictable) process, and T be a stopping*

time. Then

$$W(\omega, T, \alpha_T(\omega)) I_{[T<\infty]}(\omega) \in \mathcal{F}_T \ (resp.\ \mathcal{F}_{T-}). \tag{2.1}$$

Proof. It is easy to see that (2.1) holds when $W(\omega, t, x) = f(\omega, t) g(x)$, $f(\omega, t) \in \mathcal{O}(\text{resp.} \mathcal{P})$ and $g(x) \in \mathcal{B}(E)$. Then for any optional (resp. predictable) W (2.1) follows by a monotone class argument. □

11.3 Definition. An extended real function μ defined on $\Omega \times (\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E))$ is called a *random measure* if

1) for all $\omega \in \Omega$ $\mu(\omega, \cdot)$ is a σ-finite measure on $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E)$,
2) for all $\tilde{B} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E)$, $\mu(\cdot, \tilde{B})$ is a r.v. on $(\Omega, \mathcal{F})$.

For any $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{F}}$, define

$$M_\mu(\tilde{B}) = \boldsymbol{E}\Big[\int_{\boldsymbol{R}_+ \times E} I_{\tilde{B}}(\omega, t, x) \mu(\omega, dt, dx)\Big].$$

Then M_μ is a measure on $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, and is called the *measure generated by* μ. μ is said to be *integrable* if M_μ is a finite measure: $M_\mu(\tilde{\Omega}) < \infty$. μ is said to be *optionally* (resp. *predictable*) *σ-integrable*, if the restriction of M_μ on $\tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$) is a σ-finite measure.

Clearly, the concept of random measure is a generalization of the concept of increasing process. Let $A = (A_t(\omega))$ be an increasing process. Take $E = \{x_0\}$: a set of one point, $\mathcal{B}(E) = \{\emptyset, E\}$. Then

$$\mu(\omega, dt, dx) = dA_t(\omega) \delta_{x_0}(dx)$$

is a random measure, and

$$\mu([0, t] \times E) = A_t.$$

It should be stressed that in general for a random measure μ, $\mu([0, t] \times B)$ may be equal to infinity identically for all $t \geq 0$ and $B \in \mathcal{B}(E)$.

If $W \in \tilde{\mathcal{F}}^+$, then

$$\nu(\omega, \tilde{B}) = \int_{\tilde{B}} W(\omega, t, x) \mu(\omega, dt, dx), \quad \tilde{B} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E), \tag{3.1}$$

is still a random measure. (3.1) is also denoted by $\nu = W.\mu$ or $d\nu = W d\mu$.

Let $W \in \tilde{\mathcal{F}}$. If for every $t \geq 0$

$$\int_{[0,t] \times E} |W| d\mu < \infty,$$

we define $W * \mu = (W * \mu_t)$ as follows:

$$W * \mu_t = \int_{[0,t] \times E} W d\mu, \quad t \geq 0.$$

Obviously, $W * \mu$ is a process with finite variation.

A random measure μ is said to be *optional* (resp. *predictable*), if for any optional (resp. predictable) function W such that $W * \mu$ exists, $W * \mu$ is an optional (resp. predictable) process.

It is evident that if for every $t \geq 0, 1 * \mu_t < \infty$, then μ is optional (resp. predictable) if and only if for every $B \in \mathcal{B}(E)$, $1_B * \mu = (\mu([0,t] \times B))_{t \geq 0}$ is optional (resp. predictable). The following result is can also be easily obtained.

11.4 Lemma. *Let μ be an optional (resp. predictable) random measure, and W be an optional (resp. predictable) non-negative real function. Then $\nu = W.\mu$ is an optional (resp. predicatable) random measure.*

11.5 Theorem. *Let μ and ν be two optional (resp. predictable) and optionally (resp. predictably) σ-integrable random measures. If the restrictions of M_μ and M_ν on $\tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$) are identical, then $\mu = \nu$, i.e., μ and ν are indistinguishable:*

$$P(\{\omega : \exists \tilde{B} \in \mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{B}(E) \text{ such that } \mu(\omega, \tilde{B}) \neq \nu(\omega, \tilde{B})\}) = 0.$$

Proof. Let $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$) such that $\tilde{A}_n \uparrow \tilde{\Omega}$ and $M_\mu(\tilde{A}_n) = M_\nu(\tilde{A}_n) < \infty$ for each n. Let $\mathcal{D}$ be a countable π-class such that $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(E)$. For every n and $D \in \mathcal{D}$ define

$$U = (I_{\tilde{A}_n} I_D) * \mu, \quad V = (I_{\tilde{A}_n} I_D) * \nu.$$

Then both U and V are optional (resp. predictable) integrable increasing processes. For any non-negative optional (resp. predictable) process H we have

$$E\Big[\int_{R_+} H_t dU_t\Big] = M_\mu[I_{\tilde{A}_n} I_D H] = M_\nu[I_{\tilde{A}_n} I_D H] = E\Big[\int_{R_+} H_t dV_t\Big].$$

Hence U and V are indistinguishable. Therefore

$$P(\{\omega : \int_{[0,t] \times D} I_{\tilde{A}_n} d\mu = \int_{[0,t] \times D} I_{\tilde{A}_n} d\nu \ \forall t \geq 0, \ \forall D \in \mathcal{D}\}) = 1.$$

By the uniqueness of the extention of measures we obtain

$$P(\{\omega : \int_{\tilde{B}} I_{\tilde{A}_n} d\mu = \int_{\tilde{B}} I_{\tilde{A}_n} d\nu \quad \forall \tilde{B} \in \mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{B}(E)\}) = 1. \tag{5.1}$$

Letting $n \to \infty$ in (5.1) leads to $\mu = \nu$. $\square$

11.6 Theorem. *Let m be a measure on $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ such that its restriction on $\tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$) is σ-finite. There exists an optional (resp. predictable) random measure μ such that $m = M_\mu$ if and only if*

i) *for any evanescent set $N \subset \Omega \times R_+$, $m(N \times E) = 0$,*

ii) *for any $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$) with $m(\tilde{A}) < \infty$ and bounded measurable process X*

$$m(XI_{\tilde{A}}) = m({}^oXI_{\tilde{A}}) \quad (\text{resp } m(XI_{\tilde{A}}) = m({}^pXI_{\tilde{A}})).$$

In this case, the optional (resp. predictable) random measure μ is uniquely determined.

Proof. We deal with the optional case only. Necessity. i) is trivial: $M_\mu(N \times E) = 0$ for any evanescent set N. Noting that $Y = I_{\tilde{A}} * \mu$ is an optional integrable increasing process, for any bounded measurable process X we have

$$\begin{aligned} m(XI_{\tilde{A}}) &= M_\mu(XI_{\tilde{A}}) = E\Big[\int_{R_+} X_t dY_t\Big] = E\Big[\int_{R_+} {}^oX_t dY_t\Big] \\ &= M_\mu({}^oXI_{\tilde{A}}) = m({}^oXI_{\tilde{A}}). \end{aligned}$$

Sufficiency. At first, we assume m is a finite measure. Then m can be decomposed as follows:

$$m(d\omega, dt, dx) = n(\omega, t, dx) m(d\omega, dt, E), \tag{6.1}$$

where for every $B \in \mathcal{B}(E)$, $n(\omega, t, B)$ is the Radon-Nikodym derivative of $m(d\omega, dt, B)$ w.r.t. $m(d\omega, dt, E)$ on $\mathcal{O}$, and at the same time it is an optional process (Theorem 5.14); for all (ω, t), $n(\omega, t, \cdot)$ is a probability measure on $\mathcal{B}(E)$.

Applying Theorems 5.11 and 5.13 to $m(d\omega, dt, E)$, we know that there is an optional integrable increasing process $A = (A_t)$ such that for any non-negative measurable process X

$$m(X) = E\Big[\int_{R_+} X_t dA_t\Big]. \tag{6.2}$$

Put

$$\mu(\omega, dt, dx) = n(\omega, t, dx) dA_t(\omega).$$

It is not difficult to check that μ is an optional integrable random measure. By (6.1) and (6.2), for any $B \in \mathcal{B}(E)$ and bounded measurable process X we have

$$\begin{aligned} m(XI_B) &= m({}^oXI_B) = \int_{\Omega \times R_+} {}^oX_t(\omega) n(\omega, t, B) m(d\omega, dt, E) \\ &= E\Big[\int_{R_+} {}^oX_t(\omega) n(\omega, t, B) dA_t(\omega)\Big] = E\Big[\int_{R_+} X_t(\omega) n(\omega, t, B) dA_t(\omega)\Big] \\ &= E\Big[\int_{R_+ \times B} X_t(\omega) \mu(\omega, dt, dx)\Big] = M_\mu(XI_B). \end{aligned}$$

Then by the uniqueness of the extension of measures we obtain $m = M_\mu$ on $\tilde{\mathcal{F}}$.

Now assume that m is σ-finite on $\tilde{\mathcal{O}}$. There is a sequence $(\tilde{A}_n)$ of disjoint sets in $\tilde{\mathcal{O}}$ such that $\tilde{\Omega} = \bigcup_n \tilde{A}_n$ and $m(\tilde{A}_n) < \infty$ for each n. Applying the result shown above to finite measure $m(WI_{\tilde{A}_n})$, there is an optional integrable random measure μ_n such that $m(WI_{\tilde{A}_n}) = M_{\mu_n}(W)$ for any $W \in \tilde{\mathcal{F}}^+$. Put

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\tilde{A}_n} \cdot \mu_n.$$

Then it is easy to see that μ is an optional random measure and $m = M_\mu$. The unqiueness of μ follows from Theorem 11.5. □

11.7 Definition. Let μ be a random measure. If there exists a predictable random measure ν satisfying

1) ν is predictably σ-integrable,
2) the restrictions of M_μ and M_ν on $\tilde{\mathcal{P}}$ are identical,

then we say that μ *has dual predictable projection* or *compensator* ν, and ν is the *dual predictable projection* or *compensator* of μ. Of course, the dual predictable projection of a random measure (if exists) is uniquely determined by Theorem 11.6. The dual predictable projection of μ is denoted also by μ^p or $\tilde{\mu}$.

Remark. We may define the dual optional projection of a random measure. But we do not need it in our book.

11.8 Theorem. *A random measure μ has dual predictable projection if and only if it is predictably σ-integrable.*

Proof. The necessity is trivial. Only the sufficiency is required to be proved.

For any bounded non-negative measurable process X and bounded non-negative $\mathcal{B}(E)$-measurable function h put

$$m(Xh) = M_\mu({}^pXh).$$

Since M_μ is σ-finite on $\tilde{\mathcal{P}}$, m can be uniquely extended to a measure on $\tilde{\mathcal{F}}$. Obviously, m and M_μ have the same restriction on $\tilde{\mathcal{P}}$. It is easy to see that m satisfies the requirements in Theorem 11.6. Hence there is a predictable random measure ν such that $m = M_\nu$. Therefore ν is predictably σ-integrable, and $\nu = \tilde{\mu}$. □

11.9 Theorem. *Suppose that random measure μ has dual predictable projection. Let $W \in \tilde{\mathcal{F}}^+$ such that $\nu = W.\mu$ is a predictably σ-integrable random measure. Then ν has dual predictable projection:*

$$\tilde{\nu} = U.\tilde{\mu}.$$

where $U = M_\mu[W|\tilde{\mathcal{P}}]$.

Proof. By the assumption M_ν is σ-integrable on $\tilde{\mathcal{P}}$. This means that under M_μ W is σ-integrable w.r.t. $\tilde{\mathcal{P}}$. Thus $U = M_\mu[W|\tilde{\mathcal{P}}]$ is finite. Let H be a predictable function on $\tilde{\Omega}$ such that $M_\nu(|H|) = M_\mu(|HW|) < \infty$. Then

$$M_\nu(H) = M_\mu(HW) = M_\mu(HU) = M_{\tilde{\mu}}(HU) = M_{U.\tilde{\mu}}(H).$$

Hence $\tilde{\nu} = U.\tilde{\mu}$. □

11.10 Corollary. *Suppose that random measure μ has dual predictable projection $\tilde{\mu}$, and $W \in \tilde{\mathcal{F}}$ such that $X = W * \mu$ is a process with locally integrable variation. Then X has dual predictable projection: $\tilde{X} = U * \tilde{\mu}$, where $U = M_\mu[W|\tilde{\mathcal{P}}]$.*

11.11 Theorem. *Suppose that random measure μ has dual predictable projection $\tilde{\mu}$, $W \in \tilde{\mathcal{P}}^+$, and T is a predictable time. Then*

$$\int_E W(T,x)\tilde{\mu}(\{T\},dx)I_{[T<\infty]}$$
$$= E\Big[\int_E W(T,x)\mu(\{T\},dx)I_{[T<\infty]}\Big|\mathcal{F}_{T-}\Big] \quad \text{a.s.,} \tag{11.1}$$

Proof. Let $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{P}}$ such that $\tilde{A}_n \uparrow \tilde{\Omega}$, $M_\mu(\tilde{A}_n) < \infty$ and W is bounded on $\tilde{A}_n$ for each n. In this case, $X^{(n)} = (WI_{\tilde{A}_n}) * \mu$ is an integrable increasing process and has dual predictable projection $\widetilde{X}^{(n)} = (WI_{\tilde{A}_n}) * \tilde{\mu}$. Hence $\Delta \widetilde{X^{(n)}_T} I_{[T<\infty]} = E[\Delta X^{(n)}_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}]$ a.s., i.e.,

$$\int_E W(T,x)I_{\tilde{A}_n}(T,x)\tilde{\mu}(\{T\},dx)I_{[T<\infty]}$$
$$= E\Big[\int_E W(T,x)I_{\tilde{A}_n}(T,x)\mu(\{T\},dx)I_{[T<\infty]}\Big|\mathcal{F}_{T-}\Big] \text{ a.s.,} \tag{11.2}$$

Letting $n \to \infty$ in (11.2) yields (11.1). □

11.12 Defintion. A random measure μ is called an *integer-valued random measure* if

1) μ takes on values in $\{0, 1, 2, \cdots, +\infty\}$,
2) for all $t \geq 0$, $\mu(\{t\} \times E) \leq 1$,
3) μ is optional and optionally σ-integrable.

11.13 Theorem. *μ is an integer-valued random measure if and only if*

$$\mu(dt,dx) = \sum_s \delta_{(s,\beta_s)}(dt,dx)I_D(s), \tag{13.1}$$

where D is a thin set (D is called the support of μ), $\beta = (\beta_t)$ is an optional process.

Proof. Sufficiency. It suffices to justify that μ is optional and optionally σ-integrable. Let (T_n) be a sequence of stopping times with disjoint graphs such that $D = \bigcup_n [\![T_n]\!]$, and $W \in \tilde{\mathcal{O}}$ such that $W * \mu$ makes sense. Then

$$W * \mu = \sum_n W(T_n, \beta_{T_n}) I_{[\![T_n, \infty[\![}.$$

By Lemma 11.2 $W * \mu$ is optional. Hence μ is optional. On the other hand, putting $\tilde{A}_n = \left(\bigcup_{k=1}^{n} [\![T_k]\!] \cup D^c\right) \times E$, we have $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{O}}$, $\tilde{A}_n \uparrow \tilde{\Omega}$ and $M_\mu(\tilde{A}_n) \le n$, i.e., μ is optionally σ-integrable.

Necessity. Denote $D = \{(\omega, t) : \mu(\{t\} \times E) = 1\}$. D is a thin set. In fact, let $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{O}}$ such that $\tilde{A}_n \uparrow \tilde{\Omega}$ and $M_\mu(\tilde{A}_n) < \infty$ for each n. Then $B^{(n)} = I_{\tilde{A}_n} * \mu$ is an optional integrable increasing process, and $D = \bigcup_n [\Delta B^{(n)} \neq 0]$. Assume $D = \bigcup_n [\![T_n]\!]$, where (T_n) is a sequence of stopping times with disjoint graphs.

Since $\mathcal{B}(E)$ is countably generated and each one-point set in E is measurable, if $T_n(\omega) < \infty$, there exists a real number $\beta_{T_n(\omega)}(\omega)$ such that $\mu(\omega, \{(T_n(\omega), \beta_{T_n(\omega)}(\omega))\}) = 1$. Put

$$\beta = \sum_n \beta_{T_n} I_{[\![T_n]\!]}.$$

Then (13.1) holds. Finally, it remains to prove that β is optional. In fact, since for each $B \in \mathcal{B}(E)$,

$$[\beta_{T_n} \in B,\ T_n < \infty] = [\mu(\{T_n\} \times B) = 1,\ T_n < \infty],$$

and $\mu(\{T_n\} \times B) I_{[T_n < \infty]}$ is the jump size of optional process $I_{[\![T_n]\!] \times B} * \mu$ at time T_n, $\beta_{T_n} I_{[T_n < \infty]} \in \mathcal{F}_{T_n}$. Therefore, β is optional. □

11.14 Theorem. *Suppose that integer-valued random measure μ with support D has the dual predictable projection ν. Put*

$$a = (a_t), \quad a_t = \nu(\{t\} \times E), \quad t \ge 0. \tag{14.1}$$

$$J = [a > 0], \tag{14.2}$$

$$K = [a = 1]. \tag{14.3}$$

Then a is a predictable thin set, $0 \le a \le 1$. J is the predictable support of D, and K is the largest predictable set contained in D (up to an evanescent set).

Proof. Let $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{P}}$ such that $\tilde{A}_n \uparrow \tilde{\Omega}$ and $M_\mu(\tilde{A}_n) < \infty$ for each n. Then $B^{(n)} = I_{\tilde{A}_n} * \mu$ is an optional integrable increasing process, and has dual predictable projection $\widetilde{B^{(n)}} = I_{\tilde{A}_n} * \nu$. Thus $a = \lim_n \Delta\widetilde{B^{(n)}}$ is

predictable. Clearly, $D = \bigcup_n [\Delta B^{(n)} \neq 0]$ and the predictable support of D is

$$\bigcup_n [\Delta \widetilde{B^{(n)}} \neq 0] = [a > 0] = J.$$

Hence a is a thin process. For any predictable time T

$$a_T I_{[T<\infty]} = E[\mu(\{T\} \times E) I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_{T-}] \quad \text{a.s.}. \tag{14.4}$$

But $0 \le \mu(\{t\} \times E) \le 1$. By the section theorem we have $0 \le a \le 1$.

Now assume that T is a predictable time such that $[\![T]\!] \subset K = [a = 1]$. By (14.4) we have

$$E[\mu(\{T\} \times E) I_{[T<\infty]}] = E[a_T I_{[T<\infty]}] = P(T < \infty).$$

Since $0 \le \mu(\{T\} \times E) I_{[T<\infty]} \le 1$, we conclude that

$$\mu(\{T\} \times E) = 1 \qquad \text{a.s. on } [T < \infty].$$

Hence $[\![T]\!] \subset D$, and consequently, $K \subset D$.

On the other hand, if H is a predictable subset of D, and there is a predictable time T such that $[\![T]\!] \subset H \setminus K$, $P(T < \infty) > 0$, again by (14.4) we know $a_T I_{[T<\infty]} = I_{[T<\infty]}$ a.s., i.e., $[\![T]\!] \subset K$, contradicting $[\![T]\!] \subset H \setminus K$. It must be $H \subset K$, i.e., K is the largest predictable set contained in D. □

11.15 Theorem. *Let $X = (X_t)$ be an adapted cadlag process, and $D = [\Delta X \neq 0]$. Then*

$$\mu(dt, dx) = \sum_{s>0} \delta_{(s, \Delta X_s)}(dt, dx) I_D(s)$$

is an integer-valued random measure and has dual predictable projection ν. μ is called the jump measure of X, and ν the Lévy system of X.

Proof. It is well-known that $D = [\Delta X \neq 0]$ is a thin set and ΔX is an optional process. By Theorem 11.13 μ is an integer-valued random measure. It is required to prove that M_μ is σ-finite on $\tilde{\mathcal{P}}$.

For $n \ge 1$ put

$$T_{n,0} = 0, \quad T_{n,m} = \inf\left\{t > T_{n,m-1} : \frac{1}{n} \le |\Delta X_t| < \frac{1}{n-1}\right\}, \quad m \ge 1.$$

Then $\tilde{A}_{n,m} = [\![0, T_{n,m}]\!] \times \left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right] \cup \{0\}\right) \in \tilde{\mathcal{P}}$, $\bigcup_{n,m} \tilde{A}_{n,m} = \tilde{\Omega}$ and $M_\mu(\tilde{A}_{n,m}) \le m$. □

In the remainders of this paragraph we suppose μ is a given integer-valued random measure having the dual predictable projection ν, and $\mu(\{0\} \times E) = 0$. We continue to use the notations defined in (13.1) and (14.1)–(14.3).

Our goal is to define the stochastic integral of a predictable function W w.r.t. $\mu - \nu$. In fact, if $W * \mu \in \mathcal{A}_{loc}$, then

$$M = W * \mu - W * \nu$$

is a local martingale with locally integrable variation and $M_0 = 0$, because $W * \nu$ is the dual predictable projection of $W * \mu$. It is natural to define M as the stochastic integral of W w.r.t. $\mu - \nu$, and denote $M = W * (\mu - \nu)$. Besides,

$$\Delta M_t = \int_E W(t,x)\mu(\{t\}, dx) - \int_E W(t,x)\nu(\{t\}, dx), \quad t > 0.$$

Hence it is natural to give the following definition of stochastic integrals w.r.t. random measures in general.

11.16 Definition. Denote

$$\hat{\nu}_t(dx) = \nu(\{t\}, dx), \quad t \geq 0.$$

If W is a predictable function and for all $t \geq 0$, $\int_E |W(t,x)|\hat{\nu}_t(dx) < \infty$, denote

$$\widehat{W}_t = \int_E W(t,x)\hat{\nu}_t(dt), \quad t \geq 0,$$
$$\widetilde{W}_t = \int_E W(t,x)\mu(\{t\}, dx) - \int_E W(t,x)\nu(\{t\}, dx)$$
$$= W(t, \beta_t)I_D(t) - \widehat{W}_t, \qquad t \geq 0.$$

Clearly, $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)$ and $\widehat{W} = (\widehat{W}_t)$ are all thin processes, and $\widehat{W}$ is predictable. By Theorem 11.11, we have ${}^p(\widetilde{W}) = 0$. Put

$$\mathcal{G}(\mu) = \left\{W \in \widetilde{\mathcal{P}} : \forall t \geq 0 \int_E |W(t,x)|\hat{\nu}_t(dx) < \infty \text{ and } \sqrt{\Sigma(\widetilde{W})^2} \in \mathcal{A}^+_{loc}\right\}.$$

Then by Theorem 7.42 for every $W \in \mathcal{G}(\mu)$ there exists a unique purely discontinuous local martingale M such that $\Delta M = \widetilde{W}$. M is called the *stochastic integral of* W *w.r.t.* $\mu - \nu$, and denoted by $W * (\mu - \nu)$, or

$$M_t = \int_{[0,t] \times E} W(s,x)(\mu(ds,dx) - \nu(ds,dx)), \quad t \geq 0.$$

It is easy to see

$$[M] = \Sigma(\Delta M)^2 = \Sigma(\widetilde{W})^2.$$

Obviously, if $W \in \widetilde{\mathcal{P}}$ and $W * \mu \in \mathcal{A}_{loc}$, then $W \in \mathcal{G}(\mu)$ and $W * (\mu - \nu) = W * \mu - W * \nu$, as pointed out above.

11.17 Theorem. *Let* $W \in \mathcal{G}(\mu)$ *and* $M = W * (\mu - \nu)$. *There exists* $V \in \mathcal{G}(\mu)$ *such that* $M = V * (\mu - \nu)$ *and*

$$[a = 1] \subset [\widehat{V} = 0]. \tag{17.1}$$

Such a V *is unique up to an* M_μ*-null set.*

Proof. By the definition of stochastic integrals, on $\widetilde{\Omega}$ we have

$$\Delta M = W - \widehat{W} \qquad M_\mu\text{-a.e.,}$$

Consequently, for any version U of $M_\mu[\Delta M | \widetilde{\mathcal{P}}]$ $U = W - \widehat{W}$ M_μ-a.e., i.e., $I_{[U \neq W - \widehat{W}]} * \mu_\infty = 0$ a.s., and hence $I_{[U \neq W - \widehat{W}]} * \nu_\infty = 0$ a.s.. Put

$$V = U + \frac{\widehat{U}}{1-a} I_{[a<1]}.$$

Since $\widehat{U} = \widehat{W} - \widehat{W}a = \widehat{W}(1-a)$, we have

$$V = W - \widehat{W} + \widehat{W} I_{[a<1]} = W - \widehat{W} I_{[a=1]}, \qquad M_\mu\text{-a.e.,} \tag{17.2}$$
$$\widehat{V} = \widehat{W} - \widehat{W} I_{[a=1]}a = \widehat{W} I_{[a<1]}. \tag{17.3}$$

Noting that $[a = 1] \subset D$, we obtain

$$\widetilde{V}_t = W(t, \beta_t)I_D(t) - \widehat{W}_t I_{[a_t=1]} I_D(t) - \widehat{W}_t I_{[a_t<1]}$$
$$= W(t, \beta_t)I_D(t) - \widehat{W}_t = \widetilde{W}_t, \quad t \geq 0.$$

Hence $V \in \mathcal{G}(\mu)$ and $M = V * (\mu - \nu)$. (17.1) follows from (17.3).

On the other hand, the definition of V does not depend on W. If

$$[a = 1] \subset [\widehat{W} = 0],$$

then by (17.2) we have

$$V = W \qquad M_\mu\text{-a.e.}.$$

The uniqueness of V follows. □

11.18 Lemma. *Let* H *be a predictable process. Then*

$$\Sigma(HI_{JD^c}) \in \mathcal{A}_{loc} \Longleftrightarrow \Sigma(HI_J(1-a)) \in \mathcal{A}_{loc}. \tag{18.1}$$

In this case, $\Sigma(HI_J(1-a))$ *is the dual predictable projection of* $\Sigma(HI_{JD^c})$.

Proof. Let $J = \bigcup_n [T_n]$, where (T_n) is a sequence of predictable times with disjoint graphs. Then we have

$$\boldsymbol{E}\Big[\sum_s |H_s| I_{JD^c}(s)\Big] = \sum_n \boldsymbol{E}[|H_{T_n}| I_{D^c}(T_n) I_{[T_n<\infty]}]$$
$$= \sum_n \boldsymbol{E}[|H_{T_n}|(1 - a_{T_n}) I_{[T_n<\infty]}] = \boldsymbol{E}\Big[\sum_s |H_s| I_J(s)(1 - a_s)\Big]. \tag{18.2}$$

because ${}^{p}a_{T_n} I_{[T_n<\infty]} = E[I_D(T_n) I_{[T_n<\infty]} | \mathcal{F}_{T_n-}]$ a.s. and $H_{T_n} \in \mathcal{F}_{T_n-}$. If T is a stopping time such that

$$E\Big[\sum_{s\le T} |H_s| I_{JD^c}(s)\Big] < \infty \text{ or } E\Big[\sum_{s\le T} |H_s| I_J(s)(1-a_s)\Big] < \infty,$$

by replacing $|H|$ with $HI_{[0,T]}$ in (18.2) one arrives at the conclusion of the lemma. □

11.19 Theorem. *Let $W \in \widetilde{\mathcal{P}}$ and for all $t > 0$, $\int_E |W(t,x)|\hat{\nu}_t(dx) < \infty$. Put*

$$A = \frac{|W-\widehat{W}|^2}{1+|W-\widehat{W}|} * \nu + \sum\Big(\frac{\widehat{W}^2}{1+|\widehat{W}|}(1-a)\Big),$$

$$B = (|W-\widehat{W}|^2 I_{[|W-\widehat{W}|\le b]} + |W-\widehat{W}| I_{[|W-\widehat{W}|>b]}) * \nu$$

$$+\sum(\widehat{W}^2 I_{[|\widehat{W}|\le b]} + |\widehat{W}| I_{[|\widehat{W}|>b]}), \quad b>0.$$

Then

$$W \in \mathcal{G}(\mu) \Longleftrightarrow A \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}} \Longleftrightarrow B \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}. \tag{19.1}$$

Proof. Since $\widetilde{W}$ is a thin process, we have

$$\sum_{s\le t} \frac{\widetilde{W}_s^2}{1+|\widetilde{W}_s|}$$

$$= \sum_{s\le t} \frac{|W(s,\beta_s)I_D(s) - \widehat{W}_s|^2}{1+|W(s,\beta_s)I_D(s)-\widehat{W}_s|}[\mu(\{s\}\times E) + (1-\mu(\{s\}\times E))]$$

$$= \int_{]0,t]\times E} \frac{|W(s,x)-\widehat{W}_s|^2}{1+|W(s,x)-\widehat{W}_s|}\mu(ds,dx) + \sum_{s\le t}\frac{\widehat{W}_s^2}{1+|\widehat{W}_s|} I_{D^c}(s).$$

By Corollary 11.10 and Lemma 11.18, $\sum\Big(\frac{\widetilde{W}^2}{1+|\widetilde{W}|}\Big) \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$, and in this case A is the dual predictable projection of $\sum\Big(\frac{\widetilde{W}^2}{1+|\widetilde{W}|}\Big)$.

By similar computation we have

$$\sum(\widetilde{W}^2 I_{[|\widetilde{W}|\le b]} + |\widetilde{W}| I_{[|\widetilde{W}|>b]}) = \sum((\widehat{W}^2 I_{[|\widehat{W}|\le b]}$$

$$+ |\widehat{W}| I_{[|\widehat{W}|>b]}) I_{D^c} + (|W-\widehat{W}|^2 I_{[|W-\widehat{W}|\le b]} + |W-\widehat{W}| I_{[|W-\widehat{W}|>b]}) * \mu$$

and

$$\Sigma(\widetilde{W}^2 I_{[|\widetilde{W}|\le b]} + |\widetilde{W}| I_{[|\widetilde{W}|>b]}) \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}} \Longleftrightarrow B \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}.$$

In this case, B is the dual predictable projection of $\sum(\widetilde{W}^2 I_{[|\widetilde{W}|\le b]} + |\widetilde{W}| I_{[|\widetilde{W}|>b]})$. Then (19.1) follows from Lemma 7.41. □

11.20 Corollary. *$\mathcal{G}(\mu)$ is a vector space, and for any $W_1, W_2 \in \mathcal{G}(\mu)$ and real numbers a, b we have*

$$(aW_1 + bW_2) * (\mu-\nu) = a(W_1 * (\mu-\nu)) + b(W_2 * (\mu-\nu)).$$

11.21 Theorem. 1) *Following $\mathcal{G}_1(\mu)$, $\mathcal{G}_2(\mu)$ are subspaces of $\mathcal{G}(\mu)$:*

$$\mathcal{G}_1(\mu) = \{W \in \widetilde{\mathcal{P}} : \forall t \ge 0 \int_E |W(t,x)|\hat{\nu}_t(dx) < \infty \text{ and } \sum(|\widetilde{W}|) \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}\},$$

$$\mathcal{G}_2(\mu) = \{W \in \widetilde{\mathcal{P}} : \forall t \ge 0 \int_E |W(t,x)|\hat{\nu}_t(dx) < \infty \text{ and } \sum(\widetilde{W}^2) \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}\}.$$

2) $W \in \mathcal{G}_1(\mu) \Longleftrightarrow |W-\widehat{W}|*\nu + \sum(|\widehat{W}|(1-a)) \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}} \Longleftrightarrow W*(\mu-\nu) \in \mathcal{W}_{\mathrm{loc}}$.

3) $W \in \mathcal{G}_2(\mu) \Longleftrightarrow |W-\widehat{W}|^2 * \nu + \sum(\widehat{W}^2(1-a)) \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}} \Longleftrightarrow W*(\mu-\nu) \in \mathcal{M}^{2,d}_{\mathrm{loc}}$. *In this case, we have*

$$\langle W*(\mu-\nu)\rangle = |W-\widehat{W}|^2 * \nu + \sum(\widehat{W}^2(1-a)) = W^2 * \nu - \sum(\widehat{W}^2),$$

the last equality holds only if $W^2 * \nu \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

Proof. 1) is easy: $\sum\Big(\frac{\widetilde{W}^2}{1+|\widetilde{W}|}\Big) \le \sum(|\widetilde{W}|)$ and $\sum\Big(\frac{\widetilde{W}^2}{1+|\widetilde{W}|}\Big) \le \sum(\widetilde{W}^2)$. The proofs 2) and 3) are similar to that of Theorem 11.19. In fact, we have $\sum(|\widetilde{W}|) = |W-\widehat{W}| * \mu + \sum(|\widehat{W}| I_{D^c})$ and $\sum(\widetilde{W}^2) = |W-\widehat{W}|^2 * \mu + \sum(\widehat{W}^2 I_{D^c})$. □

11.22 Theorem. *For every $W \in \mathcal{G}(\mu)$ there exist $U \in \mathcal{G}_1(\mu)$ and $V \in \mathcal{G}_2(\mu)$ such that $W = U + V$.*

Proof. Put $M = W*(\mu-\nu)$ and $A = \Sigma(\Delta M I_{[|\Delta M|>1]})$. We have already known $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ (Lemma 7.16). Put

$$U = (W-\widehat{W}) I_{[|W-\widehat{W}|>1]} + \widehat{W} I_{[|\widehat{W}|>1]},$$

$$V = (W-\widehat{W}) I_{[|W-\widehat{W}|\le 1]} + \widehat{W} I_{[|\widehat{W}|\le 1]}.$$

Then $W = U + V$. Since

$$\Delta A_t = \Delta M_t I_{[|\Delta M_t|>1]}$$

$$= \int_E (W(t,x)-\widehat{W}_t) I_{[|W-\widehat{W}|>1]}\mu(\{t\},dx) - \widehat{W}_t I_{[|\widehat{W}|>1]}(1-\mu(\{t\}\times E))$$

$$= \int_E U(t,x)\mu(\{t\},dx) - \widehat{W}_t I_{[|\widehat{W}_t|>1]},$$

the predictable projection of $\int_E U(t,x)\mu(\{t\},dx) = \Delta A_t + \widehat{W}_t I_{[|\widehat{W}_t|>1]}$ is

$$\widehat{U}_t = \int_E U(t,x)\hat{\nu}_t(dx) = \Delta \tilde{A}_t + \widehat{W}_t I_{[|\widehat{W}_t|>1]}.$$

Hence $\tilde{U} = \Delta(A - \tilde{A})$, and $U \in \mathcal{G}_1(\mu)$ $(U * (\mu - \nu) = A - \tilde{A})$. Now that $V = W - U \in \mathcal{G}(\mu)$ and $\Delta(V * (\mu - \nu)) = \tilde{V}$ is bounded by $4(|V| \le 2)$, $V * (\mu - \nu) \in \mathcal{M}^{2,d}_{\mathrm{loc}}$ and $V \in \mathcal{G}_2(\mu)$. □

11.23 Theorem. *Let $W \in \mathcal{G}(\mu)$ and $M = W * (\mu - \nu)$, H be a predictable process. Then H is integrable w.r.t. M if and only if $HW \in \mathcal{G}(\mu)$. In this case, we have*

$$H.M = (HW) * (\mu - \nu). \tag{23.1}$$

Proof. Since

$$H^2.[M] = \Sigma(H^2 \Delta M^2) = \Sigma(H^2 \tilde{W}^2) = \Sigma(\widetilde{HW})^2.$$

The fact that H is integrable w.r.t. M, i.e., $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$, is equivalent to $HW \in \mathcal{G}(\mu)$. In this case, we have $\Delta(H.M) = H\Delta M = H\tilde{W} = (\widetilde{HW})$. Hence (23.1) holds. □

§2. The Integral Representation of Semimartingales

11.24 Theorem. *Let X be a special semimartingale, and*

$$X = M + A$$

be its canonical decomposition, where M is a local martingale and A is a predictable process with finite variation and $A_0 = 0$. Let μ be the jump measure of X, and ν be its dual predictable projection. Then

$$M^d = x * (\mu - \nu). \tag{24.1}$$

Proof. For any predictable time T we have

$$\begin{aligned}\Delta A_T I_{[T<\infty]} &= E[\Delta X_T I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_{T-}] \\ &= E\Big[\int_E x\mu(\{T\}, dx) I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_{T-}\Big] = \int_E x\nu(\{T\}, dx) I_{[T<\infty]} \quad \text{a.s.}.\end{aligned}$$

Hence, ΔA is indistinguishable from $\left(\int_E x\nu(\{t\}, dx)\right)$, and

$$\int_E x\mu(\{t\}, dx) - \int_E x\nu(\{t\}, dx) = \Delta X_t - \Delta A_t = \Delta M_t = \Delta M^d_t, \quad t \ge 0.$$

By the defintion of stochastic integrals, M^d is just $x * (\mu - \nu)$. □

11.25 Theorem. *Let X be a semimartingale, μ be its jump measure, and ν be the dual predictable projection of μ. Then*

$$X = X_0 + \alpha + X^c + (xI_{[|x|\le 1]}) * (\mu - \nu) + (xI_{[|x|>1]}) * \mu, \tag{25.1}$$

where X^c is the continuous martingale part of X, α is a predictable process with finite variation and $\alpha_0 = 0$. Moreover, we have

$$\nu(\{0\} \times E) = \nu(\mathbb{R}_+ \times \{0\}) = 0, \tag{25.2}$$

$$(x^2 \wedge 1) * \nu \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}, \tag{25.3}$$

$$\Delta\alpha = \left(\int_{|x|\le 1} x\hat{\nu}_t(dx)\right). \tag{25.4}$$

Proof. Noting that $(xI_{[|x|>1]}) * \mu = \Sigma(\Delta X I_{[|\Delta X|>1]})$, we know

$$Y = X - X_0 - (xI_{[|x|>1]}) * \mu, \quad t \ge 0, \tag{25.5}$$

is a special semimartingale ($|\Delta Y| \le 1$). Denote its canonical decomposition by

$$Y = M + \alpha, \tag{25.6}$$

where M is a local martingale with $M_0 = 0$, and α is a predictable process with finite variation and $\alpha_0 = 0$. Clearly,

$$M^c = Y^c = X^c, \tag{25.7}$$

the jump measure of Y is $I_{[|x|\le 1]} \cdot \mu$, and its dual predictable projection is $I_{[|x|\le 1]} \cdot \nu$. By Theorem 11.24 we have

$$M^d = (xI_{[|x|\le 1]}) * (\mu - \nu). \tag{25.8}$$

Then (25.1) follows from (25.5)–(25.8).

(25.2) is trivial. (25.4) comes from (24.2). Only (25.3) is required to be proved. Since

$$(x^2 I_{[|x|\le 1]}) * \mu = \Sigma((\Delta X)^2 I_{[|\Delta X|\le 1]}) = \Sigma(\Delta Y)^2$$

and $|\Delta Y| \le 1$, $(x^2 I_{[|x|\le 1]}) * \mu \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ and its dual predictable projection $(x^2 I_{[|x|\le 1]}) * \nu \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$. On the other hand, $I_{[|x|>1]} * \mu \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ is evident, hence $I_{[|x|>1]} * \nu \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$. In a word, $(x^2 \wedge 1) * \nu \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$. □

(25.1) is called the *integral representation of semimartingale X*. Denote $\beta = \langle X^c \rangle$. The triplet (α, β, ν) is called the *predictable characteristics (or predictable triplet, or local characteristics) of semimartingale X*. Predictable triplet is an important tool to investigate semimartingales, though a semimartingale or its law can not be uniquely determined by its predictable characteristics in general.

11.26 Corollary. *A semimartingale X is a special semimartingale if and only if*

$$(|x| I_{[|x|>1]}) * \mu = \Sigma(|\Delta X| I_{[|\Delta X|>1]}) \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}.$$

In this case, the canonical decomposition of X is

$$X = (X_0 + X^c + x*(\mu-\nu)) + (\alpha + (xI_{[|x|>1]})*\nu), \tag{26.1}$$

where μ is the jump measure of X, ν is the dual predictable projection of μ.

Proof. By the integral representation (25.1) we know that X is a special semimartingale if and only if $\alpha+(xI_{[|x|>1]})*\mu \in \mathcal{A}_{loc}$, or, equivalently, $(xI_{[|x|>1]})*\mu \in \mathcal{A}_{loc}$, because $\alpha \in \mathcal{A}_{loc}$. But $(xI_{[|x|>1]})*\nu$ is the dual predictable projection of $(xI_{[|x|>1]})*\mu$. (26.1) follows directly from (25.1). □

11.27 Corollary. *Let X be a semimartingale having integral representation (25.1), and f be a bounded C^2-function on $\boldsymbol{R}_+$. Then the canonical decomposition of special semimartingale $f(X)$ is*

$$f(X) = M + A, \tag{27.1}$$

$$M = f(X_0) + f'(X_-).X^c + [f(X_-+x) - f(X_-)]*(\mu-\nu), \tag{27.2}$$

$$A = f'(X_-).\alpha + \frac{1}{2}f''(X_-).\beta + [f(X_-+x) - f(X_-) - xf'(X_-)I_{[|x|\le 1]}]*\nu. \tag{27.3}$$

In particular, the special semimartingale $Y = e^{iuX}$ $(u \in \boldsymbol{R})$ has the following canonical decomposition:

$$Y = Y_0 + (Y_-).N + (Y_-).H, \tag{27.4}$$

$$N = iuX^c + (e^{iux}-1)*(\mu-\nu), \tag{27.5}$$

$$H = iu\alpha - \frac{u^2}{2}\beta + (e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x|\le 1]})*\nu. \tag{27.6}$$

Proof. By making use of Itô formula, the integral representation (25.1) and Theorem 11.23 we have

$$\begin{aligned}
f(X) &= f(X_0) + f'(X_-).(X - X_0) + \frac{1}{2}f''(X_-).\langle X^c\rangle \\
&\quad + \sum(f(X) - f(X_-) - f'(X_-)\Delta X) \\
&= f(X_0) + f'(X_-).\alpha + f'(X_-).X^c + (xf'(X_-)I_{[|x|\le 1]})*(\mu-\nu) \\
&\quad + (xf'(X_-)I_{[|x|>1]})*\mu + \frac{1}{2}f''(X_-).\beta \\
&\quad + (f(X_-+x) - f(X_-) - xf'(X_-))*\mu \\
&= f(X_0) + f'(X_-).X^c + (xf'(X_-)I_{[|x|\le 1]})*(\mu-\nu) + f'(X_-).\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2}f''(X_-).\beta + (f(X_-+x) - f(X_-) \\
&- xf'(X_-)I_{[|x|\le 1]})*\mu.
\end{aligned}$$

Since f is bounded and $f(X_-)$, $f'(X_-)$ is locally bounded, $(f(X_-+x) - f(X_-) - xf'(X_-)I_{[|x|\le 1]})*\mu$ is a purely discontinuous process with finite variation and locally bounded jumps, and consequently, belongs to $\mathcal{A}_{loc}$ and has dual predictable projection $(f(X_-+x)-f(X_-)-xf'(X_-)I_{[|x|\le 1]})*\nu$. Now it is straightforward to obtain the canonical decompositions (27.1), (27.2) and (27.3).

Applying (27.1), (27.2) and (27.3) to the case of $f(x) = e^{iux}$ gives (27.4), (27.5) and (27.6). □

11.28 Corollary. *Let X be a semimartingale with predictable characteristics (α, β, ν). Then X is stochastically continuous if and only if for every $t > 0$*

$$\nu(\{t\}\times E) = 0 \quad \text{a.s.}.$$

In this case, α is also stochastically continuous.

Proof. For every $t > 0$ we have

$$\nu(\{t\}\times E) = 0, \text{ a.s.} \iff \boldsymbol{E}[\nu(\{t\}\times E)] = 0 \iff \boldsymbol{P}(\Delta X_t \ne 0) = 0,$$

because

$$\nu(\{t\}\times E) = \boldsymbol{P}[\Delta X_t \ne 0|\mathcal{F}_{t-}].$$

The stochastic continuity of X means just that $\boldsymbol{P}(\Delta X_t \ne 0) = 0$ for all $t > 0$.

If X is stochastically continuous, so is α by (25.4). □

11.29 Lemma. *Let X be an adapted cadlag process. If for some real $u \ne 0$, e^{iuX} is a semimartingale, then X itself is a semimartingale.*

Proof. Let g be a C^2-function on the complex plane such that

$$g(e^{iy}) = y, \quad \text{if } |y| \le \frac{\pi}{4}.$$

Put $T_0 = 0$, and

$$T_n = \inf\{t > T_{n-1} : |X_t - X_{T_{n-1}}| > \frac{\pi}{4|u|}\}, \quad n \ge 1.$$

Then $T_n \uparrow \infty$, and for each $n \ge 1$

$$g(e^{iu(X_t - X_{T_{n-1}})}) = u(X_t - X_{T_{n-1}}), \quad T_{n-1} \le t < T_n.$$

Now it is not difficult to verify directly that for each $n \ge 1$

$$X^{T_n} - X^{T_{n-1}} = \frac{1}{u}g(Y_n) + [X_{T_n} - X_{T_{n-1}} - \frac{1}{u}g(e^{iu(X_{T_n} - X_{T_{n-1}})})]I_{[T_n,\infty[},$$

where $Y_n = e^{iu(X^{T_n} - X^{T_{n-1}})}$ is a semimartingale. Hence for each $n \geq 1$, $X^{T_n} - X^{T_{n-1}}$ is a semimartingale. Then $X \in \mathcal{S}_{loc} = \mathcal{S}$. □

11.30 Theorem. *Suppose X is an adapted cadlag process. Let α be a predictable process with finite variation and $\alpha_0 = 0$, β be an adapted continuous increasinjg process with $\beta_0 = 0$, and ν be a predictable random measure such that*

i) *for each $t > 0$, $(x^2 \wedge 1) * \nu_t < \infty$.*

ii) $0 \leq a \leq 1$. $\quad a = (\nu(\{t\} \times E))$,

iii) $\nu(\{0\} \times E) = \nu(\boldsymbol{R}_+ \times \{0\}) = 0$,

iv) $\Delta\alpha = \left(\int_{[|x| \leq 1]} x\nu(\{t\}, dx)\right)$.

Denote $k_u(x) = e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x| \leq 1]}$ and $H(u) = iu\alpha - \frac{u^2}{2}\beta + k_u(x) * \nu$. Then the following statements are equivalent:

1) *X is a semimartingale with predictable characteristics (α, β, ν),*

2) *For any bounded function $f \in C^2(\boldsymbol{R})$, $f(X) - f(X_0) - f'(X_-).\alpha - \frac{1}{2}f''(X_-).\beta - [f(X_- + x) - f(X_-) - xf'(X_-)I_{[|x| \leq 1]}] * \nu \in \mathcal{M}_{loc,0}$,*

3) *For any real u, $e^{iuX} - e^{iuX_0} - e^{iuX_-}.H(u) \in \mathcal{M}_{loc,0}$.*

Proof. 1)⇒2)⇒3) have already shown in Corollary 11.27. It remains to show 3)⇒1).

First of all, e^{iuX} is a semimartingale. Then by Lemma 11.29 X itself is a semimartingale. Let $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\nu})$ be the predictable characteristics of X. Put

$$\tilde{H}(u) = iu\tilde{\alpha} - \frac{1}{2}u^2\tilde{\beta} + k_u(x) * \tilde{\nu}.$$

Then $e^{iuX} - e^{iuX_0} - e^{iuX_-}.\tilde{H}(u) \in \mathcal{M}_{loc,0}$, $e^{iuX_-}.(H(u) - \tilde{H}(u)) \in \mathcal{M}_{loc,0}$ and $H(u) - \tilde{H}(u) \in \mathcal{M}_{loc,0}$. But $H(u) - \tilde{H}(u)$ is a predictable process with finite variation. Therefore, for each u, $H(u)$ and $\tilde{H}(u)$ are indistinguishable. Because $H(u)$ and $\tilde{H}(u)$ are continuous in u, we have

$$\boldsymbol{P}(\{\omega : \forall(t, u) \quad H_t(u) = \tilde{H}_t(u)\}) = 1. \tag{30.1}$$

By direct computation we know

$$H_t(u) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} H_t(u + rv)dr = \frac{v^2}{6}\beta_t + \int_{[0,t] \times E} e^{iux}\left(1 - \frac{\sin vx}{vx}\right)\nu(ds, dx)$$

and it is the characteristic function of the following measure

$$\frac{v^2}{6}\beta_t\delta_0(dx) + \int_0^t \left(1 - \frac{\sin vx}{vx}\right)\nu(ds, dx).$$

Noting that $\nu(\boldsymbol{R}_+ \times \{0\}) = 0$, by (30.1) we know that β and $\tilde{\beta}$, ν and $\tilde{\nu}$ are indistinguishable respectively. Finally, so are α and $\tilde{\alpha}$. □

11.31 Theorem. *Let X be a semimartingale with predictable characteristics (α, β, ν). Then the following statements are equivalent:*

1) *There exists a sequence (T_n) of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ and*

$$\boldsymbol{E}\Big[\sup_{t \leq T_n} |X_t - X_0|^2\Big] < \infty \tag{31.1}$$

(in this case, semimartingale X is said to be locally square integrable).

2) *For every $t > 0$*

$$x^2 * \nu_t < \infty. \tag{31.2}$$

3) *$X = X_0 + M + A$, where M is a locally square integrable martingale with $M_0 = 0$, and A is a predictable process with finite variation and $A_0 = 0$.*

If it is the case, we have

$$\langle M \rangle = \beta + x^2 * \nu - \sum(\Delta A)^2. \tag{31.3}$$

Proof. 2)⇒3). Since for each $t > 0$, $I_{[|x|>1]} * \nu_t < \infty$, by (31.2) we have $|x|I_{[|x|>1]} * \nu_t < \infty$ for each $t > 0$. By Corollary 11.26 X is a special semimartingale. Let $X = X_0 + M + A$ be its canonical decomposition, where $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$ and $A \in \mathcal{A}_{loc,0}$ is predictable. From the proof of Theorem 11.24 we know $\Delta A_t = \left(\int_E x\nu(\{t\}, dx)\right)$. Then $\sum_{s \leq t}(\Delta A_s)^2 \leq x^2 * \nu_t$, $t > 0$. By Theorem 11.21 $x * (\mu - \nu) \in \mathcal{M}^2_{loc,0}$ and $M = X^c + x * (\mu - \nu) \in \mathcal{M}^2_{loc,0}$. At the same time,

$$\langle M \rangle = \langle X^c \rangle + \langle x * (\mu - \nu) \rangle = \beta + x^2 * \nu - \sum(\Delta A)^2.$$

3)⇒1). Since $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $A = A_- + \Delta A$, A_- is locally bounded, $\Sigma(\Delta A)^2$ is a predictable increasing process and $\Sigma(\Delta A)^2 \in \mathcal{A}^+_{loc}$, there exists a sequence (T_n) of stopping times such that $M^{T_n} \in \mathcal{M}^2$, $A^{T_n -}$ is bounded, and $\boldsymbol{E}\Big[\sum_{s \leq T_n}(\Delta A_s)^2\Big] < \infty$. Then (31.1) holds.

1)⇒2). Let $S_n = \inf\{t > 0 : \sum_{s \leq t}(\Delta X_s)^2 \geq n\} \wedge T_n$. Then $S_n \uparrow \infty$, and for each n

$$\boldsymbol{E}\Big[\sum_{s \leq S_n}(\Delta X_s)^2\Big] \leq n + 4\boldsymbol{E}\Big[\sup_{t \leq T_n}|X_t - X_0|^2\Big] < \infty,$$

i.e., $x^2 * \mu_t = \sum_{s \leq t}(\Delta X_s)^2$ is a locally integrable increasing process. But its dual predictable projection is $x^2 * \nu_t$. Hence (31.2) holds. □

11.32 Corollary. *Let M be a locally square integrable marginale with predictable characteristics (α, β, ν) and $M_0 = 0$. Then*

$$\langle M \rangle = \beta + x^2 * \nu.$$

11.33 Theorem. *Let f be a non-random cadlag function on $\boldsymbol{R}_+$. Then f is a semimartingale if and only if f is a function with finite variation, i.e., f has finite variation on every finite interval.*

Proof. The sufficiency is trivial. Only the necessity is required to be proved. Assume that f is a semimartingale. Let $f = f_0 + M + A$ be its canonical decomposition, and (T_n) be a localizing sequence such that $M^{T_n} \in \mathcal{M}_0$ and $A^{T_n} \in \mathcal{A}_0$. Denote by $F_n(t)$ the distribution function of T_n. Then we have

$$f_0 + \boldsymbol{E}[A_{t\wedge T_n}] = \boldsymbol{E}[f_{t\wedge T_n}] = \int_{[0,\infty]} f_{t\wedge s} F_n(ds) = f_t F_n(]t,\infty]) + \int_{[0,t]} f_s F_n(ds)$$

and

$$f_t F_n(]t,\infty]) = f_0 + \boldsymbol{E}[A_{t\wedge T_n}] - \int_{[0,t]} f_s F_n(ds)$$

is a function with finite variation. For every $t_0 > 0$,

$$F_n(]t_0,\infty]) = \boldsymbol{P}(T_n > t_0) \to 1, \quad \text{as } n \to \infty.$$

We may take n large enough such that $F_n(]t_0,\infty]) > 0$. Then f has finite variation on $[0,t_0]$, because $F_n(]t,\infty]) \geq F_n(]t_0,\infty]) > 0$. Thereofre f is a function with finite variation. □

§3. Lévy Processes

Henceforth we always consider *Lévy processes* (i.e., stochastically continuous processes with independent increments) as cadlag processes, owing to Theorem 2.68. Recall that for a Lévy process $X = (X_t)$

$$\varphi_t(u) = \boldsymbol{E}[e^{iu(X_t - X_0)}], \quad u \in \boldsymbol{R},$$

is continuous and never vanishes.

$$Z_t(u) = \frac{e^{iu(X_t - X_0)}}{\varphi_t(u)}, \; t \geq 0,$$

is a martingale.

11.34 Theorem. *Let X be a Lévy process. If X is a semimartingale, then for all $u \in \boldsymbol{R}$ $\varphi_t(u)$ is a function with finite variation. Conversely, if for some $u \neq 0, \varphi_t(u)$ is a function with finite variation, then X is a semimartingale.*

Proof. Without loss of generality, we may assume $X_0 = 0$. If $X \in \mathcal{S}$, then for all $u \in \boldsymbol{R}, e^{iuX} \in \mathcal{S}$. Since $Z_t(u) \neq 0$ and $Z_{t-}(u) \neq 0$, $\varphi_t(u) = \dfrac{e^{iuX_t}}{Z_t(u)} \in \mathcal{S}$ (refer to Problem 9.16). By Theorem 11.33 $\varphi(u)$ is a function with finite variation.

Conversely, if for some $u \neq 0$, $\varphi_t(u)$ is a function with finite variation, then $e^{iuX_t} = Z_t(u)\varphi_t(u) \in \mathcal{S}$. By Lemma 11.29 we have $X \in \mathcal{S}$. □

11.35 Corollary. *Let X be a Lévy process. There exists a continuous (non-random) function f such that $X - f$ is a semimartingale.*

Proof. Take $f_t = \arg(\boldsymbol{E}[e^{i(X_t - X_0)}])$ to be a continuous function with $f_0 = 0$. Since $\varphi_t(u) \neq 0$, this is possible. $X - f$ remains to be a Lévy process. But

$$\boldsymbol{E}[e^{i(X_t - f_t - X_0)}] = |\boldsymbol{E}[e^{i(X_t - X_0)}]|$$

is a monotone decreasing function. Hence, $X - f \in \mathcal{S}$. □

11.36 Theorem. *Let X be a stochastically continuous semimartingale. Then X is a Lévy process if and only if its predictable triplet (α, β, ν) is non-random. In this case, we have*

i) *α is a continuous function with finite variation and $\alpha_0 = 0$,*

ii) *β is a continuous monotone increasing function with $\beta_0 = 0$,*

iii) *ν is a σ-finite measure on $(\boldsymbol{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E))$ and for all $t \geq 0$*

$$\nu(\{t\} \times E) = \nu(\boldsymbol{R}_+ \times \{0\}) = 0, \qquad (x^2 \wedge 1) * \nu_t < \infty.$$

In particular, X is quasi-left-continuous.

Proof. Necessity. We suppose $X_0 = 0$ for simplicity. Applying the formula of integration by parts to $Y = e^{iuX}$ yields

$$\begin{aligned} Y_t = Z_t\varphi_t &= 1 + \int_0^t \varphi_s dZ_s + \int_0^t Z_{s-} d\varphi_s \\ &= 1 + \int_0^t \varphi_s dZ_s + \int_0^t Y_{s-} \frac{1}{\varphi_s} d\varphi_s. \end{aligned} \tag{36.1}$$

Comparing (36.1) with (27.4) and noting $|Y_-| = 1$, we have

$$H_t(u) = \int_0^t \frac{1}{\varphi_s(u)} d\varphi_s(u), \; t \geq 0, \tag{36.2}$$

i.e., for each u, $H(u)$ is indistinguishable from a non-random continuous function. But $H(u)$ is also continuous in u, so for almost all ω (36.2) holds for all $t \in \boldsymbol{R}_+$ and $u \in \boldsymbol{R}$. We have already seen in the proof of Theorem 11.30 that (α, β, ν), the predictable triplet of X, is completely determined by $\{H(u), u \in \boldsymbol{R}\}$. Hence (α, β, ν) is non-random. Conditions i), ii) and iii) follow from Theorem 11.30 and Corollary 11.28 immediately.

Sufficiency. It suffices to show for all $u \in \boldsymbol{R}$ and $0 \le s \le t$,

$$\boldsymbol{E}[e^{iu(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s] = \boldsymbol{E}[e^{iu(X_t - X_s)}],$$

i.e., for any $A \in \mathcal{F}_s$ with $\boldsymbol{P}(A) > 0$,

$$\boldsymbol{E}[I_A e^{iu(X_t - X_s)}] = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{E}[e^{iu(X_t - X_s)}]. \qquad (36.3)$$

Taking s to be a new origin and applying Corollary 11.27 to $\tilde{Y}_t = e^{iu(X_t - X_s)}$, $t \ge s$, we have

$$\tilde{Y}_t = 1 + \int_s^t \tilde{Y}_{r-} dN_r + \int_s^t \tilde{Y}_{r-} dH_r, \quad t \ge s.$$

Since

$$\sup_{s \le r \le t} \Big| \int_s^t \tilde{Y}_{r-} dN_r \Big| = \sup_{s \le r \le t} \Big| \tilde{Y}_t - 1 - \int_s^t \tilde{Y}_{r-} dH_r \Big| \le 2 + \int_s^t |dH_r|$$

and $\int_s^t |dH_r|$ is non-random, $\Big(\int_s^t \tilde{Y}_{r-} dN_r\Big)_{t \ge s}$ is a martingale (Theorem 7.12). Then

$$\boldsymbol{E}[I_A \int_s^t \tilde{Y}_{r-} dN_r] = 0,$$

$$\boldsymbol{E}[I_A \tilde{Y}_t] = \boldsymbol{E}[I_A] + \boldsymbol{E}[I_A \int_s^t \tilde{Y}_{r-} dH_r] = \boldsymbol{E}[I_A] + \int_s^t \boldsymbol{E}[I_A \tilde{Y}_{r-}] dH_r.$$

Putting $f_t = \dfrac{\boldsymbol{E}[I_A \tilde{Y}_t]}{\boldsymbol{P}(A)}$, we have

$$f_t = 1 + \int_s^t f_{r-} dH_r,$$

and by the exponential formula $f_t = e^{H_t - H_s}$ does not depend on A. Thus

$$\frac{\boldsymbol{E}[I_A \tilde{Y}_t]}{\boldsymbol{P}(A)} = \frac{\boldsymbol{E}[I_\Omega \tilde{Y}_t]}{\boldsymbol{P}(\Omega)} = \boldsymbol{E}[\tilde{Y}_t].$$

This is just (36.2). □

11.37 Corollary. *Let X be a Lévy process with $X_0 = 0$. If X is a semimartingale, then its law is uniquely determined by its predictable triplet (α, β, ν).*

Proof. We have shown above that

$$\varphi_t(u) = \exp\{iu\alpha_t - \frac{1}{2}u^2\beta_t + \int_{[0,t]\times E} (e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x|\le 1]})\nu(ds, dx)\}. \quad (37.1)$$

Thus for all $0 \le s < t$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}[e^{iu(X_t - X_s)}] &= \varphi_{s,t}(u) = \frac{\varphi_t(u)}{\varphi_s(u)} \\ &= \exp\Big\{iu(\alpha_t - \alpha_s) - \frac{1}{2}u^2(\beta_t - \beta_s) \\ &\quad + \int_{]s,t]\times E} (e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x|\le 1]})\nu(dr, dx)\Big\}. \end{aligned}$$

The law of a process with independent increments is determined by its initial law (i.e., the law of X_0) and the distributions of all its increments. In our case, $X_0 = 0$. By (37.1) the law of X is uniquely determined by (α, β, ν). □

11.38 Theorem. *Let X be a process with $X_0 = 0$. Then X is a normal Lévy process if and only if the following conditions are satisfied:*

i) There is a continuous (non-random) function f such that $Y = X - f$ is a continuous local martingale,

ii) $\langle Y \rangle$ is non-random.

Proof. Sufficiency. Evidently, we may choose $f_0 = Y_0 = 0$. The predictable triplet of Y is $(0, \langle Y \rangle, 0)$. It is non-random. By Theorem 11.36 Y is a Lévy process. By (37.1)

$$\boldsymbol{E}[e^{iu(Y_t - Y_s)}] = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2}(\beta_t - \beta_s)\Big\}, \quad 0 \le s < t, \qquad (38.1)$$

where $\beta = \langle Y \rangle$. Hence Y is a normal Lévy process. Obviously, so is $X = Y + f$.

Necessity. Since X is a normal process,

$$\varphi_t(u) = \boldsymbol{E}[e^{iuX_t}] = \exp\{iuf_t - \frac{u^2}{2}\beta_t\}, \quad t \ge 0,$$

where $f_t = \boldsymbol{E}[X_t]$, $\beta_t = \boldsymbol{D}[X_t]$. By the stochastic continuity of X, f and β are continuous functions. By the independence of increments β is monotone increasing. Evidently, $Y = X - f$ is still a Lévy process, and (38.1) remains true. Since $\boldsymbol{E}[Y_t] \equiv 0$, Y is a martingale (Theorem 2.69). From (38.1) we see that the predictable triplet of Y is $(0, \beta, 0)$. Hence Y is a continuous martingale and $\langle Y \rangle = \beta$ is non-random. □

11.39 Corollary. *A process $X = (X_t)$ with $X_0 = 0$ is a standard Wiener process if and only if the following conditions are satisfied:*

i) (X_t) is a continuous local martingale,

ii) $(X_t^2 - t)$ is a local martingale.

Proof. It suffices to notice that Condition ii) is equivalent to $\langle X \rangle_t = t$

and (38.1) is reduced to

$$E[e^{iu(X_t-X_s)}] = \exp\{-\frac{u^2}{2}(t-s)\}, \quad 0 \le s \le t. \quad \square$$

Corollary 11.39 is well known as the martingale characterization for Wiener process. It is also called *Lévy's theorem*. As its first application, we will show an important relation between Wiener process and continuous local martingales below.

11.40 Lemma. *Let M be a continuous local martingale. Then for almost all ω, $M_\cdot(\omega)$ and $\langle M\rangle_\cdot(\omega)$ have the same constancy intervals, i.e., for any $a < b$ if $M(\omega)$ is constant on $[a,b]$, so is $\langle M\rangle_\cdot(\omega)$ and vice versa.*

Proof. For every rational $r \ge 0$ put

$$T_r = \inf\{t \ge r : \langle M\rangle_t \ne \langle M\rangle_r\}, \quad S_r = \inf\{t \ge r : M_t \ne M_r\}.$$

Since $\langle I_{]r,T_r]} \cdot M\rangle = I_{]r,T_r]} \cdot \langle M\rangle = 0$, $I_{]r,T_r]} \cdot M = 0$. Similarly, we have $I_{]r,S_r]} \cdot \langle M\rangle = \langle I_{]r,S_r]} \cdot M\rangle = 0$. Then it is not difficult to see that for almost all ω for each r, $T_r(\omega) = S_r(\omega)$, $M_\cdot(\omega)$ and $\langle M\rangle_\cdot(\omega)$ are constant on $[r, T_r(\omega)]$, consequently, $M_\cdot(\omega)$ and $\langle M\rangle_\cdot(\omega)$ have the same constancy intervals. $\square$

11.41 Theorem. *Let M be a continuous local martingale with $M_0 = 0$ and $\langle M\rangle_\infty = \infty$. Put*

$$\tau_t = \inf\{s : \langle M\rangle_s > t\}, \quad N_t = M_{\tau_t}, \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}, \quad t \ge 0.$$

Then (N_t) is a standard Wiener process w.r.t. $(\mathcal{G}_t)$ and (M_t) is indistinguishable from $(N_{\langle M\rangle_t})$.

Proof. In fact, (τ_t) is the change of time associated with $\langle M\rangle$ (Theorem 5.48). Since $\langle M\rangle_\infty = \infty$, each τ_t is finite. Besides, we have $\tau_\infty = \infty$ and $\mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_\infty$. Since $\langle M\rangle$ is continuous, we have (Lemma 1.37) $\langle M\rangle_{\tau_t} = t, t \ge 0$. By Theorem 7.32 for each t, $(M_s^{\tau_t})_{s\ge 0} \in \mathcal{M}^2$ and $(M^2_{s\wedge\tau_t} - \langle M\rangle_{s\wedge\tau_t})_{s\ge 0} \in \mathcal{M}$. By Doob's stopping theorem, for all $0 \le s < t$

$$E[N_t|\mathcal{G}_s] = E[M_{\tau_t}|\mathcal{F}_{\tau_s}] = M_{\tau_s} = N_s \quad \text{a.s.},$$

$$E[N_t^2 - t|\mathcal{G}_s] = E[M^2_{\tau_t} - \langle M\rangle_{\tau_t}|\mathcal{F}_{\tau_s}] = M^2_{\tau_s} - \langle M\rangle_{\tau_s} = N_s^2 - s, \text{ a.s.},$$

i.e., (N_t) and $(N_t^2 - t)$ are $(\mathcal{G}_t)$-martingales. Evidently, (N_t) is right-continuous and $(N_{t-}) = (M_{\tau_{t-}})$. Since $\langle M\rangle_{\tau_{t-}} = t = \langle M\rangle_{\tau_t}$, by Lemma 11.40 (N_{t-}) is indistinguishable from $(M_{\tau_t}) = (N_t)$. Hence (N_t) is continuous. Then by Corollary 11.39 (N_t) is a standard Wiener process w.r.t. $(\mathcal{G}_t)$. Since $\langle M\rangle_{\tau(M)_t} = \langle M\rangle_t$, again by Lemma 11.40 (M_t) is indistinguishable from $(M_{\tau_{\langle M\rangle_t}}) = (N_{\langle M\rangle_t})$. $\square$

11.42 Theorem. *Let X be an adapted point process, i.e.,*

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[T_n,\infty[},$$

where (T_n) is an increasing sequence of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ and for each $n \ge 0$, $T_n < \infty \Rightarrow T_n < T_{n+1} (T_0 = 0)$. Then the following two statements are equivalent:

1) X is a Lévy process and for all $0 \le s < t$, $X_t - X_s$ has a Poisson law (Such a process is called an inhomogeneous Poisson process unless it is a homogeneous Poisson process),

2) There is a continuous increasing function Λ_t such that $X - \Lambda$ is a local martingale, null at 0.

Proof. 1)⇒2). Denote $\Lambda_t = E[X_t]$. Since for all $s < t$, $X_t - X_s \ge 0$,

$$\Lambda_t = E[X_t] = E[X_s] + E[X_t - X_s] \ge E[X_s] = \Lambda_s.$$

Hence Λ is monotone increasing. By the stochastic continuity of X,

$$e^{-(\Lambda_t-\Lambda_s)} = P(X_t - X_s = 0) \to 1 \quad \text{as } t - s \to 0,$$

i.e., Λ is continuous. By Theorem 2.69 $X - \Lambda \in \mathcal{M}_{\text{loc},0}$.

2)⇒1). The jump measure of X is

$$\mu([0,t] \times B) = \Lambda_t \delta_1(B), \quad B \in \mathcal{B}(E).$$

It is easy to see that the predictable triplet of X is $(\Lambda, 0, \nu)$ and it is non-random. Thus X is a Lévy process by Corollary 11.28 and Theorem 11.36. Furthermore, by (37.1)

$$\begin{aligned}\varphi_t(u) &= \exp\{iu\Lambda_t + \int_{[0,t]\times E} (e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x|\le 1]}) d\Lambda_s \delta_1(dx)\} \\ &= \exp\{\Lambda_t(e^{iu} - 1)\}.\end{aligned}$$

Hence for all $s < t$, $X_t - X_s$ has a Poisson law with parameter $\Lambda_t - \Lambda_s$. $\square$

Theorem 11.42 is well known as the martingale characterization for Poisson process. It is also called *Watanabe's theorem*. Similar to Theorem 11.41, a point process differs from a Poisson process by a change of time. Even the proof is similar. It is left to readers as an exercise (Problem 11.11).

Now we come back to the general discussion on Lévy processes.

11.43 Theorem. *Let $X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}$ be both Lévy processes and semimartingales, null at 0. If $[X^{(j)}, X^{(k)}] = 0$, $j \ne k$, $j, k = 1, \cdots, n$, then $X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}$ are independent.*

Proof. First we deal with the case of $n = 2$. By the assumption $\Delta X^{(1)} \Delta X^{(2)} = 0$ and $\langle (X^{(1)})^c, (X^{(2)})^c \rangle = 0$. Let $Z^{(k)} = \dfrac{e^{iu_k X^{(k)}}}{\varphi^{(k)}(u_k)}$, $k = 1, 2$. It is easy to see $\Delta Z^{(1)} \Delta Z^{(2)} = 0$ and

$$\langle (Z^{(1)})^c, (Z^{(2)})^c \rangle = \Big(\frac{iu_1 e^{iu_1 X^{(1)}_-}}{\varphi^{(1)}(u_1)} \Big) \Big(\frac{iu_2 e^{iu_2 X^{(2)}_-}}{\varphi^{(2)}(u_2)} \Big) . \langle (X^{(1)})^c, (X^{(2)})^c \rangle = 0.$$

Thus $[Z^{(1)}, Z^{(2)}] = 1$, $Z^{(1)} Z^{(2)}$ is a martingale. Hence we obtain

$$[e^{i(u_1 X_t^{(1)} + u_2 X_t^{(2)})}] = E[e^{iu_1 X_t^{(1)}}] E[e^{iu_2 X_t^{(2)}}]. \tag{43.1}$$

For any $n, m \geq 1$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m$, $u_j \in \boldsymbol{R}$, $j = 1, \cdots, n$, $v_k \in \boldsymbol{R}$, $k = 1, \cdots, m$, applying (43.1) to $\sum_{j=1}^{n} u_j (X^{(1)}_{t \wedge t_j} - X^{(1)}_{t \wedge t_{j-1}})$ and $\sum_{k=1}^{m} v_k (X^{(2)}_{t \wedge s_k} - X^{(2)}_{t \wedge s_{k-1}})$ and letting $t \to \infty$, we obtain

$$E\Big[\exp\Big\{i \sum_{j=1}^{n} u_j (X^{(1)}_{t_j} - X^{(1)}_{t_{j-1}}) - i \sum_{k=1}^{m} v_k (X^{(2)}_{s_k} - X^{(2)}_{s_{k-1}})\Big\}\Big]$$

$$= E\Big[\exp\Big\{i \sum_{j=1}^{n} u_j (X^{(1)}_{t_j} - X^{(1)}_{t_{j-1}})\Big\}\Big] E\Big[\exp\Big\{i \sum_{k=1}^{m} v_k (X^{(2)}_{s_k} - X^{(2)}_{s_{k-1}})\Big\}\Big],$$

i.e., $X^{(1)}$ and $X^{(2)}$ are independent.

Making use of the above argument, by induction, we arrive at the conclusion for general n. □

Remark. The converse of Theorem 11.43 is also true. We leave it to readers as an exercise.

11.44 Lemma. *Let (ξ_n) be a sequence of r.v. converging in probability to a r.v. ξ. If for each n, ξ_n has a Poisson law with parameter λ_n, then $\lambda_n \to \lambda$ (λ may be 0 or $+\infty$), and ξ has a Poisson law with parameter λ (when $\lambda = 0$ or $+\infty$, this means ξ is a.s. identical with 0 or $+\infty$ respectively).*

Proof. By the assumption for $u \in \boldsymbol{R}$

$$E[e^{iu\xi_n}] = \exp\{\lambda_n (e^{iu} - 1)\}.$$

If there is a subsequence $\lambda_{n_k} \to \lambda$ and λ is finite, then ξ has a Poisson law with parameter λ. If there is a subsequence $\lambda_{n_k} \to +\infty$, for any positive integer l

$$P(\xi < l) \leq \lim_k P(\xi_{n_k} < l) = \lim_k \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\lambda^j_{n_k}}{j!} e^{-\lambda_{n_k}} = 0,$$

i.e., $P(\xi = +\infty) = 1$. In a word, it must be $\lambda_n \to \lambda$. At the same time, ξ has a Poisson law with parameter λ. □

11.45 Theorem. *Let X be a Lévy process. Then*

$$X_t = X_0 + \tilde{X}_t + \int_{[0,t] \times [|x|>1]} x d\mu + \int_{[0,t] \times [|x| \leq 1]} x d(\mu - \nu), \tag{45.1}$$

where 1) $\tilde{X}$ is a continuous normal process with independent increments and $\tilde{X}_0 = 0$;

2) μ is the jump measure of X having the following properties:

i) for any $\widehat{B} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E)$, $\mu(\widehat{B})$ has a Poisson law,

ii) for any $n \geq 1$ and disjoint sets $\widehat{B}_1, \cdots, \widehat{B}_n \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E)$, $\mu(\widehat{B}_1)$, $\cdots, \mu(\widehat{B}_n)$ are independent, moreover, if $\widehat{B}_j \subset]s, \infty[\times E$, $j = 1, \cdots, n$, for some $s \geq 0$, then $(\mu(\widehat{B}_1), \cdots, \mu(\widehat{B}_n))$ is independent of $\mathcal{F}_s$;

3) $\nu = E[\mu]$, the dual predictable projection of μ, is a σ-finite measure on $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E)$ and for each $t \geq 0$, $\nu(\boldsymbol{R}_+ \times \{0\}) = \nu(\{t\} \times E) = 0$, $(x^2 \wedge 1) * \nu_t < \infty$;

4) X_0, $\tilde{X}$ and μ are independent.

In addition, we have

$$\varphi_t(u) = \exp\Big\{iu f_t - \frac{1}{2} u^2 \beta_t + (e^{iux} - 1 - iux I_{[|x| \leq 1]}) * \nu_t\Big\}, \tag{45.2}$$

where $f_t = E[\tilde{X}_t]$ and $\beta_t = D[\tilde{X}_t]$ are continuous, β_t is monotone increasing, $f_0 = \beta_0 = 0$.

Proof. By Corollary 11.35 there is a continuous function g such that $X - X_0 - g \in \mathcal{S}_0$. Lévy process $X - X_0 - g$ is independent of X_0 and has the same jump measure as X. Hence we may suppose $X \in \mathcal{S}_0$. By Theorem 11.36 the predictable triplet of X (α, β, ν) is non-random.

$$X_t = \alpha_t + X^c_t + \int_{[0,t] \times [|x|>1]} x d\mu + \int_{[0,t] \times [|x| \leq 1]} x d(\mu - \nu).$$

Putting $\tilde{X} = \alpha + X^c$, we obtain (45.1).

$\tilde{X}$ is a continuous semimartingale and its predictable triplet $(\alpha, \beta, 0)$ is non-random. By Theorem 11.36 $\tilde{X}$ is a Lévy process, and by Theorem 11.38 $\tilde{X}$ is a normal process. 1) is established.

For any $\widehat{B} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E)$

$$E[\mu(\widehat{B})] = M_\mu(I_{\widehat{B}}) = M_\nu(I_{\widehat{B}}) = \nu(\widehat{B}).$$

Then 3) follows from Theorem 11.36.

Let $\widehat{B} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E)$ and $\nu(\widehat{B}) < \infty$. Put

$$Y = I_{\widehat{B}} * \mu, \quad \Lambda = I_{\widehat{B}} * \nu.$$

Then Y is a point process and Λ is a continuous monotone increasing function such that $Y - \Lambda$ is a local martingale. By Theorem 11.42 Y is a Poisson process. For each $t \geq 0$, Y_t has a Poisson law with parameter

A_t. By Lemma 11.44 $\mu(\widehat{B}) = \lim_{t\to\infty} Y_t$ has a Poisson law. If $\nu(\widehat{B}) = \infty$, by σ-finiteness of ν and Lemma 11.44 $\mu(\widehat{B})$ still has a Poisson law.

Let $\widehat{B}_1, \cdots, \widehat{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \times \mathcal{B}(E)$ be disjoint. We want to show that $\mu(\widehat{B}_1), \cdots, \mu(\widehat{B}_n)$ and $\tilde{X}$ are independent. Obviously, we may suppose $\nu(\widehat{B}_1) < \infty, \cdots, \nu(\widehat{B}_n) < \infty$. Put $Y^{(j)} = I_{\widehat{B}_j} * \mu$, $j = 1, \cdots, n$. We have known that $Y^{(j)}, j = 1, \cdots, n$, are Poisson processes. Besides, $\Delta Y^{(j)} \Delta Y^{(k)} = 0$ when $j \neq k$. Hence we have

$$[Y^{(j)}, Y^{(k)}] = 0, \quad j \neq k, \quad [Y^{(j)}, \tilde{X}] = 0, \quad j, k = 1, \cdots, n.$$

By Theorem 11.43 $Y^{(1)}, \cdots, Y^{(n)}$ and $\tilde{X}$ are independent. Since $\mu(\widehat{B}_j) = \lim_{t\to\infty} Y_t^{(j)}, j = 1, \cdots, n$, we arrive at the required assertion. Furthermore, if $\widehat{B}_j \subset]s, \infty[\times E, j = 1, \cdots, n$, for some $s \geq 0$, then $\mu(\widehat{B}_j) = \lim_{t\to\infty}(Y_t^{(j)} - Y_s^{(j)}), j = 1, \cdots, n$. Thus $(\mu(\widehat{B}_1), \cdots, \mu(\widehat{B}_n))$ is independent of $\mathcal{F}_s$. Now 2) and 4) are established.

Finally, (45.2) follows from (45.1) and (37.1). □

(45.1) is the famous *Lévy-Itô decomposition* of Lévy processes. We also call (f, β, ν) in (45.2) the *characteristics of Lévy process X*. And the law of Lévy process X is uniquely determined by its initial law and its characteristics. The next two theorems illustrate the applications of Lévy-Itô decomposition.

11.46 Theorem. *Let X be a Lévy process and $X_0 = 0$.*

1) *If X is a semimartingale and $\mathbf{E}[|X_t|] < \infty$, $t > 0$, then X is a special semimartingale.*

2) *If X is a special semimartingale, then $\mathbf{E}[|X_t|] < \infty, t > 0$.*

3) *If X is a local martingale, then X is a martingale.*

Proof. 1) Since $(X_t - \mathbf{E}[X_t])$ is a martingale, $\mathbf{E}[X_t]$ is a semimartingale. Hence $\mathbf{E}[X_t]$ is a function with finite variation, and $X_t = (X_t - \mathbf{E}[X_t]) + \mathbf{E}[X_t]$ is a special semimartingale.

2) By Corollary 11.26 $(xI_{[|x|>1]}) * \mu \in \mathcal{A}_{loc}$. Thus $(xI_{[|x|>1]}) * \nu \in \mathcal{A}_{loc}$. Hence, $Y = (xI_{[|x|>1]}) * (\mu - \nu) \in \mathcal{W}_{loc}$ and $Y^s = (Y_{s\wedge t})_{t\geq 0} \in \mathcal{W}$ for all $s > 0$. By Theorem 11.21.3)

$$\langle (xI_{[|x|\leq 1]}) * (\mu - \nu) \rangle = (x^2 I_{[|x|\leq 1]}) * \nu.$$

Hence, $Z = (xI_{[|x|\leq 1]}) * (\mu - \nu) \in \mathcal{M}^2_{loc}$ and $Z^s \in \mathcal{M}^2$ for all $s > 0$. Similarly, since $(X^c) = \beta. (X^c_{s\wedge t})_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2$ for all $s > 0$. But we have

$$X_t = X_t^c + Y_t + Z_t + \alpha_t + (xI_{[|x|>1]}) * \nu_t. \tag{46.1}$$

so for all $s > 0$, $\mathbf{E}[|X_s|] < \infty$.

3) In this case we have $\alpha + (xI_{[|x|>1]}) * \nu = 0$ in (46.1) by the uniqueness of the canonical decomposition. Then for all $s > 0$, $X^s \in \mathcal{M}$, i.e., X is a martingale. □

11.47 Theorem. *Let X be a Lévy process and ΔX be bounded. Then for all $p > 0$ and $0 \leq s < t$*

$$\mathbf{E}[|X_t - X_s|^p] < \infty.$$

Proof. Without loss of generality, we may suppose $X_0 = 0$ and $|\Delta X| \leq 1$. It suffices to show $\mathbf{E}[|X_t|^p] < \infty$ for all $t > 0$. We have

$$\varphi_t(u) = \exp\{iu\alpha_t - \frac{1}{2}u^2\beta_t + \int_{[0,t]\times[|x|\leq 1]} (e^{iux} - 1 - iux) d\nu)\}.$$

For any positive integer m

$$\mathbf{E}[|X_t|^{2m}] < \infty \iff \varphi_t^{(2m)}(0) \text{ exists and is finite}$$

$$\iff \frac{d^{2m}}{du^{2m}}\left([I_{[|x|\leq 1]}(e^{iux} - 1 - iux)] * \nu_t\right) \text{ exists and is finite}$$

$$\iff \int_{[0,t]\times[|x|\leq 1]} x^{2m} d\nu < \infty.$$

But

$$\int_{[0,t]\times[|x|\leq 1]} x^{2m} d\nu \leq \int_{[0,t]\times[|x|\leq 1]} x^2 d\nu < \infty.$$

Thus $\mathbf{E}[|X_t|^{2m}] < \infty$. □

§4. Step Processes

11.48 Definition A process X is called a *step process*[1)] if all its trajectories are cadlag step function having at most a finite number of jumps in every finite interval, i.e., X can be expressed as:

$$X = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n I_{[T_n, \infty[}, \tag{48.1}$$

where 1) $T_n \uparrow \infty$; 2) for each $n \geq 0$, $T_n < \infty \Rightarrow T_n < T_{n+1}$ ($T_0 = 0$ by convention); 3) for each $n \geq 1$, $\xi_n \neq 0 \iff T_n < \infty$. In fact, for $n \geq 1$, T_n is the n-th jump time of X:

$$T_n = \inf\{t > T_{n-1} : X_t \neq X_{T_{n-1}}\}, \quad n \geq 1,$$

and $\xi_n = \Delta X_{T_n} I_{[T_n < \infty]}$ is the n-th jump size of X.

1) Usually, a step process is also called a jump process. But in this book the term "jump process" is reserved for the jump process of a cadlag process.

It is easy to see that step process X is adapted if and only if each T_n is a stopping time and $\xi_n \in \mathcal{F}_{T_n}$.

Recall that the natural filtration $\boldsymbol{F}^0(X) = (\mathcal{F}_t^0(X))$ is defined as

$$\mathcal{F}_t^0(X) = \sigma\{X_s, s \le t\} = \sigma\{X_{s\wedge t}, \ s \ge 0\}, \ t > 0.$$

For each $n \ge 0$ we have

$$\mathcal{F}_t^0(X) \cap [T_n \le t < T_{n+1}] = \sigma\{X_{s\wedge T_n}, s \ge 0\} \cap [T_n \le t < T_{n+1}],$$

because on $[T_n \le t < T_{n+1}]$, $X_{s\wedge t} = X_{s\wedge T_n}$ for all $s \ge 0$. Obviously,

$$\sigma\{X_{s\wedge T_n}, s \ge 0\} = \sigma\{X_0, T_1, \cdots, T_n, \xi_1, \cdots, \xi_n\}, \quad n \ge 1.$$

Denote $\mathcal{G}_n = \sigma\{X_0, T_1, \cdots, T_n, \xi_1, \cdots, \xi_n\}, n \ge 1$, and $\mathcal{G}_0 = \sigma\{X_0\}$. Then

$$\mathcal{F}_t^0(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\mathcal{G}_n \cap [T_n \le t < T_{n+1}]\right), \quad t \ge 0.$$

Clearly, we have

$$\mathcal{G}_n \cap [T_{n+1} = \infty] = \mathcal{G}_\infty \cap [T_{n+1} = \infty], \quad n \ge 0.$$

Hence, $\boldsymbol{F}^0(X)$ is a filtration of discrete type discussed in Chapter V §5. We will utilize all results there. For example, by Theorem 5.56 we know that for all $\boldsymbol{F}^0(X)$-stopping time T

$$\mathcal{F}_T^0(X) = \sigma\{X_{s\wedge T}, \quad s \ge 0\}.$$

In the remainders of this paragraph, the step process X is given and the reference filtration $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is taken to be the complete natural filtration $\boldsymbol{F}^P(X)$ of X. $\boldsymbol{F}^0(X) = (\mathcal{F}_t^0(X))$ is simply denoted by $\boldsymbol{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)$. The jump measure of X is denoted by μ:

$$\mu(dt, dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{(T_n, \xi_n)}(dt, dx) I_{[T_n < \infty]}.$$

Obviously,

$$X = X_0 + x * \mu.$$

11.49 Theorem. *For each $n \ge 0$ let $G_n(dt, dx)$ be the conditional distribution of (T_{n+1}, ξ_{n+1}) w.r.t. $\mathcal{F}_{T_n}$:*

$$G_n(dt, dx) = \boldsymbol{P}[T_{n+1} \in dt, \ \xi_{n+1} \in dx | \mathcal{F}_{T_n}],$$

and

$$H_n(dt) = G_n(dt, E) = \boldsymbol{P}[T_{n+1} \in dt | \mathcal{F}_{T_n}].$$

Then

$$\nu(dt, dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(dt, dx)}{H_n([t, \infty])} I_{[T_n < t \le T_{n+1}]} \tag{49.1}$$

is the dual predictable projection of μ.

Proof. First of all, we point out that (49.1) is meaningful. In fact, let $S_{n+1} = \inf\{t : H_n([t, \infty]) = 0\}$. Then $S_{n+1} \in \mathcal{F}_{T_n}$, $H_n(]S_{n+1}, \infty]) = 0$, $H_n([t, \infty]) > 0$ for $t < S_{n+1}$, and

$$P(T_{n+1} > S_{n+1}) = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{P}[T_{n+1} > S_{n+1} | \mathcal{F}_{T_n}]] = \boldsymbol{E}[H_n(]S_{n+1}, \infty])] = 0.$$

Thus $T_{n+1} \le S_{n+1}$ a.s.. When $t \le T_{n+1}$, a.s. either $t < S_{n+1}$, $H_n([t, \infty]) > 0$, or $t = S_{n+1}$. In the latter case, if $H_n([S_{n+1}, \infty]) = 0$, i.e., $H_n(\{S_{n+1}\}) = 0$, then $G_n(\{S_{n+1}\}, dx) = 0$. Therefore ν is well defined. By Theorem 5.55 2) ν is a predictably random measure.

In order to show $\nu = \tilde{\mu}$ it suffices to prove that for any $B \in \mathcal{B}(E)$, $I_B * \nu$ is the dual predictable projection of $I_B * \mu$, owing to the monotone class argument. Obviously $I_B * \mu \in \mathcal{A}_{loc}^+$, since $I_B * \mu_{T_n} = \mu([0, T_n] \times B) \le n$. Hence, it suffices to prove for any stopping time T and $n \ge 0$

$$\boldsymbol{E}[\mu([0, T \wedge T_{n+1}] \times B)] = \boldsymbol{E}[\nu([0, T \wedge T_{n+1}] \times B)].$$

But we have

$$\mu([0, T \wedge T_{n+1}] \times B) = \sum_{k=0}^{n} I_{[T_k \le T]} \mu(]T_k, T_{k+1} \wedge T] \times B)$$

and the same expression for ν. Now it suffices to prove

$$\boldsymbol{E}[I_{[T_n \le T]} \mu(]T_n, T_{n+1} \wedge T] \times B)] = \boldsymbol{E}[I_{[T_n \le T]} \nu(]T_n, T_{n+1} \wedge T] \times B)], \ n \ge 0. \tag{49.2}$$

By Theorem 5.54 there is $R_n \in \mathcal{F}_{T_n}$ such that $T \wedge T_{n+1} = R_n \wedge T_{n+1}$. Then

$$\nu(]T_n, T_{n+1}] \times B) = \int_{T_n}^{T_{n+1}\wedge T} \frac{G_n(dt, B)}{H_n([t, \infty])} = \int_{T_n}^{T_{n+1}\wedge R_n} \frac{G_n(dt, B)}{H_n([t, \infty])},$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\{T_{[T_n \le T]} \nu(]T_n, T_{n+1} \wedge T] \times B)\} \\
&= \boldsymbol{E}\left\{I_{[T_n \le T]} \boldsymbol{E}\left[\int_{T_n}^{T_{n+1}\wedge R_n} \frac{G_n(ds, B)}{H_n([s, \infty])} \middle| \mathcal{F}_{T_n}\right]\right\} \\
&= \boldsymbol{E}\left\{I_{[T_n \le T]} \int_{T_n}^{\infty} H_n(dt) \int_{T_n}^{t\wedge R_n} \frac{G_n(ds, B)}{H_n([s, \infty])}\right\} \\
&= \boldsymbol{E}\left\{I_{[T_n \le T]} \int_{T_n}^{\infty} H_n(dt) \int_{T_n}^{\infty} I_{[s \le R_n]} I_{[s \le t]} \frac{G_n(ds, B)}{H_n([s, \infty])}\right\} \\
&= \boldsymbol{E}\left\{I_{[T_n \le T]} \int_{T_n}^{\infty} I_{[s \le R_n]} \frac{G_n(ds, B)}{H_n([s, \infty])} H_n([s, \infty])\right\} \\
&= \boldsymbol{E}\left\{I_{[T_n \le T]} \int_{T_n}^{\infty} I_{[s \le R_n]} G_n(ds, B)\right\}.
\end{aligned}$$

On the other hand,

$$E\{I_{[T_n\le T]}\mu(]T_n,T_{n+1}\wedge T]\times B)\}$$

$$=E\{I_{[T_n\le T]}\mu(]T_n,T_{n+1}\wedge R_n]\times B)\}$$

$$=E\{I_{[T_n\le T]}I_{[R_n\ge T_{n+1},\xi_{n+1}\in B]}\}$$

$$=E\{I_{[T_n\le T]}P[R_n\ge T_{n+1},\xi_{n+1}\in B|\mathcal{F}_{T_n}]\}$$

$$=E\{I_{[T_n<T]}\int_{T_n}^{\infty}I_{[R_n\ge s]}G_n(ds,B)\}.$$

Thus (49.2) follows. □

11.50 Remarks. 1) (49.1) can be deduced from Theorem 5.69. Due to its importance, we give a detailed proof here.

2) In (49.1) one may take $G_n(dt,dx)$ as the conditional distribution of (T_{n+1},ξ_{n+1}) w.r.t. $\mathcal{F}^0_{T_n}$, i.e., we may consider the dual predictable projection ν as an $\boldsymbol{F}^0$-predictable random measure.

3) For any $B\in\mathcal{B}(E), G_n(dt,B)\ll H_n(dt)$, then

$$G_n(\omega,dt,B)=Q_n(\omega,t,B)H_n(\omega,dt),$$

where the Radon-Nikodym derivative $Q_n(\omega,t,B)$ of $G_n(\omega,dt,B)$ w.r.t. $H_n(\omega,dt)$ can be taken such that for fixed $(\omega,t), Q_n(\omega,t,\cdot)$ is a probability measure on $\mathcal{B}(E)$, and for fixed $B\in\mathcal{B}(E), Q_n(\cdot,\cdot,B)$ is $\mathcal{F}_{T_n}\times\mathcal{B}(R_+)$-measurable, i.e., $Q_n(\omega,t,dx)$ is a transition probability measure from $(\Omega\times R_+,\mathcal{F}_{T_n}\times\mathcal{B}(R_+))$ to $(E,\mathcal{B}(E))$. In fact, on $\{T_{n+1}<\infty\}$ we have

$$Q_n(T_{n+1},dx)=P[\xi_{n+1}\in dx|\mathcal{F}_{T_{n+1}-}]\quad\text{a.s..}\tag{50.1}$$

To see this, take $B\in\mathcal{B}(E),\ D\in\mathcal{B}(R_+)$ and $C\in\mathcal{F}_{T_n}$,

$$P([T_{n+1}\in D,\xi_{n+1}\in B]\cap C)=\int_C G_n(D\times B)dP$$

$$=\int_C\Big(\int_D Q_n(t,B)H_n(dt)\Big)dP$$

$$=\int_C E[Q_n(T_{n+1},B)I_{[T_{n+1}\in D]}|\mathcal{F}_{T_n}]dP$$

$$=\int_{[T_{n+1}\in D]\cap C}Q_n(T_{n+1},B)dP.$$

By Corollary 5.57 $\mathcal{F}_{T_{n+1}-}=\mathcal{F}_{T_n}\vee\sigma\{T_{n+1}\}$, thus (50.1) follows.

Put

$$Q(t,dx)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(t,dx)I_{[T_n<t\le T_{n+1}]},$$

$$\Lambda(dt)=\nu(dt,E)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(dt)}{H_n([t,\infty])}I_{[T_n<t\le T_{n+1}]}$$

Then

$$\nu(dt,dx)=Q(t,dx)\Lambda(dt),\tag{50.2}$$

where $\Lambda_t=\Lambda([0,t])=\nu([0,t]\times E)$ is the dual predictable projection of counting process $\mu([0,t]\times E)=\sum_{n=1}^{\infty}I_{[T_n\le t]}$. $Q(\omega,t,dx)$ is a transition probability measure from $(\Omega\times R_+,\mathcal{P})$ to $(E,\mathcal{B}(E))$. The expression (50.2) has clear probabilistic meaning and is constantly used.

4) If $\Lambda(dt)\ll dt$ (Lebesgue measure), there is a non-negative predictable process (λ_t) such that

$$\Lambda(dt)=\lambda_t dt.$$

(λ_t) is called the *intensity* of the counting process $\sum_{n=1}^{\infty}I_{[T_n,\infty[}$. In this case,

$$\nu(dt,dx)=\lambda_t Q(t,dx)dt.$$

$\lambda(t,dx)=\lambda_t Q(t,dx)$ is also called the *intensity* of the step process X.

11.51 Example. Let X be a regular temporally homogeneous Markov chain with state space Z and $Q=(q_{ij})$ be its density martix:

$$0\le q_i=-q_{ii}=\sum_{j\ne i}q_{ij}<\infty.$$

Let (r_{ij}) be the transition matrix of its jump chain:

$$r_{ij}=\begin{cases}(1-\delta_{ij})\dfrac{q_{ij}}{q_i}, & \text{if } q_i>0,\\ \delta_{ij}, & \text{if } q_i=0.\end{cases}$$

On $[T_n<\infty]$ we have for $j\ne 0$

$$G_n(dt,\{j\})=q_{X_{T_n}}e^{-q_{X_{T_n}}(t-T_n)}I_{]T_n,\infty[}r_{X_{T_n},X_{T_n}+j}dt,$$

and for $t>T_n$

$$H_n([t,\infty])=e^{-q_{X_{T_n}}(t-T_n)}.$$

By (49.1) for $j\ne 0$,

$$\nu(dt,\{j\})=\sum_{n=0}^{\infty}q_{X_{T_n}}r_{X_{T_n},X_{T_n}+j}I_{]T_n,T_{n+1}]}(dt)$$

$$=q_{X_{t-}}r_{X_{t-},X_{t-}+j}dt.\tag{51.1}$$

Let $u(j)$ be a function defined on Z such that for all i

$$\sum_{j\ne i}q_{ij}|u(j)|<\infty.$$

Denote

$$(Qu)(i)=\sum_j q_{ij}u(j).$$

By direct computation we have

$$u(X_t)-u(X_0)=\int_{[0,t]\times E}[u(X_{s-}+x)-u(X_{s-})]\mu(ds,dx),$$

because on $[T_{n+1}<\infty]$

$$u(X_{T_{n+1}})-u(X_{T_n})=\int_{]T_n,T_{n+1}]\times E}[u(X_{s-}+x)-u(X_{s-})]\mu(ds,dx).$$

On the other hand, by (51.1)

$$\int_{[0,t]\times E}[u(X_{s-}+x)-u(X_{s-})]\nu(ds,dx)$$

$$=\int_0^t\sum_{j\neq 0}[u(X_{s-}+j)-u(X_{s-})]q_{X_{s-},X_{s-}+j}ds$$

$$=\int_0^t\Big[\sum_{j\neq X_{s-}}q_{X_{s-},j}u(j)+q_{X_{s-},X_{s-}}u(X_{s-})\Big]ds$$

$$=\int_0^t(Qu)(X_{s-})ds=\int_0^t(Qu)(X_s)ds.$$

Hence we get the following well-known result: the process

$$u(X_t)-u(X_0)-\int_0^t(Qu)(X_s)ds=\int_{[0,t]\times E}[u(X_{s-}+x)-u(X_{s-})]d(\mu-\nu)$$

is a local martingale.

11.52 Definition. Let H be a probability measure on $[0,\infty]$. Define

$$t_H=\inf\{t:H([t,\infty])=0\},$$

$$\Phi(H)=\begin{cases}[0,t_H], & \text{if } t_H<\infty \text{ and } H(\{t_H\})>0,\\ [0,t_H[, & \text{otherwise},\end{cases}$$

$$F_H(t)=\int_0^t\frac{H(ds)}{H([s,\infty])},\quad t\geq 0.$$

Evidently, $F_H(t)$ is monotone increasing on $\boldsymbol{R}_+$, $F_H(0)=0$. If $t<t_H$, then

$$F_H(t)=\int_0^t\frac{H(ds)}{H([s,\infty])}\leq\frac{H([0,t])}{H([t,\infty])}<\infty,$$

$$\Delta F_H(t)=\frac{H(\{t\})}{H([t,\infty])}<1,$$

because $H(]t,\infty])>0$. By Doléans-Dade exponential formula

$$H(]t,\infty])=e^{-F_H^c(t)}\prod_{s\leq t}(1-\Delta F_H(s)),\quad t\in[0,t_H[.$$

Hence

$$H([0,t])=\begin{cases}1-e^{-F_H^c(t)}\prod_{s\leq t}(1-\Delta F_H(s)), & t<t_H,\\ 1, & t\geq t_H,\end{cases}\tag{52.1}$$

where $F_H^c(t)$ is the continuous part of $F_H(t)$.

If $H(\{t_H\})>0$,

$$F_H(t_H)\leq\frac{H([0,t_H])}{H(\{t_H\})}<\infty.$$

If $t_H<\infty$ at the same time, then

$$\Delta F_H(t_H)=\frac{H(\{t_H\})}{H([t_H,\infty])}=1,$$

$$F_H(t)=F_H(t_H),\quad t\geq t_H.$$

If $H(\{t_H\})=0$, by (52.1)

$$0=H(\{t_H\})=e^{-F_H^c(t_H-)}\prod_{s<t_H}(1-\Delta F_H(s)).$$

Then either $F_H^c(t_H-)=\infty$ or $\prod_{s<t_H}(1-\Delta F_H(s))=0$, i.e., $\sum_{s<t_H}\Delta F_H(s)=\infty$. In a word, $F_H(t_H-)=\infty$, and $F_H(t)=\infty$ for $t\geq t_H$.

11.53 Lemma. *Let H and H' be two probability measures on $[0,\infty]$. If $F_H(t)=F_{H'}(t)$ for $t\in\Phi(H)\cap\Phi(H')$, then $H=H'$.*

Proof. If $t_H<t_{H'}$, then $F_H(t)=F_{H'}(t)$ for $t<t_H$. In this case, $F_H(t_H-)=F_{H'}(t_H-)<\infty$, $H(\{t_H\})>0$ and $t_H\in\Phi(H)$. Hence $F_H(t)=F_{H'}(t)$ for $t\leq t_H$. Since $t_H<\infty$, $\Delta F_{H'}(t_H)=\Delta F_H(t_H)=1$ and $H'(]t_H,\infty])=0$. This contradicts $t_{H'}>t_H$. Thus $t_H<t_{H'}$ is not true. By symmetry it must be $t_H=t_{H'}$. Then by (52.1) $H=H'$. □

11.54 Theorem. *Let P' be another probability on $\mathcal{F}_\infty^0$ such that*

i) $P'|_{\mathcal{F}_0^0}=P|_{\mathcal{F}_0^0}$,

ii) *under P', ν (taken as $\boldsymbol{F}^0$-predictable) remains to be the dual predictable projection of μ. Then*

$$P'|_{\mathcal{F}_\infty^0}=P|_{\mathcal{F}_\infty^0}.$$

Proof. By induction it only needs to show if $P'|_{\mathcal{F}_{T_n}^0}=P|_{\mathcal{F}_{T_n}^0}$, then $P'|_{\mathcal{F}_{T_{n+1}}^0}=P|_{\mathcal{F}_{T_{n+1}}^0}$. Since $\mathcal{F}_{T_{n+1}}^0=\mathcal{F}_{T_n}^0\vee\sigma\{T_{n+1},\xi_{n+1}\}$, it suffices to show under both P and P' we have a.s.

$$G_n(dt,dx)=P[T_{n+1}\in dt,\xi_{n+1}\in dx|\mathcal{F}_{T_n}^0]$$

$$=P'[T_{n+1}\in dt,\xi_{n+1}\in dx|\mathcal{F}_{T_n}^0]=G'_n(dt,dx).\tag{54.1}$$

Since $\mathcal{F}^0_{T_{n+1}} \cap [T_n = \infty] = \mathcal{F}^0_{T_n} \cap [T_n = \infty]$, it remains to show that (54.1) holds on $\Omega_n = [T_n < \infty]$. First we will show on Ω_n

$$H_n(]T_n, t]) = G_n(]T_n, t] \times E) = G'_n(]T_n, t] \times E) = H'_n(]T_n, t]).$$

We adopt the following abbreviated notations:

$$H(]0,t]) = H_n(]T_n, T_n + t]), \quad H'(]0,t]) = H'_n(]T_n, T_n + t]),$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{H(ds)}{H([s,\infty])}, \quad F'(t) = \int_0^t \frac{H'(ds)}{H'([s,\infty])},$$

$$T = \inf\{t : H([t,\infty]) = 0\}, \quad T' = \inf\{t : H'([t,\infty]) = 0\},$$

$$\Phi = \Phi(H), \quad \Phi' = \Phi(H').$$

By Theorem 5.55.2) there is a process $B \in \mathcal{F}^0_{T_n} \times \mathcal{B}(R_+)$ such that $1 * \nu = B$ on $]T_n, T_{n+1}]$. Denote $C(t) = B_{T_n+t} - B_{T_n}, t \geq 0$. Then

$$P(\Omega_n \cap [F(t) = C(t), t \leq T_{n+1} - T_n]) = P(\Omega_n).$$

Noting that $F(t)$ and $C(t)$ are $\mathcal{F}^0_{T_n}$-measurable, for any fixed $t > 0$ we have

$$0 = P([F(t) \neq C(t), t \leq T_{n+1} - T_n]\Omega_n) = E[I_{[F(t)\neq C(t)]}H([t,\infty])I_{\Omega_n}].$$

But $H([t,\infty]) > 0$ for $t \in \Phi$, so

$$P([F(t) \neq C(t)] \cap [t \in \Phi] \cap \Omega_n) = 0. \tag{54.2}$$

Since T is also $\mathcal{F}^0_{T_n}$-measurable, by the same argument we have

$$P([F(T) \neq C(T)] \cap [T \in \Phi] \cap \Omega_n) = 0. \tag{54.3}$$

Denote $A = [F(t) = C(t), \forall t \in \Phi] \cap \Omega_n$. Then $A \in \mathcal{F}^0_{T_n}$ and

$$A^c\Omega_n \subset \Big\{\big(\bigcup_{r \in Q_+} [F(r) \neq C(r), r \in \Phi]\big) \cup [F(T) \neq C(T), T \in \Phi]\Big\}\Omega_n.$$

By (54.2) and (54.3) we have $P(A) = P(\Omega_n)$ and $P'(A) = P(A) = P(\Omega_n) = P'(\Omega_n)$.

Denote $A' = [F'(t) = C(t), \forall t \in \Phi'] \cap \Omega_n$. By the same argument we have $P(A) = P'(A') = P'(\Omega_n) = P(\Omega_n)$, and $P(AA') = P'(AA') = P'(\Omega_n) = P(\Omega_n)$. On AA' $F(t) = F'(t)$ for all $t \in \Phi \cap \Phi'$. By Lemma 11.53 $H = H'$, i.e., $H_n = H'_n$.

For any $B \in \mathcal{B}(E)$ the result established above can be applied to $G_n(]T_n, t] \times B)$ and $G'_n(]T_n, t] \times B)$. Since $\mathcal{B}(E)$ is countably generated, it is not difficult to see that (54.1) holds on Ω_n under both P and P'. □

Obviously, a step process X is a semimartingale, and its predictable triplet is $((xI_{[|x|\leq 1]}) * \nu, 0, \nu)$. Theorem 11.54 means that the law of a step process is uniquely determined by its initial law and Lévy system.

11.55 Definition. Let $N = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[T_n,\infty[}$ be a point process, i.e., $(T_n)_{n\geq 1}$ is an increasing sequence of r.v. such that $T_n \uparrow \infty$ and for each $n \geq 0$, $T_n < \infty \Rightarrow T_n < T_{n+1}$ $(T_0 = 0)$. Let $(\xi_n)_{n\geq 1}$ be another sequence of r.v.. $(T_n, \xi_n)_{n\geq 1}$ is called a *marked point process* (or *multivariate point process*). In fact, a marked point process is not a process in ordinary sense. Only when for each $n \geq 1$, $T_n = \infty \Longleftrightarrow \xi_n = 0$, $(T_n, \xi_n)_{n\geq 1}$ and the step process $X = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n I_{[T_n,\infty[}$ can be determined by each other.

For a marked point process $(T_n, \xi)_{n\geq 1}$ we still define

$$\mathcal{F}^0_t = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{G}_n \cap [T_n \leq t < T_{n+1}]), \quad t \geq 0,$$

$$\mathcal{G}_n = \sigma\{T_1, \cdots, T_n, \xi_1, \cdots, \xi_n\}, \ n \geq 1, \quad (\mathcal{G}_0 \text{ is arbitrary}),$$

and call $F^0 = (\mathcal{F}^0_t)$ its *natural filtration*. Similarly by (48.1) we define its jump measure μ. It is not hard to see that the two main theorems 11.49 and 11.54 remain true for a marked point process, even the initial σ-field $\mathcal{G}_0$ may be arbitrary and need not be trivial.

Problems and Complements

11.1 Let μ and ν be two optional (resp. predictable) and optionally (resp. predictably) σ-integrable random measures.

1) The following statements are equivalent:

i) $P(\{\omega : \mu(\omega, \cdot) \ll \nu(\omega, \cdot)\}) = 1$,

ii) $M_\mu \ll M_\nu$ on $\bar{\mathcal{F}}$,

iii) $M_\mu \ll M_\nu$ on $\tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$),

iv) $\mu = W.\nu$, where $W \in \tilde{\mathcal{O}}^+$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}^+$).

2) The following statements are equivalent:

i) $P(\{\omega : \mu(\omega, \cdot) \perp \nu(\omega, \cdot)\}) = 1$,

ii) $M_\mu \perp M_\nu$ on $\tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$),

iii) $M_\mu \perp M_\nu$ on $\tilde{\mathcal{F}}$.

11.2 Let μ be an integer-valued random measure and ν be its compensator. If μ is quasi-left-continuous, i.e., the support of μ is totally inaccessible, then $W \mapsto W * (\mu - \nu)$ is an isometric mapping from $L^2(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{P}}, M_\nu)$ to $\mathcal{M}^{2,d}$.

11.3 Let X be a semimartingale with predictable triplet (α, β, ν). Then $X \in \mathcal{M}_{loc}$ (resp. $\mathcal{M}^2_{loc}$) if and only if $(|x|I_{[|x|>1]}) * \nu \in \mathcal{A}^+_{loc}$ (resp. $x^2 * \nu \in \mathcal{A}^+_{loc}$) and $\alpha = -(xI_{[|x|>1]}) * \nu$.

11.4 Let X be a semimartingale with predictable triplet (α, β, ν). Then 1) $X \in \mathcal{V} \iff (|x| \wedge 1) * \nu \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$ and $\beta = 0$; 2) $X \in \mathcal{V}^+ \iff (|x| \wedge 1) * \nu \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}, \beta = 0, \nu(\boldsymbol{R}_+ \times]-\infty, 0]) = 0$ and $\alpha^c \geq (xI_{[|x|\leq 1]}I_{[a=0]}) * \nu$, where α^c is the continuous part of α; 3) $X \in \mathcal{A}_{\text{loc}} \iff |x| * \nu \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$ and $\beta = 0$.

11.5 Let X be a semimartingale. Then

1) $D = \{t : P(\Delta X_t \neq 0) > 0\}$ is at most a countable set.

2) $X = X' + X''$, where X' is a stochastically continuous semimartingale, and $X''_t = \sum_{0<s\leq t, s\in D} \Delta X_s$ (the series is absolutely convergent in probability).

11.6 Let X be a Lévy process, μ be its jump measure and ν be its Lévy system. Let $f(t, x)$ be a Borel function on $\boldsymbol{R}_+ \times E$. If $\forall t > 0$ $I_{[f\neq 0]} * \nu_t < \infty$ or $\forall t > 0$ $|f| * \nu_t < \infty$, then $Y = f * \mu$ is also a Lévy process, and

$$E[e^{iuY_t}] = \exp\Big\{ \int_{[0,t]\times E} (e^{iuf(s,x)} - 1)\nu(ds, dx)\Big\}.$$

11.7 Let X be a Lévy process with characteristics (f, β, ν).

1) $X \in \mathcal{V}^+$ if and only if $\beta = 0$, $\nu(\boldsymbol{R}_+ \times]-\infty, 0]) = 0$ and $\forall t > 0$ $(xI_{[0<x\leq 1]}) * \nu_t < \infty$, $\bar{f}_t = f_t - (xI_{[0<x\leq 1]}) * \nu_t$ is monotone increasing. In this case,

$$\varphi_t(u) = \exp\{i\tilde{f}_t u + \int_{[0,t]\times]x>0]} (e^{iux} - 1)d\nu\}.$$

2) $X \in \mathcal{V}$ if and only if $\beta = 0, \forall t > 0$ $(|x|I_{[|x|\leq 1]}) * \nu_t < \infty$ and $\tilde{f}_t = f_t - (xI_{[|x|\leq 1]}) * \nu_t$ is a function with finite variation. In this case,

$$\varphi_t(u) = \exp\{i\tilde{f}_t u + \int_{[0,t]\times E} (e^{iux} - 1)d\nu\}.$$

Moreover, $Y_t = \int_{[0,t]} |dX_s|, t \geq 0$, is also a Lévy process, and

$$E[e^{iu(Y_t - Y_0)}] = \exp\Big\{iu \int_0^t |d\tilde{f}_s| + \int_{[0,t]\times E} (e^{iu|x|} - 1)d\nu\Big\}.$$

11.8 Let X be a Lévy process and ν be its Lévy system. Then X is a step process if and only if $\forall t$ $\nu([0, t] \times E) < \infty$ and

$$\varphi_t(u) = \exp\Big\{ \int_{[0,t]\times E} (e^{iux} - 1)d\nu\Big\}.$$

11.9 Suppose X is a continuous Lévy process and $X_0 = 0$. Then X is a normal process.

11.10 Let X be a Lévy process and $X_0 = 0$. Then X is a Poisson process if and only if X is a point process.

11.11 Let X be a point process and A be its compensator with $A_\infty = \infty$. Let (τ_t) be the change of time associated with A. Then (X_{τ_t}) is a Poisson process with parameter 1 w.r.t. $(\mathcal{F}_{\tau_t})$.

11.12 Let μ be an integer-valued random measure. Let m be a σ-finite measure on $(\boldsymbol{R}_+ \times E, \mathcal{B}(E))$ such that $\forall t \geq 0, m(\{t\} \times E) = 0$. If m is the compensator of μ, then

i) $m = E[\mu]$,

ii) for each $\hat{B} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E), \mu(\hat{B})$ has a Poisson law,

iii) for any disjoint $\hat{B}_1, \cdots, \hat{B}_n \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathcal{B}(E)$ and $\hat{B}_i \subset]s, \infty[\times E$, $i = 1, \cdots, n$, for some s, $\mu(\hat{B}_1), \cdots, \mu(\hat{B}_n)$ and $\mathcal{F}_s$ are independent.

11.13 Let $B = (B_t)$ be a standard Brownian motion. Set

$$\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma\{B_1\}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$W_t = B_t - \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1 - s} ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Then $(W_t)_{0\leq t\leq 1}$ is an $(\hat{\mathcal{F}}_t)_{0\leq t\leq 1}$-Brownian motion, and

$$B_t = tB_1 + (1 - t) \int_0^t \frac{dW_s}{1 - s}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(Note that $(B_t - tB_1)_{0\leq t\leq 1}$ is a Brownian bridge.)

11.14 An adapted continuous d-dimensional process $W = (W^1, \cdots, W^d)$ is a d-dimensional standard Wiener process if and only if $\langle W^i, W^j\rangle_t = \delta_{ij}t, t \geq 0$.

11.15 Let $X = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[T_n,\infty[}$ be a point process. Then X is a Poisson process if and only if there is a continuous monotone increasing function Λ_t with $\Lambda_0 = 0$ such that for all $n \geq 0$

$$P[T_{n+1} \in dt|\mathcal{F}_{T_n}]I_{[T_n<\infty]} = e^{-(\Lambda_t - \Lambda_{T_n})}I_{[T_n<t]}d\Lambda_t.$$

11.16 Let $(\xi_n)_{n\geq 1}$ be an i.i.d. sequence of real r.v. with common distribution function F, and $N = (N_t)$ be a homogeneous Poisson process which is independent of $(\xi_n)_{n\geq 1}$. Find the Lévy system for the following processes:

1) $X_t = \xi_1 + \cdots + \xi_{N_t}$ $(X_t = 0$ when $N_t = 0)$, $t \geq 0$.

2) $X_t = \max(0, \xi_1, \cdots, \xi_{N_t})(X_t = 0$ when $N_t = 0)$, $t \geq 0$.

11.17 Let $X = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[T_n,\infty[}$ be a point process. Assume T_1, $T_2 - T_1$, $\cdots$, $T_{n+1} - T_n$, $\cdots$ are i.i.d. real r.v. with common distribution function F $(F(0) = 0)$, i.e., X is a renewal process. Find the Lévy system of X.

11.18 Let X be a step process. Let $f(t, x)$ be a Borel function on $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}$ and continuously differentiable in t. Then

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, X_s)ds + \sum_{0<s\leq t} [f(s, X_s) - f(s, X_{s-})].$$

11.19 Let X be a regular temporally homogeneous Markov chain with state space Z. Let $Q = (q_{ij})$ be the density martrix of X. Assume $f(i,j)$ to be a function on $Z \times Z$ such that for all i, $f(i,i) = 0$ and $\sum_j q_{ij}|f(i,j)| < \infty$. Then $\sum_{0<s\le t} f(X_{s-}, X_s) - \int_0^t \sum_j q_{X_s j} f(X_s, j)ds$ is a local martingale.

11.20 Let X be a step process, and ν be its Lévy system. Then X is a Markov process if and only if ν has the following form:

$$\nu(dt, dx) = Q(t, X_{t-}, X_{t-} + dx)\Lambda(X_{t-}, dt),$$

where 1) $Q(t, x, dy)$ is a transition probability measure from $R_+ \times R$ to R with $Q(t, x, \{x\}) = 0$;

2) $\Lambda(x, dt)$ is a σ-finite transition measure from R to R_+ with $\Lambda(x, \{t\}) \le 1$, and there exist two sequences (f_n) and (g_n) of Borel functions on R such that for each $x \in R$, R_+ can be expressed as a union of disjoint intervals:

$$R_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f_n(x), g_n(x)[,$$

and for all $t \in]f_n(x), g_n(x)[$

$$\Lambda(x,]f_n(x), t]) < \infty, \; \Lambda(x, \{t\}) < 1.$$

Chapter XII

Changes of Measures

In this chapter we will discuss the well-known Girsanov's theorems which describe how to transform semimartingales and stochastic integrals under the change of measures. We will also give some applications of Girsanov's theorems, including the characterization for semimartingales.

§1. Local Absolute Continuity

In the first three paragraphs of this chapter we make the following basic assumptions. On the basic space $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ we are given:

i) a right-continuous filtration $\boldsymbol{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)_{t\ge 0}$ with $\mathcal{F}_\infty^0 = \mathcal{F}^0$,

ii) two probability measures $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{P}'$.

Set

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}').$$

Evidently, we have $\boldsymbol{P} \ll \tilde{\boldsymbol{P}}$ and $\boldsymbol{P}' \ll \tilde{\boldsymbol{P}}$ on $\mathcal{F}^0$. Define

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}^0)^{\tilde{\boldsymbol{P}}}: \quad \mathcal{F}_t = (\mathcal{F}_t^0)^{\tilde{\boldsymbol{P}}} = \mathcal{F}_t^0 \vee \bar{\mathcal{N}}, \; t \ge 0,$$

where $\bar{\mathcal{N}}$ is the σ-field generated by all $\tilde{\boldsymbol{P}}$-null sets of $\mathcal{F}_\infty = (\mathcal{F}^0)^{\tilde{\boldsymbol{P}}}$. Henceforth, we take $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}^0)^{\tilde{\boldsymbol{P}}}$ to be the reference filtration. Since we will deal with the two measures $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{P}'$ at the same time, such a selection is natural and reasonable. Thus stopping times, optional processes, local martingales, semimartingales, $\cdots$, mean always $\boldsymbol{F}$-stopping times, $\boldsymbol{F}$-optional processes, $\boldsymbol{F}$-local martingales, $\boldsymbol{F}$-semimartingales, $\cdots$, respectively, unless otherwise stated. For any stopping time T we denote by $\boldsymbol{P}_T$ and $\boldsymbol{P}'_T$ the restriction of $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{P}'$ on $\mathcal{F}_T$ respectively. $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}'$ and $\tilde{\boldsymbol{E}}$ denote the mathematical expectations under $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'$ and $\tilde{\boldsymbol{P}}$ respectively.

These basic assumptions and notations will be not repeated later. But we emphasize that one should be careful with null sets and evanescent sets. Usually, null sets and evanescent sets mean $\bar{P}$-null sets and $\bar{P}$-evanescent sets respectively, unless clarity dictates otherwise.

12.1 Definition. We say that P' is *locally absolutely continuous w.r.t.* P, and denote it by $P' \overset{\text{loc}}{\ll} P$, if for all $t \geq 0$ $P'\big|_{\mathcal{F}_t^0} \ll P\big|_{\mathcal{F}_t^0}$, or equivalently, $P'_t \ll P_t$.

12.2 Theorem. *Suppose that there is a sequence (T_n) of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ and for each n, $P'_{T_n} \ll P_{T_n}$. Then for every stopping time T with $P'(T < \infty) = 1$ we have $P'_T \ll P_T$. In particular, $P' \overset{\text{loc}}{\ll} P$.*

Proof. Let $A \in \mathcal{F}_T$ and $P(A) = 0$. Since $A[T \leq T_n] \in \mathcal{F}_{T \wedge T_n}$ and $P(A[T \leq T_n]) \leq P(A) = 0$, we have $P'(A[T \leq T_n]) = 0$. Then

$$P'(A) = P'(A[T > T_n]) \leq P'(T > T_n).$$

But $\limsup_{n\to\infty} P'(T > T_n) \leq P'(T = \infty) = 0$. Whence $P'(A) = 0$. □

12.3 Lemma. *Suppose $P' \overset{\text{loc}}{\ll} P$. Let S and T be two stopping times. Then*

1) $P(S < T) = 0 \Rightarrow P'(S < T) = 0$, *in particular,* $P(S < \infty) = 0 \Rightarrow P'(S < \infty) = 0$,

2) $P(S = T < \infty) = 0 \Rightarrow P'(S = T < \infty) = 0$.

Proof. 1) Noting that $\forall t > 0$ $[S < T, S \leq t] \in \mathcal{F}_t$, we have

$$P(S < T) = 0 \Rightarrow \forall t > 0\ P(S < T, S \leq t) = 0$$

$$\Rightarrow \forall t > 0\ P'(S < T, S \leq t) = 0 \Rightarrow P'(S < T) = 0.$$

Proof 2) is similar. □

12.4 Theorem. *Suppose $P' \overset{\text{loc}}{\ll} P$. Then there exists a unique adapted non-negative cadlag process $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ satisfying*

1) $Z_\infty = \lim_{t\to\infty} Z_t$ *exists $\bar{P}$-a.s., and*

$$P(Z_\infty = \infty) = P(\sup_{t\geq 0} Z_t = \infty) = 0, \tag{4.1}$$

$$P'(Z_\infty = 0) = P'(\inf_{t\geq 0} Z_t = 0) = 0, \tag{4.2}$$

2) *for every stopping time T, whenever $P'_T \ll P_T$, we have*

$$Z_T = \frac{dP'_T}{dP_T} \quad P\text{-a.s.}, \tag{4.3}$$

in particular, under P, (Z_t) is a martingale. $Z = (Z_t)$ is called the density process of P' w.r.t. P.

Proof. Let (Y_t) and (Y'_t) be the cadlag modifications of $\left(\bar{E}\left[\frac{dP}{d\bar{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right)$ and $\left(\bar{E}\left[\frac{dP'}{d\bar{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right)$ respectively. Set

$$\tau = \inf\{t : Y_t = 0\} \quad \text{and} \quad \tau' = \inf\{t : Y'_t = 0\}.$$

Recall that for $t < \tau$ (resp. $t < \tau'$) $Y_t > 0$ and $Y_{t-} > 0$ (resp. $Y'_t > 0$ and $Y'_{t-} > 0$), for $t \geq \tau$ (resp. $t \geq \tau'$) $Y_t = 0$ (resp. $Y'_t = 0$) (Theorem 2.62). Thus

$$P(\tau < \infty) = \int_{[\tau<\infty]} Y_\tau d\bar{P} = 0,\ P'(\tau' < \infty) = \int_{[\tau'<\infty]} Y'_{\tau'} d\bar{P} = 0.$$

By Lemma 12.3, $P'(\tau < \infty) = 0$. Therefore $\bar{P}(\tau < \infty) = 0$, i.e., we may consider $\tau = \infty$. Now define

$$Z_t = \frac{Y'_t}{Y_t}, \quad t \geq 0.$$

Apparently, $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ is an adapted non-negative cadlag process. As $t \to \infty$,

$$Z_t \to \frac{Y'_\infty}{Y_\infty} \quad \bar{P}\text{-a.s.}.$$

Since $Y'_\infty = \dfrac{dP'}{d\bar{P}}$, $Y_\infty = \dfrac{dP}{d\bar{P}}$,

$$P'(Y'_\infty = 0) = \int_{[Y'_\infty=0]} Y'_\infty d\bar{P} = 0,\ P(Y_\infty = 0) = \int_{[Y_\infty=0]} Y_\infty d\bar{P} = 0,$$

we have $\bar{P}(Y'_\infty = Y_\infty = 0) = 0$, i.e., $Z_\infty = Y'_\infty/Y_\infty$ makes sense. At the same time we obtain

$$P(Z_\infty = \infty) = P(Y'_\infty > 0, Y_\infty = 0) = 0,$$

$$P'(Z_\infty = 0) = P'(Y'_\infty = 0) = 0.$$

On the other hand, because Z_t is bounded on every finite interval, $\sup_t Z_t = \infty \iff Z_\infty = \infty$. On $[\tau' < \infty]$ we have $\inf_t Z_t = Z_\infty = 0$, and on $[\tau' = \infty]$ we have $\forall t \geq 0$, $Z_t > 0$, $\forall t > 0$, $Z_{t-} > 0$, and therefore, $\inf_t Z_t = 0 \iff Z_\infty = 0$. (4.1) and (4.2) are established.

Let T be a stopping time such that $P'_T \ll P_T$. Then $P_T \sim \tilde{P}_T$ and

$$\frac{dP'_T}{dP_T} = \frac{dP'_T}{d\tilde{P}_T} \Big/ \frac{dP_T}{d\tilde{P}_T} = Y'_T / Y_T = Z_T \quad \tilde{P}\text{.a.s.}.$$

In particular, for all $t \geq 0$

$$Z_t = \frac{dP'_t}{dP_t} \quad \tilde{P}\text{.a.s.}. \tag{4.4}$$

By (4.4) and right-continuity, $Z = (Z_t)$ is uniquely determined. □

Remark. If $P' \ll P$, it is not necessary to introduce $\tilde{P}$. It can be replaced by P simply. The reference filtration $F = (\mathcal{F}_t)$ can be taken to be $(F^0)^P = ((\mathcal{F}_t^0)^P)$, and the density process $Z = (Z_t)$ is just the cadlag modification of $\left(E\left[\frac{dP'}{dP}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right)$.

From the above proof one can see immediately the following

12.5 Corollary. *If $P' \overset{loc}{\ll} P$, then $B = [0] \cup [Z_- > 0]$ is a predictable set of interval type, where Z is the density process. In fact, we have*

$$I_B = I_F I_{[0,R]} + I_{F^c} I_{[0,R[}, \tag{5.1}$$

$$R = \inf\{t : Z_t = 0\}, F = \{\omega : 0 < R(\omega) < \infty,\ Z_{R(\omega)-}(\omega) = 0\} \tag{5.2}$$

or

$$B = \bigcup_n [0, R_n],$$

$$R_n = \inf\left\{t : Z_t \leq \frac{1}{n}\right\}, \quad n \geq 1. \tag{5.3}$$

We will continue to use all notations in Corollary 12.5 in this chapter.

12.6 Theorem. *Suppose $P' \overset{loc}{\ll} P$. Let T be a stopping time. Then*
1) $P'(R < \infty) = 0$.
2) $P'(T = \infty) = 1 \iff P(T \geq R) = 1$.

Proof. 1) follows from the proof of Theorem 12.4, since $R = \tau'$. We continue to use the notations there.

$$0 = P'(T < \infty) = \int_{[T<\infty]} Y'_T d\tilde{P} \iff Y'_T I_{[T<\infty]} = 0 \qquad \tilde{P}\text{-a.s.}$$
$$\iff \tilde{P}(T \geq R) = 1.$$

Obviously, $P'(T = \infty) = 1 \Rightarrow P(T \geq R) = 1$. Conversely, by Lemma 12.3 $P(T \geq R) = 1 \Rightarrow P(T < R) = 0 \iff P'(T < R) = 0 \Rightarrow P'(T \geq R) = 1$. But $P'(R = \infty) = 1$, so $P'(T = \infty) = 1$. □

12.7 Corollary. *Suppose $P' \overset{loc}{\ll} P$. Let X be an optional process. Then X is P'-evanescent if and only if $XI_{[0,R[}$ is P-evanescent.*

Proof. Let T be the debut of $[X \neq 0]$. Then

$$X \text{ is } P'\text{-evanescent} \iff P'(T = \infty) = 1$$
$$\iff P(T \geq R) = 1 \iff XI_{[0,R[} \text{ is } P\text{-evanescent}. \quad □$$

12.8 Lemma. *Suppose $P' \overset{loc}{\ll} P$. Let X be an $(F^0)^P$-adapted process, whose trajectories P-a.s. are cadlag (resp. continuous). Then there exists an F-adapted cadlag (resp. continuous) process $\bar{X}$ such that X is P-indistinguishable from $\bar{X}$.*

Proof. For each $r \in Q_+$ choose $Y_r \in \mathcal{F}_r^0$ so that $P(Y_r = X_r) = 1$. Write $A_t = \{\omega$: there exists a cadlag function f on R_+ such that for all $r \in [0,t] \cap Q_+$ $Y_r(\omega) = f(r)\}$, $t \geq 0$. Then $A_t \in \mathcal{F}_t^0$ (its proof is put to the end). Put

$$S(\omega) = \inf\{t : \omega \notin A_t\}.$$

Since A_t^c is monotone increasing in t, for all $t \geq 0$

$$[S < t] \subset A_t^c \subset [S \leq t],$$
$$[S \leq t] \supset \bigcap_{u>t} A_u^c \in \mathcal{F}_{t+}^0 = \mathcal{F}_t^0.$$

Hence S is an F^0-stopping time. By the assumption $P(S = \infty) = 1$. By Lemma 12.3 $P'(S = \infty) = 1$. Therefore $\tilde{P}(S < \infty) = 0$, $[S < \infty] \in \mathcal{F}_0$.

Set

$$\bar{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{r \downarrow t, r \in Q_+} Y_r(\omega), & \text{if } S(\omega) = \infty, \\ 0, & \text{if } S(\omega) < \infty. \end{cases}$$

Then $\bar{X}$ is F-adapted and cadlag, and P-indistinguishable from X.

If the trajectories of X P-a.s. are continuous, put

$$T(\omega) = \inf\{t : \Delta\bar{X}_t \neq 0\}.$$

Then T is an F-stopping time and $P(T < \infty) = 0$. Similarly, we have $P'(T < \infty) = 0$, $\tilde{P}(T < \infty) = 0$ and $[T < \infty] \in \mathcal{F}_0$. Put

$$X'_t(\omega) = \begin{cases} \bar{X}_t(\omega), & \text{if } T(\omega) = \infty, \\ 0, & \text{if } T(\omega) < \infty. \end{cases}$$

Then X' is F-adapted, continuous, and P-indistinguishable from X.

Finally, we show $A_t \in \mathcal{F}_t^0$. For any positive integer l define by induction

$$T_{l,0}(\omega) = 0, \quad Z_{l,0}(\omega) = \begin{cases} Y_0(\omega), & \text{if } \lim_{r \downarrow 0} Y_r(\omega) = Y_0(\omega), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$T_{l,n+1}(\omega) = \inf\left\{r \in \boldsymbol{Q}_+ : r > T_{l,n}(\omega), |Y_r(\omega) - Z_{l,n}(\omega)| > \frac{1}{2^l}\right\} \wedge t,$$

$$Z_{l,n+1}(\omega) = \begin{cases} \lim_{r \downarrow T_{l,n+1}(\omega)} Y_r(\omega), & \text{if } T_{l,n+1}(\omega) < t \text{ and} \\ & \lim_{r \downarrow T_{l,n+1}} Y_r(\omega) = Y_{T_{l,n+1}(\omega)}(\omega)^{1)}, \\ +\infty, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

We want to show

$$A_t = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} [T_{l,n} = t]. \tag{8.1}$$

Evidently, the set on the right-hand side of (8.1) belongs to $\mathcal{F}_t^0$. Let $\omega \in A_t$. Assume l is fixed. If $T_{l,n}(\omega) < t$, then $Z_{l,n}(\omega) < \infty$ and $T_{l,n}(\omega) < T_{l,n+1}(\omega)$. If for all $n \geq 1$, $T_{l,n}(\omega) < t$, then $T_{l,n}(\omega) \uparrow s \leq t$, $|Z_{l,n+1}(\omega) - Z_{l,n}(\omega)| \geq \frac{1}{2^l}$, and $\lim_{r \uparrow s} Y_r(\omega)$ does not exist. This contradicts $\omega \in A_t$. Hence $\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} [T_{l,n} = t]$. Conversely, let $\omega \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} [T_{l,n} = t]$. For $l \geq 1$ define $k = \min\{n : T_{l,n}(\omega) = t\}$ and

$$f_l(s) = \begin{cases} Z_{l,n}(\omega), & s \in [T_{l,n}(\omega), T_{l,n+1}(\omega)[, \ n \leq k-1, \\ Y_t(\omega), & s \in [t, \infty[, t \in \boldsymbol{Q}_+, \\ 0, & s \in [t, \infty[, t \notin \boldsymbol{Q}_+. \end{cases}$$

Then f_l is cadlag on $\boldsymbol{R}_+$, and it is straightforward to verify

$$\sup_{r \in [0,t] \cap \boldsymbol{Q}_+} |f_l(r) - Y_r(\omega)| \leq \frac{1}{2^l},$$

$$\sup_{m \geq 1} \sup_{s \geq 0} |f_l(s) - f_{l+m}(s)| \leq \frac{1}{2^{l-1}}.$$

Hence $(f_l)_{l \geq 1}$ uniformly converges to f, f is cadlag on $\boldsymbol{R}_+$ and for all $r \in [0, t] \cap \boldsymbol{Q}_+$ $f(r) = Y_r(\omega)$, i.e. $\omega \in A_t$. □

12.9 Theorem. *Suppose $\boldsymbol{P}' \overset{loc}{\ll} \boldsymbol{P}$. Let X be an $\boldsymbol{F}$-adapted process whose trajectories $\boldsymbol{P}$-a.s. are cadlag (resp. continuous, resp. right-*

1) if $T_{l,n+1}(\omega) \notin \boldsymbol{Q}_+$, it is required only that the limit exists.

continuous increasing, resp. right-continuous and with finite variation). Then the trajectories of X $\boldsymbol{P}'$-a.s. are the same as $\boldsymbol{P}$-a.s..

Proof. By Lemma 12.8 there is an adapted cadlag (resp. continuous) process $\tilde{X}$ such that $[X \neq \tilde{X}]$ is $\boldsymbol{P}$-evanescent. By Corollary 12.7 $[X \neq \tilde{X}]$ is $\boldsymbol{P}'$-evanescent, i.e., the trajectories of X $\boldsymbol{P}'$-a.s. are cadlag (resp. continuous).

If the trajectories of X $\boldsymbol{P}$-a.s. are increasing, for all $s < t$, $\boldsymbol{P}(X_s \leq X_t) = 1$, and consequently $\boldsymbol{P}'(X_s \leq X_t) = 1$. It is already known that the trajectories of X $\boldsymbol{P}'$-a.s. are cadlag. Therefore the trajectories of X $\boldsymbol{P}'$-a.s. are increasing.

If the trajectories of X $\boldsymbol{P}$-a.s. are functions with finite variation, then $\boldsymbol{P}(T < \infty) = 0$, where $T = \inf\{t : \int_{[0,t]} |d\tilde{X}_s| = \infty\}$ is a stopping time. Similarly, $\boldsymbol{P}'(T < \infty) = 0$, i.e., the trajectories of X $\boldsymbol{P}'$-a.s. are functions with finite variation. □

§2. Girsanov's Theorems for Local Martingales and Semimartingales

In this paragraph we always suppose $\boldsymbol{P}' \overset{loc}{\ll} \boldsymbol{P}$ and $Z = (Z_t)$ is the density process of $\boldsymbol{P}'$ w.r.t. $\boldsymbol{P}$.

The concepts of local martingale, semimartingale, $\cdots$ are dependent on measures. Therefore, we use notation $\mathcal{M}_{loc}(\boldsymbol{P})$ for the class of all processes which are local martingales under $\boldsymbol{P}$. According to Lemma 12.8 and Theorem 12.9, for every $X \in \mathcal{M}_{loc}(\boldsymbol{P})$ there exists an $\boldsymbol{F}$-adapted cadlag process $\tilde{X}$, $\boldsymbol{P}$-indistinguishable from X. Hence we consider each process of $\mathcal{M}_{loc}(\boldsymbol{P})$ to be $\boldsymbol{F}$-adapted and cadlag. The situations for other classes of processes are similar, and we do not repeat the formulations.

12.10 Lemma. *Let S and T be two stopping times such that $\boldsymbol{P}'_S \ll \boldsymbol{P}_S$ and $\boldsymbol{P}'_T \ll \boldsymbol{P}_T$. Let r.v. $\xi \in \mathcal{F}_T$ and $\boldsymbol{E}'[|\xi|] < \infty$. Then*

$$\boldsymbol{E}[\xi Z_T | \mathcal{F}_S] I_{[S \leq T]} = Z_S \boldsymbol{E}'[\xi | \mathcal{F}_S] I_{[S \leq T]} \quad \boldsymbol{P}\text{-a.s.}. \tag{10.1}$$

Proof. Let $D \in \mathcal{F}_S$. Then $D[S \leq T] \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$ and

$$\boldsymbol{E}[I_{D[S \leq T]} \xi Z_T] = \boldsymbol{E}'[I_{D[S \leq T]} \xi] = \boldsymbol{E}'\{I_{D[S \leq T]} \boldsymbol{E}'[\xi | \mathcal{F}_S]\}$$
$$= \boldsymbol{E}[I_{D[S \leq T]} Z_S \boldsymbol{E}'[\xi | \mathcal{F}_S]].$$

Thus (10.1) is deduced. □

12.11 Lemma. *Let X be an adapted càdlàg process and (T_n) be an increasing sequence of stopping times such that $\lim_n T_n \geq R$ P-a.s. and for each n, $X^{T_n} \in \mathcal{M}_{loc}(P)$. Then $X \in (\mathcal{M}_{loc}(P))^B$. (The predictable set of interval type B and stopping time R are defined in (5.1) and (5.2) respectively.)*

Proof. We may suppose $P\Big(\lim_n T_n = R\Big) = 1$. Otherwise, T_n can be replaced by $T_n \wedge R$. Let T be a stopping time such that $[\![0, T]\!] \subset B$. We want to prove $X^T \in \mathcal{M}_{loc}(P)$. Put

$$T'_n = (T_n)_{[T_n < T]}, \quad D = \bigcap_n [T_n < T].$$

It is not difficult to verify: i) $T'_n \uparrow$; ii) on D for all $n \geq 1$, $T'_n = T_n < T \leq R$, and therefore $T = R$; iii) on D^c for n large enough $T_n \geq T$ and $T'_n = \infty$. Hence $(T'_n \wedge n)$ P-a.s. foretells R_D, and R_D is predictable.

Since $Z \in \mathcal{M}_{loc}(P)$,

$$Z_{R_D} I_{[R_D < \infty]} = E[Z_{R_D} I_{[R_D < \infty]} | \mathcal{F}_{R_D -}] = 0 \quad P\text{-a.s.}.$$

Thus for P-almost all $\omega \in [R_D < \infty]$ $[0, T(\omega)] \subset [0, R(\omega)[$. But in the above we know that on D we have $T = R$. Hence it must be $P(R_D < \infty) = 0$, and therefore $P(T'_n \uparrow \infty) = 1$. On the other hand,

$$(X^T)^{T'_n} = (X^{T_n})^T \in \mathcal{M}_{loc}(P).$$

So $X^T \in \mathcal{M}_{loc}(P)$. □

Remark. In fact, the lemma is concerned only with the measure P and it holds not only for the class of local martingales but also for any class of processes whenever it is stable under the localization.

12.12 Theorem. *Let X be an adapted càdlàg process. Then $X \in \mathcal{M}_{loc}(P')$ if and only if $XZ \in (\mathcal{M}_{loc}(P))^B$.*

Proof. Since only local martingales are concerned, we may assume $X_0 = 0$.

Necessity. Let $X \in \mathcal{M}_{loc}(P')$. There exists an increasing sequence (T_n) of stopping times such that $T_n \uparrow \infty$ P'-a.s., for each n, $X^{T_n} \in \mathcal{M}(P')$ and $P'_{T_n} \ll P_{T_n}$. The last requirement can be satisfied by replacing T_n with $T_n \wedge n$, if necessary. By lemma 12.10

$$E[(XZ)_{T_n} | \mathcal{F}_t] I_{[t \leq T_n]} = (XZ)_t I_{[t \leq T_n]} \quad P\text{-a.s.}.$$

But $(XZ)_{T_n} I_{[T_n < t]} \in \mathcal{F}_t$. In a word,

$$E[(XZ)_{T_n} | \mathcal{F}_t] = (XZ)_{t \wedge T_n} \quad P\text{-a.s.},$$

i.e., $(XZ)^{T_n} \in \mathcal{M}(P)$. By Theorem 12.6.2) $P(\lim_n T_n \geq R) = 1$. Then by Lemma 12.11 $XZ \in (\mathcal{M}_{loc}(P))^B$.

Sufficiency. Let $XZ \in (\mathcal{M}_{loc}(P))^B$. There exists an increasing sequence (T_n) of stopping times such that $T_n \uparrow R$ P-a.s., for each n, $(XZ)^{T_n} \in \mathcal{M}(P)$ and $P'_{T_n} \ll P_{T_n}$. On $[t \leq T_n]$ we have

$$(XZ)_{t \wedge T_n} = E[(XZ)_{T_n} | \mathcal{F}_t] = Z_t E'[X_{T_n} | \mathcal{F}_t] \quad P\text{-a.s.},$$

$$E'[X_{T_n} | \mathcal{F}_t] = X_{t \wedge T_n}, \quad P'\text{-a.s.},$$

because under P', Z never vanishes. But $X_{T_n} I_{[T_n < t]} \in \mathcal{F}_t$, so

$$E'[X_{T_n} | \mathcal{F}_t] = X_{t \wedge T_n}, \quad P'\text{-a.s.},$$

i.e., $X^{T_n} \in \mathcal{M}(P')$. Since $P'(T_n \uparrow \infty) = 1$, $X \in \mathcal{M}_{loc}(P')$. □

12.13 Theorem. *If $X \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$ and $[X, Z] \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B$, then*

$$\frac{1}{Z_-} . \langle X, Z \rangle \in \mathcal{A}_{loc}(P'),$$

$$X' = X - \frac{1}{Z_-} . \langle X, Z \rangle \in \mathcal{M}_{loc,0}(P'),$$

where $[X, Z]$ and $\langle X, Z \rangle$ are defined under P.

Proof. Write $C = \frac{1}{Z_-} . \langle X, Z \rangle$. By Theorem 12.9 $\langle X, Z \rangle \in \mathcal{A}_{loc}(P')$. On $[\![0, R_n]\!]$ we have $Z_- \geq \frac{1}{n}$, where R_n is defined in (5.3). Thus $C^{R_n} \in \mathcal{A}_{loc}(P')$. But $P'(R_n \uparrow \infty) = 1$, so $C \in \mathcal{A}_{loc}(P')$.

Since $XZ - \langle X, Z \rangle \in (\mathcal{M}_{loc,0}(P))^B$, for each n, $(XZ)^{R_n} - \langle X, Z \rangle^{R_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$. On the other hand, by the formula of integration by parts and Yœurp's lemma

$$\begin{aligned} (CZ)^{R_n} - \langle X, Z \rangle^{R_n} &= (CZ)^{R_n} - Z_- . C^{R_n} \\ &= C_-^{R_n} . Z^{R_n} + [C^{R_n}, Z^{R_n}] \in \mathcal{M}_{loc}(P). \end{aligned}$$

Hence $(XZ)^{R_n} - (CZ)^{R_n} = (X'Z)^{R_n} \in \mathcal{M}_{loc}(P)$. By Theorem 12.12 $X' \in \mathcal{M}_{loc}(P')$. □

Theorem 12.13 is called the *Girsanov's theorem* for local martingales.

12.14 Theorem. *If $X \in \mathcal{S}(P)$, then $X \in \mathcal{S}(P')$, and $[X](P')$ is P'-indistinguishable from $[X](P)$.*

Proof. Decompose X as $X = X_0 + M + A$, where $M \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$, $|\Delta M| \leq 1$ and $A \in \mathcal{V}(P)$. We have $[M, Z](P) \in \mathcal{A}_{loc}(P)$ (Problem 7.10).

By Theorem 12.13 $M' = M - C \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}')$, where $C = \frac{1}{Z_-}.\langle M, Z\rangle \in \mathcal{V}(\boldsymbol{P}')$. Then under $\boldsymbol{P}'$ X can be decomposed as $X = X_0 + M' + (C + A)$, $C + A \in \mathcal{V}(\boldsymbol{P}')$. Thus $X \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P}')$.

For all $t > 0$, $\boldsymbol{P}'_t \ll \boldsymbol{P}_t$. By the remark after Theorem 9.33, $[X]_t(\boldsymbol{P})$ (resp. $[X]_t(\boldsymbol{P}')$) is the limit in $\boldsymbol{P}$ (resp. $\boldsymbol{P}'$) of sum of quadratic differences of X on $[0, t]$. Hence

$$[X]_t(\boldsymbol{P}') = [X]_t(\boldsymbol{P}) \quad \boldsymbol{P}'\text{-a.s.}.$$

By the right-continuity of trajectories (Theorem 12.9) $[X](\boldsymbol{P}')$ is $\boldsymbol{P}'$-indistinguishable from $[X](\boldsymbol{P})$. □

12.15 Corollary. *If $X \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$, then $X' = X - \frac{1}{Z_-}.\langle X, Z\rangle \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}')$ and $\langle X'\rangle(\boldsymbol{P}')$ is $\boldsymbol{P}'$-indistinguishable from $\langle X\rangle(\boldsymbol{P})$.*

Proof. It follows immediately from Theorems 12.14 and 12.9. □

12.16 Corollary. *If $X \in \mathcal{M}^d_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P})$ and $[X, Z](\boldsymbol{P}) \in (\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}))^B$, then $X' = X - \frac{1}{Z_-}.\langle X, Z\rangle \in \mathcal{M}^d_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}')$.*

Proof. It suffices to show that the $\boldsymbol{P}'$-local martingale X' is purely discontinuous. Write $C = \frac{1}{Z_-}.\langle X, Z\rangle$. Under $\boldsymbol{P}'$

$$[X](\boldsymbol{P}') = [X](\boldsymbol{P}) = \Sigma(\Delta X)^2,$$

$$\begin{aligned}[X'](\boldsymbol{P}') &= [X](\boldsymbol{P}') - 2[X, C](\boldsymbol{P}') + [C](\boldsymbol{P}') \\ &= \Sigma(\Delta X)^2 - 2\Sigma(\Delta X \Delta C) + \Sigma(\Delta C)^2 = \Sigma(\Delta X')^2,\end{aligned}$$

this implies X' is purely discontinuous under $\boldsymbol{P}'$. □

12.17 Corollary. *If $X \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P})$ and X^c is the continuous martingale part of X under $\boldsymbol{P}$, then $(X^c)' = X^c - \frac{1}{Z_-}.\langle X^c, Z\rangle$ is the continuous martingale part of X under $\boldsymbol{P}'$.*

Proof. Decompose X as $X = X_0 + M + A$, where $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$, $|\Delta M| \leq 1$ and $A \in \mathcal{V}(\boldsymbol{P})$. Then $X^c = M^c$, $(M^c)' = M^c - \frac{1}{Z_-}.\langle M^c, Z\rangle \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}')$, $(M^d)' = M^d - \frac{1}{Z_-}.\langle M^d, Z\rangle \in \mathcal{M}^d_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}')$,

$$X = X_0 + (M^c)' + (M^d)' + \left(A + \frac{1}{Z_-}.\langle M, Z\rangle\right).$$

Hence $(X^c)' = (M^c)'$ is the continuous martingale part of X under $\boldsymbol{P}'$. □

12.18 Theorem. *Let X be an adapted cadlag process. Then*

1) $X \in \mathcal{V}(\boldsymbol{P}') \iff X \in (\mathcal{V}(\boldsymbol{P}))^B$,
2) $X \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P}') \iff X \in (\mathcal{S}(\boldsymbol{P}))^B$,
3) $X \in \mathcal{S}_p(\boldsymbol{P}') \iff X \in (\mathcal{S}(\boldsymbol{P}))^B$ *and* $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{S}_p(\boldsymbol{P}))^B$,
4) $X \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}') \iff X \in (\mathcal{S}(\boldsymbol{P}))^B$ *and* $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}))^B$,
5) $X \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}') \iff X \in (\mathcal{V}(\boldsymbol{P}))^B$ *and* $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}))^B$.

in this case, the dual predictable projection of X under $\boldsymbol{P}'$ is $\boldsymbol{P}'$-indistinguishable from the dual predictable projection of $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z]$ under $\boldsymbol{P}$.

Proof. Without loss of generality, we may assume $X_0 = 0$.

1) Let $X \in \mathcal{V}(\boldsymbol{P}')$. Put $T_n = \inf\{t : \int_0^t |dX_s| \geq n\} \wedge R_n$. Then $\boldsymbol{P}'(T_n \uparrow \infty) = 1$, $\boldsymbol{P}(T_n \uparrow R) = 1$. If $T_n = \infty$, then for all $t > 0$ $\int_0^t |dX_s| \leq n$. If $T_n < \infty$, $\int_0^{T_n} |dX_s| \leq n + |\Delta X_{T_n}|$. Hence $X^{T_n} \in \mathcal{V}(\boldsymbol{P})$, and therefore $X \in (\mathcal{V}(\boldsymbol{P}))^B$.

Let $X \in (\mathcal{V}(\boldsymbol{P}))^B$ (resp. $(\mathcal{S}(\boldsymbol{P}))^B$). Then for each n, $X^{R_n} \in \mathcal{V}(\boldsymbol{P})$ (resp. $\mathcal{S}(\boldsymbol{P})$), $X^{R_n} \in \mathcal{V}(\boldsymbol{P}')$ (resp. $\mathcal{S}(\boldsymbol{P}')$). But $\boldsymbol{P}'(R_n \uparrow \infty) = 1$. So $X \in \mathcal{V}(\boldsymbol{P}')$ (resp. $\mathcal{S}(\boldsymbol{P}')$).

2) Let $X \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P}')$. Then for each n, $(XZ)^{R_n} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{P})$. Choose $F(x, y) \in C^2(\boldsymbol{R}^2)$ such that $F(x, y) = x/y$ for $|y| \geq 1/n$. Then

$$Y = F((XZ)^{R_n}, Z) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P}).$$

When $t < R_n$, we have $|Z_t| \geq 1/n$. Hence $Y I_{[0,R_n[} = X I_{[0,R_n[}$. Since

$$Y I_{[0,R_n[} = Y^{R_n} - Y_{R_n} I_{[R_n<\infty]} I_{[R_n,\infty[} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P}),$$

$$X^{R_n} = X I_{[0,R_n[} + X_{R_n} I_{[R_n<\infty]} I_{[R_n,\infty[} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P}).$$

This implies $X \in (\mathcal{S}(\boldsymbol{P}))^B$. We have established $X \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P}') \Rightarrow X \in (\mathcal{S}(\boldsymbol{P}))^B$. The converse implication has already been shown above in 1).

3) Let $X \in \mathcal{S}_p(\boldsymbol{P}')$. Then under $\boldsymbol{P}'$ $X = N + A$, where $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}')$ and $A \in \mathcal{V}_0(\boldsymbol{P}')$ is predictable. Put $T_n = \inf\left\{t : \int_0^t |dA_s| \geq n\right\} \wedge R_n$. Then $\boldsymbol{P}(T_n \uparrow R) = 1$, $X^{T_n} \in \mathcal{S}_0(\boldsymbol{P})$, $(NZ)^{T_n} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P})$ and $A^{T_n} \in \mathcal{V}_0(\boldsymbol{P})$. By the formula of integration by parts,

$$(NZ)^{T_n} + (AZ)^{T_n} = (XZ)^{T_n} = X_-.Z^{T_n} + Z_-.X^{T_n} + [X^{T_n}, Z].$$

Since A^{T_n} is predictable and $(AZ)^{T_n} - Z_-.A^{T_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$, $Z_-.X^{T_n} + [X^{T_n}, Z] - Z_-.A^{T_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$. Since $Z_- \geq \frac{1}{n}$ on $[\![0, T_n]\!]$, we obtain $X^{T_n} + \frac{1}{Z_-}.[X^{T_n}, Z] - A^{T_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$, i.e., $X^{T_n} + \frac{1}{Z_-}.[X^{T_n}, Z] \in \mathcal{S}_p(P)$. Hence $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{S}_p(P))^B$ by Lemma 12.11 and its remark.

Now let $X \in (\mathcal{S}(P))^B$ and $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{S}_p(P))^B$. Then $X^{R_n} \in \mathcal{S}(P)$, and $Y^{(n)} = X^{R_n} + \frac{1}{Z_-}.[X^{R_n}, Z] \in \mathcal{S}_p(P)$. Let $Y^{(n)} = M^{(n)} + A^{(n)}$ be the canonical decomposition of $Y^{(n)}$, where $M^{(n)} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$ and $A^{(n)} \in \mathcal{V}(P')$ is predictable. Since $(A^{(n+1)})^{R_n} = A^{(n)}$, then

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} I_{]R_{n-1}, R_n]} \in \mathcal{V}(P'),$$

and is predictable ($R_0 = 0$). In fact, $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] - A \in (\mathcal{M}_{loc}(P))^B$.

Put $N = X - A$. Then $N^{R_n} = X^{R_n} - A^{R_n} = M^{(n)} - \frac{1}{Z_-}.[X^{R_n}, Z]$.

$$\begin{aligned}(NZ)^{R_n} &= N_-.Z^{R_n} + Z_-.N^{R_n} + [N^{R_n}, Z] \\ &= N_-.Z^{R_n} + Z_-.M^{(n)} - [X^{R_n}, Z] + [N^{R_n}, Z] \\ &= N_-.Z^{R_n} + Z_-.M^{(n)} - [A^{R_n}, Z] \in \mathcal{M}_{loc,0}(P).\end{aligned}$$

Hence $N \in \mathcal{M}_{loc,0}(P')$, $X = N + A$ is the canonical decomposition of X under P'. This means $X \in \mathcal{S}_p(P')$.

4) follows from proof 3) with $A = 0$.

5) Let $X \in \mathcal{A}_{loc}(P')$. Then $X \in \mathcal{V}(P') \cap \mathcal{S}_p(P')$. By 1) and 3) we have $X \in (\mathcal{V}(P))^B$ and $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{S}_p(P))^B$. Hence

$$X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B.$$

Conversely, let $X \in (\mathcal{V}(P))^B$ and $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B$. Then by 1) and 3) $X \in \mathcal{V}(P')$ and $X \in \mathcal{S}_p(P')$. Hence $X \in \mathcal{A}_{loc}(P')$. The last assertion follows from proof 3), in which A is both the dual predictable projection of X under P' and the dual predictable projection of $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z]$ on B under P. □

12.19 Corollary. *If $A \in (\mathcal{A}_{loc,0}(P))^B$, then*

$$A \in \mathcal{A}_{loc}(P') \Longleftrightarrow [A, Z] \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B.$$

In this case, under P' we have

$$A^{p,P'} = A^{p,P} + \frac{1}{Z_-}.\langle A, Z\rangle,$$

where $A^{p,P}$ and $A^{p,P'}$ are the dual predictable projections of A under P (on B) and P' respectively.

Proof. This is a consequence of Theorem 12.18.5). Under the assumption, $A \in \mathcal{A}_{loc}(P') \Longleftrightarrow A + \frac{1}{Z_-}.[A, Z] \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B \Longleftrightarrow \frac{1}{Z_-}.[A, Z] \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B \Longleftrightarrow [A, Z] \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B$, and

$$A^{p,P'} = \left(A + \frac{1}{Z_-}.[A, Z]\right)^{p,P} = A^{p,P} + \frac{1}{Z_-}.\langle A, Z\rangle. \quad □$$

Theorems 12.14 and 12.18 are *Girsanov's theorems* for semimartingales. The next theorem is another Girsanov's theorem for local martingales.

12.20 Theorem. *Let $X \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$. Then*

1) $X \in \mathcal{S}(P')$ and $M = X - \frac{1}{Z}.[X, Z] + \tilde{Y} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P')$, where $\tilde{Y}$ is the dual predictable projection of $Y = \Delta X_R I_{[R<\infty]} I_{[\![R,\infty[\![}$ under P.

2) $X \in \mathcal{S}_p(P') \Longleftrightarrow [X, Z] \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B$, and in this case the canonical decomposition of X under P' is

$$X = \left(X - \frac{1}{Z_-}.\langle X, Z\rangle\right) + \frac{1}{Z_-}.\langle X, Z\rangle.$$

3) $X \in \mathcal{M}_{loc,0}(P') \Longleftrightarrow [X, Z] \in (\mathcal{M}_{loc,0}(P))^B$.

Proof. 1) Since $\int_0^t |dY_s| \leq \sqrt{[X]_t}$, $Y \in \mathcal{A}_{loc}(P)$. Because $A = \frac{I_{[Z>0]}}{Z}.[X, Z]$ is P'-indistinguishable from $\frac{1}{Z}.[X, Z]$, it suffices to show for each n, $(MZ)^{R_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$, where $M = X - A + \tilde{Y}$.

$$(ZA)^{R_n} = A_-.Z^{R_n} + Z.A^{R_n},$$

$$Z.A^{R_n} = \int_0^t I_{[Z>0]}.[X^{R_n}, Z] = [X^{R_n}, Z]^{R-}.$$

Thus $(ZA)^{R_n} - [X^{R_n}, Z]^{R-} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$. We have also $(Z\tilde{Y})^{R_n} - Z_-.\tilde{Y}^{R_n} = \tilde{Y}_-.Z^{R_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$ and $(ZX)^{R_n} - [X^{R_n}, Z] \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$. Hence

$$(MZ)^{R_n} - \{[X^{R_n}, Z] - [X^{R_n}, Z]^{R-} + Z_-.\tilde{Y}^{R_n}\} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P). \quad (20.1)$$

Noting $Z_R I_{[R<\infty]} = 0$, we have

$$[X^{R_n}, Z] - [X^{R_n}, Z]^{R-} + Z_-.Y^{R_n}$$
$$= \Delta Z_R \Delta X_R^{R_n} I_{[R<\infty]} I_{[R,\infty[} + Z_{R-}\Delta Y_R^{R_n} I_{[R<\infty]} I_{[R,\infty[}$$
$$= \Delta Z_R \Delta X_R I_{[R_n=R<\infty]} I_{[R,\infty[} - \Delta Z_R \Delta X_R I_{[R_n=R<\infty]} I_{[R,\infty[} = 0.$$

By (20.1) we know $(M.Z)^{R_n} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(P)$.

2) Let $X \in \mathcal{S}_p(P')$. By Theorem 12.18.3) $X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{S}_p(P))^B$, and for each n, $X^{R_n} + \frac{1}{Z_-}.[X^{R_n}, Z] \in \mathcal{S}_p(P)$. Because $X^{R_n} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(P)$, we have $\frac{1}{Z_-}.[X^{R_n}, Z] \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(P)$ and $[X^{R_n}, Z] \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(P)$. Thus $[X, Z] \in (\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(P))^B$. The another half is just Theorem 12.14.

3) By Theorem 12.18.4),

$$X \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(P') \iff X + \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(P))^B$$
$$\iff \frac{1}{Z_-}.[X, Z] \in (\mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(P))^B \iff [X, Z] \in (\mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(P))^B. \quad \square$$

12.21 Theorem. *Suppose $X \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(P)$ and $[X, Z] \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(P)$. Let H be a predictable process such that under P, $H.X$ exists (i.e., $\sqrt{H^2.[X]} \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(P)$) and $[H.X, Z] \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(P)$. Set $X' = X - \frac{1}{Z_-}.\langle X, Z\rangle$. Then under P', $H.X'$ exists and*

$$H.X' = H.X - \frac{1}{Z_-}.\langle H.X, Z\rangle. \tag{21.1}$$

Proof. Write $M = H.X$, $M' = M - \frac{1}{Z_-}.\langle M, Z\rangle$. We deal with the continuous and purely discontinuous cases separately.

Firstly, assume $X \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}^c(P)$. By Corollary 12.15 $X' \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}^c(P')$ and $\langle X'\rangle(P')$ is P'-indistinguishable from $\langle X\rangle(P)$. Since $\sqrt{H^2.\langle X\rangle} \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(P)$, $\sqrt{H^2.\langle X'\rangle} \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(P')$ (Corollary 12.19). So under P', $H.X'$ exists. On the other hand, under P' we have

$$\langle M', H.X'\rangle = H.\langle M', X'\rangle = H.\langle M, X\rangle = \langle M, H.X\rangle = H^2.\langle X\rangle,$$
$$\langle M'\rangle = \langle M\rangle = H^2.\langle X\rangle,$$
$$\langle H.X'\rangle = H^2.\langle X'\rangle = H^2.\langle X\rangle.$$

Thus $\langle M' - H.X'\rangle = 0$, $M' = H.X'$. (Evidently, in the above $\langle X\rangle$, $\langle M\rangle$ and $\langle M, X\rangle$ are defined under P.)

Secondly, assume $X \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^d(P)$. By Corollary 12.16 $X' \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^d(P')$. At the same time, we have $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^d(P)$ and $M' \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^d(P')$. Since

$$\Delta X' = \Delta X - \frac{1}{Z_-}\Delta\langle X, Z\rangle,$$
$$\Delta M' = H\Delta X - \frac{H}{Z_-}\Delta\langle X, Z\rangle = H\Delta X',$$

under P', $H.X'$ exists and $H.X' = M'$. $\square$

12.22 Theorem. *Suppose $X \in \mathcal{S}(P)$. Let H be a predictable process such that under P, $H.X$ exists (denoted by $H\overset{P}{.}X$). Then under P', $H.X$ exists (denoted by $H\overset{P'}{.}X$), and $H\overset{P'}{.}X$ is P'-indistinguishable from $H\overset{P}{.}X$.*

Proof. We may assume $X_0 = 0$. Let $X = M + A$ be an H-decomposition of X under P, where $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}(P)$ and $A \in \mathcal{V}(P)$. We may assume that ΔM and $H\Delta M$ are bounded. Otherwise, we may set

$$C = \Sigma(\Delta M I_{[|\Delta M|>1 \text{ or } |H\Delta M|>1]}), \quad N = C - \tilde{C}$$

($\tilde{C}$ is the compensator of C under P), and replace M and A by $M - N$ and $N + A$ respectively. Thus $[M, Z]$, $[H\overset{P}{.}M, Z] \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(P)$. Put $M' = M - \frac{1}{Z_-}.\langle M, Z\rangle$, $A' = A + \frac{1}{Z_-}.\langle M, Z\rangle$. Then by Theorem 12.21

$$H\overset{P'}{.}M' = H\overset{P}{.}M - \frac{1}{Z_-}.\langle H\overset{P}{.}M, Z\rangle = H\overset{P}{.}M - \frac{H}{Z_-}.\langle M, Z\rangle.$$

On the other hand, $H.A \in \mathcal{V}(P) \iff H.A \in \mathcal{V}(P')$, and $\langle H\overset{P}{.}M, Z\rangle \in \mathcal{V}(P) \Rightarrow \frac{H}{Z_-}.\langle M, Z\rangle = \frac{1}{Z_-}.\langle H\overset{P}{.}M, Z\rangle \in \mathcal{V}(P')$. Thus

$$H.A' = H.A + \frac{H}{Z_-}.\langle M, Z\rangle \in \mathcal{V}(P').$$

Therefore, under P', $X = M' + A'$ is an H-decomposition of X, and

$$H\overset{P'}{.}X = H\overset{P'}{.}M' + H.A' = H\overset{P}{.}M + H.A = H\overset{P}{.}X. \quad \square$$

Theorems 12.21 and 12.22 are the Girsanov's theorems for stochastic integrals. As a simple application of Theorem 12.22, we show the local property of stochastic integrals in the next theorem, which is concerned only with the measure P.

12.23 Theorem. *Assume that X and Y are semimartingales, H and K are predictable processes such that $H.X$ and $K.Y$ exist. Let $A \in \mathcal{F}$ such that on A, X and Y are indistinguishable, H and K are indistinguishable. Then on A, $H.X$ and $K.Y$ are indistinguishable as well.*

Proof. We may assume $P(A) > 0$. Put $P'(\cdot) = \frac{P(\cdot \cap A)}{P(A)}$. Then $P' \ll P$, X (resp. H) is P'-indistinguishable from Y (resp. K).

Thus $H \overset{P'}{\cdot} X = K \overset{P'}{\cdot} Y$. By Theorem 12.22 $H.X$ (resp. $K.Y$) P'-indistinguishable from $H \overset{P'}{\cdot} X$ (resp. $K \overset{P'}{\cdot} Y$)

Hence $H.X$ is P'-indistinguishable from $K.Y$, i.e., on A, $H.X$ and $K.Y$ are P-indistinguishable. □

§3. Girsanov's Theorems for Random Measures

In this paragraph we still suppose $P' \overset{loc}{\ll} P$. At the same time, we suppose μ is an integer-valued random measure:

$$\mu(dt, dx) = \sum_{s>0} \delta_{(s,\beta_s)}(dt, dx) I_D,$$

where $\beta = (\beta_t)$ is an optional process, $D \subset]0, \infty[\!\![$ is the support of μ. Under P (resp P') the measure generated by μ is denoted by M_μ (resp. M'_μ). We suppose M_μ is σ-finite on $\tilde{\mathcal{P}}$. The dual predictable projection of μ under P is denoted by ν.

12.24 Lemma. *If $N = (N_t) \in \mathcal{S}_p$ and $E[|N_0|] < \infty$, then N and ΔN are σ-integrable w.r.t. $\tilde{\mathcal{P}}$ under M_μ. (Note that here only the measure P is concerned.)*

Proof. Let $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{P}}$ such that $\tilde{A}_n \uparrow \tilde{\Omega}$ and $M_\mu(\tilde{A}_n) < \infty$. Then $C^{(n)} = I_{\tilde{A}_n} * \mu \in \mathcal{A}^+$. Put

$$T_0^{(n)} = 0, T_m^{(n)} = \inf\{t > T_{m-1}^{(n)} : \Delta C_t^{(n)} \neq 0\}, m \geq 1.$$

We have $P(\lim_{m\to\infty} T_m^{(n)} = \infty) = 1$. By the assumption there is a sequence $(S_m^{(n)})_{m\geq 1}$ of stopping times such that $S_m^{(n)} \leq T_m^{(n)}$, $P(\lim_{m\to\infty} S_m^{(n)} = \infty) = 1$ and $N^{S_m^{(n)}}$ is of class (D). Then

$$M_\mu(|N| I_{[0,S_m^{(n)}]} I_{\tilde{A}_n}) \leq \sum_{k=1}^{m} E|N_{S_m^{(n)} \wedge T_k^{(n)}}| < \infty.$$

Hence N is σ-integrable w.r.t. $\tilde{\mathcal{P}}$ under M_μ. Since N_- is locally bounded, ΔN is also σ-integrable w.r.t. $\tilde{\mathcal{P}}$ under M_μ. □

12.25 Theorem. *M'_μ and M'_ν are σ-finite on $\tilde{\mathcal{P}}$, and $M'_\mu \ll M'_\nu$ on $\tilde{\mathcal{P}}$.*

Proof. Take $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{P}}$ such that $M_\mu(\tilde{A}_n) < \infty$ and $\tilde{A}_n \uparrow \tilde{\Omega}$. For all $t > 0$ and $A \in \tilde{\mathcal{P}}$ by Theorem 5.32

$$M'_\mu(A\tilde{A}_n([0,t] \times E)) = E'[I_{A\tilde{A}_n} * \mu_t] = E[Z_t(I_{A\tilde{A}_n} * \mu_t)] = E[(ZI_{A\tilde{A}_n}) * \mu_t].$$

Letting $t \to \infty$ and $n \to \infty$ yields

$$M'_\mu(I_A) = M_\mu(ZI_A), \quad A \in \tilde{\mathcal{P}}. \tag{25.1}$$

By Lemma 12.24, Z is σ-integrable w.r.t. $\tilde{\mathcal{P}}$ under M_μ. Hence M'_μ is σ-finite on $\tilde{\mathcal{P}}$. Denote by ν' the dual predictable projection of μ under P'.

Under P, $B^{(n)} = I_{\tilde{A}_n} * \nu$ is the dual predictable projection of $I_{\tilde{A}_n} * \mu$. Put $T_{n,m} = \inf\{t : B_t^{(n)} \geq m\}$. Then $P(\lim_{m\to\infty} T_{n,m} = \infty) = 1$, and therefore $P'(\lim_{m\to\infty} T_{n,m} = \infty) = 1$. Since $\Delta B^{(n)} \leq 1$,

$$M'_\nu(\tilde{A}_n([0, T_{n,m}] \times E)) = E'[B^{(n)}_{T_{n,m}}] \leq m + 1.$$

Hence M'_ν is σ-finite on $\tilde{\mathcal{P}}$.

Now we may assume $M'_\mu(\tilde{A}_n) = M'_\nu(\tilde{A}_n) < \infty$ and $M'_\nu(\tilde{A}_n) < \infty$ as well. For all $t > 0$ and $A \in \tilde{\mathcal{P}}$ by Theorem 5.33

$$\begin{aligned} M'_\nu(A\tilde{A}_n([0,t] \times E)) &= E[Z_t(I_{A\tilde{A}_n} * \nu_t)] = E[(Z_- I_{A\tilde{A}_n}) * \nu_t] \\ &= M_\nu[Z_- I_{A\tilde{A}_n([0,t] \times E)}] = M_\mu[Z_- I_{A\tilde{A}_n([0,t] \times E)}]. \end{aligned}$$

Letting $t \to \infty$ and $n \to \infty$ yields

$$M'_\nu(I_A) = M_\mu(Z_- I_A), \quad A \in \tilde{\mathcal{P}}. \tag{25.2}$$

Under P', $C^{(n)} = I_{\tilde{A}_n} * \nu'$ is the dual predictable projection of $I_{\tilde{A}_n} * \mu$. Put $S_{n,m} = \inf\{t : C_t^{(n)} \geq m\} \wedge m$. Then $P'(\lim_{m\to\infty} S_{n,m} = \infty) = 1$ and $M_{\nu'}(\tilde{A}_n([0, S_{n,m}] \times E)) \leq m + 1$. For all $A \in \tilde{\mathcal{P}}$

$$\begin{aligned} M'_\mu[A\tilde{A}_n([Z_- = 0][0, S_{n,m}] \times E)] &= M_{\nu'}[A\tilde{A}_n([Z_- = 0][0, S_{n,m}] \times E)] \\ = E[Z_{S_{n,m}}(I_{A\tilde{A}_n[Z_- = 0]} * \nu')_{S_{n,m}}] &= E[(Z_- I_{A\tilde{A}_n[Z_- = 0]}) * \nu_{S_{n,m}}] = 0, \end{aligned}$$

and therefore $M'_\mu(A[Z_- = 0]) = 0$. Combining with (25.1), we obtain

$$M'_\mu(I_A) = M'_\mu(I_{A[Z_- > 0]}) = M_\mu(ZI_{A[Z_- > 0]}). \tag{25.3}$$

Then $M'_\mu \ll M'_\nu$ on $\tilde{\mathcal{P}}$ follows from (25.2) and (25.3). □

12.26 Theorem. *There exists a non-negative predictable function Y on $\tilde{\Omega}$ such that*

1) $\nu' = Y.\nu$ *is the dual predictable projection of* μ *under* P', *and for* P'-*almost all* ω *for all* $t > 0$

$$0 \le \nu'(\omega, \{t\} \times E) \le 1, \tag{26.1}$$

$$\nu(\omega, \{t\} \times E) = 1 \Rightarrow \nu'(\omega, \{t\} \times E) = 1. \tag{26.2}$$

2) $M_\mu[Z|\tilde{\mathcal{P}}] = Z_- Y$.

Proof. By Theorem 12.25 denote by Y the Radon-Nikodym derivative of M'_μ w.r.t. M'_ν on $\tilde{\mathcal{P}}$. Then for all $A \in \tilde{\mathcal{P}}$

$$M'_\mu(I_A) = M'_\nu(YI_A) = M'_{Y.\nu}(I_A).$$

This means $\nu' = Y.\nu$ is the dual predictable projection of μ under P'.

Denote $a_t = \nu(\{t\} \times E)$ and $a'_t = \nu'(\{t\} \times E)$. Put

$$Y' = \begin{cases} Y, & \text{if } a < 1, a' \le 1, \text{ or } a = a' = 1, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In order to prove (26.1) and (26.2), it suffices to prove that Y' and Y are P'-indistinguishable. We have already known that $[a' > 1]$ (resp. $[a > 1]$) is P'-evanescent (resp. P-evanescent). Therefore it is only required to prove that $[a = 1 \ne a']$ is P'-evanescent. Suppose there is a predictable time $T > 0$ such that $[\![T]\!] \subset [a = 1 \ne a']$ and $P'(T < \infty) > 0$. By Theorem 11.14 $[\![T]\!] \setminus D$ is P-evanescent, i.e., $P(\mu(\{T\} \times E) \ne 1, T < \infty) = 0$. Therefore For all $t > 0$ we have $P(\mu(\{T\} \times E) \ne 1, T \le t) = 0$, and therefore $P'(\mu(\{T\} \times E) \ne 1, T \le t) = 0$, $P'(\mu(\{T\} \times E) \ne 1, T < \infty) = 0$,

$$a'_T I_{[T<\infty]} = E'[\mu(\{T\} \times E) I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] = I_{[T<\infty]}, \quad P'\text{-a.s.},$$

i.e., $a'_T = 1$ P'-a.s. on $[T < \infty]$. This contradicts $[\![T]\!] \subset [a' \ne 1]$. Hence $[a = 1 \ne a']$ is P'-evanescent.

By (25.1) and (25.2) for all $A \in \tilde{\mathcal{P}}$

$$M_\mu(Z_- Y I_A) = M'_\nu(Y I_A) = M'_{\nu'}(I_A) = M'_\mu(I_A) = M_\mu(Z I_A).$$

Thus 2) is estabished. □

Remark. In fact, if Y is a non-negative predictable function on $\tilde{\Omega}$ such that $M_\mu[Z|\tilde{\mathcal{P}}] = Z_- Y$, then $Y.\nu$ is the compensator of μ under P', since for all $A \in \tilde{\mathcal{P}}$

$$M'_\mu(I_A) = M_\mu(Z I_A) = M_\mu(Z_- Y I_A) = M'_\nu(Y I_A) = M'_{Y.\nu}(I_A).$$

12.27 Lemma. *Suppose* $M = W * (\mu - \nu)$ $(W \in \mathcal{G}(\mu))$, $N \in \mathcal{M}_{loc,0}$, $V = M_\mu[\Delta N|\tilde{\mathcal{P}}]$ *and* $[M, N] \in \mathcal{A}_{loc}$. *Then*

$$\langle M, N\rangle = (VW) * \nu. \tag{27.1}$$

(*Note that here only the measure* P *is concerned.*)

Proof. Write $H = \langle M, N\rangle$. For any predictable time $T > 0$

$$\begin{aligned}\Delta H_T I_{[T<\infty]} &= E[\Delta[M, N]_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] = E[\Delta M_T \Delta N_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] \\ &= E[(W(T, \beta_T) I_D(T) - \widehat{W}_T)\Delta N_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] \\ &= E[\Delta N_T W(T, \beta_T) I_D(T)|\mathcal{F}_{T-}].\end{aligned}$$

Observe that $\Delta M_T \Delta N_T I_{[T<\infty]}$ and $\widehat{W}_T \Delta N_T I_{[T<\infty]}$ are σ-integrable w.r.t. $\mathcal{F}_{T-}$, then so is $\Delta N_T W(T, \beta_T) I_D(T)$. Furthermore, if $E[|\Delta N_T W(T, \beta_T) I_D(T)|] < \infty$, then for any bounded predictable process X

$$\begin{aligned}E[\Delta N_T W(T, \beta_T) I_D(T) X_T] &= E\Big[\int_{R_+ \times E} \Delta N W X I_{[\![T]\!]} d\mu\Big] \\ &= M_\mu(\Delta N W X I_{[\![T]\!]}) = M_\mu(V W X I_{[\![T]\!]}) = M_\nu(V W X I_{[\![T]\!]}) \\ &= E[(\widehat{VW})_T X_T I_{[T<\infty]}].\end{aligned}$$

Hence for any predictable time T

$$\Delta H_T I_{[T<\infty]} = E[\Delta N_T W(T, \beta_T) I_D(T)|\mathcal{F}_{T-}] = (\widehat{VW})_T I_{[T<\infty]} \quad \text{a.s.}.$$

Therefore $\Delta H = (\widehat{VW})$, and the purely discontinuous part of H is

$$H^d = \Sigma(\Delta H) = \Sigma(\widehat{VW}) = (VWI_J) * \nu, \tag{27.2}$$

where $J = [a > 0]$ is the predictable support of D.

Let K be a predictable process such that $K.[M, N] \in \mathcal{A}$. Noting that J is a thin set and $I_{J^c}.H^d = 0$ (by (27.2)), we have

$$\begin{aligned}E\Big[\int_0^\infty K_t dH_t^c\Big] &= E\Big[\int_0^\infty K_t I_{J^c}(t) dH_t^c\Big] = E\Big[\int_0^\infty K_t I_{J^c}(t) dH_t\Big] \\ &= E\Big[\int_0^\infty K_t I_{J^c}(t) d[M, N]_t\Big] = E\Big[\sum_{t>0} K_t \Delta M_t \Delta N_t I_{J^c}(t)\Big] \\ &= E\Big[\sum_{t>0} K_t W(t, \beta_t) \Delta N_t I_{J^c D}(t)\Big] = M_\mu(\Delta N W K I_{J^c}) \\ &= M_\mu(V W K I_{J^c}) = M_\nu(V W K I_{J^c}) = E\Big[\int_0^\infty K_t d((VWI_{J^c}) * \nu_t)\Big].\end{aligned}$$

Hence the continuous part of H is

$$H^c = (VWI_{J^c}) * \nu. \tag{27.3}$$

Then (27.1) follows from (27.2) and (27.3). □

Remark. If in the lemma the assumption $[M,N]\in\mathcal{A}_{loc}$ is replaced by $[M,N]\in\mathcal{A}^A_{loc}$, where A is a predictable set of interval type, then the dual predictable projection of $[M,N]$ on A is $\langle M,N\rangle=(VWI_A)*\nu$.

12.28 Theorem. *Suppose $M=W\overset{P}{*}(\mu-\nu)$ $(W\in\mathcal{G}(\mu,P))$ and $[M,Z]\in(\mathcal{A}_{loc}(P))^B$. Put $A=(W(Y-1))*\nu$. Then*

1) *A is P'-indistinguishable from $\frac{1}{Z_-}.\langle M,Z\rangle$,*

2) *$W\in\mathcal{G}(\mu,P')$ and*

$$W\overset{P'}{*}(\mu-\nu')=M-\frac{1}{Z_-}.\langle M,Z\rangle=M-A. \tag{28.1}$$

Proof. Denote $M'=M-\frac{1}{Z_-}.\langle M,Z\rangle$. By Corollary 12.16 $M'\in\mathcal{M}^d_{loc}(P')$. On the other hand, by Theorem 12.26 $M_\mu[\Delta Z|\tilde{\mathcal{P}}]=Z_-.(Y-1)$. By Lemma 12.27 $\langle M,Z\rangle=(Z_-W(Y-1))*\nu$. Thus under P', $A=\frac{1}{Z_-}.\langle M,Z\rangle$. Furthermore,

$$\begin{aligned}\Delta M'_t&=W(t,\beta_t)I_D(t)-\int_E W(t,x)\nu(\{t\},dx)\\&\quad-\int_E W(t,x)[Y(t,x)-1]\nu(\{t\},dx)\\&=W(t,\beta_t)I_D(t)-\int_E W(t,x)\nu'(\{t\},dx).\end{aligned}$$

Hence $W\in\mathcal{G}(\mu,P')$ and $M'=W\overset{P'}{*}(\mu-\nu')$. □

12.29 Theorem. *If ν' is P'-indistinguishable from ν, then*

1) $M_\mu[\Delta Z|\tilde{\mathcal{P}}]=0$,

2) *$\mathcal{G}(\mu,P)\subset\mathcal{G}(\mu,P')$, and for all $W\in\mathcal{G}(\mu,P)$ $W\overset{P'}{*}(\mu-\nu')$ is P'-indistinguishable from $W\overset{P}{*}(\mu-\nu)$.*

Proof. We may take $Y=1$. 1) follows immediately from Theorem 12.26. Let $W\in\mathcal{G}(\mu,P)$. By Theorem 11.19

$$A=\frac{|W-\widehat{W}|^2}{1+|W-\widehat{W}|}*\nu+\sum\Big(\frac{|\widehat{W}|^2}{1+|\widehat{W}|}(1-a)\Big)\in\mathcal{A}^+_{loc}(P).$$

Since under P', $\nu'=\nu$ and $a'=a$, $\widehat{W}$ may be used for P' as well. Under P', A is still a predictable process with locally integrable variation. Again by Theorem 11.19 $W\in\mathcal{G}(\mu,P')$.

Denote $M=W\overset{P}{*}(\mu-\nu)$ and $M'=W\overset{P'}{*}(\mu-\nu')$. Then $X=M-M'\in S(P')$. But ΔX is P'-indistinguishable from zero, so $X\in S_p(P')$ and $M\in S_p(P')$. By Theorem 12.20.2) $[M,Z]\in(\mathcal{A}_{loc}(P))^B$. Then by Theorem 12.28 under P' we have $M=M'$. □

12.30 Theorem. *Let $X\in S(P)$ and*

$$X=X_0+\alpha+X^c+(xI_{[|x|>1]})*\mu+(xI_{[|x|\le1]})*(\mu-\nu)$$

be its integral representation under P, where μ is the jump measure of X and (α,β,ν) is the predictable triplet of X under P. Then under P' the integral representation of X is

$$X=X_0+\alpha'+(X^c)'+(xI_{[|x|>1]})*\mu+(xI_{[|x|\le1]})*(\mu-\nu'),$$

where $(X^c)'=X^c-\frac{1}{Z_-}.\langle X^c,Z\rangle$. (α',β',ν') is the predictable triplet of X under P' which satisfies the following conditions:

i) $\alpha'=\alpha+\frac{1}{Z_-}.\langle X^c,Z\rangle+((Y-1)xI_{[|x|\le1]})*\nu$,

ii) $\beta'=\beta$,

iii) *$\nu'=Y.\nu$, where Y is a non-negative predictable function determined as in Theorem 12.26.*

Proof. Write $W=xI_{[|x|\le1]}$ and $M=W\overset{P}{*}(\mu-\nu)$. Since $|W|\le1$ and $|\Delta M|\le2$, we have $[M,Z]\in\mathcal{A}_{loc}(P)$. By Theorem 12.28

$$W\overset{P'}{*}(\mu-\nu')=W\overset{P}{*}(\mu-\nu)-(W(Y-1))*\nu.$$

By Corollary 12.15 $(X^c)'\in\mathcal{M}^c_{loc,0}(P')$ and $\beta'=\langle(X^c)'\rangle(P')=\langle X^c\rangle(P)=\beta$, $\nu'=Y.\nu$ follows from Theorem 12.26. After rearrangement we obtain immediately the integral representation of X under P' and the expression for α'. □

12.31 Theorem. *Let $X\in S(p)$, (α,β,ν) and (α',β',ν') be the predictable characteristics of X under P and P' respectively. Then (α,β,ν) and (α',β',ν') are P'-indistinguishable if and only if the following conditions are satisfied:*

i) $M_\mu[\Delta Z|\tilde{\mathcal{P}}]=0$,

ii) *$\langle X^c,Z\rangle$ is P-indistinguishable from zero.*

Proof. Under P', $\beta'=\beta$ holds always. By Theorem 11.26 and its remark we know that the condition i) is equivalent to $Y=1$, i.e., $\nu'=\nu$. Now by Theorem 12.30 and Corollary 12.7, $\alpha'=\alpha$ under P' $\Longleftrightarrow$

$\frac{1}{Z_-}\cdot\langle X^c, Z\rangle = 0$ under $P' \iff \langle X^c, Z\rangle = 0$ under $P' \iff \langle X^c, Z\rangle I_{[0,R[} = 0$ under $P \iff \langle X^c, Z\rangle = 0$ under P. The last equivalence takes place, since $Z = Z^R$ and $\langle X^c, Z\rangle$ is continuous. □

§4. The Characterization for Semimartingales

In this paragraph we suppose as usual that $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is a complete probability space equipped with a filtration $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfying the usual conditions. Denote by L^1 and L^∞ the spaces of all integrable r.v. and all bounded r.v. respectively. If G and H are subsets of L^1, denote $G - H = \{x - y : x \in G, y \in H\}$, and denote by $\overline{G}$ the closure of G in L^1.

12.32 Theorem. *Let K be a convex set in L^1 and $0 \in K$. Then the following three statements are equivalent:*

1) For all $\eta \in (L^1)^+\setminus\{0\}$, there exists $c > 0$ such that $c\eta \notin \overline{K - (L^\infty)^+}$.

2) For all $A \in \mathcal{F}$ with $P(A) > 0$ there exists $c > 0$ such that $cI_A \notin \overline{K - (L^\infty)^+}$.

3) There exists a $\zeta \in L^\infty$ such that $\zeta > 0$ a.s. and $\sup_{\xi\in K} E[\zeta\xi] < \infty$,

where $(L^1)^+$ and $(L^\infty)^+$ are the sets of all non-negative elements of L^1 and L^∞ respectively.

Proof. 1) $\Rightarrow$ 2) is trivial. 2) $\Rightarrow$ 3). Let $A \in \mathcal{F}$ and $P(A) > 0$. By the assumption there exists $c > 0$ such that $cI_A \notin \overline{K - (L^\infty)^+}$. Since $\overline{K - (L^\infty)^+}$ is convex and L^∞ is the dual space of L^1, by Ascoli-Mazur theorem there exists $\theta \in L^\infty$ such that

$$\sup_{\xi\in K, \eta\in(L^\infty)^+} E[\theta(\xi - \eta)] < cE[\theta I_A]. \tag{32.1}$$

Putting $\xi = 0$ and $\eta = a\theta^-$, $a > 0$, in (32.1) yields

$$aE[(\theta^-)^2] < cE[\theta I_A]. \tag{32.2}$$

Since (32.2) holds for all $a > 0$, we have $\theta^- = 0$, a.s., i.e., $\theta \in (L^\infty)^+$. Besides, it is obvious that $P(\theta > 0) > 0$. Replacing θ by $\frac{\theta}{E[\theta]}$ if necessary, we may assume $E[\theta] = 1$. Then by (32.1) we have

$$\sup_{\xi\in K} E[\theta\xi] < c.$$

Put $H = \{\theta \in (L^\infty)^+ : E[\theta] = 1 \text{ and } \sup_{\xi\in K} E[\theta\xi] < \infty\}$. We have shown H is non-empty. Put $\mathcal{C} = \{[\theta = 0] : \theta \in H\}$. We want to prove that $\mathcal{C}$ is closed under countable intersections. Let $(\theta_n) \subset H$ and $c_n = \sup_{\xi\in K} E[\theta_n\xi]$, $d_n = \|\theta_n\|_{L^\infty}$. Choose a sequence (b_n) of strictly positive reals such that

$$\sum_n b_n = 1, \sum_n c_n b_n < \infty, \sum_n b_n d_n < \infty.$$

Let $\theta = \sum_n b_n\theta_n$. Evidently, $\theta \in H$ and $[\theta = 0] = \bigcap_n [\theta_n = 0]$. This means $\mathcal{C}$ is closed under countable intersections. Thus there exists $\zeta \in H$ such that

$$P([\zeta = 0]) = \inf_{\theta\in H} P([\theta = 0]). \tag{32.3}$$

It remains to prove $\zeta > 0$, a.s.. If $P([\zeta = 0]) > 0$. Write $A = [\zeta = 0]$. By the result obtained in the above, there exists $\theta \in H$ such that (32.1) holds. Especially, we have $E[\theta I_{[\zeta=0]}] > 0$. This implies $P([\theta > 0] \cap [\zeta = 0]) > 0$. Hence $P([\theta = 0] \cap [\zeta = 0]) < P([\zeta = 0])$. However, $[\theta = 0] \cap [\zeta = 0] \in \mathcal{C}$. It contradicts (32.3).

3) $\Rightarrow$ 1). Suppose 1) is not true. Then there exists $\eta \in (L^1)^+ \setminus \{0\}$ such that for all $c > 0$ $c\eta \in \overline{K - (L^\infty)^+}$. For each n there exists $\xi_n \in K$, $\eta_n \in (L^\infty)^+$ and $\delta_n \in L^1$ such that $n\eta = \xi_n - \eta_n - \delta_n$ and $\|\delta_n\|_{L^1} < \frac{1}{n}$. We have $\xi_n \geq n\eta + \delta_n$, and for any strictly positive r.v. ζ

$$\sup_{\xi\in K} E[\zeta\xi] \geq \sup_n E[\zeta\xi_n] = +\infty.$$

This contradicts 3). Thus 1) holds. □

12.33 Theorem. *Let K be a convex set in L^1. If for any sequence $(\xi_n) \subset K$ we have $\frac{1}{n}\xi_n^+ \xrightarrow{P} 0$[1], then there exists $\zeta \in L^\infty$ such that $\zeta > 0$ a.s. and $\sup_{\xi\in K} E[\zeta\xi] < \infty$.*

Proof. First of all, we may assume $0 \in K$. Otherwise, we may take an arbitrary $\eta \in K$ and replace K by $\{x - \eta : x \in K\}$. Suppose the assertion 1) in Theorem 12.32 does not hold. From proof 3) $\Rightarrow$ 1) in Theorem 12.32 we know that there exist $\eta \in (L^1)^+ \setminus \{0\}$, $(\xi_n) \subset K$ and $(\delta_n) \subset L^1$ such that for each n, $\|\delta_n\|_{L^1} \leq \frac{1}{n}$ and $\frac{\xi_n}{n} \geq \eta + \frac{\delta_n}{n}$. This contradicts $\frac{1}{n}\xi_n^+ \xrightarrow{P} 0$. Therefore the assertion 1) in Theorem 12.32 is true, and we arrive at the required conclusion by Theorem 12.32. □

[1] It is easy to see that this condition is equivalent to the following one: for any given $\varepsilon > 0$ there exists $c > 0$ such that for all $\xi \in K$, $P(\xi > c) < \varepsilon$.

12.34 Definition. Denote by $\mathcal{H}$ the collection of all bounded predictable processes of the following form:

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{]t_i, t_{i+1}]},$$

where $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$, $\xi_i \in \mathcal{F}_{t_i}$, $|\xi_i| \leq 1$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Let X be a process. For every $H \in \mathcal{H}$ define a process $J(X, H)$ as follows:

$$J(X, H)_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (X_{t_i \wedge t} - X_{t_{i+1} \wedge t}), \quad t \geq 0.$$

Obivously, for every t the mapping $(X, H) \longmapsto J(X, H)_t$ is bilinear. Moreover, if X is a semimartingale, then $J(X, H) = H.X$.

The following theorem characterizes semimartingales.

12.35 Theorem. *Let X be an adapted cadlag process. In order for X to be a semimartingale it is necessary and sufficient that for every sequence $(H^{(n)}) \subset \mathcal{H}$ and all $t \geq 0$, $\frac{1}{n} J(X, H^{(n)})_t \xrightarrow{P} 0$.*

Proof. Necessity. let $X \in \mathcal{S}$, $(H^{(n)}) \subset \mathcal{H}$ and $t \geq 0$. Since $\left|\frac{1}{n} H^{(n)}\right| \leq 1/n$, by Theorem 9.30

$$\frac{1}{n} J(X, H^{(n)})_t = \left(\frac{H^{(n)}}{n}.X\right)_t \xrightarrow{P} 0.$$

Sufficiency. We want to show for all $t > 0$, $X^t = (X_{s \wedge t})_{s \geq 0} \in \mathcal{S}$. Since X is cadlag, $X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s| < \infty$. We may assume $E[X_t^*] < \infty$. Otherwise, we may replace P by an equivalent probability measure (the assumption remains true in this case). Put

$$K = \{J(X, H)_t : H \in \mathcal{H}\}.$$

Then K is a convex set in L^1. By the assumption, for every sequence $(\xi_n) \subset K$ we have $\frac{1}{n}\xi_n \xrightarrow{P} 0$. By Theorem 12.32 there exists a strictly positive bounded r.v. ζ such that $E[\zeta] = 1$ and $\sup_{\xi \in K} E[\zeta\xi] < \infty$. Set $dP' = \zeta dP$. Then P' is a probability measure, equivalent to P. Since ζ is bounded, $E'[X_t^*] = E[\zeta X_t^*] < \infty$. We will prove that X^t is a quasimartingale under P'. Let $\tau : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ be a finite partition of $[0, t]$. Put

$$H^{(\tau)} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{]t_i, t_{i+1}]}, \quad \xi_i = \mathrm{sgn}(E'[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]).$$

Then $H^{(\tau)} \in \mathcal{H}$ and

$$E'[J(X, H^{(\tau)})_t] = E'\left[\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\right]$$

$$= E'\left[\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i E'[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]\right] = E'\left[\sum_{i=0}^{n-1} |E'[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]|\right].$$

Hence we have

$$\mathrm{Var}(X^t, P') = \sup_\tau E'\left[\sum_{i=0}^{n-1} |E'[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]|\right] + E'[|X_t|]$$

$$= \sup_\tau E'[J(X, H^{(\tau)})_t] + E'[|X_t|]$$

$$= \sup_\tau E[\zeta J(X, H^{(\tau)})_t] + E[\zeta |X_t|] < \infty.$$

This means under P', X^t is a quasimartingale. Therefore, for all $t > 0$ $X^t \in \mathcal{S}$, and hence $X \in \mathcal{S}$. □

12.36 Theorem. *Let $G = (\mathcal{G}_t)$ be a filtration satisfying the usual conditions such that for all $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. Suppose X is an F-semimartingale and G-adapted. Then X is a G-semimartingale, $[X](F)$ and $[X](G)$ are indistinguishable.*

Proof. Put

$$\mathcal{H}(G) = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{]t_i, t_{i+1}]} : \begin{array}{l} 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty, \xi_i \in \mathcal{G}_{t_i}, \\ |\xi_i| \leq 1, \ i = 0, \cdots, n-1, \ n \geq 1 \end{array} \right\}.$$

Then $\mathcal{H}(G) \subset \mathcal{H}$. For every $(H^{(n)}) \subset \mathcal{H}(G) \subset \mathcal{H}$, by Theorem 12.35 we have for all $t \geq 0$

$$\frac{1}{n} J(X, H^{(n)})_t \xrightarrow{P} 0,$$

because X is an F-semimartingale. Again by Theorem 12.35, X is also a G-semimartingale. Since $[X]_t$ is the limit in probability of sums of quadratic differences of X on $[0, t]$, it does not depend on filtrations. □

12.37 Theorem. *Let $G = (\mathcal{G}_t)$ be a filtration satisfying the usual conditions such that for all $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. Suppose X is an F-semimartingale and G-adapted. Let H be a G-predictable process such that H is integrable w.r.t. X and F (the integral is denoted by $H \overset{F}{.} X$), then H is also integrable w.r.t. X and G (the integral is denote by $H \overset{G}{.} X$), $H \overset{F}{.} X$ and $H \overset{G}{.} X$ are indistinguishable.*

Proof. First, we show the integrability of H w.r.t. X and G. Set

$$A = \sum (\Delta X I_{[|\Delta X| > 1 \text{ or } |H \Delta X| > 1]}), \quad Z = X - A.$$

By replacing $\boldsymbol{P}$ with an equivalent probability measure, if necessary, we may suppose the two $\boldsymbol{F}$-special semimartingales Z and $H^{\boldsymbol{F}}Z$ have the following canonical decompositions:

$$Z = N + B, \quad H^{\boldsymbol{F}}Z = N' + B',$$

where N and N' are $\boldsymbol{F}$-martingales, B and B' are $\boldsymbol{F}$-predictable processes with finite variation and $B_0 = B'_0 = 0$ such that for all $t > 0$

$$\boldsymbol{E}\Big[\int_0^t |dB_s|\Big] < \infty, \boldsymbol{E}\Big[\int_0^t |dB'_s|\Big] < \infty \text{ (refer to Problem 12.12).}$$

By Theorem 9.16 we have $B' = H.B$. Thus for all $t > 0$, $\boldsymbol{E}\Big[\int_0^t |H_s||dB_s|\Big] < \infty$. Let $\tilde{B}$ be the dual predictable projection of B w.r.t. $\boldsymbol{G}$. Then for all $t > 0$, $\boldsymbol{E}\Big[\int_0^t |H_s||d\tilde{B}_s|\Big] < \infty$, i.e., $H.\tilde{B}$ exists. By Theorem 5.30.2) for $s < t$

$$\boldsymbol{E}[B_t - \tilde{B}_t|\mathcal{G}_s] = \boldsymbol{E}[B_s - \tilde{B}_s|\mathcal{G}_s] \quad \text{a.s.,}$$

and therefore (noting that $Z = N + B$ is $\boldsymbol{G}$-adapted)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[N_t + B_t - \tilde{B}_t|\mathcal{G}_s] &= \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[N_t|\mathcal{F}_s]|\mathcal{G}_s] + \boldsymbol{E}[B_t - \tilde{B}_t|\mathcal{G}_s] \\ &= \boldsymbol{E}[N_s + B_s - \tilde{B}_s|\mathcal{G}_s] = N_s + B_s - \tilde{B}_s \quad \text{a.s..}\end{aligned}$$

Hence $N + B - \tilde{B}$ is a $\boldsymbol{G}$-martingale. Since $\sqrt{H^2.[N + B - \tilde{B}]} \leq \sqrt{H^2.[Z]} + \Sigma(|H\Delta\tilde{B}|)$ and $|H\Delta Z| \leq 1$, $\sqrt{H^2.[N + B - \tilde{B}]}$ is locally integrable w.r.t. $\boldsymbol{G}$, i.e., $H^{\boldsymbol{G}}(N + B - \tilde{B})$ exists. Therefore, H is integrable w.r.t. X and $\boldsymbol{G}$, and $H^{\boldsymbol{G}}X = H^{\boldsymbol{G}}(N + B - \tilde{B}) + H.(A + \tilde{B})$, where the second term on the right-hand side is a Stieltjes integral.

Now we show that $H^{\boldsymbol{F}}X$ and $H^{\boldsymbol{G}}X$ are indistinguishable. By Theorem 9.30 and its remark we may assume that H is bounded. Put $\mathcal{C} = \{[0_A]: A \in \mathcal{G}_0\} \cup \{]T, \infty[: T \text{ is a } \boldsymbol{G}\text{-stopping time}\}$. Obviously, for all $A \in \mathcal{C}$, $I_A{}^{\boldsymbol{F}}X$ and $I_A{}^{\boldsymbol{G}}X$ are indistinguishable. Then by the monotone class argument we arrive at the desired conclusion. □

12.38 Definition. Assume on the basic space $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ a right-continuous filtration $\boldsymbol{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ with $\mathcal{F}_\infty^0 = \mathcal{F}^0$ and a process $X = (X_t)_{t\geq 0}$ are given. A probability measure $\boldsymbol{P}$ on $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ is called a *semimartingale (resp. martingale) measure w.r.t.* $(X, \boldsymbol{F}^0)$ if under $\boldsymbol{P}$, X is an $(\boldsymbol{F}^0)^{\boldsymbol{P}}$-semimartingale (resp. local martingale). A semimartingale (resp. martingale) measure w.r.t. $(X, \boldsymbol{F}^0)$ is also called a *solution of semimartingale (resp. martingale) problem* $(X, \boldsymbol{F}^0)$. The collection of all solutions of semimartingale (resp. martingale) problem $(X, \boldsymbol{F}^0)$ is

denoted by $\Gamma_s(X, \boldsymbol{F}^0)$ (resp. $\Gamma_m(X, \boldsymbol{F}^0)$). The definition of semimartingale (resp. martingale) problem can be extended naturally to the case of a family $\{X^\theta, \theta \in \Xi\}$ of processes.

For example, suppose on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ a continuous process $W = (W_t)$ with $W_0 = 0$ is given such that W is a standard Wiener process w.r.t. its natural filtration. Set

$$\mathcal{F}_t^0 = \bigcap_{s>t} \sigma\{W_r, r \leq s\}, t \geq 0, \quad \mathcal{F}^0 = \mathcal{F}_\infty^0,$$

$$X_t^1 = W_t, \quad X_t^2 = W_t^2 - t, \quad t \geq 0.$$

Then by Corollaries 11.39 and 11.37 $\boldsymbol{P}$ is the unique solution of martingale problem $(\{X^1, X^2\}, \boldsymbol{F}^0)$.

Furthermore, we assume

i) F is a probability distribution on $\boldsymbol{R}$,

ii) α and β are two processes with $\alpha_0 = \beta_0 = 0$,

iii) ν is a random measure with $\nu(\{0\} \times E) = \nu(\boldsymbol{R}_+ \times \{0\}) = 0$.

A probability measure $\boldsymbol{P}$ on $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ is called a *solution of semimartingale problem* $(X, \boldsymbol{F}^0; F, \alpha, \beta, \nu)$ if under $\boldsymbol{P}$, X is an $(\boldsymbol{F}^0)^{\boldsymbol{P}}$ semimartingale with F as its initial law (i.e. the law of X_0) and (α, β, ν) as its predictable characteristics. The collection of all solutions of semimartingale problem $(X, \boldsymbol{F}^0; F, \alpha, \beta, \nu)$ is denoted by $\Gamma_s(X, \boldsymbol{F}^0; F, \alpha, \beta, \nu)$.

12.39 Theorem. *Let $(\Omega, \mathcal{F}^0)$, $\boldsymbol{F}^0$ and X be given as in Definition 12.38. If $(\boldsymbol{P}_n) \subset \Gamma_s(X, \boldsymbol{F}^0)$ and $\boldsymbol{P}'$ is a probability measure on $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ such that $\boldsymbol{P}'$ is absolutely continuous w.r.t. $\sum_n \boldsymbol{P}_n$, then $\boldsymbol{P}' \in \Gamma_s(X, \boldsymbol{F}^0)$.*

In particular, $\Gamma_s(X, \boldsymbol{F}^0)$ is convex.

Proof. Put

$$\mathcal{H}^0 = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{]t_i, t_{i+1}]} : \begin{array}{c} 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty, \xi_i \in \mathcal{F}_{t_i}^0, \\ |\xi_i| \leq 1, \ i = 0, \cdots, n-1, \ n \geq 1 \end{array} \right\}.$$

and $\boldsymbol{P} = \sum_n \lambda_n \boldsymbol{P}_n$, where $\lambda_n > 0$, $n \geq 1$, and $\sum_n \lambda_n = 1$.

For every $(H^{(k)}) \subset \mathcal{H}^0$ and $t \geq 0$, by Theorem 12.35 for all n

$$\tfrac{1}{k} J(X, H^{(k)}))_t \xrightarrow{\boldsymbol{P}_n} 0, \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

It is easy to see that we have

$$\tfrac{1}{k} J(X, H^{(k)})_t \xrightarrow{\boldsymbol{P}} 0, \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

However, $P' \not\ll P$. So we have

$$\tfrac{1}{k} J(X, H^{(k)})_t \xrightarrow{P'} 0, \quad \text{as} \quad k \to \infty,$$

as well. Again by Theorem 12.35 we know $P' \in \Gamma_s(X, F^0)$.

If $P_1, P_2 \in \Gamma_s(X, F^0)$, and $P = \alpha P_1 + (1-\alpha) P_2$, $0 < \alpha < 1$, then $P \ll P_1 + P_2$, and therefore $P \in \Gamma_s(X, F^0)$. □

12.40 Theorem. *Let $(\Omega, \mathcal{F}^0)$, F^0, X, F, α, β, ν be given as in Definiton 12.38. Then $\Gamma_s(X, F^0; F, \alpha, \beta, \nu)$ is convex.*

Proof. Let $P_1, P_2 \in \Gamma_s(X, F^0; F, \alpha, \beta, \nu)$, and $P = \alpha P_1 + (1-\alpha) P_2$, $0 < \alpha < 1$. First of all, F is still the law of X_0 under P. Let μ be the jump measure of X. Then $M_\mu(P) = \alpha M_\mu(P_1) + (1-\alpha) M_\mu(P_2)$, and on $\tilde{\mathcal{P}}$, $M_\nu(P) = \alpha M_\nu(P_1) + (1-\alpha) M_\nu(P_2) = M_\mu(P)$. This means ν is still the dual predictable projection of μ under P. Let (α', β', ν) be the predictable triplet of X under P. By Theorem 12.30 under both P_1 and P_2 β is indistinguishable from β', and therefore β is indistinguishable from β' under P. By Theorem 12.29 $(xI_{[|x|\leq 1]}) \overset{P_1}{*} (\mu - \nu)$ is P_1-indistinguishable from $(xI_{[|x|\leq 1]}) \overset{P}{*} (\mu - \nu)$, $(xI_{[|x|\leq 1]}) \overset{P_2}{*} (\mu - \nu)$ is P_2-indistinguishable from $(xI_{[|x|\leq 1]}) \overset{P}{*} (\mu - \nu)$. Therefore $X - X_0 - \alpha - (xI_{[|x|>1]}) * \mu - (xI_{[|x|\leq 1]}) \overset{P}{*} (\mu - \nu)$ is a continuous local martingale under both P_1 and P_2, and it is a continuous local martingale under P, i.e., α' is indistinguishable from α under P. In a word, (α, β, ν) is the predictable triplet of X under P. Hence $P \in \Gamma_s(X, F^0, F, \alpha, \beta, \nu)$. □

Problems and Complements

12.1 Let ξ be a r.v. defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. There exists another probability measure P' on $(\Omega, \mathcal{F})$ such that $P' \sim P$, $\frac{dP'}{dP}$ is bounded, and for all n, $E'[|\xi|^n] < \infty$.

12.2 Let (ξ_n) be a sequence of r.v. defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Suppose $\lim_{n,m\to\infty} E[|\xi_n - \xi_m| \wedge 1] = 0$. There exists another probability measure P' on $(\Omega, \mathcal{F})$ such that $P' \sim P$, $\frac{dP'}{dP}$ is bounded, and for all $p \geq 1$ $\lim_{n,m\to\infty} E'[|\xi_n - \xi_m|^p] = 0$.

12.3 Let $X \in \mathcal{M}_{loc}(P)$, $A = \Sigma(\Delta X I_{[|\Delta X|>1]})$, $\tilde{A}$ be the dual predictable projection of A under P. Assume $P' \overset{loc}{\ll} P$ and Z is the density

process of P' w.r.t. P. Put $Y = X - \frac{1}{Z_-}.\langle X - A, Z\rangle - A + \tilde{A}$. Then $Y \in \mathcal{M}_{loc}(P')$. Furthermore, $X \in \mathcal{S}_p(P')$ if and only if $A \in \mathcal{A}_{loc}(P')$.

12.4 Let $M, X \in \mathcal{M}_{loc}(P)$. Assume that $\langle X, M\rangle$ exists and $\mathcal{E}(M)$ is a non-negative uniformly integrable martingale under P. Set $dP' = \mathcal{E}(M)_\infty dP$. Then $X - \langle X, M\rangle \in \mathcal{M}_{loc}(P')$.

12.5 Let W be a standard Wiener process and H be an adapted measurable process. If $E[\exp(\frac{1}{2}\int_0^\infty H_s^2 ds)] < \infty$ and $dP' = \mathcal{E}(H.W)_\infty dP$, then $(W_t - \int_0^t H_s ds)$ is a standard Wiener process under P'.

12.6 Assume that $P' \overset{loc}{\ll} P$ and Z is the density process of P' w.r.t. P. Let $A \in \mathcal{V}(P)$, $[A, Z] \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B$. Then $A \in \mathcal{A}_{loc}(P') \iff A \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B$. In this case, $\tilde{A}(P') = \tilde{A}(P) + \frac{1}{Z_-}.\langle A, Z\rangle$.

12.7 Assume that $P' \overset{loc}{\ll} P$ and Z is the density process of P' w.r.t. P. Let $A \in \mathcal{V}_0(P)$ and $C = Z.A$. Then $A \in \mathcal{A}_{loc}(P') \iff C \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^B$. In this case, $\tilde{A}(P') = \frac{1}{Z_-}.\tilde{C}(P)$.

12.8 Let $A \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{S}$ and $H \in L(X)$. If for all $\omega \in A$, $X_\cdot(\omega)$ is a function with finite variation and $Y = XI_A$, then the Stieltjes integral $H.Y$ exists, and on A, $H.X$ is indistinguishable from $H.Y$.

12.9 Let $A \in \mathcal{F}$, and $X, Y \in \mathcal{S}$.

1) If on A, $X - Y$ is a process with finite variation and $X_0 = Y_0$, then on A, X^c and Y^c are indistinguishable.

2) If on A, $X - Y$ is a continuous process with finite variation and $X_0 = Y_0$, then on A, $[X]$ and $[Y]$ are indistinguishable.

12.10 Let $X = (X_t)$ be an adapted cadlag process and for all $t > 0$, $E[|X_t|] < \infty$. Put $K_a = \{J(X, H)_a : H = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{]t_i, t_{i+1}]}, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = a, \xi_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ is bounded, $i = 0, \cdots, n-1, n \geq 1\}$, $a > 0$. Then the following three statements are equivalent:

1) There exists a probability measure $P' \sim P$ such that $\frac{dP'}{dP} \in L^\infty$ and under P', $X^a = (X_{t\wedge a})_{t\geq 0}$ is a martingale.

2) For all $A \in \mathcal{F}$ with $P(A) > 0$, $I_A \notin \overline{K_a - (L^\infty)^+}$.

3) $(L^1)^+ \cap \overline{K_a - (L^\infty)^+} = \{0\}$.

12.11 Let $X = (X_t)$ be an adapted continuous process and for all $t \geq 0$, $E[|X_t|] < \infty$. K_a, $a > 0$, is defined as in the previous problem. In order that there exist a probability $P' \sim P$ such that $\frac{dP'}{dP} \in L^\infty$ and under P', $X^a = (X_{t\wedge a})$ is a martingale, it is necessary and sufficient that $(L^1)^+ \cap \overline{K_a} = \{0\}$.

12.12 Let $X \in \mathcal{S}$. Then there exists a probability measure P' such that $P' \sim P$, $\frac{dP'}{dP} \in L^\infty$, $X \in \mathcal{S}_p(P')$ and the canonical decomposition $X = M + A$ of X under P' satisfies the following conditions: for all $t > 0$ $M^t = (M_{s\wedge t})_{s\geq 0} \in \mathcal{M}^2(P')$ and $A^t = (A_{s\wedge t})_{s\geq 0} \in \mathcal{A}(P')$.

12.13 Let X be an adapted cadlag process. Set

$$\mathcal{K} = \left\{ K = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{[T_i, T_{i+1}[} : \begin{array}{c} 0 = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_n,\ T_i,\ 1 \leq i \leq n, \\ \text{are stopping times, } \xi_i \in \mathcal{F}_{T_i}, \\ |\xi_i| \leq 1,\ i = 0, \cdots, n-1,\ n > 1 \end{array} \right\}.$$

$$J^0(X, K)_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} [\xi_j (X_{T_{j+1}-} - X_{T_j-})] + \xi_i (X_t - X_{T_i-}), \\ \qquad T_i \leq t < T_{i+1}, i = 0, \cdots, n-1, \\ \sum_{j=0}^{n-1} [\xi_j (X_{T_{j+1}-} - X_{T_j-}), \qquad T_n \leq t. \end{cases}$$

Then the following statements are equivalent:

1) X is a semimartingale, and for all $t > 0$, $\sum_{s\leq t} |\Delta X_s| < \infty$ a.s..

2) For all $(K^{(n)}) \subset \mathcal{K}$ and $t > 0$ $\frac{1}{n} J^0(X, K^{(n)})_t \xrightarrow{P} 0$,

3) There exists an adapted increasing process A such that for any stopping time T and $K \in \mathcal{K}$ $\boldsymbol{E}[(J^0(X, K)^*_{T-})^2] \leq \boldsymbol{E}[A_{T-}(K^2.A)_{T-}]$.

12.14 Let X be an adapted cadlag process. Suppose there exists a sequence (R_n) of r.v. with $R_n \uparrow \infty$ and a sequence $(X^{(n)})$ of semimartingales such that for each n $X_t = X_t^{(n)}$, $t < R_n$. Then X is a semimartingale.

12.15 Let $\{A_1, A_2, \cdots\}$ be a countable partition of Ω. Set $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma\{A_1, A_2, \cdots\}$, $t \geq 0$. Then an $(\mathcal{F}_t)$-semimartingale is also a $(\mathcal{G}_t)$-semimartingale.

12.16 On the basic space $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ a right-continuous filtration $\boldsymbol{F}^0$ and an $\boldsymbol{F}^0$-adapted process X are given. Let $\boldsymbol{P}$ be a probability measure on $(\Omega, \mathcal{F}^0)$. For $A \in \mathcal{F}^0$ with $\boldsymbol{P}(A) > 0$ define $\boldsymbol{P}_A(.) = \boldsymbol{P}(\cdot \cap A)/\boldsymbol{P}(A)$. If $\mathcal{C} = \{A : \boldsymbol{P}_A \in \Gamma_s(X, \boldsymbol{F}^0)\}$ is non-empty and $B = \text{ess sup}\,\mathcal{C}$, then $B \in \mathcal{C}$.

12.17 Let $(\Omega, \mathcal{F}^0)$, $\boldsymbol{F}^0$ and X be given as in the previous problem. Then $\Gamma(X, \boldsymbol{F}^0) = \{\boldsymbol{P} : \boldsymbol{P}$ is a probability measure on $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ and $X \in \mathcal{M}(\boldsymbol{P})\}$ is convex.

12.18 Let $(\Omega, \mathcal{F}^0)$, $\boldsymbol{F}^0$ and X be given as in the previous problem. Let C be an $\boldsymbol{F}^0$-predictable increasing process with bounded ΔC. Then $\Gamma^2_m(X, \boldsymbol{F}^0; C) = \{\boldsymbol{P} : \boldsymbol{P}$ is a probability on $(\Omega, \mathcal{F}^0)$, $X \in \mathcal{M}^2_{loc}(\boldsymbol{P})$ and $\langle X\rangle(\boldsymbol{P}) = C\}$ is convex.

Chapter XIII

Predictable Representation Property

Predictable representation property means that every local martingale can be represented as a stochastic integral of a predictable process. It is meaningful and important not only theoretically, but also in applications, such as filtering, control.

In this chapter, we are given a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ endowed with a filtration $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfying the usual conditions and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$.

§1. The Strong Property of Predictable Representation

13.1 Definition. Let $M = (M_t)_{t\geq 0}$ be a local martingale with $M_0 = 0$. Recall that $L_m(M)$ is the collection of all predictable processes, integrable w.r.t. M in the sense of local martingales. Write

$$\mathcal{L}(M) = \{H.M : H \in L_m(M)\}, \quad \mathcal{L}^1(M) = \mathcal{L}(M) \cap \mathcal{H}^1.$$

If $\mathcal{L}(M) = \mathcal{M}_{loc,0}$, we say that M has the *strong property of predictable representation*. Here we use the adjective "strong" because we will introduce another weaker kind of predictable representation property in the next paragraph.

13.2 Lemma. *Assume $M, L \in \mathcal{M}_{loc,0}$. If there exists a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ such that for each n, $L^{T_n} \in \mathcal{L}(M)$ then $L \in \mathcal{L}(M)$.*

Proof. Let $L^{T_n} = H^{(n)}.M$, where $H^{(n)} \in L_m(M)$. Set $H = \sum_{n=1}^{\infty} H^{(n)} I_{]T_{n-1}, T_n]}$, $(T_0 = 0)$. It is easy to see that $H \in L_m(M)$ and $L = H.M$. □

13.3 Lemma. *Assume $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Then $\mathcal{L}^1(M)$ is a stable closed subspace of $\mathcal{H}^1$.*

Proof. Obviously, $\mathcal{L}^1(M)$ is a stable vector space. It suffices to prove the completeness of $\mathcal{L}^1(M)$. Let $(H^{(n)}.M)_{n\geq 1}$ be a fundamental sequence of $\mathcal{L}^1(M)$ satisfying

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|H^{(n+1)}.M - H^{(n)}.M\|_{\mathcal{H}^1} < \infty \quad (H^{(0)} = 0).$$

So for all $t > 0$

$$\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} |H_s^{(n+1)} - H_s^{(n)}| d[M]_s \leq \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_0^t |H_s^{(n+1)} - H_s^{(n)}|^2 d[M]_s \Big)^{1/2} ([M]_t)^{1/2}.$$

Write $A = \Big[\sum_{n=0}^{\infty} |H^{(n+1)} - H^{(n)}| < \infty \Big]$ and $H = I_A \sum_{n=0}^{\infty} (H^{(n+1)} - H^{(n)})$. Then A and H are predictable, and $P\Big(\int_0^\infty I_{A^c} d[M]_s = 0 \Big) = 1$. Hence

$$\begin{aligned} E\Big[\Big(\int_0^\infty H_s^2 d[M]_s \Big)^{1/2} \Big] &\leq E\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_0^\infty |H_s^{(n+1)} - H_s^{(n)}|^2 d[M]_s \Big)^{1/2} \Big] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \|H^{(n+1)}.M - H^{(n)}.M\|_{\mathcal{H}^1} < \infty, \end{aligned}$$

i.e., $H.M \in \mathcal{L}^1(M)$. At the same time, as $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \|H.M - H^{(n)}.M\|_{\mathcal{H}^1} &= \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} (H^{(k+1)} - H^{(k)}).M \Big\|_{\mathcal{H}^1} \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \|(H^{(k+1)} - H^{(k)}).M\|_{\mathcal{H}^1} \to 0, \end{aligned}$$

so that $H^{(n)}.M \to H.M$. □

13.4 Theorem. *Assume $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Then the following statements are equivalent:*

1) *$\mathcal{L}(M) = \mathcal{M}_{loc,0}$, i.e., M has the strong property of predictable representation,*

2) *$\mathcal{L}^1(M) = \mathcal{M}_0^1$.*

3) *$\mathcal{M}_0^\infty \subset \mathcal{L}(M)$ ($\mathcal{M}^\infty$ is the collection of all bounded martingales).*

Proof. Since $\mathcal{M}_{loc,0} = \mathcal{H}^1_{loc,0}$, by Lemma 13.2 2)⇒1) follows immediately. 1)⇒3) is trivial. Finally, we are to show 3)⇒2). Let $L \in \mathcal{H}_0^1$. Because $\mathcal{M}_0^\infty$ is dense in $\mathcal{H}_0^1$ (Theorem 10.5), so there exists $(N^{(n)}) \subset \mathcal{M}_0^\infty$ such that $\|N^{(n)} - L\|_{\mathcal{H}^1} \to 0$. However, $N^{(n)} \in \mathcal{L}^1(M)$. By Lemma 13.3 we obtain $L \in \mathcal{L}^1(M)$. □

13.5 Theorem. *Assume $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Then the following statements are equivalent:*

1) *$\mathcal{L}(M) = \mathcal{M}_{loc,0}$, i.e., M has the strong property of predictable representation,*

2) *for all $L \in \mathcal{M}_{loc,0}$, $LM \subset \mathcal{M}_{loc,0} \Rightarrow L = 0$,*

3) *for all $N \in \mathcal{M}_0^\infty$, $NM \in \mathcal{M}_{loc,0} \Rightarrow N = 0$.*

Proof. 1)⇒2). Let $L, LM \in \mathcal{M}_{loc,0}$. By the strong property of predictable representation we have $L = H.M$, $H \in L_m(M)$. So $[L, M] = H.[M]$. Since $LM \in \mathcal{M}_{loc,0}$, $[L, M] \in \mathcal{M}_{loc,0}$, i.e., $[L, M] \in \mathcal{W}_{loc,0}$. Thus we know the Stieltjes integral

$$(H I_{[|H|\leq n]}).[L, M] = (H^2 I_{[|H|\leq n]}).[M] \in \mathcal{M}_{loc,0}$$

However, $(H^2 I_{[|H|\leq n]}).[M] \in \mathcal{V}^+$. Therefore, it must be zero. Letting $n \to \infty$, we find $H^2.[M] = 0$, i.e., $[L] = 0$. Thus $L = 0$.

2)⇒3) is trivial.

3)⇒1). By Theorem 13.4 it suffices to show $\mathcal{L}^1(M) = \mathcal{H}_0^1$. Let φ be a bounded linear functional on $\mathcal{H}_0^1$ such that $\varphi|_{\mathcal{H}_0^1} = 0$. We are going to show $\varphi = 0$. There exists $N \in BMO_0$ such that

$$\varphi(L) = E[[L, N]_\infty], \quad L \in \mathcal{H}_0^1$$

(Theorem 10.21). Since for all $L \in \mathcal{L}^1(M)$ $E[[L, N]_\infty] = 0$, for every stopping time T

$$E[[L, N]_T] = E[[L^T, N]_\infty] = 0.$$

Thus $[L, N] \in \mathcal{M}_0$. Because $BMO_{loc} = \mathcal{M}_{loc}^\infty$ and $\mathcal{M}_{loc,0} = \mathcal{H}^1_{loc,0}$, there exists a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ such that for each n, $M^{T_n} \in \mathcal{H}_0^1$ and $N^{T_n} \in \mathcal{M}_0^\infty$. Noting $M^{T_n} = I_{[0,T_n]}.M \in \mathcal{L}^1(M)$, we have $[M^{T_n}, N] \in \mathcal{M}_0$, $[N^{T_n}, M] \in \mathcal{M}_0$ and $MN^{T_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}$. By the assumption we obtain $N^{T_n} = 0$. So $N = 0$, and therefore $\varphi = 0$. □

13.6 Corollary. *Assume $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Then the following statements are equivalent:*

1) *$\mathcal{L}(M) = \mathcal{M}_{loc,0}$,*

2) *for all $L \in \mathcal{M}_{loc}$ with $L_0 = 1$, $LM \in \mathcal{M}_{loc} \Rightarrow L = 1$,*

3) *for all strictly positive $L \in \mathcal{M}_{loc}$ with $L_0 = 1$, $LM \in \mathcal{M}_{loc} \Rightarrow L = 1$.*

Proof. 1)⇒2). Let $L, LM \in \mathcal{M}_{loc}$ and $L_0 = 1$. Then $N = L - 1 \in \mathcal{M}_{loc,0}$ and $NM = LM - M \in \mathcal{M}_{loc,0}$. By Theorem 13.5 we have $N = 0$, i.e., $L = 1$.

2)⇒3) is trivial.

3)⇒1). Let $N \in \mathcal{M}_0^\infty$ and $NM \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Let k be a constant such that $|N| \leq k$. Set $L = 1 + \frac{N}{2k}$. Then $L \in \mathcal{M}_{loc}$, $LM = M + \frac{MN}{2k} \in \mathcal{M}_{loc}$, $L_0 = 1$

and $L > 0$. Thus $L = 1$, i.e., $N = 0$. By Theorem 13.5 this implies M has the strong property of predictable representation. □

13.7 Theorem. *Assume $M \in \mathcal{M}^c_{loc,0}$. Then the following statements are equivalent:*

1) $\mathcal{L}(M) = \mathcal{M}^c_{loc,0}$;

2) $\mathcal{L}^1(M) = \mathcal{H}_0^{1,c}$ *($\mathcal{H}_0^{1,c}$ is the subspace of all continuous $\mathcal{H}_0^1$-martingales),*

3) $\mathcal{M}^{\infty,c} \subset \mathcal{L}(M)$ *($\mathcal{M}^{\infty,c}$ is the space of all bounded continuous martingales),*

4) *for all* $L \in \mathcal{M}^c_{loc,0}$, $LM \in \mathcal{M}_{loc,0} \Rightarrow L = 0$,

5) *for all* $N \in \mathcal{M}^{\infty,c}$, $NM \in \mathcal{M}_{loc,0} \Rightarrow N = 0$.

Proof. 1)$\Longleftrightarrow$2)$\Longleftrightarrow$3) can be shown the same as Theorem 13.4.

1)$\Rightarrow$4). Let $L \in \mathcal{M}^c_{loc,0}$ and $LM \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Then $L = H.M$, $H \in L_m(M)$ and $\langle L, M\rangle = H.\langle M\rangle$. However, $\langle L, M\rangle \in \mathcal{M}_{loc,0}$. It is both purely discontinuous and continuous. It must be $\langle L, M\rangle = 0$. Then $H^2.\langle M\rangle = H.\langle L, M\rangle = 0$, and hence $L = H.M = 0$.

4)$\Rightarrow$5) is trivial.

5)$\Rightarrow$2). $\mathcal{H}_0^{1,c}$ is a closed subspace of $\mathcal{H}_0^1$ (cf. Problem 10.3). Let φ be a bounded linear functional on $\mathcal{H}_0^{1,c}$ such that $\varphi|_{\mathcal{L}^1(M)} = 0$. We are going to show $\varphi = 0$. φ can be extended to be a bounded linear functional on $\mathcal{H}_0^1$, and there is $N \in BMO_0$ such that

$$\varphi(L) = E[[L, N]_\infty], \quad L \in \mathcal{H}_0^1.$$

Then

$$\varphi(L) = E[\langle L, N^c\rangle_\infty], \quad L \in \mathcal{H}_0^{1,c}. \tag{7.1}$$

Hence for $L \in \mathcal{L}^1(M)$ we have $LN^c \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Take a sequence (T_n) of stopping times with $T_n \uparrow \infty$ such that for each n, $M^{T_n} \in \mathcal{H}_0^{1,c}$ and $(N^c)^{T_n} \in \mathcal{M}_0^{\infty,c}$. But $M^{T_n} \in \mathcal{L}^1(M)$, so $M^{T_n}N^c \in \mathcal{M}_{loc,0}$ and $0 = \langle M^{T_n}, N^c\rangle = \langle M, (N^c)^{T_n}\rangle$. Thus $M(N^c)^{T_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}$. By the assumption $(N^c)^{T_n} = 0$. Therefore $N^c = 0$. By (7.1) $\varphi|_{\mathcal{H}_0^{1,c}} = 0$. □

13.8 Lemma. *Assume $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$ has the strong property of predictable representation. Then for any stopping time T, M^T has the strong property of predictable representation w.r.t. $(\mathcal{F}_{t\wedge T})_{t\geq 0}$.*

Proof. Write $\boldsymbol{F}^T = (\mathcal{F}_{t\wedge T})_{t\geq 0}$. It is not hard to justify that if L is a uniformly integrable $\boldsymbol{F}^T$-martingale, L is also a uniformly integrable $\boldsymbol{F}$-martingale and $L = L^T$. Hence if L is an $\boldsymbol{F}^T$-local martingale, then L is also an $\boldsymbol{F}$-local martingale and $L = L^T$. And if L is an $\boldsymbol{F}$-local martingale, then L^T is an $\boldsymbol{F}^T$-local martingale (see Theorem 3.53). Now let L and LM^T be $\boldsymbol{F}^T$-martingales with $L_0 = 0$. It suffices to show $L = 0$. Observe

that $L(M - M^T) = L_T(M - M^T)$ is an $\boldsymbol{F}$-local martingale (Theorem 7.38). As pointed out above, L and LM^T are all $\boldsymbol{F}$-local martingales. So is LM. Since M has the strong property of predictable representation, we have $L = 0$. □

13.9 Theorem. *Assume $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Put*

$$\Gamma = \left\{ \boldsymbol{P}' : \begin{array}{l} \boldsymbol{P}' \text{ is a probability measure on } \mathcal{F}, \\ \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}|_{\mathcal{F}_0} \text{ and } M \in \mathcal{M}_{loc,0}(\boldsymbol{P}') \end{array} \right\}.$$

Then the following statements are equivalent:

1) *M has the strong property of predictable representation,*

2) $\boldsymbol{P}' \in \Gamma, \boldsymbol{P}' \overset{loc}{\ll} \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$,

3) $\boldsymbol{P}' \in \Gamma, \boldsymbol{P}' \ll \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$,

4) $\boldsymbol{P}' \in \Gamma, \boldsymbol{P}' \sim \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$,

5) $\boldsymbol{P}' \in \Gamma, \boldsymbol{P}' \sim \boldsymbol{P}, \dfrac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}} \in L^\infty \Rightarrow \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$.

Proof. 1) $\Rightarrow$ 2). Let $\boldsymbol{P}' \in \Gamma, \boldsymbol{P}' \overset{loc}{\ll} \boldsymbol{P}$, $Z = (Z_t)$ be the density process of $\boldsymbol{P}'$ w.r.t. $\boldsymbol{P}$, and $R = \inf\{t : Z_t = 0\}$. Because $Z_0 = 1$, we have $R > 0$. Since $M \in \mathcal{M}_{loc,0}(\boldsymbol{P}')$, there exists a sequence (T_n) of finite stopping times such that $T_n \uparrow R$ $\boldsymbol{P}$-a.s. and for each n, $(MZ)^{T_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Thus Z^{T_n} and $Z^{T_n}M^{T_n}$ are $(\mathcal{F}_{t\wedge T_n})$-local martingales. By Lemma 13.8 M^{T_n} has the strong property of predictable representation w.r.t. $(\mathcal{F}_{t\wedge T_n})$. Then by Corollary 13.6 we have $Z^{T_n} = 1$. This implies $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}|_{\mathcal{F}_{T_n}}, n \geq 1$.

On $[R < \infty]$ we have $Z_R = 0$. But $Z_{T_n} = 1, n \geq 1$. This means $T_n < R, n \geq 1$, and $\bigvee_n \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_{R-}$. Thus $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}|_{\mathcal{F}_{R-}}$. Especially, we have

$$\boldsymbol{P}(R < \infty) = \boldsymbol{P}'(R < \infty) = 0,$$

i.e., $\boldsymbol{P}(T_n \uparrow \infty) = 1$. Hence $Z = 1$. This implies $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$.

2)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) is trivial.

5)$\Rightarrow$1). Let $N \in \mathcal{M}_0^\infty$ and $NM \in \mathcal{M}_{loc,0}$. It suffices to prove $N = 0$. We may suppose $|N| \leq 1$. Set $d\boldsymbol{P}' = \left(1 + \dfrac{N_\infty}{2}\right)d\boldsymbol{P}$. For all $A \in \mathcal{F}_0$

$$\int_A N_\infty d\boldsymbol{P} = \int_A N_0 d\boldsymbol{P} = 0,$$

so $\boldsymbol{P}'$ is a probability measure and $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}|_{\mathcal{F}_0}$. Since $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}} \leq \dfrac{3}{2}$, we know $\boldsymbol{P}' \sim \boldsymbol{P}$. The density process is $Z_t = \boldsymbol{E}\left[\dfrac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}}\Big|\mathcal{F}_t\right] = 1 + \dfrac{N_t}{2}$, $t \geq 0$. Thus $MZ = M + \dfrac{NM}{2} \in \mathcal{M}_{loc,0}$, and $M \in \mathcal{M}_{loc,0}(\boldsymbol{P}')$. By the assumption we obtain $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$, and therefore $N_\infty = 0$ and $N = 0$. □

13.10 Definition. Let $M \in \mathcal{M}_{loc}$. Put

$$\Gamma(M) = \{P' : P' \text{ is a probability measure on } \mathcal{F} \text{ and } M \in \mathcal{M}_{loc}(P')\}.$$

Denote by $\Gamma_e(M)$ the set of extreme points of $\Gamma(M)$, i.e., $P' \in \Gamma_e(M) \Longleftrightarrow P' \in \Gamma(M)$ and if $P' = aP_1 + (1-a)P_2, P_1, P_2 \in \Gamma(M), 0 < a < 1$, then $P' = P_1 = P_2$. However, in general we do not know if $\Gamma(M)$ is a convex set.

13.11 Theorem. *Assume $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Then the following statements are equivalent:*

1) M has the strong property of predictable representation, and $\mathcal{F}_0$ is the trivial σ-field $\mathcal{N}$ (i.e., the σ-field generated by all P-null sets),

2) $P \in \Gamma_e(M)$.

Proof. 1)⇒2). Let $P = aP_1 + (1-a)P_2, P_1, P_2 \in \Gamma(M), 0 < a < 1$. Because $P_1 \ll P$, so $P_1 = P|_{\mathcal{F}_0}$. By Theorem 13.9 $P_1 = P$, and hence $P_2 = P$. Thus $P \in \Gamma_e(M)$.

2)⇒1). Assume i) ξ is a bounded $\mathcal{F}_0$-measurable r.v. and $E[\xi] = 0$, ii) $N \in \mathcal{M}_0^\infty$ and $NM \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Set $L = \xi + N$. Then $L \in \mathcal{M}^\infty$, and we may suppose $|L| \leq 1$. Define

$$dP_1 = \Big(1 + \frac{L_\infty}{2}\Big)dP, \quad dP_2 = \Big(1 - \frac{L_\infty}{2}\Big)dP.$$

Since $E[L_\infty] = 0$, P_1 and P_2 are probability measure on $\mathcal{F}$. It is easy to see that $P_1 \sim P_2 \sim P$ and the density processes of P_1 and P_2 w.r.t. P are

$$Z_t^{(1)} = E\Big[\frac{dP_1}{dP}\Big|\mathcal{F}_t\Big] = 1 + \frac{1}{2}L_t, \; Z_t^{(2)} = E\Big[\frac{dP_2}{dP}\Big|\mathcal{F}_t\Big] = 1 - \frac{1}{2}L_t, \; t \geq 0.$$

respectively. Hence $MZ^{(1)} = M(1 + \frac{1}{2}\xi) + \frac{1}{2}NM \in \mathcal{M}_{loc,0}, MZ^{(2)} = M(1 + \frac{1}{2}\xi) - \frac{1}{2}NM \in \mathcal{M}_{loc,0}$, and therefore $M \in \mathcal{M}_{loc,0}(P_1)$ and $M \in \mathcal{M}_{loc,0}(P_2)$, i.e., $P_1, P_2 \in \Gamma(M)$. But $P \in \Gamma_e(M)$ and $P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$. It must be $P = P_1 = P_2$. Hence $L_\infty = 0$ and $L = 0$. This implies both $\xi = L_t = 0$ and $N = L - \xi = 0$. 1) are established. □

13.12 Theorem. *Assume $P' \overset{loc}{\ll} P$, $M \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$, $[M, Z] \in (\mathcal{A}_{loc}(P))^R$ and under P, M has the strong property of predictable representation. Then under P', $M' = M - \frac{1}{Z_-}.\langle M, Z\rangle \in \mathcal{M}_{loc,0}(P')$ has the strong property of predictable representation as well.* (*Here we use the notations in Chapter* XII §1 *and* §2.)

Proof. Assume $N', N'M' \in \mathcal{M}_{loc,0}(P')$. We want to prove under P', $N' = 0$. Let (T_n) be a sequence of stopping times such that $T_n \uparrow R$ P-a.s. and for each n, $(N'Z)^{T_n}, (N'M'Z)^{T_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$, $[M, Z]^{T_n} \in \mathcal{A}_{loc}(P)$ and $T_n \leq R_n = \inf\{t : Z_t \leq \frac{1}{n}\}$. Write $Y = (N'Z)^{T_n}$, $A = \frac{1}{Z_-}.\langle M, Z^{T_n}\rangle$. By the formula of integration by parts,

$$Y(M')^{T_n} = YM^{T_n} - YA = YM^{T_n} - (Y_-).A - (A_-).Y - [Y, A].$$

Since $Y(M')^{T_n}, (A_-).Y, [Y, A] \in \mathcal{M}_{loc}(P)$, we know $[Y, M^{T_n}] - (Y_-).A \in \mathcal{M}_{loc}(P)$ and $\langle Y, M^{T_n}\rangle = (Y_-).A = \frac{Y_-}{Z_-}.\langle M, Z^{T_n}\rangle$. Noting $Y = Y^{T_n}$, we obtain

$$\langle M, Y - \frac{Y_-}{Z_-}.Z^{T_n}\rangle = 0.$$

But $Y - \frac{Y_-}{Z_-}.Z^{T_n} \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$, so $M\Big(Y - \frac{Y_-}{Z_-}.Z^{T_n}\Big) \in \mathcal{M}_{loc,0}(P)$. Since M has the strong property of predictable representation,

$$Y - \frac{Y_-}{Z_-}.Z^{T_n} = 0 \quad \text{or} \quad Y = (Y_-).\Big(\frac{1}{Z_-}.Z^{T_n}\Big). \tag{12.1}$$

Because $Y_0 = 0$, (12.1) has only null solution: $Y = 0$, i.e., $(N'Z)^{T_n} = 0$. Since $T_n \leq R_n$, we have $Z^{T_n} I_{[0,R_n[} > 0$. Then $N' I_{[0,T_n[} = 0$ and $N' I_{[0,R[} = 0$. Hence under P', $N' = 0$. □

§2. The Weak Property of Predictable Representation

13.13 Definition. Let X be a semimartingale, μ, X^c and (α, β, ν) be its jump measure, continuous martingale part and predictable characteristics respectively. Write

$$\mathcal{K}(\mu) = \{W.(\mu - \nu) : W \in \mathcal{G}(\mu)\}.$$

If $\mathcal{M}_{loc,0}^c = \mathcal{L}(X^c)$ and $\mathcal{M}_{loc}^d = \mathcal{K}(\mu)$, or equivalently

$$\mathcal{M}_{loc,0} = \mathcal{L}(X^c) + \mathcal{K}(\mu)$$

(the right side is the linear sum of vector spaces), we say that X has *the weak property of predictable representation.*

13.14 Theorem. *Assume $X \in \mathcal{M}_{loc,0}$ and X has the strong property of predictable representation. Then X has the weak property of predictable representation as well.*

Proof. For all $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$ we have $M = H.X$, where $H \in L_m(X)$. Thus

$$M^c = H.X^c, \quad M^d = H.X^d = (Hx) * (\mu - \nu)$$

by Theorems 9.3, 11.24 and 11.23. □

13.15 Lemma. *Assume $X \in \mathcal{S}$. Let $U \subset \tilde{\mathcal{O}}$ such that $M_\mu[U|\tilde{\mathcal{P}}] = W$ exists (i.e., U is σ-integrable w.r.t. $\tilde{\mathcal{P}}$ under M_μ). Then there exists a sequence (T_n) of stopping times such that*

i) $D = [\Delta X \neq 0] = \bigcup_n [T_n]$ *and* $[T_n] \cap [T_m] = \emptyset$ *while* $n \neq m$,

ii) *for each* n

$$\begin{aligned} &W(T_n, \Delta X_{T_n}) I_{[T_n < \infty]} \\ &= E[U(T_n, \Delta X_{T_n}) I_{[T_n < \infty]} | \mathcal{F}_{T_n -} \vee \sigma\{\Delta X_{T_n} I_{[T_n < \infty]}\}] \quad \text{a.s.}. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Proof. Choose $(\tilde{A}_n) \subset \tilde{\mathcal{P}}$ so that $\tilde{\Omega} = \bigcup_n \tilde{A}_n$, $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m = \emptyset$ when $n \neq m$, and for each n, $M_\mu(\tilde{A}_n) < \infty$, $M_\mu(|U| I_{\tilde{A}_n}) < \infty$. Set $B^{(n)} = I_{\tilde{A}_n} * \mu$, and

$$T_{n,0} = 0, \quad T_{n,m} = \inf\{t > T_{n,m-1} : \Delta B_t^{(n)} \neq 0\}, \ m \geq 1.$$

Then $(T_{n,m})_{n,m \geq 1}$ satisfies i). It is only required to show that $T = T_{n,m}$ satisfies ii).

Observe that $\xi \in \mathcal{F}_{T-} \vee \sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\} \iff$ there exists $V \in \tilde{\mathcal{P}}$ such that $\xi I_{[T<\infty]} = V(T, \Delta X_T) I_{[T<\infty]}$. Furthermore, if ξ is non-negative (resp. bounded), V can be chosen to be non-negative (resp. bounded) also.

Let $V \in \tilde{\mathcal{P}}$ be bounded. Set $\tilde{V} = I_{\tilde{A}_n} I_{]T_{n,m-1}, T_{n,m}]} V$. Since $M_\mu(W\tilde{V}) = M_\mu(U\tilde{V})$, we obtain

$$E[W(T, \Delta X_T) V(T, \Delta X_T) I_{[T<\infty]}] = E[U(T, \Delta X_T) V(T, \Delta X_T) I_{[T<\infty]}],$$

$$E[W(T, \Delta X_T) \xi I_{[T<\infty]}] = E[U(T, \Delta X_T) \xi I_{[T<\infty]}],$$

where $\xi \in \mathcal{F}_{T-} \vee \sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}$ is bounded. Then (15.1) follows. □

13.16 Theorem. *Assume $X \in \mathcal{S}$. Then the following statements are equivalent:*

1) $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{K}(\mu)$,

2) $\mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \sigma\{\Delta X\}$,

3) *for all* $M \in \mathcal{M}^d_{loc}$, $M_\mu[\Delta M | \tilde{\mathcal{P}}] = 0 \Rightarrow M = 0$,

4) *for all* $M \in \mathcal{M}^{\infty,d}$ *(the space of all bounded purely discontinuous local martingales),* $M_\mu[\Delta M | \tilde{\mathcal{P}}] = 0 \Rightarrow M = 0$,

5) i) *if T is a totally inaccessible time,* $[T] \subset [\Delta X \neq 0]$;

ii) *for every stopping time* T, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-} \vee \sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}$.

Proof. 1)⇒2). First of all, we observe that $\mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \sigma\{\mathcal{M}_{loc,0}\}$. In fact, for any stopping time T set $A = I_{[T,\infty[}$. Then $M = A - \tilde{A} \in \mathcal{M}_{loc,0}$

and $A = M + \tilde{A} \in \mathcal{P} \vee \sigma\{\mathcal{M}_{loc,0}\}$. Noting $M = M_- + \Delta M$, it is only required to show $\Delta M \in \mathcal{P} \vee \sigma\{\Delta X\}$ for all $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$.

By the assumption $M^d = W * (\mu - \nu)$, where $W \in \mathcal{G}(\mu)$. Then

$$\Delta M_t = \Delta M_t^d = W(t, \Delta X_t) I_D - \hat{W}_t, \quad D = [\Delta X \neq 0].$$

It is easy to see $\hat{W} \in \mathcal{P}$, $D \in \sigma\{\Delta X\}$, $(W(t, \Delta X_t)) \in \mathcal{P} \vee \sigma\{\Delta X\}$. Hence $\Delta M \in \mathcal{P} \vee \sigma\{\Delta X\}$.

2)⇒3). Let $M \in \mathcal{M}^d_{loc,0}$ and $M_\mu[\Delta M | \tilde{\mathcal{P}}] = 0$. Because $\Delta M \in \mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \sigma\{\Delta X\}$, there exists $V \in \tilde{\mathcal{P}}$ such that

$$\Delta M_t = V(t, \Delta X_t), \quad t \geq 0.$$

Then

$$\begin{aligned} 0 = M_\mu[\Delta M V] &= E\Big\{ \sum_{t>0} [\Delta M_t V(t, \Delta X_t) I_D] \Big\} \\ &= E\Big\{ \sum_{t>0} [(\Delta M_t)^2 I_D] \Big\}, \end{aligned}$$

$$\Delta M I_D = 0. \tag{16.1}$$

Noting that $M = 0 \iff \Delta M = 0$ (since $M \in \mathcal{M}^d_{loc,0}$), by (16.1) it remains to show $\Delta M I_{D^c} = 0$. Let T be a totally inaccessible time. Then the predictable projection of $I_{[T]} I_{D^c}$ is zero because it is the jump process of an adapted integrable increasing process having only totally inaccessible jumps. On the other hand, since $\mathcal{O} \cap D^c = \mathcal{P} \cap D^c$, there exists $Y \in \mathcal{P}$ such that

$$I_{[T]} I_{D^c} = Y I_{D^c}. \tag{16.2}$$

Taking predictable projections on the two sides of (16.2), we obtain

$$Y(1 - a) = 0,$$

where $a_t = \nu(\{t\} \times E)$, $t \geq 0$. However $[a = 1] \subset D$, so $D^c \subset [a < 1] \subset [Y = 0]$, $I_{[T]} I_{D^c} = Y I_{D^c} = 0$, i.e., $[T] \subset D$. Thus

$$(\Delta M I_{D^c})_T I_{[T<\infty]} = 0, \quad \text{a.s.}. \tag{16.3}$$

Let T be a predictable time and $Z \in \mathcal{P}$ such that $\Delta M I_{D^c} = Z I_{D^c}$. By (16.1) we have

$$\begin{aligned} 0 = E[\Delta M_T I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_{T-}] &= E[(\Delta M I_{D^c})_T I_{[T<\infty]} | \mathcal{F}_{T-}] \\ &= Z_T (1 - a_T) I_{[T<\infty]}. \end{aligned}$$

Similarly, $[(I_{D^c})_T = 1, T < \infty] \subset [a_T < 1, T < \infty] \subset [Z_T = 0, T < \infty]$, and hence $(Z I_{D^c})_T I_{[T<\infty]} = 0$, i.e., (16.3) holds for any predictable time T. Therefore (16.3) holds for any stopping time T, i.e., $\Delta M I_{D^c} = 0$.

3)⇒4) is trivial.

4)⇒5). Let T be a totally inaccessible time. Set $S = T_{[(I_D)_T I_{[T<\infty]}=0]}$. Then $(I_D)_S I_{[S<\infty]} = 0$. It suffices to show $P(S < \infty) = 0$. Set $A = I_{[S,\infty[}$. Then $N = A - \tilde{A} \in \mathcal{M}_{loc}^{\infty,d}$. Since S is totally inaccessible, $\tilde{A}$ is continuous and $\Delta N = \Delta A = I_{[S]}$. For any $W \in \tilde{\mathcal{P}}^+$

$$M_\mu[\Delta N W] = E[W(S, \Delta X_S)(I_D)_S I_{[S<\infty]}] = 0.$$

i.e., $M_\mu[\Delta N|\tilde{\mathcal{P}}] = 0$. By the assumption $N = 0$, $A = \tilde{A}$. So A is continuous. It must be $P(S < \infty) = 0$. i) is established.

Let T be a stopping time. In order to show ii) we may suppose $T > 0$, since $\mathcal{F}_T \cap [T = 0] = \mathcal{F}_{T-} \cap [T = 0]$ and T may be replaced by $T_{[T>0]}$. Let $\xi \in b\mathcal{F}_T$,

$$A = \eta I_{[T,\infty[}, \quad \eta = \xi - E[\xi|\mathcal{F}_{T-} \vee \sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}].$$

Since $E[\eta|\mathcal{F}_{T-}] = 0$, we know $A \in \mathcal{M}^{\infty,d}$ and $\Delta A = \eta I_{[T]}$. For any $W \in \tilde{\mathcal{P}}^+$ we have $W(T, \Delta X_T)(I_D)_T I_{[T<\infty]} \in \mathcal{F}_{T-} \vee \sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}$ and

$$\begin{aligned} M_\mu[\Delta A W] &= E[W(T, \Delta X_T)\eta(I_D)_T I_{[T<\infty]}] \\ &= E[W(T, \Delta X_T)(I_D)_T I_{[T<\infty]} E[\eta|\mathcal{F}_{T-} \vee \sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}]] = 0, \end{aligned}$$

i.e., $M_\mu[\Delta A|\tilde{\mathcal{P}}] = 0$. By the assumption, $A = 0$, i.e., $\eta I_{[T<\infty]} = 0$ a.s.. But on $[T = \infty]$ $\mathcal{F}_T$ coincides with $\mathcal{F}_{T-}$. Hence

$$\xi = E[\xi|\mathcal{F}_{T-} \vee \sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}] \quad \text{a.s.}.$$

This means $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-} \vee \sigma\{\Delta X_T I_{[T<\infty]}\}$.

5)⇒1). Let $M \in \mathcal{M}_{loc}^d$ and $U = M_\mu[\Delta M|\tilde{\mathcal{P}}]$. By Lemma 13.15 there exists a sequence (T_n) of stopping times with disjoint graphs such that $D = \bigcup_n [T_n]$ and for each n

$$\begin{aligned} U(T_n, \Delta X_{T_n}) I_{[T_n<\infty]} &= E[\Delta M_{T_n} I_{[T_n<\infty]}|\mathcal{F}_{T_n-} \vee \sigma\{\Delta X_{T_n} I_{[T_n<\infty]}\}] \\ &= E[\Delta M_{T_n} I_{[T_n<\infty]}|\mathcal{F}_{T_n}] = \Delta M_{T_n} I_{[T_n<\infty]} \quad \text{a.s.}. \end{aligned}$$

This means

$$\left(\int_E U(t,x)\mu(\{t\},dx)\right) = (U(t,\Delta X_t)(I_D)_t) = \Delta M I_D. \tag{16.4}$$

Thus $\hat{U} = \left(\int_E U(t,x)\nu(\{t\},dx)\right)$ is the predictable projection of $\Delta M I_D$. Set

$$W = U + \frac{\hat{U}}{1-a} I_{[a<1]}.$$

If $\Delta M = \tilde{W}$, we know $W \in \mathcal{G}(\mu)$ and $M = W * (\mu - \nu)$, hence ii) is established. We are going to show $\Delta M = \tilde{W}$. Since $D^c \subset [a < 1]$, by

(16.4) we have

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t &= U(t, \Delta X_t)(I_D)_t + \frac{\hat{U}_t}{1-a_t} I_{[a_t<1]}(I_D)_t - \hat{U}_t - \frac{\hat{U}_t}{1-a_t} I_{[a_t<1]} a_t \\ &= \Delta M_t (I_D)_t - \frac{\hat{U}_t}{1-a_t} I_{[a_t<1]}(I_{D^c})_t - \hat{U}_t + \hat{U}_t I_{[a_t<1]} \\ &= \Delta M_t (I_D)_t - \frac{\hat{U}_t}{1-a_t}(I_{D^c})_t - \hat{U}_t I_{[a_t=1]}. \end{aligned} \tag{16.5}$$

Because ${}^p(\Delta M I_D) = \hat{U}$, we have

$$\hat{U} I_{[a=1]} = {}^p(\Delta M I_D I_{[a=1]}) = {}^p(\Delta M I_{[a=1]}) = {}^p(\Delta M) I_{[a=1]} = 0. \tag{16.6}$$

By (16.5) and (16.6) it remains to show $\Delta M I_{D^c} = -\frac{\hat{U}}{1-a} I_{D^c}$, i.e., for any stopping time T

$$\Delta M_T (I_{D^c})_T I_{[T<\infty]} = -\frac{\hat{U}_T}{1-a_T}(I_{D^c})_T I_{[T<\infty]}, \quad \text{a.s.}. \tag{16.7}$$

If T is a totally inaccessible time, $[T] \subset D$ and (16.7) holds clearly. Finally, it suffices to show that (16.7) holds for any predictable time T. In this case, there exists $\xi \in \mathcal{F}_{T-}$ such that

$$\Delta M_T (I_{D^c})_T I_{[T<\infty]} = \xi (I_{D^c})_T I_{[T<\infty]}.$$

Since

$$\hat{U}_T I_{[T<\infty]} = E[\Delta M_T (I_D)_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] = -E[\Delta M_T (I_{D^c})_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}],$$

we have

$$\begin{aligned} -\frac{\hat{U}_T}{1-a_T}(I_{D^c})_T I_{[T<\infty]} &= \frac{(I_{D^c})_T}{1-a_T} E[\Delta M_T (I_{D^c})_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] \\ &= \frac{(I_{D^c})_T}{1-a_T} E[\xi (I_{D^c})_T I_{[T<\infty]}|\mathcal{F}_{T-}] \\ &= \xi (I_{D^c})_T I_{[T<\infty]} \\ &= \Delta M_T (I_{D^c})_T I_{[T<\infty]}, \quad \text{a.s.}. \quad \square \end{aligned}$$

13.17 Theorem. *Assume $X \in \mathcal{S}$. Then the following statements are equivalent:*

1) *X has the weak property of predictable representation,*
2) *for all $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$, $\langle M^c, X^c \rangle = 0$ and $M_\mu[\Delta M|\tilde{\mathcal{P}}] = 0 \Rightarrow M = 0$,*
3) *for all $N \in \mathcal{M}_0^\infty$, $\langle N^c, X^c \rangle = 0$ and $M_\mu[\Delta N|\tilde{\mathcal{P}}] = 0 \Rightarrow N = 0$.*

Proof. It follows from Theorems 13.7 and 13.16 immediately. $\square$

13.18 Theorem. *Assume $X \in \mathcal{S}$ and (α, β, ν) is its predictable triplet. Put*

$$\Gamma = \left\{ \boldsymbol{P}' : \begin{array}{c} \boldsymbol{P}' \text{ is a probability measure on } \mathcal{F}, \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}|_{\mathcal{F}_0}, X \in \\ \mathcal{S}(\boldsymbol{P}'), (\alpha, \beta, \nu) \text{ is the predictable triplet of } X \text{ under } \boldsymbol{P}' \end{array} \right\}.$$

Then the following statements are equivalent:

1) *X has the weak property of predictable representation,*
2) $\boldsymbol{P}' \in \Gamma, \boldsymbol{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$,
3) $\boldsymbol{P}' \in \Gamma, \boldsymbol{P}' \ll \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$,
4) $\boldsymbol{P}' \in \Gamma, \boldsymbol{P}' \sim \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$,
5) $\boldsymbol{P}' \in \Gamma, \boldsymbol{P}' \sim \boldsymbol{P}, \dfrac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}} \in L^\infty \Rightarrow \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$.

Proof. 1)$\Rightarrow$2). Let $\boldsymbol{P}' \in \Gamma, \boldsymbol{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \boldsymbol{P}$, and $Z = (Z_t)$ be the density process of $\boldsymbol{P}'$ w.r.t $\boldsymbol{P}$. Since $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}|_{\mathcal{F}_0}, Z_0 = 1$ and $(Z - 1) \in \mathcal{M}_{\text{loc},0}(\boldsymbol{P})$. By Theorem 12.31 $M_\mu[\Delta Z|\tilde{\mathcal{P}}] = 0$ and $\langle Z, X^c \rangle = 0$, i.e., $M_\mu[\Delta(Z - 1)|\tilde{\mathcal{P}}] = 0$ and $\langle Z - 1, X^c \rangle = 0$. By Theorem 13.17 $Z = 1$. This implies $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}$.

2)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow$4)$\Rightarrow$5) is trivial.

5)$\Rightarrow$1). According to Theorem 13.17, it suffices to show

$$N \in \mathcal{M}_0^\infty, \langle N^c, X^c \rangle = 0, M_\mu[\Delta N|\tilde{\mathcal{P}}] = 0 \Rightarrow N = 0.$$

We may suppose $|N| \le 1$. Set $d\boldsymbol{P}' = \left(1 + \dfrac{N_\infty}{2}\right) d\boldsymbol{P}$. It is well-known that $\boldsymbol{P}'$ is a probability measure on $\mathcal{F}$, $\boldsymbol{P}' \sim \boldsymbol{P}$, $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{d\boldsymbol{P}'}{d\boldsymbol{P}} \le \dfrac{3}{2}$, $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}|_{\mathcal{F}_0}$, and the density process is $Z = 1 + \dfrac{1}{2} N$. By Theorem 12.31 we have $\boldsymbol{P}' \in \Gamma$. Then $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}|_{\mathcal{F}}$, $N_\infty = 0$, and therefore $N = 0$. □

From Theorems 13.18 and 11.54 we obtain immediately the next two results about the predictable representation property of step processes. As to another important class of processes—Lévy processes, we will investigate their predictable representation property in §4.

13.19 Theorem. *Assume that X is a step process and $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is the complete natural filtration of X: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^P(X)$. Then X has the weak property of predictable representation. In particular, each $\boldsymbol{F}$-local martingale is purely discontinuous.*

13.20 Theorem. *Assume that X is a point process and $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ is the complete natural filtration of X. Then $M = X - \tilde{X}$ has the strong property of predictable representation.*

13.21 Theorem. *Assume $X \in \mathcal{S}$ and (α, β, ν) is its predictable triplet. Put*

$$\Gamma = \left\{ \boldsymbol{P}' : \begin{array}{c} \boldsymbol{P}' \text{ is a probability on } \mathcal{F}, X \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P}') \text{ and } (\alpha, \beta, \nu) \\ \text{is the predictable triplet of } X \text{ under } \boldsymbol{P}' \end{array} \right\}.$$

Then the following statements are equivalent:

1) *X has the weak property of predictable representation and $\mathcal{F}_0$ is the trivial σ-field.*

2) *$\boldsymbol{P}$ is an extreme point of Γ.*

Proof. It is completely similar to the proof of Theorem 13.11 and is left to readers. □

13.22 Theorem. *Assume that $X \in \mathcal{S}$ has the weak property of predictable representation. If $\boldsymbol{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \boldsymbol{P}$, then under $\boldsymbol{P}'$, X has the weak property of predictable representation as well.*

Proof. Let (α, β, ν) be the predictable triplet of X under $\boldsymbol{P}$, and Z' be the density process of $\boldsymbol{P}'$ w.r.t. $\boldsymbol{P}$. Then under $\boldsymbol{P}'$, (α', β', ν'), the predictable triplet of X is as follows:

$$\alpha' = \alpha + \frac{1}{Z'_-} \cdot \langle Z', X^c \rangle + [x I_{[|x| \le 1]}(Y - 1)] * \nu, \quad \beta' = \beta, \quad \nu' = Y.\nu,$$

and $M_\mu[\Delta Z'|\tilde{\mathcal{P}}] = Z'_-(Y - 1)$.

Let $\boldsymbol{P}''$ be another probability measure such that $\boldsymbol{P}'' \sim \boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{P}'' = \boldsymbol{P}'|_{\mathcal{F}_0}$ and under $\boldsymbol{P}''$, (α', β', ν') is still the predictable triplet of X. By Theorem 13.18 it is only required to show $\boldsymbol{P}'' = \boldsymbol{P}'$.

Obviously, $\boldsymbol{P}'' \overset{\text{loc}}{\ll} \boldsymbol{P}$. Let Z'' be the density process of $\boldsymbol{P}''$ w.r.t. $\boldsymbol{P}$. Then under $\boldsymbol{P}''$ (or $\boldsymbol{P}'$) we have

$$\frac{1}{Z'_-} \cdot \langle Z', X^c \rangle = \frac{1}{Z''_-} \cdot \langle Z'', X^c \rangle$$

and $M_\mu[\Delta Z''|\tilde{\mathcal{P}}] = Z''_-(Y - 1)$. Set $T_n = \inf\left\{t : Z'_t \le \dfrac{1}{n} \text{ or } Z''_t \le \dfrac{1}{n}\right\}$. Then $\boldsymbol{P}'(T_n \uparrow \infty) = \boldsymbol{P}''(T_n \uparrow \infty) = 1$. Set

$$M^{(n)} = \frac{1}{Z'_-} \cdot (Z')^{T_n} - \frac{1}{Z''_-} \cdot (Z'')^{T_n}, \quad n \ge 1.$$

Since $\boldsymbol{P}'' = \boldsymbol{P}'|_{\mathcal{F}_0}$, we have $Z'_0 = Z''_0$, and hence $M_0^{(n)} = 0$. Thus $M^{(n)} \in \mathcal{M}_{\text{loc},0}(\boldsymbol{P})$. At the same time, we have

$$\begin{aligned} M_\mu[\Delta M^{(n)}|\tilde{\mathcal{P}}] &= M_\mu\left[\left(\frac{1}{Z'_-} \Delta Z' - \frac{1}{Z''_-} \Delta Z''\right) I_{[0,T_n]} \middle| \tilde{\mathcal{P}}\right] \\ &= \left\{\frac{1}{Z'_-} M_\mu[\Delta Z'|\tilde{\mathcal{P}}] - \frac{1}{Z''_-} M_\mu[\Delta Z''|\tilde{\mathcal{P}}]\right\} I_{[0,T_n]} = 0, \end{aligned}$$

$$\langle M^{(n)}, X^c\rangle = \left\{\frac{1}{Z'_-}.\langle Z', X^c\rangle - \frac{1}{Z''_-}.\langle Z'', X^c\rangle\right\}^{T_n} = 0.$$

Since X has the weak property of predictable representation, by Theorem 13.17 we have $M^{(n)} = 0$, i.e.,

$$\frac{1}{Z'_-}.(Z')^{T_n} = \frac{1}{Z''_-}.(Z'')^{T_n}.$$

Because $Z'_0 = Z''_0$, we conclude $(Z')^{T_n} = (Z'')^{T_n}$.

Set $R' = \inf\{t : Z'_t = 0\}$ and $R'' = \inf\{t : Z''_t = 0\}$. Since $P'(R' = \infty) = 1$ and $P'' \sim P'$, we have $P''(R' = \infty) = 1$. Then by Theorem 12.6.2) $P(R' \geq R'') = 1$. By the same argument $P(R'' \geq R') = 1$. Thus $P(R' = R'') = 1$, and $P(T_n \uparrow R' = R'') = 1$. Then under P, Z' and Z'' are indistinguishable, and therefore $P'' = P'$. □

The weak property of predictable representation is closely relative to quasi-left-continuity and complete continuity of the filtration to some extent.

13.23 Theorem. *Assume $X \in \mathcal{S}$. Let μ and ν be the jump measure and Lévy system of X respectively. If $\mathcal{M}^d_{\mathrm{loc}} = \mathcal{K}(\mu)$, then for $F = (\mathcal{F}_t)$ to be quasi-left-continuous it is necessary and sufficient that the following conditions be fulfilled:*

i) $J = K$ (*recall* $J = [a > 0]$, $K = [a = 1]$, $a = (\nu(\{t\} \times E))$).

ii) *There exists a predictable process H such that $|H| > 0$ and*

$$\nu(\{t\}, dx) = \delta_{H_t}(dx) I_J(t). \qquad (23.1)$$

Proof. Necessity. Let $D = [\Delta X \neq 0] = \bigcup_n [T_n]$, where (T_n) is a sequence of stopping times with disjoint graphs. In this case, the accessible part T_n^a of T_n is predictable. As the predictable support of D, $J = \bigcup_n [T_n^a] \subset D$. But K is the largest predictable set contained in D (Theorem 11.14). Hence $J = K$.

Because for each n, $\Delta X_{T_n^a} I_{[T_n^a < \infty]} \in \mathcal{F}_{T_n^a} = \mathcal{F}_{T_n^a-}$, so

$$H = \sum_n \Delta X_{T_n^a} I_{[T_n^a]} + (1 - I_J)$$

is a predictable process and $|H| > 0$. Obviously, $\Delta X I_J = H I_J$ and

$$M_\nu(J[H \neq x]) = M_\mu(J[H \neq x]) = M_\mu(J[\Delta X \neq H]) = 0,$$

$$E\Big\{\sum_{t \in J} \int_{\{H_t\}^c} \nu(\{t\}, dx)\Big\} = 0, \qquad (23.2)$$

where H and x are considered as predictable functions on $\widehat{\Omega}$. Since $J = K$, $t \in J \Rightarrow \nu(\{t\} \times E) = 1$. Then (23.1) is deduced from (23.2).

Sufficiency. Noting $J = K \subset D$, we find $D = (DJ) \cup (D \setminus J) = K \cup (D \setminus J)$. Since $D \setminus J$ is a totally inaccessible set, for any predictable time T we have $[T] \cap (D \setminus J) = \emptyset$, and therefore

$$\Delta X_T I_{[T<\infty]} = \Delta X_T (I_K)_T I_{[T<\infty]}. \qquad (23.3)$$

On the other hand, from (23.1) we have

$$M_\mu(K[\Delta X \neq H]) = M_\mu(K[x \neq H]) = M_\nu(K[x \neq H]) = 0.$$

$$\Delta X I_K = H I_K.$$

Combining with (23.3), we obtain

$$\Delta X_T I_{[T<\infty]} = H_T (I_K)_T I_{[T<\infty]} \in \mathcal{F}_{T-}.$$

By Theorem 13.16.5) we know $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$. This means $F = (\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous. □

13.24 Lemma. *Assume $F = (\mathcal{F}_t)$ is completely continuous. Let S and T be stopping times. Then there exists a predictable set L such that*

$$[S_{[S<T]}] \subset L, \quad [T] \subset L^c. \qquad (24.1)$$

Proof. Write $R = S \wedge T$. Since $[R < T] \in \mathcal{F}_R = \mathcal{F}_{R-}$, there exists $L \in \mathcal{P}$ such that

$$I_{[R<T]} = (I_L)_R I_{[R<\infty]}. \qquad (24.2)$$

One may suppose $L \subset [0, R]$. Otherwise, L may be replaced by $L[0, R]$, and (24.2) remains true. From (24.2) we know immediately

$$[S_{[S<T]}] = [R_{[R<T]}] \subset L, \quad [T_{[R=T]}] = [R_{[R=T]}] \subset L^c.$$

On the other hand, $[T_{[R<T]}] \subset]R, \infty[\subset L^c$. Thus

$$[T] = [T_{[R=T]}] \cup [T_{[R<T]}] \subset L^c.$$

(24.1) is established. □

13.25 Lemma. *Assume that $F = (\mathcal{F}_t)$ is completely continuous and there is a thin set D such that for any totally inaccessible time S $[S] \subset D$. Then for any stopping time T there exists a predictable set H such that*

i) $[T] \subset H$,

ii) *if S is a totally inaccessible time and $[S] \subset H$, then $S \geq T$.*

Proof. Let $D = \bigcup_n [S_n]$, where (S_n) is a sequence of stopping times. According to Lemma 13.24, for each n there exists $L_n \in \mathcal{P}$ such that

$$[(S_n)_{[S_n<T]}] \subset L_n, \quad [T] \subset L_n^c.$$

Put $H = \bigcap_n L_n^c$. Then $H \in \mathcal{P}$ and

$$[T] \subset H, \quad [(S_n)_{[S_n<T]}] \subset H^c.$$

If S is a totally inaccessible time and $[S] \subset H$, then

$$[S_{[S<T]}] \subset \bigcup_n [(S_n)_{[S_n<T]}] \subset H^c,$$

because $[S] \subset D = \bigcup_n [S_n]$. Hence $[S_{[S<T]}] = \emptyset$, i.e., $S > T$. □

13.26 Theorem. *Assume $X \in \mathcal{S}$. Let μ and ν be the jump measure and Lévy system of X respectively. If $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{K}(\mu)$, then for $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ to be completely continuous it is necessary and sufficient that the following conditions be fulfilled:*

i) $J = K$,

ii) *there exists a predictable process H such that $|H| > 0$ and*

$$\nu(dt, dx) = \delta_{H_t}(dx)\Lambda(dt), \tag{26.1}$$

where $\Lambda(dt)$ is a random measure defined on $\Omega \times \mathcal{B}(R_+)$.

Proof. Sufficiency. On $J = K$ we have $\Lambda(\{t\}) = \nu(\{t\} \times E) = 1$ and $\nu(\{t\}, dx) = \delta_{H_t}(dx)$ by (26.1). Then by Theorem 13.23 $\boldsymbol{F}$ is quasi-left-continuous. On the other hand,

$$\begin{aligned} M_\mu([\Delta X \neq H]) &= M_\mu([x \neq H]) = M_\nu([x \neq H]) \\ &= E\Big[\int_0^\infty \Lambda(dt) \int_E I_{[x \neq H]}\delta_{H_t}(dx)\Big] = 0. \qquad (26.2) \\ \Delta X &= H I_D. \end{aligned}$$

If T is a totally inaccessible time, then $[T] \subset D$ (Theorem 13.16.5)) and

$$\Delta X_T I_{[T<\infty]} = H_T I_{[T<\infty]} \in \mathcal{F}_{T-}.$$

Again by Theorem 13.16.5) we find $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$. Now it is not difficult to show that for any stopping time T $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$, i.e., $\boldsymbol{F}$ is completely continuous.

Necessity. We want to construct a predictable process H such that (26.2) holds. Let $D = \bigcup_n [T_n]$, where (T_n) is a sequence of stopping times with disjoint graphs. By Theorem 13.23, $J = K = \bigcup_n [T_n^a]$ and $D \setminus J = \bigcup_n [T_n^i]$. Set $H' = \sum_n \Delta X_{T_n^a} I_{[T_n^a]}$. Then H' is predictable and $\Delta X I_J = H' I_J$.

By Lemma 13.25 for each n there exists $G_n \in \mathcal{P}$ such that $[T_n^i] \subset G_n$ and if S is a totally inaccessible time satisfying $[S] \subset G_n$, then $S \geq T_n^i$. Put $L_n = G_n \setminus \Big(\bigcup_{m \neq n} G_m[0, T_m^i]\Big)$. Then $L_n \in \mathcal{P}$ and satisfies the following two conditions:

$$[T_n^i] \subset L_n, \tag{26.3}$$

$$[T_m^i] \cap L_n = \emptyset, \quad \text{when } n \neq m. \tag{26.4}$$

(26.4) is clear, since $[T_m^i] \subset G_m[0, T_m^i]$ and for $n \neq m$ $[T_m^i] \cap L_n = \emptyset$. In order to establish (26.3) it is only required to show $G_m[0, T_m^i]\,[T_n^i] = \emptyset$ when $n \neq m$. Put $A = [I_{G_m}(T_n^i) I_{[T_n^i<\infty]} = 1]$. Then

$$[T_n^i]G_m = [(T_n^i)_A],$$

$A \in \mathcal{F}_{T_n^i}$, $(T_n^i)_A$ is a totally inaccessible time and $[(T_n^i)_A] \subset G_m$. Thus $T_m^i \leq (T_n^i)_A$. However, $[T_n^i]$ and $[T_m^i]$ are disjoint. So if $(T_n^i)_A < \infty$, it must be $T_m^i < T_n^i$, and hence $[0, T_m^i][(T_n^i)_A] = \emptyset$,

$$[T_n^i]G_m[0, T_m^i] = [(T_n^i)_A][0, T_m^i] = \emptyset.$$

Now since $\Delta X_{T_n^i} I_{[T_n^i<\infty]} \in \mathcal{F}_{T_n^i} = \mathcal{F}_{T_n^i-}$, there exists a predictable process $H^{(n)}$ such that $\Delta X_{T_n^i} I_{[T_n^i<\infty]} = H^{(n)}_{T_n^i} I_{[T_n^i<\infty]}$. Set

$$B = \Big[\overline{\lim_{N\to\infty}} \sum_{n=1}^N H^{(n)} I_{L_n} < \infty\Big], \quad H'' = I_B\Big(\overline{\lim_{N\to\infty}} \sum_{n=1}^N H^{(n)} I_{L_n}\Big).$$

Then H'' is predictable and by (26.3), (26.4) we know

$$\Delta X I_{D\setminus J} = H'' I_{D\setminus J}.$$

Set

$$\tilde{H} = H' + H''(1 - I_J), \quad H = \tilde{H} I_{[\tilde{H}\neq 0]} + I_{[\tilde{H}=0]}.$$

Then H is predictable, $|H| > 0$ and $\Delta X = H I_D$. Hence

$$0 = M_\mu([\Delta X \neq H]) = M_\mu([x \neq H]) = M_\nu([x \neq H]) \tag{26.5}$$

and for each n, $(\mu([0, t\wedge n] \times \{x : |x| \geq \frac{1}{n}\}))$ is an adapted locally integrable increasing process, its dual predictable projection is $\nu(([0, t \wedge n][|H| \geq \frac{1}{n}]) \times E)$. Write $\Lambda(dt) = \nu(dt, E)$. Then for each n

$$\Lambda(\{t : 0 < t \leq n,\ |H_t| \geq \frac{1}{n}\}) < \infty,$$

and therefore $\Lambda(dt)$ is σ-finite. (26.1) follows from (26.5). □

§3. The Relation between Two Kinds of Predictable Representation Properties

13.27 Theorem. *Let $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$ and μ be the jump measure of M. Then the following statements are equivalent:*

1) $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(M^d)$,

2) i) $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{K}(\mu)$,

ii) *there exist two predictable processes* $\alpha^{(1)}$ *and* $\alpha^{(2)}$ *such that*

$$(\Delta M - \alpha^{(1)})(\Delta M - \alpha^{(2)}) = 0. \tag{27.1}$$

Proof. 1)⇒2). Take $W^{(n)} = x^2 I_{[|x|\leq n]} \in \tilde{\mathcal{P}}$. Then

$$\begin{aligned}
\widehat{W}_t^{(n)} &= \Delta M_t^2 I_{[|\Delta M_t|\leq n]} - \int x^2 I_{[|x|\leq n]}\nu(\{t\}, dx), \\
|\widehat{W}_t^{(n)}| &\leq n|\Delta M_t| + n\sqrt{\int x^2 I_{[|x|\leq n]}\nu(\{t\}, dx)}, \\
\sqrt{\sum_{s\leq t}(\widehat{W}_s^{(n)})^2} &\leq n\sqrt{\sum_{s\leq t}(\Delta M_s)^2} + n\sqrt{\sum_{s\leq t}\int x^2 I_{[|x|\leq n]}\nu(\{s\}, dx)} \\
&\leq n\sqrt{[M]_t} + n\sqrt{(x^2 I_{[|x|\leq n]}) * \nu_t},
\end{aligned}$$

where ν is the compensator of μ. Since $(x^2 I_{[|x|\leq n]})*\nu \in \mathcal{V}^+$, $\sqrt{\sum(\widehat{W}^{(n)})^2} \in \mathcal{A}^+_{loc}$ and $W^{(n)} \in \mathcal{G}(\mu)$. By the assumption, there exists a predictable process $H^{(n)}$ such that

$$H^{(n)}.M^d = W^{(n)}*(\mu - \nu), \quad H^{(n)}\Delta M = \widetilde{W}^{(n)} = \Delta M^2 I_{[|\Delta M|\leq n]} - \widehat{W}^{(n)}. \tag{27.2}$$

Clearly, $\widehat{W}^{(n)} \uparrow W \in \mathcal{P}$. From (27.2) we have

$$[\Delta M = 0] \subset [W = 0]. \tag{27.3}$$

Define $A = [W = \infty]$ and

$$X = \begin{cases} -\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\widehat{W}^{(n)}}{H^{(n)}}, & \text{if the limit exists and is finite,} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} H^{(n)}, & \text{if the limit exists and is finite,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then A, X and Y are all predictable. On A we have $\Delta M \neq 0$ by (27.3), and $\lim\limits_{n\to\infty} |H^{(n)}| = \infty$,

$$\Delta M = \frac{(\Delta M)^2 I_{[|\Delta M|<n]}}{H^{(n)}} - \frac{\widehat{W}^{(n)}}{H^{(n)}} \to -\lim_{n\to\infty}\frac{\widehat{W}^{(n)}}{H^{(n)}} = X \tag{27.4}$$

by (27.2). On A^c we have

$$(\Delta M)^2 - Y\Delta M - W = 0. \tag{27.5}$$

In fact, if $\Delta M = 0$, (27.5) follows from (27.3). If $\Delta M \neq 0$,

$$H^{(n)} = \frac{1}{\Delta M}\{(\Delta M)^2 I_{[|\Delta M|\leq n]} - \widehat{W}^{(n)}\}.$$

Letting $n \to \infty$ yields (27.5). Let $\bar{\alpha}^{(1)}$ and $\bar{\alpha}^{(2)}$ be two predictable processes such that they are the two roots of $z^2 - Yz - W = 0$. Then

$\alpha^{(1)} = \bar{\alpha}^{(1)} I_{A^c} + X I_A$, $\alpha^{(2)} = \bar{\alpha}^{(2)} I_{A^c}$ satisfy the requirement ii). i) follows from Theorem 13.14.

2)⇒1). First of all, we may suppose $|\alpha^{(2)}| \geq |\alpha^{(1)}|$ and $|\alpha^{(2)}| > 0$. Otherwise, $\alpha^{(1)}$ and $\alpha^{(2)}$ may be replaced by $\bar{\alpha}^{(1)}$ and $\bar{\alpha}^{(2)}$, defined as follows:

$$\bar{\alpha}^{(1)} = \alpha^{(1)} I_{[|\alpha^{(1)}|\leq|\alpha^{(2)}|]} + \alpha^{(2)} I_{[|\alpha^{(1)}|>|\alpha^{(2)}|]},$$

$$\bar{\alpha}^{(2)} = \alpha^{(1)} I_{[|\alpha^{(1)}|>|\alpha^{(2)}|]} + \alpha^{(2)} I_{[|\alpha^{(1)}|\leq|\alpha^{(2)}|, \alpha^{(2)}\neq 0]} + I_{[\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=0]}.$$

Let $L \in \mathcal{M}^d_{loc,0}$. Then there exists $W \in \mathcal{G}(\mu)$ such that $L = W*(\mu-\nu)$. Set

$$X = I_{[\Delta M=\alpha^{(1)}]}, \quad Y = I_{[\Delta M\neq\alpha^{(1)}]} = 1 - X.$$

Then

$$\begin{aligned}
\Delta M &= \alpha^{(1)}X + \alpha^{(2)}Y, \\
\Delta L_t &= W(t, \alpha_t^{(1)})I_{[\alpha_t^{(1)}\neq 0]}X_t + W(t, \alpha_t^{(2)})Y_t - \widehat{W}_t.
\end{aligned} \tag{27.6}$$

Write $W_t^{(1)} = W(t, \alpha_t^{(1)})I_{[\alpha_t^{(1)}\neq 0]} - \widehat{W}_t$, $W_t^{(2)} = W(t, \alpha_t^{(2)}) - \widehat{W}_t$, $t \geq 0$. Then $W^{(1)}, W^{(2)} \in \mathcal{P}$, and

$$\Delta L = W^{(1)}X + W^{(2)}Y. \tag{27.7}$$

Taking predictable projections in (27.6) and (27.7), we obtain

$$\begin{aligned}
\alpha^{(1)}\,{}^pX + \alpha^{(2)}\,{}^pY &= 0, \\
W^{(1)}\,{}^pX + W^{(2)}\,{}^pY &= 0.
\end{aligned} \tag{27.8}$$

Since ${}^pX + {}^pY = 1$, ${}^pX$ and ${}^pY$ cannot vanish at the same time. Thus by (27.8) we find

$$\alpha^{(1)}W^{(2)} - \alpha^{(2)}W^{(1)} = 0. \tag{27.9}$$

Set $H = \dfrac{W^{(2)}}{\alpha^{(2)}} \in \mathcal{P}$. From (27.6), (27.7) and (27.9) we have

$$H\Delta M = H\alpha^{(1)}X + H\alpha^{(2)}Y = W^{(1)}X + W^{(2)}Y = \Delta L.$$

Hence $H \in L_m(M^d)$ and $L = H.M^d$. □

Remark. In the theorem, if M is supposed to be quasi-left-continuous, we may take $\alpha^{(1)} = 0$. Indeed, we have $\widehat{W} = 0$, so that 0 and Y are two roots of the equation $z^2 - Yz - W = 0$.

13.28 Lemma. *Assume* $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$. *Then the following statements are equivalent:*

1) $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M^c) + \mathcal{L}(M^d)$,

2) $\mathcal{L}(M^c) \subset \mathcal{L}(M)$,

3) $M^c \in \mathcal{L}(M)$.
4) $\mathcal{L}(M^d) \subset \mathcal{L}(M)$.
5) $M^d \in \mathcal{L}(M)$.

Proof. 2)$\Rightarrow$3) is trivial.

3)$\Rightarrow$2). Assume $M^c = H.M, H \in L_m(M)$. Let $L \in \mathcal{L}(M^c)$. Then $L = K.M^c, K \in L_m(M^c)$. Thus $L = K.(H.M) = (KH).M \in \mathcal{L}(M)$.

Similarly, we have 4) $\Longleftrightarrow$ 5).

Since $M \in \mathcal{L}(M), M = M^c + M^d$, we have 3) $\Longleftrightarrow$ 5)

Finally, 1) $\Rightarrow$ 2) and 2) + 4) $\Rightarrow$ 1) are apparent. □

13.29 Theorem. *Assume $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$. Then M has the strong property of predictable representation if and only if $\mathcal{M}^c_{loc} = \mathcal{L}(M^c), \mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(M^d)$ and $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M^c) + \mathcal{L}(M^d)$.*

Proof. Necessity. Let $L \in \mathcal{M}^c_{loc,0}$. Then $L = H.M, H \in L_m(M)$. Indeed, $L = H.M^c$. Thus $\mathcal{M}^c_{loc,0} = \mathcal{L}(M^c)$. Similarly, we have $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(M^d)$. Furthermore,

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{M}_{loc,0} = \mathcal{M}^c_{loc,0} + \mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(M^c) + \mathcal{L}(M^d).$$

Sufficiency. Reversing the above reasoning, we find

$$\mathcal{M}_{loc,0} = \mathcal{M}^c_{loc,0} + \mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(M^c) + \mathcal{L}(M^d) = \mathcal{L}(M). \quad \square$$

13.30 Definition. Let ν be a predictable random measure with $\nu(\{0\} \times E) = 0$. If

$$\nu(\omega, dt, dx) = G(\omega, t, dx) dB_t(\omega), \tag{30.1}$$

where i) B is a predictable increasing process with $B_0 = 0$, ii) for fixed (ω, t), $G(\omega, t, \cdot)$ is a measure on $(E, \mathcal{B}(E))$, iii) for fixed $K \in \mathcal{B}(E)$, $G(\cdot, \cdot, K)$ is a predictable process, then (30.1) is called a *predictable decomposition of* ν. Moreover, if

$$I_A.B = 0, \quad A = \{(\omega, t) : G(\omega, t, E) = 0\}, \tag{30.2}$$

the predictable decomposition (30.1) is said to be *canonical*.

13.31 Lemma *Suppose (30.1) is the canonical predictable decomposition of a predictable random measure ν. If ν has another predictable decomposition:*

$$\nu(\omega, dt, dx) = G'(\omega, t, dx) dB'(\omega). \tag{31.1}$$

Then $P(\{\omega : dB_t(\omega) \ll dB'_t(\omega)\}) = 1$. Moreover, if the decomposition (31.1) is canonical also, then $P(\{\omega : dB_t(\omega) \sim dB'_t(\omega)\}) = 1$.

Proof. It is only required to show the first assertion. To this end, let $H \in \mathcal{P}^+$ and $H.B' = 0$. Then

$$E\Big[\int_0^\infty H_t G(t, E) dB_t\Big] = M_\nu(H) = E\Big[\int_0^\infty H_t G'(t, E) dB'_t\Big] = 0.$$

From (30.2) we have $H.B = 0$. The assertion follows from Theorem 5.14. □

13.32 Lemma. *Let μ be the jump measure of an adapted cadlag process X. Then its compensator ν has the canonical predictable decomposition (30.1). Furthermore, if $W \in \tilde{\mathcal{P}}^+$ is strictly positive and $C = W * \nu \in \mathcal{V}^+$, then $P(\{\omega : dB_t(\omega) \sim dC_t(\omega)\}) = 1$.*

Proof. For each $n \geq 1$ define

$$\mu_n = I_{[\frac{1}{n} < |x| \leq \frac{1}{n-1}]}.\mu, \quad \nu_n = I_{[\frac{1}{n} < |x| \leq \frac{1}{n-1}]}.\nu.$$

Then $A^{(n)}_t = \nu_n([0,t] \times E) \in \mathcal{A}^+_{loc}$, since it is the compensator of the point process $\mu_n([0,t] \times E)$. There exists a predictable integrable increasing process $\overline{A}^{(n)}$ such that $P(\{\omega : dA^{(n)}_t(\omega) \sim d\overline{A}^{(n)}_t(\omega)\}) = 1$. (In fact, if (S_k) is a localizing sequence for $A^{(n)}$, we may take $\overline{A}^{(n)} = \sum_{k=1}^\infty (2^k E[A^{(n)}_{S_k}])^{-1} (A^{(n)})^{S_k}$.) Set

$$\overline{B} = \sum_{n=1}^\infty (2^n E[\overline{A}^{(n)}_\infty])^{-1} \overline{A}^{(n)}.$$

Then $\overline{B} \in \mathcal{A}^+$ is predictable, and for each $n \geq 1$ $P(\{\omega : d\overline{A}^{(n)}_t(\omega) \ll d\overline{B}_t(\omega)\}) = 1$. ν_n can be decomposed into

$$\nu_n(\omega, dt, dx) = G^{(n)}(\omega, t, dx) d\overline{B}_t(\omega) \tag{32.1}$$

such that (32.1) is a predictable decomposition of the stochastic measure ν_n and measure $G^{(n)}(\omega, t, dx)$ does not charge outside $\left\{x : \frac{1}{n} < |x| < \frac{1}{n-1}\right\}$. Set $G = \sum_{n=1}^\infty G^{(n)}$ and $B = I_{A^c}.\overline{B}$, where $A = \{(\omega, t) : G(\omega, t, E) = 0\}$. Then ν has the canonical predictable decomposition (30.1).

Now we show the second assertion. For any $H \in \mathcal{P}^+$ we have

$$H.C = 0 \Longleftrightarrow H.A^{(n)} = 0 \text{ for all } n \geq 1. \tag{32.2}$$

Analogous to (32.1), ν_n has the following predictable decomposition:

$$\nu_n(\omega, dt, dx) = \overline{G}^{(n)}(\omega, t, dx) dC_t(\omega),$$

where $\overline{G}^{(n)}(\omega, t, dx)$ does not charge outside $\{x : \frac{1}{n} < |x| \leq \frac{1}{n-1}\}$, either. Set $G = \sum_{n=1}^\infty \overline{G}^{(n)}$. Then ν has the following predictable decomposition:

$$\nu(\omega, dt, dx) = \overline{G}(\omega, t, dx) dC_t(\omega). \tag{32.3}$$

Put $D = \{(\omega,t) : \overline{G}(\omega,t,E) = 0\}$, $D_n = \{(\omega,t) : G^{(n)}(\omega,t,E) = 0\}$, $n \geq 1$. Then $D = \bigcap_n D_n$ and for all $n \geq 1$, $I_{D_n}.A^{(n)} = 0$, $I_D.A^{(n)} = 0$. By (32.2) we have $I_D.C = 0$. This implies the decomposition (32.3) is canonical. By Lemma 13.31 we get $P(\{\omega, dB_t(\omega) \sim dC_t(\omega)\}) = 1$. □

13.33 Corollary. *Let μ be the jump measure of an adapted cadlag process X, and (30.1) be the canonical predictable decomposition of its compensator ν. If $(\mu([0,t]\times E)) \in \mathcal{A}^+_{loc}$, then $P(\{\omega : dB_t(\omega) \sim \nu(\omega,dt,E)\}) = 1$.*

Proof. In Lemma 13.32 take $W = 1$, then $C_t = \nu([0,t] \times E)$. □

13.34 Corollary. *Assume $M \in \mathcal{M}^2_{loc,0}$. Let μ be the jump measure of M, and ν be the compensator of μ. If ν has the canonical predictable decomposition (30.1), then $P(dB_t \sim d\langle X^d\rangle_t) = 1$.*

Proof. In Lemma 13.32 take $W = x^2 + I_{[x=0]} > 0$, then $C = \langle X^d \rangle$. □

13.35 Theorem. *Let $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$ and (α,β,ν) be its predictable triplet. Assume that ν has the canonical predictable decomposition (30.1). Then M has the strong property of predictable representation if and only if $\mathcal{M}^c_{loc,0} = \mathcal{L}(M^c)$, $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(M^d)$ and $P(d\beta_t \perp dB_t) = 1$.*

Proof. By Theorem 13.29 and Lemma 13.28, it suffices to show

$$P(d\beta_t \perp dB_t) = 1 \Longleftrightarrow M^c \in \mathcal{L}(M).$$

Let $M^c \in \mathcal{L}(M)$. Then $M^c = H.M, H \in L_m(M)$, and $\langle M^c\rangle = H^2.\langle M\rangle$, $H^2.[M^d] = 0$. Write $A = [H^2 = 1]$. Hence $A \in \mathcal{P}$ and $I_{A^c}.\beta = I_{A^c}.\langle M^c\rangle = 0$. On the other hand, since $H^2.[M^d] = 0$, we have $HI_D = 0$, and

$$0 = M_\mu(H^2) = M_\nu(H^2) = E\Big[\int_0^\infty H_t^2 G(t,E)dB_t\Big].$$

Thus $I_A.B = 0$. Therefore $P(d\beta_t \perp dB_t) = 1$.

Conversely, assume $P(d\beta_t \perp dB_t) = 1$. Then there exists $A \in \mathcal{P}$ such that $I_{A^c}.\beta = 0$ and $I_A.B = 0$ (Theorem 5.15). Since $I_{A^c}.\langle M^c\rangle = 0$, we have $I_{A^c}.M^c = 0$, $M^c = I_A.M^c$. On the other hand,

$$\begin{aligned} E\Big[\int_0^\infty (I_A)_t d[M^d]_t\Big] &= M_\mu(x^2 I_A) = M_\nu(x^2 I_A) \\ &= E\Big[\int_0^\infty (I_A)_t\Big(\int_E x^2 G(t,dx)\Big)dB_t\Big] = 0. \end{aligned}$$

Thus $I_A.M^d = 0$, and $M^c = I_A.M \in \mathcal{L}(M)$. □

13.36 Corollary. *Assume $M \in \mathcal{M}^2_{loc,0}$. Then M has the strong*

property of predictable representation if and only if

$$\mathcal{M}^c_{loc,0} = \mathcal{L}(M^c), \mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(M^d) \text{ and } P(d\langle M^c\rangle_t \perp d\langle M^d\rangle_t) = 1.$$

Proof. It follows from Theorem 13.35 and Corollary 13.34. □

13.37 Theorem. *Let $X \in \mathcal{S}$ and μ be its jump measure. If $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{K}(\mu)$, then the following statements are equivalent:*

1) There exists $M \in \mathcal{M}^d_{loc}$ such that $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(M)$,

2) There exist two predictable processes $\alpha^{(1)}$ and $\alpha^{(2)}$ such that

$$(\Delta X - \alpha^{(1)})(\Delta X - \alpha^{(2)}) = 0.$$

Proof. First, we assume $X \in \mathcal{S}_p$. In this case, there is a predictable process A with finite variation such that $N = X - X_0 - X^c - A \in \mathcal{M}^d_{loc}$ and $\Delta N = \Delta X - \Delta A$.

2)⇒1). By Theorem 13.16 we have $\mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \sigma\{\Delta X\}$. But $\Delta X = \Delta N + \Delta A, \Delta A \in \mathcal{P}$. Hence $\mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \sigma\{\Delta N\}$. Set $\gamma^{(i)} = \alpha^{(i)} - \Delta A$, $i = 1,2$. Then $\gamma^{(1)}$ and $\gamma^{(2)}$ are predictable, and $(\Delta N - \gamma^{(1)})(\Delta N - \gamma^{(2)}) = 0$. So that by Theorems 13.6 and 13.27 we know $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(N)$.

1)⇒2). Let $N = H.M, H \in L_m(M)$. Then $H\Delta M = \Delta N = \Delta X - \Delta A$. By Theorem 13.27, there exist two predictable processes $\gamma^{(1)}$ and $\gamma^{(2)}$ such that $(\Delta M - \gamma^{(1)})(\Delta M - \gamma^{(2)}) = 0$. Set $\alpha^{(i)} = H\gamma^{(i)} + \Delta A$, $i = 1,2$. Then $(\Delta X - \alpha^{(1)})(\Delta X - \alpha^{(2)}) = 0$.

Now we deal with the general case. X has the integral representation:

$$X_t = X_0 + \alpha_t + X_t^c + \int_{[0,t]\times[|x|\leq 1]} x d(\mu - \nu) + \int_{[0,t]\times[|x|>1]} x d\mu.$$

Let φ be an one-to-one mapping from $(1,\infty)$ onto $(1,2)$ and from $(-\infty,-1)$ onto $(-2,-1)$. Let φ^{-1} be the inverse of φ. Define

$$X_t' = X_0 + \alpha_t + X_t^c + \int_{[0,t]\times[|x|\leq 1]} x d(\mu - \nu) + \int_{[0,t]\times[|x|>1]} \varphi(x) d\mu.$$

It is easy to see $X' \in \mathcal{S}$ and

$$\begin{aligned} &|\Delta X| \leq 1 \Longleftrightarrow |\Delta X'| \leq 1 \Rightarrow \Delta X = \Delta X', \\ &|\Delta X| > 1 \Longleftrightarrow |\Delta X'| > 1 \Rightarrow \Delta X' = \varphi(\Delta X), \Delta X = \varphi^{-1}(\Delta X'). \end{aligned} \tag{37.1}$$

Since $|\Delta X'| \leq 2$, $X' \in \mathcal{S}_p$. Let μ' be the jump measure of X'. Then we have $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{K}(\mu')$. In fact, $\sigma\{\Delta X\} = \sigma\{\Delta X'\}$ by (37.1), and $\mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \sigma\{\Delta X\} = \mathcal{P} \vee \sigma\{\Delta X'\}$. According to the result shown above, 1) is equivalent to the following:

2') There exist two predictable processes $\overline{\alpha}^{(1)}$ and $\overline{\alpha}^{(2)}$ such that

$$(\Delta X' - \overline{\alpha}^{(1)})(\Delta X' - \overline{\alpha}^{(2)}) = 0.$$

It is not difficult to see 2)⟺2') by (37.1). □

13.38 Theorem. *Let X be an adapted cadlag process, μ be the jump measure of X and ν be the compensator of μ. Then the following statements are equivalent:*

1) *There exist two predictable processes $\alpha^{(1)}$ and $\alpha^{(2)}$ such that*

$$(\Delta X - \alpha^{(1)})(\Delta X - \alpha^{(2)}) = 0. \tag{38.1}$$

2) *ν has the following canonical predictable decomposition:*

$$\nu(dt, dx) = \left\{C_t^{(1)}\delta_{\alpha_t^{(1)}}(dx) + C_t^{(2)}\delta_{\alpha_t^{(2)}}(dx)\right\}dB_t, \tag{38.2}$$

where $C^{(1)}, C^{(2)}, \alpha^{(1)}$ and $\alpha^{(2)}$ are all predictable processes, and

$$[\alpha^{(1)} \neq 0] \subset [a = 1], \quad [\alpha^{(1)} = 0] \subset [C^{(1)} = 0]. \tag{38.3}$$

Proof. 2)⇒1). From (38.2) we have

$$M_\mu([\Delta X \neq \alpha^{(1)}][\Delta X \neq \alpha^{(2)}]) = M_\mu([x \neq \alpha^{(1)}][x \neq \alpha^{(2)}])$$
$$= M_\nu([x \neq \alpha^{(1)}][x \neq \alpha^{(2)}]) = 0.$$

This means (38.1) holds on $D = [\Delta X \neq 0]$. By (38.3)

$$[\alpha^{(1)} \neq 0] \subset [a = 1] \subset D, \quad D^c \subset [\alpha^{(1)} = 0].$$

Hence, on D^c we have $\Delta X = 0$ and $\alpha^{(1)} = 0$, i.e., (38.1) holds on D^c.

1)⇒2). As in the proof of Theorem 13.27, we may assume $|\alpha^{(1)}| \leq |\alpha^{(2)}|$ and $|\alpha^{(2)}| > 0$. From (38.1) we have $[\alpha^{(1)} \neq 0] \subset D$. But $K = [a = 1]$ is the largest predictable set contained in D. Hence $[\alpha^{(1)} \neq 0] \subset K$.

Suppose $\nu(dt, dx) = G_t(dx)dB_t$ is the canonical predictable decomposition of ν. Then

$$0 = M_\mu([\Delta X \neq \alpha^{(1)}][\Delta X \neq \alpha^{(2)}]) = M_\mu([x \neq \alpha^{(1)}][x \neq \alpha^{(2)}])$$
$$= M_\nu([x \neq \alpha^{(1)}][x \neq \alpha^{(2)}]) = E\left[\int_0^\infty \left(\int_{[x\neq\alpha_t^{(1)}, x\neq\alpha_t^{(2)}]} G_t(dx)\right)dB_t\right].$$

Set $C_t^{(1)} = G_t(\{\alpha_t^{(1)}\}), C_t^{(2)} = G_t(\{\alpha_t^{(2)}\})$. Then

$$G_t(dx) = C_t^{(1)}\delta_{\alpha_t^{(1)}}(dx) + C_t^{(2)}\delta_{\alpha_t^{(2)}}(dx).$$

Since $G_t(\{0\}) = 0$, $[\alpha^{(1)} = 0] \subset [C^{(1)} = 0]$. Note that

$$\int_0^t C_s^{(i)} dB_s = \int_0^t \int_E I_{[x=\alpha^{(i)}]}\nu(ds, dx), \quad i = 1, 2,$$

is predictable. Hence $C^{(i)}$ may be taken to be predictable, too. □

Theorem 13.38 provides us with a predictable form of the condition (38.1).

13.39 Theorem. *Let $X \in \mathcal{S}$ with predictable triplet (α, β, ν). If X has the weak property of predictable representation, then the following statements are equivalent:*

1) *There exists $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$ such that $\mathcal{M}_{\mathrm{loc},0} = \mathcal{L}(M)$.*

2) i) *ν has the canonical predictable decomposition* (38.2),

ii) $P(d\beta_t \perp dB_t) = 1$.

Proof. First, we assume that ΔX is bounded. In this case, $X \in \mathcal{S}_p$. There exists a predictable process A with finite variation such that $N = X - X_0 - X^c - A \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,d}$, and

$$\langle N \rangle_t = \int_{[0,t]\times E} x^2 d\nu - \sum_{s\leq t}\left[\int_E x\nu(\{s\}, dx)\right]^2. \tag{39.1}$$

2)⇒1). Set $M = X^c + N$. Then $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}^2$, $M^c = X^c$, $M^d = N$. Since $\mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}^c = \mathcal{L}(X^c) = \mathcal{L}(M^c)$, from the proof of Theorem 13.37 we know $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^d = \mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(M^d)$. Observe that

$$\langle N \rangle_t = \int_{[0,t]\times E} x^2 d\nu^c + \sum_{s\leq t}\left\{\int_E x^2\nu(\{s\}, dx) - \left[\int_E x\nu(\{s\}, dx)\right]^2\right\}$$

and $\beta = \langle X^c \rangle = \langle M^c \rangle$ is continuous. Hence

$$d\beta_t \perp dB_t \iff d\beta_t \perp \int_E x^2\nu(dt, dx) \iff d\beta_t \perp \int_E x^2\nu^c(dt, dx)$$
$$\iff d\beta_t \perp d\langle N \rangle_t.$$

Thus $P(d\langle M^c\rangle_t \perp d\langle M^d\rangle_t) = 1$. By Collorary 13.36 we have $\mathcal{M}_{\mathrm{loc},0} = \mathcal{L}(M)$.

1)⇒2). i) follows from Theorems 13.37 and 13.38. Let μ' be the jump measure of M and ν' be the compensator of μ'. Let $X^c = H.M, H \in L_m(M)$. Then

$$\beta = \langle X^c \rangle = H^2.\langle M^c \rangle, \quad d\beta_t \ll d\langle M^c \rangle_t, \quad \text{a.s.}.$$

On the other hand, let $N = H'.M^d = (H'x) * (\mu' - \nu'), H' \in L_m(M)$, and $\nu'(dt, dx) = G_t'(dx)dB_t'$ be the canonical predictable decomposition of ν'. Then

$$\langle N \rangle_t = \int_{[0,t]\times E} (H'x)^2 d\nu' = \int_0^t \left\{(H_s')^2 \int_E x^2 G_s'(dx)\right\}dB_s',$$
$$d\langle N \rangle_t \ll dB_t', \quad \text{a.s.}.$$

By Theorem 13.35 we have $P(d\langle M^c\rangle_t \perp dB_t') = 1$. Hence $P(d\beta_t \perp d\langle N\rangle_t) = 1$, and therefore $P(d\beta_t \perp dB_t) = 1$.

Now we deal with the general case. As in the proof of Theorem 13.37, we introduce $X' \in \mathcal{S}_p$. Clearly, X' has the weak property of predictable representation, too. As we have shown in the proof of Theorem 13.37, the conditions that (38.1) holds for X or X' are equivalent. Thus condition 2) i) is equivalent to that the compensator of the jump measure of X' has a canonical predictable decomposition of from (38.2). However, $[\Delta X \neq$

$0] = [\Delta X' \neq 0]$. Hence the process B is still available for X'. This means condition 2) ii) remains unchanged for X' (noting $(X')^c = X^c$). In a word, X may be replaced by X', condition 2) being unchanged. But $\Delta X'$ is bounded by 2, thus the proof is completed. □

Remark. We say that the filtration $F = (\mathcal{F}_t)$ has the *strong* (resp. *weak*) *property of predictable representation* if there exists $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$ (resp $X \in \mathcal{S}$) such that M (resp. X) has the strong (resp. weak) property of predictable representation. Then Theorem 13.39 characterizes the relation between the strong and weak property of predictable representation of a filtration.

To conclude this paragraph, we discuss the relation between the predictable representation property and complete continuity of a filtration.

13.40 Lemma. *Assume that $F = (\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous and there exists $M \in \mathcal{M}^d_{loc}$ such that $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(M)$. Then $F = (\mathcal{F}_t)$ is completely continuous.*

Proof. It is only required to show for each totally inaccessible time T, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$. Let $\xi \in b\mathcal{F}_T$. Set $A = \xi I_{[T,\infty[}$ and $N = A - \tilde{A}$. Then $N = H.M$, $H \in L_m(M)$, and $\Delta N = H\Delta M$. On the other hand, $\Delta N = \Delta A = \xi I_{[T]}$ since $\tilde{A}$ is continuous and $T > 0$. Thus

$$\xi = H_T \Delta M_T, \quad \text{a.s. on } [T < \infty]. \tag{40.1}$$

Taking $\xi = 1$, we have

$$1 = H'_T \Delta M_T, \quad \text{a.s. on } [T < \infty], \tag{40.2}$$

where H' is another predictable process. By (40.2) we know $\Delta M_T \neq 0$ and $H'_T \neq 0$ a.s. on $[T < \infty]$. Hence

$$\xi = H_T / H'_T \quad \text{a.s. on } [T < \infty].$$

But $\frac{H_T}{H'_T} I_{[T<\infty]} \in \mathcal{F}_{T-}$. Therefore $\xi \in \mathcal{F}_{T-}$. This implies $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$. □

13.41 Theorem. *Assume that $F = (\mathcal{F}_t)$ is quasi-left-continuous. Let $X \in \mathcal{S}$ and μ be the jump measure of X. If $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{K}(\mu)$, then the following statements are equivalent:*

1) *There exists $M \in \mathcal{M}^d_{loc}$ such that $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{L}(M)$.*

2) *$F = (\mathcal{F}_t)$ is completely continuous.*

Proof. 1)⇒2) follows from Lemma 13.40 (even we do not need the assumption $\mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{K}(\mu)$).

2)⇒1). By Theorem 13.26 the compensator ν of μ can be represented as

$$\nu(dt, dx) = \delta_{H_t}(dx)\Lambda(dt),$$

where H is a predictable process. Hence

$$M_\mu([\Delta X \neq H]) = M_\mu([x \neq H]) = M_\nu([x \neq H]) = 0,$$

and therefore $\Delta X = HI_D$, $D = [\Delta X \neq 0]$. Thus

$$\Delta X(\Delta X - H) = 0,$$

and 1) follows from Theorem 13.37. □

The next theorem is an immediate application of Theorem 13.41.

13.42 Theorem. *Let X be a step process and $F = (\mathcal{F}_t)$ be the complete natural filtration of X. Assume X is quasi-left-continuous and $X \in \mathcal{A}_{loc}$. Then the following statements are equivalent:*

1) *$M = X - \tilde{X}$ has the strong property of predictable representation,*

2) *$F = (\mathcal{F}_t)$ is completely continuous,*

3) *the Lévy system ν of X has the form: $\nu(dt, dx) = \delta_{H_t}(dx)\Lambda(dt)$, where H is a predictable process and $\Lambda(dt) = \nu(dt, E)$.*

Proof. Since X is quasi-left-continuous, so is $F = (\mathcal{F}_t)$ (Theorem 5.64). By Theorem 13.19 we have $\mathcal{M}_{loc,0} = \mathcal{M}^d_{loc} = \mathcal{K}(\mu)$, where μ is the jump measure of X. The results follow from Theorems 13.27 and 13.41. □

§4. The Predictable Representation Property of Lévy Processes

13.43 Lemma. *For any process $X = (X_t)_{t\geq 0}$,*

$$\mathcal{H} = \left\{ \exp(i[u_0 X_{t_0} + \sum_{i=1}^n u_i(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})]) : \begin{array}{l} n \geq 1, u_0, u_1, \cdots, u_n \in \mathbf{R}, \\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \end{array} \right\}$$

is a total family in $L^2(\mathcal{F}^P_\infty(X))$, i.e., the linear subspace spanned by $\mathcal{H}$ is dense in $L^2(\mathcal{F}^P_\infty(X))$, where $L^2(\mathcal{F}^P_\infty(X))$ is the Hilbert space of all square-integrable complex $\mathcal{F}^P_\infty(X)$-measurable r.v..

Proof. First we discuss the case of a finite number of r.v., i.e., assume $X = (X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$. In this case, for any $\xi \in L^2(\mathcal{F}^P_\infty(X))$ there exists a Borel function of n variables f such that $\xi = f(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ a.s.. Denote by $F(x_1, \cdots, x_n)$ the distribution function of $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$. Put

$$dG(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n)dF(x_1, \cdots, x_n).$$

If $\xi \perp \mathcal{H}$, then for any $u_1,\cdots,u_n \in \mathbf{R}$

$$0 = \mathbf{E}\Big[\xi \exp(-i\sum_{j=1}^n u_j X_{t_j})\Big] = \int_{R^n} \exp(-i\sum_{j=1}^n u_j x_j)\,dG(x_1,\cdots,x_n).$$

Using the inverse formula of Fourier-Stieltjes transformation, we obtain $dG=0$. Hence, $\xi=0$ a.s.. Therefore, $\mathcal{H}$ is total in $L^2(\mathcal{F}^P_\infty(X))$.

Now we discuss the general case: $X=(X_t)_{t\ge 0}$. Let $\xi\in L^2(\mathcal{F}^P_\infty(X))$ and $\xi\perp\mathcal{H}$. For any given $\varepsilon>0$, there exists a finite set $\{t_1,\cdots,t_n\}$ and $\xi_\varepsilon \in L^2(\sigma(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}))$ such that

$$\mathbf{E}[|\xi-\xi_\varepsilon|^2]<\varepsilon.$$

Making use of the assertion established above, we know $\xi\perp\xi_\varepsilon$. Then

$$\mathbf{E}[\xi^2] = \mathbf{E}[\xi(\overline{\xi-\xi_\varepsilon})] \le \{\mathbf{E}[\xi^2]\mathbf{E}[|\xi-\xi_\varepsilon|^2]\}^{1/2} \le \{\varepsilon \mathbf{E}[\xi^2]\}^{1/2},$$

$$\mathbf{E}[\xi^2]\le\varepsilon.$$

Letting $\varepsilon\to 0$ yields $\xi=0$ a.s.. □

13.44 Theorem. *Let X be a Lévy process. Then for each $t\ge 0$*

$$\mathcal{F}^P_t(X) = \mathcal{F}^P_{t+}(X) = \mathcal{F}^P_{t-}(X).$$

Hence, $\mathbf{F}^P(X) = (\mathcal{F}^P_t(X))$ is the usual augmentation of the natural filtration of X.

Proof. It is easy to deduce $\mathcal{F}^P_t(X)=\mathcal{F}^P_{t-}(X)$ from stochastic continuity of X.

For all $u\in \mathbf{R}, 0\le r\le s$, it is not hard to calculate directly:

$$M_t(u,r,s) = \mathbf{E}[e^{iu(X_s-X_r)}|\mathcal{F}^P_t(X)] = \varphi_{r\vee t,s\vee t}(u)\, e^{iu(X_{s\wedge t}-X_{r\wedge t})}. \qquad (44.1)$$

From (44.1) we know that $(M_t(u,r,s))_{t\ge 0}$ is an $\mathbf{F}^P(X)$-martingale, cadlag and bounded. Let

$$\eta = \exp\{iu_0X_0 + iu_1(X_{t_1}-X_{t_0}) + \cdots + iu_n(X_{t_n}-X_{t_{n-1}})\}, \qquad (44.2)$$

$$n\ge 1,\ u_0,u_1,\cdots,u_n\in \mathbf{R},\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_n.$$

Using the same calculation, we have

$$\mathbf{E}[\eta|\mathcal{F}^P_t(X)] = e^{iu_0X_0} M_t(u_1,t_0,t_1)\cdots M_t(u_n,t_{n-1},t_n). \qquad (44.3)$$

Denote by Y_t the right side of (44.3), then (Y_t) is right-continuous. Therefore

$$\mathbf{E}[\eta|\mathcal{F}^P_{t+}(X)] = Y_{t+} = Y_t = \mathbf{E}[\eta|\mathcal{F}^P_t(X)] \quad \text{a.s.}. \qquad (44.4)$$

In view of Lemma 2.69, from (44.4) we obtain $\mathcal{F}^P_{t+}(X)=\mathcal{F}^P_t(X)$. □

13.45 Theorem. *Let X be a Lévy process, and T be an $\mathbf{F}^P(X)$-stopping time. Then*

$$\mathcal{F}^P_T(X) = \sigma\{T\}\vee\mathcal{F}^P_\infty(X^T). \qquad (45.1)$$

Proof. Put $\mathcal{G}=\sigma\{T\}\vee\mathcal{F}^P_\infty(X^T)$. $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}^P_T(X)$ is obvious. Let η be defined in (44.2). By right-continuity of $\mathbf{F}^P(X)$ and $(M_t(u,r,s))$ we have

$$\mathbf{E}[\eta|\mathcal{F}^P_T(X)] = e^{iu_0X_0}M_T(u_1,t_0,t_1)\cdots M_T(u_n,t_{n-1},t_n), \quad \text{a.s.}.$$

It is easy to see from (44.4) that $M_T(u,r,s)$ is $\mathcal{G}$-measurable. Hence $\mathbf{E}[\eta|\mathcal{F}^P_T(X)]$ is $\mathcal{G}$-measurable. By Lemma 13.43, for any $\eta\in L^2(\mathcal{F}^P_\infty(X))$, $\mathbf{E}[\eta|\mathcal{F}^P_T(X)]$ is $\mathcal{G}$-measurable. This means $\mathcal{F}^P_T(X)\subset\mathcal{G}$. Hence, $\mathcal{G}^P_T(X)=\mathcal{G}$. □

13.46 Theorem. *Let X be a cadlag process, and T be an $\mathbf{F}^0(X)$-stopping time. Then*

$$\mathcal{F}^0_{T-}(X) = \sigma\{T\}\vee\mathcal{F}^0_\infty(X^{T-}). \qquad (46.1)$$

Proof. Put $\mathcal{G}=\sigma\{T\}\vee\mathcal{F}^0_\infty(X^{T-})$. Since (X_{t-}) is $\mathbf{F}^0(X)$-predictable, we have $X_{T-}\in\mathcal{F}^0_{T-}(X)$. Then for each $t\ge 0$

$$X^{T-}_t = X_tI_{[t<T]} + X_{T-}I_{[T\le t]} \in \mathcal{F}^0_{T-}(X).$$

Hence $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}^0_{T-}(X)$. On the other hand, $\mathcal{F}^0_0(X)\subset\mathcal{G}$ is obvious, and for any $0\le s\le t$ and Borel function f

$$f(X_s)I_{[t<T]} = f(X^{T-}_s)I_{[t<T]}.$$

Hence $\mathcal{F}^0_{T-}(X)\subset\mathcal{G}$. Consequently, $\mathcal{F}^0_{T-}(X)=\mathcal{G}$. □

13.47 Corollary. *Let X be a Lévy process, and T be an $\mathbf{F}^P(X)$-stopping time. Then*

$$\mathcal{F}^P_T(X) = \mathcal{F}^P_{T-}(X)\vee\sigma\{\Delta X_TI_{[T<\infty]}\}. \qquad (47.1)$$

Proof. Since $X^T = X^{T-} + (\Delta X_TI_{[T<\infty]})I_{[T,\infty[}$, (47.1) follows directly from (45.1) and (46.1). □

13.48 Theorem. *Let X be a Lévy process. Then $\mathbf{F}^P(X)$ is quasi-left-continuous.*

Proof. By Theorem 11.36 we have already known that a Lévy process is quasi-left-continuous. If T is a predictable time, then $\Delta X_TI_{[T<\infty]}=0$ a.s.. By (47.1) we have $\mathcal{F}^P_T(X)=\mathcal{F}^P_{T-}(X)$. □

13.49 Theorem. *Let X be a Lévy process and $X\in\mathcal{S}_0$. Let $\mathbf{F}=\mathbf{F}^P(X)$. Then X has the weak property of predictable representation.*

Proof. Since the predictable triplet of X and the law of X_0 determine completely the probability measure on $\mathcal{F}_\infty$, according to Theorem 13.18, X has the weak property of predictable representation. □

Remark. For any Lévy process X we conclude that $\mathbf{F}^P(X)$ has the weak property of predictable representation.

13.50 Theorem. *Let X be a Lévy process with $X_0 = 0$ and $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^P(X)$. Let T be a stopping time. Then*

1) *T is totally inaccessible* $\iff [\![T]\!] \subset [\Delta X \neq 0]$.

2) *T is predictable* $\iff [\![T]\!] \subset [\Delta X = 0]$.

Proof. 1) If T is totally inaccessible, then by Theorems 13.49 and 13.16.5) $[\![T]\!] \subset [\Delta X \neq 0]$. If $[\![T]\!] \subset [\Delta X \neq 0]$, then T is totally inaccessible, since X is quasi-left-continuous.

2) follows from 1), since $\boldsymbol{F}$ is quasi-left-continuous, predictable times are just accessible times. □

13.51 Theorem. *Let X be a Lévy process with $X_0 = 0$, and $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^P(X)$. Then the following statements are equivalent:*

1) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^P(X)$ *is completely continuous,*

2) *there exists a Borel function $g \neq 0$ such that*

$$\nu(dt, dx) = \delta_{g_t}(dx)\Lambda(dt), \tag{51.1}$$

where ν is the Lévy system of X and $\Lambda(dt)$ is a σ-finite measure on $\boldsymbol{R}_+$,

3) *there exists a Borel function $g \neq 0$ such that $\Delta X = gI_{[\Delta X \neq 0]}$.*

Proof. 1)⇒2). Without loss of generality, we may assume X is a semimartingale. Then X has the weak property of predictable representation. Since ν is non-random, 2) follows from Theorem 13.26.

2)⇒3). From (51.1) we have

$$M_\mu([\Delta X \neq g]) = M_\mu([x \neq g]) = M_\nu([x \neq g]) = 0.$$

Thus $\Delta X = gI_{[\Delta X \neq 0]}$.

3)⇒1). We may also assume $X \in \mathcal{S}$. Since $\Delta X(\Delta X - g) = 0$. By Theorems 13.37 and 13.41 we know that $\boldsymbol{F}$ is completely continuous. □

13.52 Theorem. *Let X be a Lévy process with $X_0 = 0$ and $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^P(X)$. Let (α, β, ν) be the predictable triplet of X. Then $\boldsymbol{F}$ has the strong property of predictable representation if and only if the following conditions are fulfilled:* i) *There exists a Borel function $g \neq 0$ such that $\nu(dt, dx) = \delta_{g_t}(dx)\Lambda(dt)$,* ii) $d\beta_t \perp \Lambda(dt)$.

Proof. Without loss of generality, we may assume $X \in \mathcal{S}$. If $\boldsymbol{F}$ has the strong property of predictable representation, then by Lemma 13.40 and Theorem 13.48 $\boldsymbol{F}$ is completely continuous and i) follows from Theorem 13.51. ii) follows from Theorem 13.39. Conversely, if i) and ii) hold, then $\Delta X = gI_{[\Delta X \neq 0]}$, and again by Theorem 13.39 we know that $\boldsymbol{F}$ has the strong property of predictable representation. □

13.53 Theorem. *Let X be a homogeneous Lévy process with $X_0 = 0$ and $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^P(X)$. Let ν be the Lévy system of X. Then*

1) *$\boldsymbol{F}$ is completely continuous if and only if*

$$\nu(dt, dx) = \lambda\delta_a(dx)dt, \ \lambda > 0, \ a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}, \tag{53.1}$$

or equivalently, $\Delta X = aI_{[\Delta X \neq 0]}, a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

2) *$\boldsymbol{F}$ has the strong property of predictable representation if and only if $X = bY + at$, where Y is a standard Wiener process or a homogeneous Poisson process and $a, b \in \boldsymbol{R}$.*

Proof. In this case, $X \in \mathcal{S}$ and $\nu(dt, dx) = \lambda dt F(dx)$, where $\lambda > 0$ and F is a σ-finite measure. Then 1) follows from Theorem 13.51. At the same time, 2) follows from Theorem 13.52, since the fact that $d\beta_t = \sigma^2 dt, \Lambda(dt) = \lambda dt$ and $d\beta_t \perp \Lambda(dt)$ implies $\sigma^2 = 0$ or $\lambda = 0$. □

13.54 Corollary. *Let X be a homogeneous Lévy process with $X_0 = 0$ and $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^P(X)$. Assume that X is a martingale. Then X has the strong property of predictable representation if and only if X is a standard Wiener process or a compensated Poisson process, up to a constant factor.*

Problems and Complements

13.1 Let $C_0(\boldsymbol{R}_+)$ be the collection of all continuous functions on $\boldsymbol{R}_+$ with compact support. If $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc},0}$ and

$$\left\{\exp\left\{(f.M)_\infty - \frac{1}{2}(f^2.\langle M\rangle)_\infty\right\} : \ f \in C_0(\boldsymbol{R}_+)\right\}$$

is a total family in $L^2(\mathcal{F}_\infty)$, then M has the strong property of predictable representation and $\mathcal{F}_0$ is the trivial σ-field.

13.2 Let $M, N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$ such that $\langle M, N\rangle$ exists. Write $X = M - \langle M, N\rangle$. Then M has the strong property of predictable representation if and only if for any $L \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ with $L_0 = 1, LX \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}} \Rightarrow L = \mathcal{E}(N)$.

13.3 Assume that $X \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc},0}$ has the strong property of predictable representation. Let $\boldsymbol{P}' \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \boldsymbol{P}$, and $X = M + A$ be the canonical decomposition of X under $\boldsymbol{P}'$. Then there exists a unique $L \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc},0}(\boldsymbol{P}')$ such that under $\boldsymbol{P}', A = \langle L, M\rangle(\boldsymbol{P}')$.

13.4 Let $X_t = M_t + \int_0^t H_s ds$, $t \geq 0$, where M is a Brownian motion, H is a predictable process such that for all $t > 0$, $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$. Let $\boldsymbol{F} = (\overline{\mathcal{F}}_t)$ be the usual natural filtration of X. Suppose $\boldsymbol{P}_0$ is a probability measure on $\overline{\mathcal{F}}_\infty$ such that under $\boldsymbol{P}_0, X$ is a Brownian motion w.r.t. $\overline{\boldsymbol{F}}$. Then for all $t > 0$, $\boldsymbol{P}|_{\overline{\mathcal{F}}_t} \ll \boldsymbol{P}_0|_{\overline{\mathcal{F}}_t}$.

And hence, if $X = \overline{M} + \overline{A}$ is the canonical decomposition of X w.r.t. $\overline{\boldsymbol{F}}$, then $\overline{M}$ (it is also a Brownian motion w.r.t. $\overline{\boldsymbol{F}}$) has the strong property of predictable representation w.r.t. $\overline{\boldsymbol{F}}$.

13.5 Let $M \in \mathcal{M}^c_{loc,0}$ with $\langle M\rangle_\infty = \infty$ a.s., and the reference filtration $F = (\mathcal{F}_t)$ is the usual natural filtration of M. Set $\tau_t = \inf\{s : \langle M\rangle_s > t\}$ and $B_t = M_{\tau_t}$, $t \geq 0$. Then M has the strong property of predictable representation if and only if B has the strong property of predictable representation w.r.t. $(\mathcal{F}_{\tau_t})$.

13.6 Let $M \in \mathcal{M}^c_{loc,0}$ with $\langle M\rangle_\infty = \infty$ a.s., and the reference filtration $F = (\mathcal{F}_t)$ is the usual natural filtration of M. Set $\tau_t = \inf\{s : \langle M\rangle_s > t\}$ and $B_t = M_{\tau_t}$, $t \geq 0$. Then the following conditions are equivalent:

1) $\forall t \geq 0$, $\tau_t \in \mathcal{F}_\infty(B)$;

2) $\forall t \geq 0$, $\langle M\rangle_t \in \mathcal{F}_\infty(B)$;

3) $\forall t \geq 0$, $\langle M\rangle_t$ is an $(\mathcal{F}_t(B))$-stopping time;

4) $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_\infty(B)$.

If these conditions are in force (then M is said to be pure), M has the strong property of predictable representation.

13.7 Let W be a standard Brownian motion, $F = (\mathcal{F}_t)$ be its usual natural filtration. let $H \in \mathcal{P}^+$ such that for almost all ω the Lebesgue measure of $\{t : H_t(\omega) = 0\}$ is zero. Set $M = H.W$. Then M has the strong property of predictable representation w.r.t. $(\mathcal{F}_t(M))$. In particular, so does $M = W^n.W$ for each $n \in N$.

13.8 Assume that $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$ is quasi-left-continuous. Denote

$$\mathcal{L}'(M) = \{H.M : H \text{ is an optional process such that } H.M \text{ exists}\}.$$

Then the following statements are equivalent:

1) $\mathcal{M}_{loc,0} = \mathcal{L}'(M)$;

2) for any $L \in \mathcal{M}_{loc,0}$, $[L, M] = 0 \Rightarrow L = 0$;

3) $\mathcal{M}^\infty_0 \subset \mathcal{L}'(M)$;

4) for any $L \in \mathcal{M}^\infty_0$, $[L, M] = 0 \Rightarrow L = 0$.

13.9 Assume that $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$ is quasi-left-continuous. If M has the weak property of predictable representation, then $\mathcal{M}_{loc,0} = \mathcal{L}'(M)$, where $\mathcal{L}'(M)$ is defined in the previous problem.

13.10 Let X be a step process and $F = (\mathcal{F}_t)$ be its complete natural filtration. Then $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{W}_{loc}$.

13.11 Let W be a Brownian motion. We have $|W| = M + A$, $M = \operatorname{sgn}(W).W$, $A = L^0(W)$. Then 1) the usual natural filtration of $|W|$, denoted by G, coincides with that of M; 2) M is a Brownian motion, w.r.t. both F and G, and has the strong property of predictable representation w.r.t. both F and G as well.

13.12 Let $X = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n I_{[T_n,\infty[}$ be a step process, where $T_n \uparrow \infty$, for each $n \geq 0$, $T_n < \infty \Rightarrow T_n < T_{n+1}$ $(T_0 = 0)$ and for each $n \geq 1$, $[T_n < \infty] = [\xi_n \neq 0]$. Let $F = (\mathcal{F}_t)$ be the complete natural filtration of

X. Then $F = (\mathcal{F}_t)$ has the strong property of predictable representation if and only if there exist Borel functions $f_n^{(i)}(x_0, t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, t_{n+1})$, $i = 1, 2$, $n = 0, 1, \cdots$, such that for $n \geq 0$

i) $\xi_{n+1} = f_n^{(1)}(X_0, T_1, \xi_1, \cdots, T_n, \xi_n, T_{n+1})$ a.s. on $[a_{T_{n+1}} < 1, T_{n+1} < \infty]$.

ii) on $[a_{T_{n+1}} = 1, T_{n+1} < \infty]$

$$[\xi_{n+1} - f_n^{(1)}(X_0, T_1, \xi_1, \cdots, T_n, \xi_n, T_{n+1})]$$
$$[\xi_{n+1} - f_n^{(2)}(X_0, T_1, \xi_1, \cdots, T_n, \xi_n, T_{n+1})] = 0 \quad \text{a.s.},$$

where $a = (\nu(\{t\} \times E))$, ν is the Lévy system of X.

13.13 Let $X = I_{[T,\infty[}$, $T > 0$, be a single point process and $F = (\mathcal{F}_t)$ be its complete natural filtration. Let G be the distribution function of T and $c = \inf\{t : P(T > t) = 0\}$. Then

1) $M \in \mathcal{M}_0$ if and only if there exists a Borel function h on $]0, \infty]$ such that $|h|.G_\infty < \infty$, $h.G_\infty = 0$ and

$$M_t = I_{[T \leq t[}h(T) - I_{[T > t[}\frac{1}{G(]t, \infty])}\int_{]0,t]} h_s dG_s, \quad t \geq 0.$$

2) If $M \in \mathcal{M}_{loc,0}$, then $(M_t)_{0 \leq t < c}$ is a martingale.

3) If $c < \infty$ and $P(T = c) > 0$, then $\mathcal{M}_{loc,0} = \mathcal{M}_0$.

13.14 Let $Y = Y_0 + M + A$, where M is a martingale with $M_0 = 0$, $A \in \mathcal{V}_0$ satisfies the condition that for all $t \geq 0$, $E[\int_0^t |dA_s|] < \infty$. Let X be an adapted step process, and $G = (\mathcal{G}_t)$ be the complete natural filtration of X. Then $Z = (Z_t = E[Y_t|\mathcal{G}_t])$ (it is called the filtering process of Y w.r.t. G) has a cadlag modification, and

$$Z_t = Z_0 + \overline{A}_t + \int_{]0,t] \times E} (U(s, x) + \frac{\hat{U}_s}{1 - a_s} I_{[a_s < 1]})(\mu(ds, dx) - \nu(ds, dx)),$$

where i) $\overline{A} = (\overline{A}_t)$ is the G-compensator of A,

ii) μ is the jump measure of X and ν is the G-compensator of μ,

iii) $U = M_\mu[Z|\tilde{\mathcal{P}}(G)] - Z_- - \Delta\overline{A}$ (indeed, we have $M_\mu[Z|\tilde{\mathcal{P}}(G)] = M_\mu[Y|\tilde{\mathcal{P}}(G)]$).

13.15 Assume that X^a and X^b are homogeneous Poisson processes with rate $a > 0$ and $b > 0$ respectively, ξ be a r.v. with $P(\xi = b) = p$, $P(\xi = a) = 1 - p$, $0 < p < 1$, and ξ, X^a, X^b are independent. Let $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{\xi, X_s^a, X_s^b, s \leq t\}$, $t \geq 0$, and $F = (\mathcal{F}_t)$ be the completion of $F^0 = (\mathcal{F}_t^0)$. Set $X = X^a I_{[\xi=a]} + X^b I_{[\xi=b]}$. Let $G = (\mathcal{G}_t)$ be the complete natural filtration of X. Then the filtering process $Z = (Z_t = P[\xi = b|\mathcal{G}_t])$ satisfies the following stochastic differential equation

$$Z_t = p + \int_0^t \frac{(b - a)Z_{s-}(1 - Z_{s-})}{bZ_{s-} + a(1 - Z_{s-})}(dX_s - [bZ_{s-} + a(1 - Z_{s-})]ds), \quad t \geq 0.$$

13.16 Let W be a Brownian motion and $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^P(W)$. Then for any stopping time T and any r.v. $\xi \in \mathcal{F}_T$, there exists $H \in L_m(W)$ such that $\xi = H.W_T$ a.s..

13.17 Let N be a compensated Poisson process and $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^P(N)$. Then for any finite predictable time T and any r.v. $\xi \in \mathcal{F}_T$ (resp. $\xi \in \mathcal{F}_\infty$), there exists $H \in L_m(N)$ such that $\xi = H.N_T$ (resp. $\xi = H.N_\infty$).

13.18 Suppose X^1 and X^2 are two semimartingales (resp. local martingales), having the weak (resp. strong) property of predictable representation w.r.t. filtrations $\boldsymbol{F}^1 = (\mathcal{F}_t^1)$ and $\boldsymbol{F}^2 = (\mathcal{F}_t^2)$ respectively. Let $(\alpha^1, \beta^1, \nu^1)$ and $(\alpha^2, \beta^2, \nu^2)$ be the predictable triplet of X^1 and X^2, $a^i = (\nu^i(\{t\} \times E))$, $J^i = [a^i > 0]$, and $\nu^i(dt, dx) = G^i(t, dx)dB_t^i$ be the canonical predictable decompositions of ν^i, $i = 1, 2$, respectively. Assume that $\mathcal{F}_\infty^1$ and $\mathcal{F}_\infty^2$ are independent and $J^1 \cap J^2 = \emptyset$. Set

$$X = X^1 + X^2,$$

$$\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t), \qquad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^1 \vee \mathcal{F}_t^2, \quad t \geq 0.$$

Then X has the weak (resp. strong) property of predictable representation w.r.t. $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$ if and only if

$$d\beta^1 \perp d\beta^2, \quad d\nu^1 \perp d\beta^2 \quad \text{a.s.} \quad (\text{resp.}\, d(\beta^1 + B^1) \perp d(\beta^2 + B^2) \text{ a.s.}).$$

Chapter XIV

Absolute Continuity and Contiguity of Measures

Absolute continuity and singularity of measures induced by stochastic processes are a classical problem of stochastic process theory. Semimartingale theory and stochastic calculus provide a completely new approach to it. In §1 we introduce the basic tools—Hellinger processes. Then in §2 we discuss absolute continuity and singularity of measures. The generalizations of absolute continuity and singularity—contiguity and entire separation of measures, and the associated problem of convergence in variation of measures are discussed in §3. Finally, the application to Lévy processes is given in §4.

§1. Hellinger Processes

In this and next paragraphs, we always suppose $(\Omega, \mathcal{F})$ is a measurable space, $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}'$ and $\tilde{\boldsymbol{P}}$ are probability measures on $\mathcal{F}$ such that

$$\boldsymbol{P} \ll \tilde{\boldsymbol{P}}, \quad \boldsymbol{P}' \ll \tilde{\boldsymbol{P}}.$$

14.1 Definition For any $\alpha \in]0, 1[$ define

$$h_\alpha(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}') = \tilde{\boldsymbol{E}}\Big[\Big(\frac{d\boldsymbol{P}}{d\tilde{\boldsymbol{P}}}\Big)^\alpha \Big(\frac{d\boldsymbol{P}'}{d\tilde{\boldsymbol{P}}}\Big)^{1-\alpha}\Big].$$

It is not difficult to see that $h_\alpha(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}')$ does not depend on the choice of $\tilde{\boldsymbol{P}}$, but on $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}'$ and α only. In fact, if $\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}')$, then

$$\tilde{\boldsymbol{E}}\Big[\Big(\frac{d\boldsymbol{P}}{d\tilde{\boldsymbol{P}}}\Big)\Big(\frac{d\boldsymbol{P}'}{d\tilde{\boldsymbol{P}}}\Big)^{1-\alpha}\Big] = \overline{\boldsymbol{E}}\Big[\Big(\frac{d\boldsymbol{P}}{d\overline{\boldsymbol{P}}}\Big)^\alpha \Big(\frac{d\boldsymbol{P}'}{d\overline{\boldsymbol{P}}}\Big)^{1-\alpha}\Big].$$

14.2 Theorem 1) $0 \leq h_\alpha(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}') \leq 1$,

2) $h_\alpha(P,P') = 1 \iff P = P'$.
3) $h_\alpha(P,P') = 0 \iff P \perp P'$.
4) $\lim_{\alpha \downarrow 0} h_\alpha(P,P') = 1 \iff P' \ll P$.

Proof. For any $\alpha \in]0,1[$ we have

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v, \quad u \geq 0, v \geq 0, \tag{2.1}$$

and the equality holds if and only if $u = v$. Hence

$$\left(\frac{dP}{d\bar{P}}\right)^\alpha \left(\frac{dP'}{d\bar{P}}\right)^{1-\alpha} \leq \alpha \frac{dP}{d\bar{P}} + (1-\alpha)\frac{dP'}{d\bar{P}}, \quad \bar{P}\text{-a.s.}. \tag{2.2}$$

Then 1) follows immediately by taking expectations in (2.2). And

$$h_\alpha(P,P') = 1 \iff \bar{P}\left(\frac{dP}{d\bar{P}} = \frac{dP'}{d\bar{P}}\right) = 1 \iff P = P',$$

2) is established. Obviously,

$$h_\alpha(P,P') = 0 \iff \bar{P}\left(\frac{dP}{d\bar{P}}\frac{dP'}{d\bar{P}} = 0\right) = 1 \iff P \perp P',$$

we have 3). Finally, since $\lim_{\alpha\downarrow 0}\left(\frac{dP}{d\bar{P}}\right)^\alpha\left(\frac{dP'}{d\bar{P}}\right)^{1-\alpha} = \frac{dP'}{d\bar{P}} I_{[\frac{dP}{d\bar{P}}>0]}$, by (2.2) and the dominated convergence theorem we find

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} h_\alpha(P,P') = \bar{E}\left[\frac{dP'}{d\bar{P}} I_{[\frac{dP}{d\bar{P}}>0]}\right] = P'\left(\frac{dP}{d\bar{P}} > 0\right).$$

Hence

$$P' \ll P \iff P'\left(\frac{dP}{d\bar{P}} > 0\right) = 1 \iff \lim_{\alpha\downarrow 0} h_\alpha(P,P') = 1,$$

i.e., 4) is established. □

14.3 Theorem. *For any $\alpha \in]0,1[$ there exists a constant $C_\alpha > 0$ such that*

$$2[1 - h_\alpha(P,P')] \leq \|P - P'\| \leq [C_\alpha(1 - h_\alpha(P,P'))]^{1/2}, \tag{3.1}$$

where $\|P - P'\| = 2\sup_A |P(A) - P'(A)|$ is the total variation of $P - P'$.

Proof. Take $\bar{P} = \frac{1}{2}(P + P')$. Then $\frac{dP}{d\bar{P}} + \frac{dP'}{d\bar{P}} = 2$,

$$2(1 - h_\alpha(P,P')) = 2\int\left[1 - \left(\frac{dP}{d\bar{P}}\right)^\alpha\left(2 - \frac{dP}{d\bar{P}}\right)^{1-\alpha}\right]d\bar{P},$$

$$\|P - P'\| = 2\int\left|1 - \frac{dP}{d\bar{P}}\right|d\bar{P}.$$

It is easy to verify $1 - z^\alpha(2-z)^{1-\alpha} \leq |1 - z|$ for $z \in [0,2]$. Whence the left inequality of (3.1) follows. On the other hand, we have already known

that $\alpha z + (1-\alpha)(2-z) - z^\alpha(2-z)^{1-\alpha}$ has only one zero point $z = 1$ on $[0,2]$. And since

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^{-2}[\alpha z + (1-\alpha)(2-z) - z^\alpha(2-z)^{1-\alpha}] = 2\alpha(1-\alpha) > 0,$$

there exists a constant $C_\alpha > 0$ such that

$$\alpha z + (1-\alpha)(2-z) - z^\alpha(2-z)^{1-\alpha} \geq 4C_\alpha^{-1}(z-1)^2, \quad z \in [0,2]. \tag{3.2}$$

Thus the right inequality of (3.1) follows by substituting z with $\frac{dP}{d\bar{P}}$ in (3.2) and integrating against $\bar{P}$. □

Remark. Usually, $h_{1/2}(P,P')$ is called the *Hellinger integral*, and denoted by $\int\sqrt{dPdP'}$. It is easy to check that $2(1 - h_{1/2}(P,P'))$ is a metric on the space formed by all probability measures on $(\Omega,\mathcal{F})$. It is called *Hellinger-Kakutani metric*, and also denoted by $\int(\sqrt{dP} - \sqrt{dP'})^2$. Theorem 14.3 illustrates that the convergence in Hellinger-Kakutani metric is just the convergence in variation.

From now on a right-continuous filtration $F = (\mathcal{F}_t)$ is given such that $\mathcal{F} = \bigvee_t \mathcal{F}_t$, and $F^{\bar{P}}$ is taken as the reference filtration. Let Z and Z' be the density processes of P and P' w.r.t. $\bar{P}$ respectively. Denote

$$R_k = \inf\{t : Z_t \leq \tfrac{1}{k}\}, \quad R'_k = \inf\{t : Z'_t \leq \tfrac{1}{k}\}, \quad S_k = R_k \wedge R'_k,$$

$$R = \inf\{t : Z_t = 0\}, \quad R' = \inf\{t : Z'_t = 0\}, \quad S = R \wedge R',$$

$$\Gamma = \bigcup_k [\![0, S_k]\!] = [\![0]\!] \cup [Z_- > 0, Z'_- > 0],$$

$$Y(\alpha) = Z^\alpha(Z')^{1-\alpha}, \quad \alpha \in]0,1[.$$

14.4 Lemma. *Under $\bar{P}$, $Y(\alpha)$ is a non-negative supermartingale of class (D).*

Proof. Since $0 \leq Y(\alpha) \leq \alpha Z + (1-\alpha)Z'$, under $\bar{P}$, $Y(\alpha)$ is non-negative and of class (D). It is not hard to justify that under P, $W = \frac{Z'}{Z}I_{[Z>0]}$ is a supermartingale. By Jensen's inequality, for $0 \leq s < t$

$$E[W_t^{1-\alpha}|\mathcal{F}_s] \leq (E[W_t|\mathcal{F}_s])^{1-\alpha} \leq W_s^{1-\alpha}, \quad P\text{-a.s.},$$

i.e., $W^{1-\alpha}$ is a P-supermartingale. Then $Y(\alpha) = W^{1-\alpha}Z$ is a $\bar{P}$-supermartingale. □

14.5 Theorem. *There exists a unique (up to $\bar{P}$-indistinguishability) predictable increasing process $H(\alpha)$ on Γ with $H_0(\alpha) = 0$ such that $Y(\alpha) + Y_-(\alpha)\cdot H(\alpha) \in \mathcal{M}(\bar{P})$.*

Proof. According to Doob-Meyer decomposition we have

$$Y(\alpha) = Y_0(\alpha) + M - A, \tag{5.1}$$

where $M \in \mathcal{M}_0(\tilde{P})$ and $A \in \mathcal{A}_0^+(\tilde{P})$ is predictable. Observe that

$$I_{\Gamma^c} \cdot Y(\alpha) = \lim_{n\to\infty} I_{]S_n,\infty[} \cdot Y(\alpha) = \lim_{n\to\infty} [Y(\alpha) - (Y(\alpha))^{S_n}] = 0.$$

By the uniqueness of Doob-Meyer decomposition we have

$$I_{\Gamma^c} \cdot M = 0, \quad I_{\Gamma^c} \cdot A = 0.$$

Set

$$H(\alpha) = \frac{I_\Gamma}{Y_-(\alpha)} \cdot A.$$

Then $H(\alpha)$ satisfies the requirements in the theorem. Indeed, for each n, $\tilde{E}[H_{S_n}(\alpha)] \leq n\tilde{E}[A_{S_n}] < \infty$, and hence $H(\alpha)$ is a predictable increasing process on Γ. On the other hand, by the uniqueness of the canonical decomposition $Y_-(\alpha) \cdot H(\alpha)^{S_n}$ is uniquely determined by $Y(\alpha)^{S_n}$, so does $H(\alpha)^{S_n}$. Thus the uniqueness of $H(\alpha)$ on Γ is established. □

Remark. In the above proof $H(\alpha)$ has been defined on the whole $\boldsymbol{R}_+$ and is uniquely determined by the requirement: $H(\alpha) = I_\Gamma \cdot H(\alpha)$. But it may happen that $H(\alpha)$ takes the value $+\infty$ on Γ^c. In other words, $H(\alpha)$ is the unique predictable increasing $\overline{\boldsymbol{R}}_+$-valued process such that $H(\alpha) = I_\Gamma \cdot H(\alpha)$ and $Y(\alpha) + Y_-(\alpha) \cdot H(\alpha) \in \mathcal{M}(\tilde{P})$.

14.6 Theorem. *Let $\overline{\boldsymbol{P}}$ be another probability measure on $(\Omega, \mathcal{F})$ and $\tilde{\boldsymbol{P}} \ll \overline{\boldsymbol{P}}$. Let $\overline{H}(\alpha)$ be the predictable increasing process on Γ uniquely determined as in Theorem 14.5 under $\overline{\boldsymbol{P}}$. Then $H(\alpha)$ is $\tilde{\boldsymbol{P}}$-indistinguishable from $\overline{H}(\alpha)$.*

Proof. Let W be the density process of $\tilde{\boldsymbol{P}}$ w.r.t. $\overline{\boldsymbol{P}}$. Then the corresponding $\overline{Y}(\alpha) = Y(\alpha)W$, and by (5.1)

$$\overline{Y}(\alpha) = (Y_0(\alpha) + M - A)W = Y_0(\alpha)W + W_- \cdot M - A \cdot W - W_- \cdot A. \tag{6.1}$$

The first three terms on the right-hand side of (6.1) are all $\overline{\boldsymbol{P}}$-local martingales. Hence under $\overline{\boldsymbol{P}}$

$$\overline{Y}_-(\alpha) \cdot \overline{H}(\alpha) = W_- \cdot A = \overline{Y}_-(\alpha) \cdot H(\alpha).$$

Under $\tilde{\boldsymbol{P}}$ we have $W > 0$, and hence $\Gamma = [\![0]\!] \cup [\overline{Y}_-(\alpha) > 0]$. Thus $H(\alpha)$ is $\tilde{\boldsymbol{P}}$-indistinguishable from $\overline{H}(\alpha)$. □

14.7 Definition. $H(\alpha)$ is called the *Hellinger process of order α* between $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{P}'$. Observe that $H(\alpha)$ is not symmetric w.r.t. $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}')$, unless $\alpha = \frac{1}{2}$. In the sense of Theorem 14.6 $H(\alpha)$ is independent of

the choice of $\tilde{\boldsymbol{P}}$ (so are S, S' and Γ). Hence we may consider $H(\alpha)$ as $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}'$-a.e. uniquely determined.

14.8 Theorem. *Under $\tilde{\boldsymbol{P}}$ we have $\Delta H(\alpha) \leq 1$ and on $]0, S[$, $\Delta H(\alpha) < 1$.*

Proof. From (5.1) we have $\Delta Y(\alpha) = \Delta M - Y_-(\alpha)\Delta H(\alpha)$, and

$$0 \leq Y(\alpha) = \Delta M + Y_-(\alpha)[1 - \Delta H(\alpha)]. \tag{8.1}$$

Taking predictable projections in (8.1) and noting ${}^p(\Delta M) = 0$, we find

$${}^p(Y(\alpha)) = Y_-(\alpha)[1 - \Delta H(\alpha)] \geq 0.$$

Since $Y_-(\alpha) > 0$ on $\Gamma \cap]0, \infty[$, we have $\Delta H(\alpha) \leq 1$. On the other hand, $T = \inf\{t : \Delta H_t(\alpha) = 1\}$ is a predictable time, and $T < \infty \Rightarrow {}^p(Y(\alpha))_T = 0$. Thus $\tilde{\boldsymbol{E}}[Y_T(\alpha) I_{[T<\infty]}] = 0$. This implies $T \geq S$, and $\Delta H(\alpha) < 1$ on $]0, S[$, in consequence. □

In the sequel we turn to the calculation of Hellinger processes.

14.9 Theorem. *On Γ, $H(\alpha)$ is the $\tilde{\boldsymbol{P}}$-compensator of $K(\alpha)$ defined as follows:*

$$K(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left\{\frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c\rangle - \frac{2}{Z_- Z'_-}\langle Z^c, Z'^c\rangle + \frac{1}{Z'^2_-} \cdot \langle Z'^c\rangle\right\}$$
$$+ \sum \varphi_\alpha\left(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}, 1 + \frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right), \tag{9.1}$$

where

$$\varphi_\alpha(u, v) = \alpha u + (1-\alpha)v - u^\alpha v^{1-\alpha}. \tag{9.2}$$

Proof. On $[0, S_n[$ we may apply Itô formula to Z^α, and obtain

$$Z^\alpha = Z_0^\alpha + (\alpha Z_-^{\alpha-1} I_{]0,\infty[}) \cdot Z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} Z_-^{\alpha-2} \cdot \langle Z^c\rangle$$
$$+ \sum \left(Z_-^\alpha\left[\left(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}\right)^\alpha - 1 - \alpha\frac{\Delta Z}{Z_-}\right]\right). \tag{9.3}$$

If $0 < S_n < \infty$, one can verify directly that the jumps of the two sides of (9.3) at S_n are the same. Hence (9.3) holds on $[0, S_n]$. Analogously, on $[0, S_n]$

$$(Z')^{1-\alpha} = (Z'_0)^{1-\alpha} + (1-\alpha)((Z'_-)^{-\alpha} I_{]0,\infty[}) \cdot Z' - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(Z')^{-1-\alpha} \cdot \langle Z'^c\rangle$$
$$+ \sum \left((Z'_-)^{1-\alpha}\left[\left(1 + \frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right)^{1-\alpha} - 1 - (1-\alpha)\frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right]\right).$$

Using the formula of integration by parts,

$$Y(\alpha) = (Z_-^\alpha I_{]0,\infty[}) \cdot (Z')^{1-\alpha} + ((Z'_-)^{1-\alpha} I_{]0,\infty[}) \cdot Z^\alpha + [Z^\alpha, (Z')^{1-\alpha}],$$

on $[0, S_n]$ we have

$$Y(\alpha) = Y_0(\alpha) + (1-\alpha)\Big(\frac{Y_-(\alpha)}{Z'_-} I_{]0,\infty[}\Big) \cdot Z' + \alpha\Big(\frac{Y_-(\alpha)}{Z_-} I_{]0,\infty[}\Big) \cdot Z$$
$$- \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} Y_-(\alpha) \cdot \Big[\frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c\rangle - \frac{2}{Z_- Z'_-} \cdot \langle Z^c, Z'^c\rangle + \frac{1}{Z'^2_-} \cdot \langle Z'^c\rangle\Big]$$
$$+ \sum \Big(Y_-(\alpha)\Big\{\Big(1 + \frac{\Delta Z'}{Z'_-}\Big)^{1-\alpha} - 1 - (1-\alpha)\frac{\Delta Z'}{Z'_-} + \Big(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}\Big)^{\alpha}$$
$$- 1 - \alpha\frac{\Delta Z}{Z_-} + \Big[\Big(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}\Big)^{\alpha} - 1\Big]\Big[\Big(1 + \frac{\Delta Z'}{Z'_-}\Big)^{1-\alpha} - 1\Big]\Big\}\Big)$$
$$= Y_0(\alpha) + (1-\alpha)\Big(\frac{Y_-(\alpha)}{Z'_-} I_{]0,\infty[}\Big) \cdot Z' + \alpha\Big(\frac{Y_-(\alpha)}{Z_-} I_{]0,\infty[}\Big) \cdot Z - Y_-(\alpha) \cdot K(\alpha).$$

Because $[Y(\alpha) + Y_-(\alpha).K(\alpha)]^{S_n} \in \mathcal{M}_{loc}(\bar{P})$, it is easy to see that $(H(\alpha))^{S_n}$ is the $\bar{P}$-compensator of $(K(\alpha))^{S_n}$. Consequently the proof is complete. □

14.10 Corollary. *Assume $\bar{P} = \frac{1}{2}(P + P')$. Let μ be the jump measure of Z, and ν be the $\bar{P}$-compensator of μ. Then*

$$H(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big)^2 \cdot \langle Z^c\rangle + \varphi_\alpha(\lambda, \lambda') * \nu, \tag{10.1}$$

where

$$\lambda = 1 + \frac{x}{Z_-}, \quad \lambda' = 1 - \frac{x}{Z'_-}. \tag{10.2}$$

Proof. In this case, $Z + Z' = 2$, $Z^c + Z'^c = 0$, $\Delta Z + \Delta Z' = 0$. Thus $\langle Z'^c\rangle = \langle Z^c\rangle$, $\langle Z^c, Z'^c\rangle = -\langle Z^c\rangle$. Since $Z_t = 2$ for $t \geq R'$, we have $I_{\Gamma^c} \cdot Z = 0$, $I_{\Gamma^c} \cdot \langle Z^c\rangle = 0$ and $I_{\Gamma^c} \cdot \nu = 0$, (9.1) reduces to

$$K(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big)^2 \cdot \langle Z^c\rangle + \varphi_\alpha(\lambda, \lambda') * \mu,$$

and (10.1) follows by Theorem 14.9. □

14.11 Lemma. *Let A and B be two predictable processes with finite variation and $A_0 = B_0 = 0$. If A and B are P-indistinguishable, then $I_{[Z_- > 0]} \cdot A$ and $I_{[Z_- > 0]} \cdot B$ are $\bar{P}$-indistinguishable.*

Proof. For any $H \in \mathcal{P}^+$ we have

$$E[(HI_{[Z_- > 0]}) \cdot A_\infty] = \bar{E}\{Z_\infty[(HI_{[Z_- > 0]}) \cdot A_\infty]\} = \bar{E}[(HZ_- I_{[Z_- > 0]}) \cdot A_\infty].$$

By the same argument,

$$E[(HI_{[Z_- > 0]} \cdot B)_\infty] = \bar{E}[(HZ_- I_{[Z_- > 0]}) \cdot B_\infty].$$

Hence $Z_- I_{[Z_- > 0]} \cdot A$ and $Z_- I_{[Z_- > 0]} \cdot B$ are $\bar{P}$-indistinguishable, and so are $I_{[Z_- > 0]} \cdot A$ and $I_{[Z_- > 0]} \cdot B$. □

14.12 Theorem. *Assume that $X \in \mathcal{S}(\tilde{P})$ and under $\tilde{P}$, X has the weak property of predictable representation. Let the predictable characteristics of X under P, P' and $\tilde{P}$ be (α, β, ν), (α', β', ν') and $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\nu})$ respectively such that*

$$\begin{cases} \beta = \beta' = \tilde{\beta}, \\ \nu = Y.\tilde{\nu}, \qquad Y \in \tilde{\mathcal{P}}^+, \quad [\tilde{a} = 1] \subset [a - 1], \\ \nu' = Y'.\tilde{\nu}, \qquad Y' \in \tilde{\mathcal{P}}^+, \quad [\tilde{a} = 1] \subset [a' - 1]. \end{cases} \tag{12.1}$$

Then on Γ we have

$$H(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\widetilde{K}^2 \cdot \tilde{\beta} + \varphi_\alpha(Y, Y') * \tilde{\nu} + \sum \varphi_\alpha(1 - a, 1 - a'), \tag{12.2}$$

$$\widetilde{K} = \frac{d}{d\tilde{\beta}}\{I_\Gamma \cdot [\alpha' - \alpha + (xI_{[|x| \leq 1]}) * (\nu' - \nu)]\}. \tag{12.3}$$

In particular, on Γ

$$H(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{8}\widetilde{K}^2 \cdot \tilde{\beta} + \frac{1}{2}(\sqrt{Y} - \sqrt{Y'})^2 * \tilde{\nu} + \frac{1}{2}\sum(\sqrt{1-a} - \sqrt{1-a'})^2.$$

Proof. Since X has the weak property of predictable representation under $\bar{P}$, we have

$$Z = Z_0 + H \cdot X^c + W * (\mu - \bar{\nu}),$$

where μ is the jump measure of X,

$$H = \frac{d\langle Z, X^c\rangle}{d\tilde{\beta}}, \quad W = U + \frac{\widehat{U}}{1 - \tilde{a}} I_{[\tilde{a} < 1]}, \quad U = \widetilde{M}_\mu[\Delta Z | \tilde{\mathcal{P}}].$$

Under P we have

$$\alpha - \tilde{\alpha} - (xI_{[|x| \leq 1]}) * (\nu - \tilde{\nu}) = \frac{1}{Z_-} \cdot \langle Z, X^c\rangle.$$

Set

$$K = \frac{d}{d\tilde{\beta}}\{I_{[Z_- > 0]} \cdot [\alpha - \tilde{\alpha} - (xI_{[|x| \leq 1]}) * (\nu - \tilde{\nu})]\}.$$

Since $\langle Z, X^c\rangle = I_{[Z_- > 0]}.\langle Z, X^c\rangle$, by Lemma 14.11 under $\tilde{P}$ we have

$$\langle Z, X^c\rangle = Z_- \cdot (K \cdot \beta), \quad H = Z_- K.$$

On the other hand, $U = \widetilde{M}_\mu[\Delta Z | \tilde{\mathcal{P}}] = Z_-(Y - 1)$, $\widehat{U} = Z_-(\widehat{Y} - \tilde{a}) = Z_-(a - \tilde{a})$. Then we obtain

$$Z = Z_0 + (Z_- K) \cdot X^c + \Big[Z_-\Big(Y - 1 + \frac{a - \tilde{a}}{1 - \tilde{a}} I_{[\tilde{a} < 1]}\Big)\Big] * (\mu - \tilde{\nu}).$$

Similary, we have

$$Z' = Z'_0 + (Z'_- K') \cdot X^c + \left[Z'_-\left(Y' - 1 + \frac{a' - \hat{a}}{1 - \bar{a}} I_{[\bar{a}<1]}\right)\right] * (\mu - \bar{\nu}),$$

where

$$K' = \frac{d}{d\bar{\beta}}[I_{[Z'_- > 0]} \cdot [\alpha' - \bar{\alpha} - (x I_{[|x| \le 1]}) * (\nu' - \bar{\nu})]\}.$$

Thus $\langle Z^c \rangle = (Z_- K)^2 \cdot \bar{\beta}$, $\langle Z'^c \rangle = (Z'_- K')^2 \cdot \bar{\beta}$, $\langle Z^c, Z'^c \rangle = (Z_- Z'_- K K') \cdot \bar{\beta}$, and on Γ

$$\frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c \rangle - \frac{2}{Z_- Z'_-} \cdot \langle Z^c, Z'^c \rangle + \frac{1}{Z_-'^2} \langle Z'^c \rangle = (K - K')^2 \cdot \bar{\beta} = (\widetilde{K})^2 \cdot \bar{\beta}. \quad (12.4)$$

where $\widetilde{K} = K - K'$ on Γ.

Denote $D = [\Delta X \neq 0]$, $J = [\bar{a} > 0]$. Then

$$1 + \frac{\Delta Z}{Z_-} = 1 + Y I_D - I_D + \frac{a - \hat{a}}{1 - \bar{a}} I_D - (a - \hat{a}) - \frac{a - \hat{a}}{1 - \bar{a}} \hat{a}$$

$$= Y I_D + \frac{1 - a}{1 - \bar{a}} I_{D^c}, \quad (12.5)$$

$$1 + \frac{\Delta Z'}{Z'_-} = Y' I_D + \frac{1 - a'}{1 - \bar{a}} I_{D^c}. \quad (12.6)$$

In (12.5) and (12.6), Y and Y' are the abridgements for $(Y(t, \Delta X_t))$ and $(Y'(t, \Delta X_t))$ respectively, and $\frac{0}{0} = 0$ by convention. Thus

$$\sum \varphi_\alpha\left(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}, 1 + \frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right)$$

$$= \varphi_\alpha(Y, Y') * \mu + \sum \left[\varphi_\alpha\left(\frac{1 - a}{1 - \bar{a}}, \frac{1 - a'}{1 - \bar{a}}\right) I_{D^c J}\right]. \quad (12.7)$$

The $\bar{P}$-compensator of the right-hand side of (12.7) is

$$\varphi_\alpha(Y, Y') * \bar{\nu} + \sum \left[\varphi_\alpha\left(\frac{1 - a}{1 - \bar{a}}, \frac{1 - a'}{1 - \bar{a}}\right)(1 - \bar{a})\right]$$

$$= \varphi_\alpha(Y, Y') * \bar{\nu} + \sum \varphi_\alpha(1 - a, 1 - a'). \quad (12.8)$$

Then (12.2) follows from Theorem 14.9, (12.4) and (12.8). □

14.13 Corollary. *Assume $P' \overset{loc}{\ll} P$, $X \in \mathcal{S}(P)$ and under P, X has the weak property of predictable representation. Let the predictable characteristics of X under P' and P be (α', β', ν') and (α, β, ν) respectively such that*

$$\beta' = \beta, \ \nu' = Y \cdot \nu, \ Y \in \bar{\mathcal{P}}^+, \quad [a = 1] \subset [a' = 1].$$

Then on Γ we have

$$H(\alpha) = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} K^2 \cdot \beta + \varphi_\alpha(1, Y) * \nu + \sum \varphi_\alpha(1 - a, 1 - a'), \quad (13.1)$$

where

$$K = \frac{d}{d\beta}\{I_\Gamma \cdot [\alpha' - \alpha - (x I_{[|x| \le 1]}) * (\nu' - \nu)]\}.$$

Proof. If $P' \ll P$, we may take $\bar{P} = P$. Then the assertion follows immediately from Theorem 14.12. In general, being restricted on $[\![0, S_n \wedge n]\!]$, (13.1) holds. Hence (13.1) holds on $\Gamma = \bigcup_n [\![0, S_n \wedge n]\!]$. □

§2. Absolute Continuity and Singularity

Now we start to discuss the absolute continuity and singularity of measures under the same assumptions as in the previous paragraph. We also use the same notations.

14.14 Theorem. *Under $\bar{P}$ we have*

$$[R > 0, Z_R > 0] = \left[R > 0, \frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c \rangle_{R-} + \left(1 - \sqrt{1 + \frac{x}{Z_-}}\right)^2 * \nu_{R-} < \infty\right], \quad (14.1)$$

$$[Z_\infty > 0] = \left[R = \infty, \frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c \rangle_\infty + \left(1 - \sqrt{1 + \frac{x}{Z_-}}\right)^2 * \nu_\infty < \infty\right]. \quad (14.2)$$

(Recall that μ is the jump measure of Z and ν is the $\bar{P}$-compensator of μ.)

Proof. Let $B = [Z_- > 0] \cup [\![0]\!]$. Then $L = \frac{1}{Z_-} . Z \in (\mathcal{M}_{loc}(\bar{P}))^B$. On $[\![0, R[\![$ we have $\Delta L = \frac{Z - Z_-}{Z_-} > -1$. By the exponential formula, on $[\![0, R[\![$

$$Z = Z_0 \exp\{X\},$$

$$X = L - L_0 - \frac{1}{2}\langle L^c \rangle - \sum[\Delta L - \log(1 + \Delta L)].$$

Let $u(y) = (y \wedge 1) \vee (-1)$. Define

$$X^u = L - L_0 - \frac{1}{2}\langle L^c \rangle - \sum[\Delta L - u(\log(1 + \Delta L))]$$

$$= \frac{1}{Z_-} \cdot (Z - Z_0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c \rangle - \sum\left[\frac{\Delta Z}{Z_-} - u\left(\log\left(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{Z_-} \cdot (Z - Z_0) - A.$$

We are going to show

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c \rangle + \sum \Big[\frac{\Delta Z}{Z_-} - u\Big(\log\Big(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}\Big)\Big)\Big] \in (\mathcal{A}^+_{loc}(\bar{P}))^R.$$

$\Big($ If $\frac{\Delta Z}{Z_-} = -1$, $u\Big(\log\Big(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}\Big)\Big) = -1.\Big)$ To this end, it suffices to show $K = \sum \Big[\frac{\Delta Z}{Z_-} - u\Big(\log\Big(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}\Big)\Big)\Big] \in (\mathcal{A}^+_{loc}(\bar{P}))^R$. It is easy to check that for $y \geq -1$

$$0 \leq y - u(\log(1+y)) \leq c \frac{|y|^2}{1+|y|},$$

where $c > 0$ is a constant. Thus on $[0, R_n]$

$$K \leq c \sum \Big(\frac{|\Delta Z|^2}{Z_-(Z_- + |\Delta Z|)} \Big) \leq cn^2 \sum \frac{|\Delta Z|^2}{1 + |\Delta Z|}.$$

Since $Z \in \mathcal{M}_{loc}(\bar{P})$, $K \in (\mathcal{A}^+_{loc}(\bar{P}))^R$.

Observe that on $[0, R[$

$$\Delta X = \log(1 + \Delta L), \quad \Delta X^u = u(\log(1 + \Delta L)), \tag{14.3}$$

$$X - X^u = \sum [\log(1 + \Delta L) - u(\log(1 + \Delta L))].$$

If X_{R-} (resp. X^u_{R-}) exists and is finite, then $\{t : 0 \leq t < R, |\log(1 + \Delta L)| > 1\}$ is at most a finite set. Thus by (14.3) we have

$$[R > 0, X_{R-} \text{ exists and is finite}] = [R > 0, X^u_{R-} \text{ exists and is finite}]. \tag{14.4}$$

Because $|\Delta X^u| \leq 1$, by Theorem 8.33 we know

$$[R > 0, X^u_{R-} \text{ exists and is finite}] = [R > 0, \tilde{A}_{R-} + \langle X^u \rangle_{R-} < \infty], \tag{14.5}$$

where $\tilde{A}$ is the $\bar{P}$-compensator of A. Note that

$$A + [X^u] = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c \rangle + \sum [u^2(\log(1 + \Delta L)) - u(\log(1 + \Delta L)) + \Delta L]$$

and for $y \geq -1$

$$c_1(1 - \sqrt{1+y})^2 \leq u^2(\log(1+y)) - u(\log(1+y)) + y \leq c_2(1 - \sqrt{1+y})^2,$$

where $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$ are constants. Hence

$$[R > 0, \tilde{A}_{R-} + \langle X^u \rangle_{R-} < \infty]$$
$$= \Big[R > 0, \frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c \rangle_{R-} + \Big(1 - \sqrt{1 + \frac{x}{Z_-}}\Big) * \nu_{R-} < \infty\Big]. \tag{14.6}$$

Therefore (14.1) follows from (14.4), (14.5) and (14.6). (14.2) follows from (14.1), since $Z_\infty > 0 \Rightarrow R = \infty$. □

14.15 Theorem. *Put* $N = [S < \infty \text{ or } H_\infty\big(\frac{1}{2}\big) = \infty]$. *Then*

i) *on* N, $P' \perp P$,

ii) *on* N^c, $P' \sim P$.

Proof. Take $\bar{P} = \frac{1}{2}(P' + P)$. By Corollary 14.10 we know

$$H\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big)^2 . \langle Z^c \rangle + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2 * \nu,$$

where $\lambda = 1 + \frac{x}{Z_-}$, $\lambda' = 1 - \frac{x}{Z'_-}$. By Theorem 14.14 we have

$$[Z_\infty > 0] = [R = \infty, Z_-^{-2} . \langle Z^c \rangle_\infty + (1 - \sqrt{\lambda})^2 * \nu_\infty < \infty],$$

$$[Z'_\infty > 0] = [R' = \infty, Z'^{-2}_- . \langle Z^c \rangle_\infty + (1 - \sqrt{\lambda'})^2 * \nu_\infty < \infty].$$

Since 1 is between $\sqrt{\lambda}$ and $\sqrt{\lambda'}$, $(1 - \sqrt{\lambda})^2 \leq (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2$, $(1 - \sqrt{\lambda'})^2 \leq (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2$. Hence

$$[S = \infty, H_\infty(1/2) < \infty] = [Z_\infty > 0, Z'_\infty > 0], \tag{15.1}$$

$$[S < \infty \text{ or } H_\infty(1/2) = \infty] = [Z_\infty = 0] \cup [Z'_\infty = 0]. \tag{15.2}$$

Because $P(Z_\infty = 0) = 0$ and $P'(Z'_\infty = 0) = 0$, the assertions follow from (15.1) and (15.2) immediately. □

14.16 Theorem. $P' \ll P$ *if and only if the following conditions are fulfilled:*

i) $P'_0 \ll P_0$ (P'_0 *and* P_0 *are the restrictions of* P' *and* P *on* $\mathcal{F}_0$ *respectively*),

ii) $P'(H_\infty(\frac{1}{2}) < \infty) = 1$,

iii) $P(I_{[x=-Z_-]} * \nu_\infty > 0) = 0$.

Proof. From Theorem 14.15 we know

$$P' \ll P \iff P'(S = \infty, H_\infty\Big(\frac{1}{2}\Big) < \infty) = 1.$$

Necessity. i) and ii) are trivial.

$$E'[I_{[x=-Z_-]} * \nu_\infty] = \bar{E}[Z'_\infty(I_{[x=-Z_-]} * \nu_\infty]$$
$$= \bar{E}[(Z'_- I_{[x=-Z_-]}) * \nu_\infty] = \bar{E}[(Z'_- I_{[x=-Z_-]}) * \mu_\infty]$$
$$= \bar{E}\Big[\sum_{t>0} Z'_{t-} I_{[0 \neq \Delta Z_t = -Z_{t-}]}\Big] = \bar{E}[Z'_{R-} I_{[0<R<\infty, Z_{R-}>0]}], \tag{16.1}$$

since $0 \neq \Delta Z_t = -Z_{t-}$ is possible only when $t = R$. Because $P(R < \infty) = 0$ and $P' \ll P$, so $P'(R < \infty) = 0$. Hence iii) follows from (16.1).

Sufficiency. In order to obtain $P'(S = \infty, H_\infty(\frac{1}{2}) < \infty) = 1$, by ii) and $P'(R' < \infty) = 0$ it suffices to show $P'(R < \infty) = 0$. From iii) and (16.1) we have

$$\tilde{E}[Z'_{R-} I_{[0<R<\infty, Z_{R-}>0]}] = 0. \tag{16.2}$$

But $\tilde{P}(R < \infty, R' = \infty) = 0$. Thus $R < \infty \Rightarrow R' = \infty$ and $Z'_{R-} > 0$ $\tilde{P}$-a.s.. It is deduced from (16.2) that $\tilde{P}(0 < R < \infty, Z_{R-} > 0) = 0$. Hence $P'(0 < R < \infty, Z_{R-} > 0) = 0$. By i) we know $P'(R > 0) = 1$. By Theorem 14.14

$$[R > 0, Z_{R-} > 0] = [R > 0, H_{R-}(\tfrac{1}{2}) < \infty],$$

and therefore by ii) $P'(R > 0, Z_{R-} > 0) = 1$. At last, $P'(R < \infty) = 0$. □

14.17 Remark. If $\tilde{P} = \frac{1}{2}(P + P')$, condition iii) in Theorem 14.16 is equivalent to the following

iii)′ For all $A \in \tilde{\mathcal{P}}$, $(I_A\lambda) * \nu_\infty = 0$ P'-a.s. $\Rightarrow (I_A\lambda') * \nu_\infty = 0$ P'-a.s..

(Recall that in this case $\lambda * \nu$ and $\lambda' * \nu$ are the compensators of μ under P and P' respectively.)

Proof. iii)⇒iii)′. Let $A \in \tilde{\mathcal{P}}$ and $(I_A\lambda) * \nu_\infty = 0$ P'-a.s.. Then $I_{A[\lambda>0]} * \nu_\infty = 0$ P'-a.s.. By iii)

$$(I_A\lambda') * \nu_\infty = (I_{A[\lambda>0]}\lambda') * \nu_\infty = [\lambda' * (I_{A[\lambda>0]} * \nu)]_\infty = 0, \quad P'\text{-a.s.}.$$

iii)′⇒iii). Obviously, we have $(\lambda I_{[\lambda=0]}) * \nu_\infty = 0$. By iii)′

$$[I_{[\lambda=0]}(\lambda + \lambda')] * \nu_\infty = (I_{[\lambda=0]}\lambda') * \nu_\infty = 0, \quad P'\text{-a.s.}. \tag{17.1}$$

But $I_{[\lambda+\lambda'=0]} * \nu_\infty = 0$, $\tilde{P}$-a.s. and P-a.s.. From (17.1) $[I_{[\lambda=0,\lambda-\lambda'>0]}(\lambda + \lambda')] * \nu_\infty = 0$, P'-a.s., and hence $I_{[\lambda=0]} * \nu_\infty = 0$, P'-a.s.. □

14.18 Theorem. *$P' \perp P$ if and only if*

$$P'(Z_0 = 0 \text{ or } H_\infty(\tfrac{1}{2}) = \infty \text{ or } I_{[x=-Z_-]} * \mu_\infty > 0) = 1. \tag{18.1}$$

Proof. we have

$P' \perp P$

$\iff P'(S = \infty \text{ or } H_\infty(1/2) < \infty) = 0$

$\iff P'(R < \infty \text{ or } H_\infty(1/2) = \infty) = 1$

$\iff P'(Z_0 = 0, \text{ or } 0 < R < \infty \text{ and } H_\infty(\frac{1}{2}) < \infty, \text{ or } H_\infty(\frac{1}{2}) = \infty) = 1$

$\iff P'(Z_0 = 0, \text{ or } 0 < R < \infty \text{ and } Z_{R-} > 0, \text{ or } H_\infty(1/2) = \infty) = 1$

$\iff P'(Z_0 = 0, \text{ or } I_{[x=-Z_-]} * \mu_\infty > 0, \text{ or } H_\infty(1/2) = \infty) = 1,$

noting that $[Z_0 = 0] = [R = 0]$,

$[R > 0, H_{R-}(1/2) < \infty] = [R > 0, Z_{R-} > 0] = [I_{[x=-Z_-]} * \mu_\infty > 0]$. □

It should be pointed out that (18.1) is not a predictable criterion. Seemingly, it is hard to find a predictable criterion for singularity in the general case.

14.19 Theorem. *Assume $P' \overset{\text{loc}}{\ll} P$. Then*

1) $P' \ll P \iff P'(H_\infty(1/2) < \infty) = 1$,

2) $P' \perp P \iff P'(H_\infty(1/2) = \infty) = 1$.

Proof. In this case, $P'(R = \infty) = 1$ and hence $P'(S = \infty) = 1$. Then in Theorem 14.15 we may take $N = [H_\infty(1/2) = \infty]$, and the assertions follow. □

14.20 Theorem. *Assume that $X \in S(\tilde{P})$ and under $\tilde{P}$, X has the weak property of predictable representation. Let the predictable characteristics of X under P, P' and $\tilde{P}$ be (α, β, ν), (α', β', ν') and $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\nu})$ respectively such that*

$$\nu = Y.\tilde{\nu}, \quad Y \in \tilde{\mathcal{P}}^-, \quad [\tilde{a} = 1] \subset [a = 1],$$

$$\nu' = Y'.\tilde{\nu}, \quad Y' \in \tilde{\mathcal{P}}^+, \quad [\tilde{a} = 1] \subset [a' = 1].$$

Set

$$\tau_1 = \inf\{t : \int_0^t |d(\alpha_s - \tilde{\alpha}_s - (xI_{[|x|\leq 1]}) * (\nu - \tilde{\nu})_s)| = \infty\},$$

$$\tau_2 = \inf\{t : \int_0^t |d(\alpha'_s - \tilde{\alpha}_s - (xI_{[|x|\leq 1]}) * (\nu' - \tilde{\nu})_s)| = \infty\},$$

$$\tau = \tau_1 \wedge \tau_2,$$

$$H = [\alpha' - \alpha - (xI_{[|x|\leq 1]}) * (\nu' - \nu)]I_{[0,\tau]} + (+\infty)I_{[\tau,\infty[}.$$

Let K be an $\overline{R}$-valued predictable process such that if on $[0,t]$ H is absolutely continuous w.r.t. $\tilde{\beta}$, then $H_s = \int_0^s K_u d\tilde{\beta}_u, 0 \leq s \leq t$; and if on $[0,t]$ it is not absolutely continuous w.r.t. $\tilde{\beta}$, then $K_t = +\infty$. Define

$$A = K^2.\tilde{\beta} + (\sqrt{Y} - \sqrt{Y'})^2 * \tilde{\nu} + \Sigma(\sqrt{1 - \tilde{a}} - \sqrt{1 - a'})^2,$$

$$N = [Z_0 Z'_0 = 0] \cup (\bigcup_t [\beta_t \neq \beta'_t]) \cup [A_\infty = \infty] \cup [I_{YY'=0} * \mu_\infty > 0]$$

$$\cup \Big[\sum_{t>0} I_{[\Delta X_t=0]} I_{[a_t=1] \cup [a'_t=1]} > 0\Big],$$

where μ is the jump measure of X. Then 1) on N, $P' \perp P$, 2) on N^c, $P' \sim P$.

Proof. 1) Set

$$H^{(1)} = [\alpha - \tilde{\alpha} - (xI_{[|x| \le 1]}) * (\nu - \tilde{\nu})]I_{[0,\tau_1[} + (+\infty)I_{[\tau_1,\infty[}$$

and

$$H^{(2)} = \alpha' - \tilde{\alpha} - (xI_{[|x| \le 1]}) * (\nu' - \tilde{\nu})]I_{[0,\tau_2[} + (+\infty)I_{[\tau_2,\infty[}.$$

Let $K^{(i)}, i = 1, 2$, be an $\overline{R}$-valued predictable process such that if on $[0, t]$, $H^{(i)}$ is absolutely continuous w.r.t. $\tilde{\beta}$, then $H_s^{(i)} = \int_0^s K_u^{(i)} d\tilde{\beta}_u, 0 \le s \le t$; and if on $[0, t]$, $H^{(i)}$ is not absolutely continuous w.r.t. $\tilde{\beta}$, then $K_t^{(i)} = +\infty$. Define

$$A^{(1)} = (K^{(1)})^2.\tilde{\beta} + (1 - \sqrt{Y})^2 * \tilde{\nu} + \Sigma(\sqrt{1 - a} - \sqrt{1 - \tilde{a}})^2,$$

$$A^{(2)} = (K^{(2)})^2.\tilde{\beta} + (1 - \sqrt{Y'})^2 * \tilde{\nu} + \Sigma(\sqrt{1 - a'} - \sqrt{1 - \tilde{a}})^2.$$

It is not difficult to check $N \subset N_1 \cup N_2$, where

$$N_1 = [Z_0 = 0] \cup (\bigcup_t [\beta_t \ne \tilde{\beta}_t]) \cup [A_\infty^{(1)} = \infty] \cup [I_{Y=0} * \mu_\infty > 0] \cup \Big[\sum_t I_{[\Delta X_t = 0, a_t = 1]} > 0\Big],$$

$$N_2 = [Z_0' = 0] \cup (\bigcup_t [\beta_t' \ne \tilde{\beta}_t]) \cup [A_\infty^{(2)} = \infty] \cup [I_{Y'=0} * \mu_\infty > 0] \cup \Big[\sum_t I_{[\Delta X_t = 0, a_t' = 1]} > 0\Big].$$

(In fact, if $\beta = \beta' = \tilde{\beta}$ and $dA^{(i)} \ll d\tilde{\beta}_t, i = 1, 2$, then $K^{(2)} - K^{(1)} = K$ and $A \le 2(A^{(1)} + A^{(2)})$.)

Since $P \ll \tilde{P}$, we have

$$P(Z_0 = 0) = 0,$$

$$P(\bigcup_t [\beta_t \ne \tilde{\beta}_t]) = 0,$$

$$P(A_\infty^{(1)} < \infty) = 1$$

(by Theorems 14.12, 14.16 and comparing $A^{(1)}$ with the Hellinger process of order 1/2 between P and $\tilde{P}$).

$$E[I_{[Y=0]} * \mu_\infty] = E[I_{[Y=0]} * \nu_\infty] = E[(I_{[Y=0]}Y) * \tilde{\nu}_\infty] = 0,$$

$$P(\bigcup_t [\Delta X_t = 0, a_t = 1]) = 0 \quad (\text{under } P \ \ [a = 1] \subset [\Delta X \ne 0]),$$

and hence $P(N_1) = 0$. Similarly, $P'(N_2) = 0$. Then on N, $P' \perp P$.

2) We want to show $N^c \subset [S = \infty, H_\infty(1/2) < \infty]$. Then the assertion follows from Theorem 14.15. As shown in the proof of Theorem 14.12, $Z = Z_0\mathcal{E}(L)$, $L \in \mathcal{M}_{loc,0}(\tilde{P})$ and

$$\Delta L_t = (Y(t, \Delta X_t) - 1)I_{[\Delta X_t \ne 0]} - \frac{a_t - \tilde{a}_t}{1 - \tilde{a}_t} I_{[\Delta X_t = 0]}$$

(see (12.5)). According to the definition of N, on N^c for any t, if $\Delta X_t \ne 0$, $Y(t, \Delta X_t) > 0$ and $\Delta L_t = Y(t, \Delta X_t) - 1 > -1$; and if $\Delta X_t = 0$, $a_t < 1$ and $\Delta L_t = -\frac{a_t - \tilde{a}_t}{1 - \tilde{a}_t} > -1$. In a word, on N^c $\Delta L > -1$, and hence $Z > 0$ and $R_1 = \infty$. Similarly, on N^c we have $R_2 = \infty$. Therefore $N^c \subset [S = \infty]$. It is easy to see from Theorem 14.12 that $N^c \subset [H_\infty(1/2) < \infty]$. □

Remark. The assertion 1) doesn't need the assumption that under $\tilde{P}$, X has the weak property of predictable representation.

14.21 Theorem. *Let $X = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n I_{[T_n,\infty[}$ be a step process, where $T_n \uparrow \infty$, for each $n \ge 0, T_n < \infty \Rightarrow T_n < T_{n+1} (T_0 = 0)$, and for each $n \ge 1$, $[T_n < \infty] = [\xi_n \ne 0]$. Let $F = F^0(X)$. P' and P be two probability measures on $\mathcal{F} = \bigvee_t \mathcal{F}_t$. The Lévy systems of X under P' and P are denoted by ν' and ν respectively. Then $P' \ll P$ if and only if the following conditions are fulfilled:*

i) $P_0' \ll P_0$,

ii) there exists $W \in \tilde{\mathcal{P}}^+$ such that $\nu' = W \cdot \nu$, $[a = 1] \subset [a' = 1]$ and $P'(A_\infty' < \infty) = 1$, where $A' = (1 - \sqrt{W})^2 * \nu + \Sigma(\sqrt{1 - a} - \sqrt{1 - a'})^2$. In this case, the density process of P' w.r.t. P is

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0'}{dP_0}\Big(\prod_{T_n \le t} W(T_n, \xi_n)\Big)\Big(\prod_{s \le t, s \ne T_n} \dfrac{1 - a_s'}{1 - a_s}\Big)e^{(1-W)*\nu_t^c}, & \text{on } [A' < \infty], \\ 0, & \text{on } [A' = \infty], \end{cases} \tag{21.1}$$

where ν^c is the continuous part of ν.

Proof. Sufficiency. Take $\tilde{P} = \frac{1}{2}(P + P')$. Then Theorems 14.12 and 14.20 are used. It suffices to check $P'(N) = 0$, where N is defined in Theorem 14.20. Indeed, $P'(Z_0 Z_0' = 0) = P'(Z_0' = 0) = 0$, because $Z_0' = Z_0 \frac{dP_0'}{dP_0}$ P'-a.s.; $P'(A_\infty = \infty) = 0$, because $(1 - \sqrt{W})^2 * \nu = (\sqrt{Y} - \sqrt{Y'})^2 * \tilde{\nu}$;

$$E'[I_{[YY'=0]} * \mu_\infty] = E'[I_{[Y'=0]} * \mu_\infty] = \tilde{E}[(I_{[Y'=0]}Y') * \tilde{\nu}_\infty] = 0,$$

because $Y' = YW$(under P');

$$E'\Big[\sum_{t>0} I_{[\Delta X_t=0]} I_{]a_t=1[\cup[a'_t=1]}\Big]$$
$$= E'\Big[\sum_{t>0} I_{[\Delta X_t=0][a'_t=1]}\Big] = E'\Big[\sum_{t>0} I_{[a'_t=1]}(1-a'_t)\Big] = 0.$$

The necessity is clear by Theorem 14.16 ii), because $H(1/2)$ is P'-indistinguishable from $\frac{1}{2}(1-\sqrt{W})^2 * \nu + \Sigma(\sqrt{1-a} - \sqrt{1-a'})^2$. From the proof of Theorem 14.12 we know that the density process Z' of P' w.r.t. P (take $\bar{P} = P$) satisfies

$$Z' = Z'_0 + \Big[Z'_-\Big(W - 1 + \frac{a'-a}{1-a}\Big)\Big] * (\mu - \nu).$$

$L = \Big(W - 1 + \frac{a'-a}{1-a}\Big) * (\mu - \nu)$ is a P-local martingale on $\bigcup_n [0, R'_n] \subset [A' < \infty[$, and

$$L_t = (W-1) * (\mu - \nu)_t + \sum_{T_n \le t} \frac{a'_{T_n} - a_{T_n}}{1 - a_{T_n}} - \sum_{s \le t} \frac{a'_s - a_s}{1 - a_s} a_s$$
$$= -(W-1) * \nu_t + \sum_t (a'_s - a_s) + (W-1) * \mu_t - \sum_{s \le t} \frac{a'_s - a_s}{1 - a_s}$$
$$+ \sum_{T_n \le t} \frac{a'_{T_n} - a_{T_n}}{1 - a_{T_n}}$$
$$= -(W-1) * \nu^c_t + \sum_{T_n \le 1} (W(T_n, \xi_n) - 1) + \sum_{s \le t, s \ne T_n} \frac{a_s - a'_s}{1 - a_s}$$
$$= -(W-1) * \nu^c_t + \sum_{s \le t} \Delta L_s.$$

Denote by Z the process defined in (21.1). Clearly, for each n, $Z^{R'_n} = Z'_0 \mathcal{E}(L^{R'_n}) = (Z')^{R'_n}$. If for some n, $R'_n = R' < \infty$, then $Z_{R'} = Z_{R'_n} = Z'_{R'_n} = Z'_{R'} = 0$. If for all $n, R'_n < R' < \infty$, then $Z_{R'-} = \lim_n Z_{R'_n} = \lim_n Z'_{R'_n} = Z'_{R'_-} = 0$. Hence from the definition of Z we know $Z = 0$ on $[R', \infty[$. Therefore $Z = Z'$, and the proof is complete. □

14.22 Corollary. *In addition to the assumptions of Theorem 14.21, suppose $P'_0 \ll P_0$ and there exists $W \in \bar{\mathcal{P}}^+$ such that $\nu' = W.\nu$, $]a = 1] \subset [a' = 1]$, and for each $t > 0$*

$$P'\Big((1-\sqrt{W})^2 * \nu_t + \sum_{s \le t}(\sqrt{1-a_s} - \sqrt{1-a'_s})^2 < \infty\Big) = 1.$$

Then $P' \perp P$ if and only if

$$P'((1-\sqrt{W})^2 * \nu_\infty + \sum_{t>0}(\sqrt{1-a_t} - \sqrt{1-a'_t})^2 = \infty) = 1.$$

Proof. By Theorem 14.21 we know $P'_t \ll P_t$ for all $t \ge 0$(P'_t and P_t are the restrictions of P' and P on $\mathcal{F}_t$ respectively). Then the assertion follows from Theorem 14.19.2). □

§3. Contiguity, Entire Separation and Convergence in Variation

In this paragraph we always suppose $(\Omega^n, \mathcal{F}^n), n \ge 1$, is a sequence of measurable spaces, P^n and P'^n are two probability measures on $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ for each $n \ge 1$.

14.23 Definition. We say that (P'^n) is *contiguous to* (P^n), and denote it by $(P'^n) \lhd (P^n)$, if for all $A_n \in \mathcal{F}^n$

$$P^n(A_n) \to 0 \Rightarrow P'^n(A_n) \to 0.$$

Obviously, $\|P'^n - P^n\| \to 0 \Rightarrow (P'^n) \lhd (P^n)$. We say that (P^n) and (P'^n) are *entirely separated*, and denote it by $(P'^n)\triangle(P^n)$, if there exist a subsequence (n_k) and $A_{n_k} \in \mathcal{F}^{n_k}$ such that

$$P'^{n_k}(A_{n_k}) \to 0, \quad P^{n_k}(A^c_{n_k}) \to 0, \quad \text{as } k \to \infty.$$

Let $\xi_n \in \mathcal{F}^n, n \ge 1$. If for all $\varepsilon > 0$

$$P^n(|\xi_n| \ge \varepsilon) \to 0,$$

we say that (ξ_n) *converges to zero in* (P^n), and denote it by $\xi_n \overset{P^n}{\to} 0$. (ξ_n, P^n) is said to be *tight* if

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P^n(|\xi_n| \ge N) = 0. \tag{23.1}$$

If $\xi_n, n \ge 1$, are all finite-valued, (23.1) is equivalent to

$$\lim_{N\to\infty} \sup_n P^n(|\xi_n| \ge N) = 0,$$

i.e., the family of the distributions of ξ_n is tight.

The concepts of contiguity and entire separation are the generalizations of the concepts of absolute continuity and singularity respectively. In fact, if $(\Omega^n, \mathcal{F}^n) \equiv (\Omega, \mathcal{F}), P^n \equiv P$ and $P'^n \equiv P'$, then $(P'^n) \lhd (P^n)$ is just $P' \ll P$, and $(P'^n)\triangle(P^n)$ is just $P' \perp P$. We suggest the reader to justify it.

14.24 Theorem. *The following statements are equivalent:*
1) $(P'^n) \lhd (P^n)$,
2) *for all* $\xi_n \in \mathcal{F}^n$, $\xi_n \overset{P^n}{\to} 0 \Rightarrow \xi_n \overset{P'^n}{\to} 0$,
3) *for all* $\xi_n \in \mathcal{F}^n$, (ξ_n, P^n) *is tight* $\Rightarrow (\xi_n, P'^n)$ *is tight.*

Proof. 2)⇒1). Let $A_n \in \mathcal{F}^n$ and $P^n(A_n) \to 0$. Write $\xi_n = I_{A_n}$. Then $\xi_n \xrightarrow{P^n} 0$, and hence $\xi_n \xrightarrow{P'^n} 0$, i.e., $P'^n(A_n) \to 0$.

1)⇒ 3). Suppose there exists $\xi_n \in \mathcal{F}^n, n \geq 1$, such that (ξ_n, P^n) is tight, but (ξ_n, P'^n) is not tight. Then there exists $\varepsilon > 0$, a subsequence (n_k) and $b_{n_k} \to +\infty$ such that for all $k \geq 1$, $P'^{n_k}(|\xi_{n_k}| \geq b_{n_k}) > \varepsilon$. Define

$$A_n = \begin{cases} [|\xi_{n_k}| \geq b_{k_k}], & n = n_k,\ k \geq 1, \\ \emptyset, & n \notin (n_k). \end{cases}$$

Then $P^n(A_n) \to 0$, but $P'^n(A_n) \not\to 0$. This is a contradiction.

3)⇒2). Suppose there exists $\eta_n \in \mathcal{F}^n, n \geq 1$, such that (η_n) converges to zero in (P^n), but does not converge to zero in (P'^n). Then there exists $\varepsilon > 0$, a subsequence (n_k) and $a_{n_k} \downarrow 0$ such that for all k, $P'^{n_k}(|\eta_{n_k}| \geq \varepsilon) \geq \varepsilon$, but $P^{n_k}(|\eta_{n_k}| \geq a_{n_k}) \to 0$ as $k \to \infty$. Let

$$\xi_n = \begin{cases} \eta_{n_k}/a_{n_k}, & n = n_k,\ k \geq 1, \\ 0, & n \notin (n_k). \end{cases}$$

Then (ξ_n, P^n) is tight. Indeed, we have $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(|\xi_n| \geq 1) = 0$. But (ξ_n, P'^n) is not tight. In fact, for each N when n_k is large enough, we have $\varepsilon/a_{n_k} > N$ and

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P'^n(|\xi_n| \geq N) \geq \overline{\lim_{k\to\infty}}\, P'^{n_k}\Big(|\xi_{n_k}| \geq \frac{\varepsilon}{a_{n_k}}\Big) \geq \varepsilon.$$

It is a contradiction. □

Denote $\overline{P^n} = \frac{1}{2}(P^n + P'^n)$, and

$$z_n = \frac{dP^n}{d\overline{P^n}}, \quad z_n' = \frac{dP'^n}{d\overline{P^n}}, \quad l_n = \frac{z_n'}{z_n}.$$

Clearly, $P^n(l_n < \infty) = 1$, and the Lebesgue decomposition of P'^n w.r.t. P^n is as follows:

$$P'^n(B) = \int_B l_n dP^n + P'^n(B[l_n = \infty]), \quad B \in \mathcal{F}^n.$$

l_n is determined to be $P^n + P'^n$-a.s., just like the uniqueness in Lebesgue decomposition. In fact, in the defintion of l_n, $\overline{P^n}$ may be replaced by any σ-finite measure μ^n whenever $P^n \ll \mu^n$ and $P'^n \ll \mu^n$.

14.25 Lemma. (l_n, P^n) *and* $\Big(\frac{1}{z_n}, P^n\Big)$ *are tight.*

Proof. We have

$$P^n(l_n > N) = \int_{[z_n' > N z_n]} z_n d\overline{P^n} \leq \frac{1}{N}\int_{[z_n' > N z_n]} z_n' d\overline{P^n} \leq \frac{1}{N},$$

$$P^n\Big(\frac{1}{z_n} > N\Big) = P^n\Big(z_n < \frac{1}{N}\Big) = \int_{[z_n < \frac{1}{N}]} z_n d\overline{P^n} \leq \frac{1}{N}. \quad \square$$

14.26 Theorem. $(P'^n) \lhd (P^n)$ *if and only if* (l_n, P^n) *is uniformly integrable and* $P'^n(l_n = \infty) \to 0$.

Proof. From Lebesgue decomposition we know for any $B_n \in \mathcal{F}^n$

$$\int_{B_n} l_n dP^n \leq P'^n(B_n) < \int_{B_n} l_n dP^n + P'^n(l_n = \infty). \tag{26.1}$$

Sufficiency. Assume $P^n(B_n) \to 0$. Since (l_n, P^n) is uniformly integrable, $\int_{B_n} l_n dP^n \to 0$ (Theorem 1.9). Then by (26.1) we obtain $P'^n(B_n) \to 0$.

Necessity. Since $P^n(l_n = \infty) = 0$, by the contiguity $P'^n(l_n = \infty) \to 0$. From (26.1) we know $\int l_n dP^n \leq 1$ and for any $B_n \in \mathcal{F}_n, n > 1$, $P^n(B_n) \to 0 \Rightarrow P'^n(B_n) \to 0 \Rightarrow \int_{B_n} l_n dP^n \to 0$. Hence (l_n, P^n) is uniformly integrable. □

14.27 Theorem. *The following statements are equivalent:*

1) $(P'^n) \lhd (P^n)$,

2) (l_n, P'^n) *is tight,*

3) $\Big(\frac{1}{z_n}, P'^n\Big)$ *is tight,*

4) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\lim\limits_{n\to\infty} h_\alpha(P^n, P'^n) = 1$.

Proof. 1)⇒2) and 1)⇒3) follow from Lemma 14.25 and Theorem 14.24.

2)⇒1). We are to justify the two conditions in Theorem 14.26. By (26.1) we have

$$\int_{[l_n \geq N]} l_n dP^n \leq P'^n(l_n \geq N).$$

Hence, noting $P^n(l_n < \infty) = 1$, (l_n, P^n) is uniformly integrable. On the other hand, $P'^n(l_n = \infty) \leq P'^n(l_n \geq N)$. Thus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P'^n(l_n = \infty) \leq \lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P'^n(l_n \geq N) = 0.$$

3)⇒1). Let $P^n(B_n) \to 0$, $B_n \in \mathcal{F}^n$. Then, noting $z_n + z_n' = 2$, we have

$$\begin{aligned} P'^n(B_n) &\leq P'^n\Big(z_n \leq \frac{1}{N}\Big) + \int_{B_n[z_n > \frac{1}{N}]} z_n' d\overline{P^n} \\ &\leq P'^n\Big(z_n \leq \frac{1}{N}\Big) + \frac{2 - \frac{1}{N}}{1/N}\int_{B_n} z_n d\overline{P^n} \\ &= P'^n\Big(z_n \leq \frac{1}{N}\Big) + (2N-1)P^n(B_n). \end{aligned}$$

Letting $n \to \infty$ and $N \to \infty$ consecutively yields $P'^n(B_n) \to 0$.

3)$\Longleftrightarrow$4). It is not hard to see that there exist three functions ψ, γ_1 and γ_2 on $]0,1[$ such that $\psi > 0, \gamma_2 \geq \gamma_1 > 0$, $\lim_{\alpha \to 0} \psi(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \gamma_1(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \gamma_2(\alpha) = 0$ and for $x \in [0,2]$

$$-\psi(\alpha) - 2I_{[x \leq \gamma_2(\alpha)]} \leq x^\alpha(2-x)^{1-\alpha} - (2-x) \leq \psi(\alpha) - 2I_{[x \leq \gamma_1(\alpha)]}. \quad (27.1)$$

Substituting x by z_n in (27.1) and integrating against $\overline{P}^n$, we find

$$-\psi(\alpha) - P^n(z_n \leq \gamma_2(\alpha)) - P'^n(z_n \leq \gamma_2(\alpha)) \leq h_\alpha(P^n, P'^n) - 1$$
$$\leq \psi(\alpha) - P^n(z_n \leq \gamma_1(\alpha)) - P'^n(z_n \leq \gamma_1(\alpha)).$$

Since $\lim_{\alpha \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} P^n(z_n \leq \gamma_1(\alpha)) = 0$ (Lemma 14.25), we have

$$-\lim_{\alpha \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} P'^n(z_n \leq \gamma_2(\alpha)) \leq \lim_{\alpha \to 0} \underline{\lim_{n \to \infty}} h_\alpha(P^n, P'^n) - 1$$
$$\leq -\lim_{\alpha \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} P'^n(z_n \leq \gamma_1(\alpha)).$$

Now 3)$\Longleftrightarrow$4) is apparent. □

14.28 Theorem. *The following statements are equivalent:*

1) $(P'^n)\Delta(P^n)$,

2) *for all* $N > 0$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} P'^n(l_n \geq N) = 1$,

3) *for all* $\varepsilon > 0$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} P'^n(z_n \geq \varepsilon) = 0$,

4) *for some* $\alpha \in]0,1[$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} h_\alpha(P^n, P'^n) = 0$,

5) *for any* $\alpha \in]0,1[$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} h_\alpha(P^n, P'^n) = 0$.

Proof. Let 1) hold. There exists a subsequence (n_k) and $B_{n_k} \in \mathcal{F}^{n_k}$ such that $P^{n_k}(B_{n_k}) \to 0, P'^{n_k}(B_{n_k}) \to 1$. For any $N > 0$

$$P'^{n_k}(B_{n_k}) = \int_{B_{n_k}[l_{n_k} < N]} l_{n_k} dP^{n_k} + P'^{n_k}(B_{n_k}[l_{n_k} \geq N])$$
$$\leq N P^{n_k}(B_{n_k}) + P'^{n_k}(l_{n_k} \geq N).$$

Hence $\lim_{k \to \infty} P'^{n_k}(l_{n_k} \geq N) = 1$, and $\overline{\lim_{n \to \infty}} P'^n(l_n \geq N) = 1$. 2) is established.

For any $\varepsilon > 0$

$$P'^{n_k}(z_{n_k} \geq \varepsilon) \leq P'^{n_k}(B_{n_k}^c) + \int_{B_{n_k}[z_{n_k} \geq \varepsilon]} \frac{z'_{n_k}}{z_{n_k}} dP^{n_k}$$
$$\leq P'^{n_k}(B_{n_k}^c) + \frac{2}{\varepsilon} P^{n_k}(B_{n_k}).$$

Thus 3) follows.

For any $\alpha \in]0,1[$, by Hölder's inequality

$$h_\alpha(P^{n_k}, P'^{n_k}) \leq \left(\int_{B_{n_k}} z_{n_k} d\overline{P}^{n_k}\right)^\alpha \left(\int_{B_{n_k}} z'_{n_k} d\overline{P}^{n_k}\right)^{1-\alpha}$$
$$+ \left(\int_{B_{n_k}^c} z_{n_k} d\overline{P}^{n_k}\right)^\alpha \left(\int_{B_{n_k}^c} z'_{n_k} d\overline{P}^{n_k}\right)^{1-\alpha}$$
$$\leq (P^{n_k}(B_{n_k}))^\alpha + (P'^{n_k}(B_{n_k}^c))^{1-\alpha} \to 0.$$

Thus 5) follows. 5)$\Rightarrow$4) is trivial.

2)$\Rightarrow$1). There is a subsequence (n_k) such that $P'^{n_k}(l_{n_k} \geq k) > 1 - \frac{1}{k}$. Let $B_{n_k} = [l_{n_k} \geq k]$. Then $P'^{n_k}(B_{n_k}) \to 1$. By Lemma 14.25

$$\lim_{k \to \infty} P^{n_k}(l_{n_k} \geq k) \leq \lim_{N \to \infty} \overline{\lim_{k \to \infty}} P^{n_k}(l_{n_k} \geq N) = 0.$$

Hence $P^{n_k}(B_{n_k}) \to 0, P'^{n_k}(B_{n_k}) \to 1$, i.e., $(P^n)\Delta(P'^n)$.

3)$\Rightarrow$1). There is a subsequence (n_k) such that $P'^{n_k}\left(z_{n_k} \geq \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$. On the other hand, $P^{n_k}\left(z_{n_k} < \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$. Let $B_{n_k} = [z_{n_k} \geq \frac{1}{k}]$. Then $P'^{n_k}(B_{n_k}) \to 0, P^{n_k}(B_{n_k}) \to 1$.

4)$\Rightarrow$1). There is a subsequence (n_k) such that $\lim_{k \to \infty} h_\alpha(P^{n_k}, P'^{n_k}) = 0$. Let $B_{n_k} = [z_{n_k} \leq z'_{n_k}]$. Then

$$P^{n_k}(B_{n_k}) = \int_{B_{n_k}} z_{n_k} d\overline{P}^{n_k} \leq \int_{B_{n_k}} (z_{n_k})^\alpha (z'_{n_k})^{1-\alpha} d\overline{P}^{n_k}$$
$$\leq h_\alpha(P^{n_k}, P'^{n_k}),$$

$$P'^{n_k}(B_{n_k}^c) = \int_{B_{n_k}^c} z'_{n_k} d\overline{P}^{n_k} \leq \int_{B_{n_k}^c} (z_{n_k})^\alpha (z'_{n_k})^{1-\alpha} d\overline{P}^{n_k}$$
$$\leq h_\alpha(P^{n_k}, P'^{n_k}).$$

Hence $P^{n_k}(B_{n_k}) \to 0, P'^{n_k}(B_{n_k}) \to 1$. □

14.29 Theorem. *The following statements are equivalent:*

1) $\|P^n - P'^n\| \to 0$,

2) $\int |l_n - 1| dP^n \to 0$,

3) $l_n - 1 \xrightarrow{P^n} 0$,

4) $z_n - 1 \xrightarrow{P^n} 0$,

5) *for some* $\alpha \in]0,1[$, $\lim_{n \to \infty} h_\alpha(P^n, P'^n) = 1$,

6) *for any* $\alpha \in]0,1[$, $\lim_{n \to \infty} h_\alpha(P^n, P'^n) = 1$.

Proof. We have

$$\|P^n - P'^n\| = \int |z_n - z'_n| d\overline{P}^n = \int |l_n - 1| dP^n + P'^n(l_n = \infty).$$

1) $\Rightarrow$ 2) follows immediately. 2) $\Rightarrow$ 3) is trivial by Chebyshev's inequality. 3) $\Rightarrow$ 4) is easy. Indeed, $l_n - 1 = 2\left(\frac{1}{z_n} - 1\right)$.

4) $\Rightarrow$ 1). For any given $\varepsilon > 0$, if $0 < \delta < \varepsilon < 1$, then

$$\overline{P}^n(|z_n - 1| \le \varepsilon) = \int_{[|z_n - 1| \le \delta]} \frac{1}{z_n} dP^n \ge \int_{[|z_n - 1| \le \delta]} \frac{1}{z_n} dP^n$$
$$\ge \frac{1}{1+\delta} P^n(|z^n - 1| \le \delta)$$

Letting $n \to \infty$ and $\delta \downarrow 0$ consecutively yields $z_n - 1 \xrightarrow{\overline{P}} 0$. Since $|z_n - 1| \le 1$, $\|P^n - P'^n\| = 2\int |z_n - 1| d\overline{P}^n \to 0$.

1) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 1) follows from Theorem 14.3. □

From now on we suppose for each n a right-continuous filtration $F^n = (\mathcal{F}_t^n)$ is given such that $\mathcal{F}^n = \bigvee_t \mathcal{F}_t^n$ and take $(F^n)^{\overline{P}^n}$ as the reference filtration. Let Z^n and Z'^n be the density processes of P^n and P'^n w.r.t. $\overline{P}^n$ respectively. Denote

$R_k^n = \inf\left\{t : Z_t^n \le \frac{1}{k}\right\}$, $R_k'^n = \inf\{t : Z_t'^n \le \frac{1}{k}\}$, $S_k^n = R_k^n \wedge R_k'^n$,
$R^n = \inf\{t : Z_t^n = 0\}$, $R'^n = \inf\{t : Z_t'^n = 0\}$, $S^n = R^n \wedge R'^n$,
$\Gamma^n = \bigcup_k [\![0, S_k^n]\!] = [\![0]\!] \cup [Z_-^n > 0, Z_-'^n > 0]$,
μ^n—the jump measure of Z^n,
ν^n—the compensator of μ^n under $\overline{P}^n$,
H^n—the Hellinger process of (P^n, P'^n) of order 1/2,

and for $N \ge 2$

$$i^n(N) = (\lambda'^n I_{[N\lambda^n < \lambda'^n]}) * \nu^n,$$

where $\lambda^n = 1 + \frac{x}{Z_-^n}$, $\lambda'^n = 1 - \frac{x}{Z_-'^n}$. It is not hard to check directly that $\lambda^n.\nu^n$ and $\lambda'^n.\nu^n$ are the compensators of μ^n under P^n and P'^n respectively.

In the sequel, for the sake of convenience, we omit the index n constantly. It appears only in the case, where it is indispensable.

14.30 Lemma. *If $(P'^n) \lhd (P^n)$, then*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n(S_k^n < \infty) = 0.$$

Proof. We have

$$P'(R_k' < \infty) \le P'\left(Z'_{R_k'} \le \frac{1}{k}\right) \le \frac{1}{k},$$
$$P'(S_k < \infty) \le P'(R_k < \infty) + P'(R_k' < \infty).$$

Hence it suffices to show $\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n(R_k^n < \infty) = 0$. If it is not true, there exist $\delta > 0$ and a subsequence (n_k) such that for all k

$$P'^{n_k}(R_k^{n_k} < \infty) \ge \delta. \tag{30.1}$$

But similarly we have $P(R_k < \infty) \le \frac{1}{k}$. Then $P^{n_k}(R_k^{n_k} < \infty) \to 0$, and by the contiguity, $P'^{n_k}(R_k^{n_k} < \infty) \to 0$, which contradicts (30.1). □

14.31 Theorem. $(P'^n) \lhd (P^n)$ *if and only if the following conditions are fulfilled:*

i) $(P_0'^n) \lhd (P_0^n)$, *where $P_0'^n = P'^n|_{\mathcal{F}_0^n}$ and $P_0^n = P^n|_{\mathcal{F}_0^n}$,*
ii) (H_∞^n, P'^n) *is tight, i.e.,* $\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n(H_\infty^n \ge N) = 0$,
iii) *for any $\varepsilon > 0$,* $\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n(i_\infty^n(N) \ge \varepsilon) = 0$.

Proof. Necessity. i) is obvious. Noting that

$$H_{S_k} \le kY_-.H_{S_k}$$

(recall $Y = \sqrt{ZZ'}$), $Y \le 1$ and $P' \le 2\overline{P}$, we have

$$\begin{aligned} P'(H_\infty \ge N) &\le P'(S_k < \infty) + P'\left(Y_-.H_\infty \ge \frac{N}{k}\right) \\ &\le P'(S_k < \infty) + \frac{2k}{N}\overline{E}[Y_-.H_\infty] \\ &= P'(S_k < \infty) + \frac{2k}{N}\overline{E}[Y_0 - Y_\infty] \\ &\le P'(S_k < \infty) + \frac{2k}{N}. \end{aligned} \tag{31.1}$$

Letting $n \to \infty$, $N \to \infty$ and $k \to \infty$ successively by Lemma 14.30 yields ii). Set

$$j^n(N) = (I_{[N\lambda^n < \lambda'^n]}) * \mu^n.$$

If $u < \frac{1}{2}v$, $\varphi_{1/2}(u, v) = \frac{1}{2}(u + v) - \sqrt{uv} = \frac{1}{2}(\sqrt{v} - \sqrt{u})^2 > cv$, where $c = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. Thus

$$i(N) \le c^{-1}(\varphi_{1/2}(\lambda, \lambda')I_{[N\lambda < \lambda']}) * \nu < c^{-1}H, \quad N \ge 2.$$

Hence $i(N)^{S_k}$ is $\overline{P}$-integrable, and hence P'-integrable. Thus $i(N)^{S_k}$ is the P'-compensator of $j(N)^{S_k}$. By Lenglart's inequality for $\varepsilon > 0$

$$P'(i_{S_k}(N) \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon}E'[(\Delta j(N))_{S_k}^*] + P'(j_{S_k}(N) > 0). \tag{31.2}$$

Since $\Delta j(N) \le 1$, and on $[\![0, S_k[\![$, $\frac{Z}{Z_-} \ge \frac{1}{2k}$, $\frac{Z'}{Z'_-} \le 2k$, when $N \ge 4k^2$ on

$[0, S_k[$ we have $\frac{Z'}{Z'_-} \le 2k \le \frac{N}{2k} \le N\frac{Z}{Z_-}$. Thus

$$j_{S_k-}(N) = 0, \quad (\Delta j(N))^*_{S_k} \le I_{[S_k<\infty]}.$$

Hence, when $N \ge 4k^2$, by (31.1) we have

$$P'(i_\infty(N) \ge \varepsilon) \le P'(i_{S_k}(N) \ge \varepsilon) + P'(S_k^n < \infty)$$
$$\le \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right)P'(S_k < \infty).$$

Letting $n \to \infty$, $N \to \infty$ and $k \to \infty$ successively by Lemma 14.30 yields iii).

Sufficiency. From the exponential formula, on $[0, S_k]$ we have

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{Z'_0}{Z_0}\exp\Big\{\frac{I_{]0,\infty[}}{Z'_-}.Z' - \frac{1}{2}\frac{1}{(Z'_-)^2}.\langle Z'^c\rangle + \sum\Big[\log\Big(1 + \frac{\Delta Z'}{Z'_-}\Big) - \frac{\Delta Z'}{Z'_-}\Big]$$
$$- \frac{I_{]0,\infty[}}{Z_-}.Z + \frac{1}{2}\frac{1}{(Z_-^2)}.\langle Z^c\rangle - \sum\Big[\log\Big(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}\Big) - \frac{\Delta Z}{Z_-}\Big]\Big\}$$
$$= \frac{Z'_0}{Z_0}\exp\Big\{ - \Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big).Z^c - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(Z'_-)^2} - \frac{1}{(Z_-)^2}\Big).\langle Z^c\rangle$$
$$+(\lambda' - \lambda) * (\mu - \nu) + [\log \lambda' - (\lambda' - 1)] * \mu - [\log \lambda - (\lambda - 1)] * \mu\Big\}$$
$$= \frac{Z'_0}{Z_0}\exp\Big\{ - \Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big).Z^{c,P'} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big)^2.\langle Z^c\rangle$$
$$+(\lambda' - \lambda) * \mu + \Big[\log\frac{\lambda'}{\lambda} - (\lambda' - \lambda)\Big] * \mu\Big\}$$
$$= \frac{Z'_0}{Z_0}\exp\{A + B\}, \tag{31.3}$$

where $Z^{c,P'} = Z^c - \frac{1}{Z'_-}.\langle Z^c, Z'^c\rangle = Z^c + \frac{1}{Z'_-}.\langle Z^c\rangle$ is the continuous martingale part of Z under P', and

$$A = -\Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big).Z^{c,P'} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big)^2.\langle Z^c\rangle,$$

$$B = (\lambda' - \lambda) * (\mu - \nu) + \Big[\log\frac{\lambda'}{\lambda} - (\lambda' - \lambda)\Big] * \mu$$
$$= (I_{[|\rho-1|>b]} \log\frac{1}{\rho}) * \mu + [I_{[|\rho-1|>b]}(\rho - 1)] * \nu'$$
$$+ \Big(I_{[|\rho-1|\le b]}\log\frac{1}{\rho}\Big) * (\mu - \nu') + \Big[I_{[|\rho-1|\le b]}\Big(\log\frac{1}{\rho} - 1 + \rho\Big)\Big] * \nu'$$
$$= B^1 + B^2 + B^3 + B^4.$$

where $\rho = \frac{\lambda}{\lambda'}$, ν' is the P'-compensator of μ, and $b \in]0, 1[$ is a constant.

Below we will discuss under P', and estimate (31.3) term by term.

Firstly, since $(P_0'^n) \lhd (P_0^n)$, we have

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P'^n(Z_0'^n/Z_0^n \ge N) = 0. \tag{31.4}$$

Secondly, since $\langle Z^{c,P'}\rangle(P') = \langle Z^c\rangle$, by Lenglart's inequality

$$P'\Big(\Big(\Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big).Z^{c,P'}\Big)^*_{S_k} \ge N\Big) \le L/N^2 + P'(8H_\infty \ge L).$$

$$P'(A^*_{S_k} \ge 2N) \le L/N^2 + P'(8H_\infty \ge L) + P'(4H_\infty \ge N).$$

Letting $k \to \infty$, $n \to \infty$, $N \to \infty$ and $L \to \infty$ successively yields

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P'^n\Big(\lim_{k\to\infty}(A^n)^*_{S_k^n} \ge 2N\Big) = 0. \tag{31.5}$$

Thirdly, using $|\log(1 + x)| < |x|/(1 - |x|)$ for $|x| < 1$, we have

$$\Big\langle\Big(I_{[|\rho-1|\le b]}\log\frac{1}{\rho}\Big) * (\mu - \nu')\Big\rangle \le (I_{[|\rho-1|\le b]}\log^2 \rho) * \nu'$$
$$\le \Big(I_{[|\rho-1|\le b]}\frac{(\rho - 1)^2}{(b - 1)^2}\Big) * \nu' \le \Big(\frac{1 + \sqrt{1+b}}{1 - b}\Big)^2(\sqrt{\rho} - 1)^2 * \nu' \le c_b H,$$

where c_b is a constant, dependent of b only. By Lenglart's inequality

$$P'((B^3)^*_{S_k} \ge N) \le L/N^2 + P'(c_b H_\infty \ge L).$$

Letting $k \to \infty$, $n \to \infty$, $N \to \infty$ and $L \to \infty$ successively yields

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P'^n\Big(\lim_{k\to\infty}(B^{n,3})^*_{S_k^n} \ge N\Big) = 0. \tag{31.6}$$

Fourthly, using $|\log(1 + x) - x| \le x^2/2(1 - |x|)$ for $|x| < 1$, we have

$$|B^4| \le (I_{[|\rho-1|\le b]}| - \log\rho + \rho - 1|) * \nu'$$
$$\le \Big(I_{[|\rho-1|\le b]}\frac{(\rho - 1)^2}{2(1 - b)}\Big) * \nu' \le \frac{(1 + \sqrt{1+b})^2}{2(1 - b)}(\sqrt{\rho} - 1)^2 * \nu' \le c_b H,$$
$$P'((B^4)^*_{S_k} \ge N) \le P'(c_b H_\infty \ge N).$$

Hence

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P'^n\Big(\lim_{k\to\infty}(B^{n,4})^*_{S_k^n} \ge N\Big) = 0. \tag{31.7}$$

Fifthly, we have

$$|B^2| \le \Big[I_{[|\rho-1|>b]}\Big|\frac{\sqrt{\rho} + 1}{\sqrt{\rho} - 1}\Big|(\sqrt{\rho} - 1)^2\Big] * \nu'$$
$$\le \Big(1 + \frac{2}{\sqrt{1+b} - 1}\Big)(\sqrt{\rho} - 1)^2 * \nu' \le c_b H,$$
$$P'((B^2)^*_{S_k} \ge N) \le P'(c_b H_\infty \ge N).$$

Hence

$$\lim_{N\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty} P'^n\Big(\lim_{k\to\infty}(B^{n,2})^*_{S^n_k} \ge N\Big) = 0. \tag{31.8}$$

Sixthly, take $0 < \delta < 1 - b$, then

$$B^1 \le \Big(I_{[\delta<\rho<1-b]}\log^+\frac{1}{\rho}\Big) * \mu + \Big(I_{[\rho\le\delta]}\log^+\frac{1}{\rho}\Big) * \mu$$
$$\le \Big(I_{[\rho<1-b]}\log\frac{1}{\delta}\Big) * \mu + \Big(I_{[\rho\le\delta]}\log^+\frac{1}{\rho}\Big) * \mu,$$

$$P'((\exp\{B^1\})^*_{S_k} \ge N)$$
$$\le P'\Big((I_{[\rho<1-b]} * \mu)_{S_k} \ge \frac{\log N}{\log 1/\delta}\Big) + P'((I_{[\rho\le\delta]} * \mu)_{S_k} > 0). \tag{31.9}$$

Clearly,

$$I_{[\rho<1-b]} * \nu' \le I_{[|\rho-1|>b]} * \nu' \le \frac{1}{b}(I_{[|\rho-1|>b]}|\rho-1|) * \nu' \le c_b H.$$

By Lenglart's inequality

$$P'\Big((I_{[\rho<1-b]} * \mu)_{S_k} \ge \frac{\log N}{\log 1/\delta}\Big) \le \frac{L\log 1/\delta}{\log N} + P'(c_b H_\infty \ge L). \tag{31.10}$$

On the other hand,

$$I_{[\rho\le\delta]} * \nu' \le I_{[K\lambda<\lambda']} * \nu' + I_{[0<\lambda'\le K\lambda,\rho\le\delta]} * \nu'$$
$$\le i(K) + K I_{[\lambda'>0,\rho\le\delta]} * \nu'$$
$$\le i(K) + \frac{K\delta}{(1-\sqrt{\delta})^2}(\sqrt{\rho}-1)^2 * \nu'$$
$$\le i(K) + \frac{2K\delta}{(1-\sqrt{\delta})^2} H.$$

Note that μ is integer-valued. Again by Lenglart's inequality

$$P'((I_{[\rho\le\delta]} * \mu)_{S_k} > 0) = P'((I_{[\rho\le\delta]} * \mu)_{S_k} \ge 1)$$
$$\le \eta + P'((I_{[\rho\le\delta]} * \nu')_{S_k} \ge \eta), \quad \eta > 0. \tag{31.11}$$

From (31.9)–(31.11) we obtain

$$P'((\exp\{B^1\})^*_{S_k} \ge N) \le \frac{L\log 1/\delta}{\log N} + P'(c_b H_\infty \ge L) + \eta$$
$$+ P'(i_\infty(K) \ge \frac{1}{2}\eta) + P'(H_\infty \ge \eta(1-\sqrt{\delta})^2/4K\delta).$$

Letting $k\to\infty$, $n\to\infty$, $N\to\infty$, $L\to\infty$, $\delta\to 0$, $K\to\infty$ and $\eta\to 0$ successively yields

$$\lim_{N\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty} P'^n\Big(\lim_{k\to\infty}(\exp\{B^{n,1}\})^*_{S^n_k} \ge N\Big) = 0. \tag{31.12}$$

From (31.4)–(31.8) and (31.12) we get

$$\lim_{N\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty} P'^n\Big(\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{Z'^n}{Z^n}\Big)^*_{S^n_k} \ge N\Big) = 0.$$

In fact, it is not difficult to see $\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{Z'^n}{Z^n}\Big)^*_{S_k} = \Big(\frac{Z'^n}{Z^n}\Big)^*_\infty$. Hence

$$\lim_{N\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty} P'^n\Big(\frac{Z'^n_\infty}{Z^n_\infty} \ge N\Big) = 0.$$

This implies $(P'^n) \lhd (P^n)$ (Theorem 14.27). □

14.32 Remark. In Theorem 14.31 condition iii) can be substituted by

iii)′ For all $A_n \in \mathcal{F}^n$

$$(I_{A_n}\lambda^n) * \nu^n_\infty \xrightarrow{P'^n} 0 \Rightarrow (I_{A_n}\lambda'^n) * \nu^n_\infty \xrightarrow{P'^n} 0.$$

Proof. iii)⇒iii)′.

$$(I_{A_n}\lambda'^n) * \nu^n_\infty \le (I_{[N\lambda^n<\lambda'^n]}\lambda'^n) * \nu^n_\infty + (I_{A_n[N\lambda^n\ge\lambda'^n]}\lambda'^n) * \nu^n_\infty$$
$$\le i^n_\infty(N) + N(I_{A_n}\lambda^n) * \nu^n_\infty.$$

iii)′+ii)⇒iii).

$$(I_{[N\lambda^n<\lambda'^n]}\lambda^n) * \nu^n_\infty \le (\sqrt{N}-1)^{-2} H^n_\infty.$$

Take $N^n\to\infty$, $A_n = [N^n\lambda^n < \lambda'^n]$, then $i^n_\infty(N^n) \xrightarrow{P'^n} 0$. □

14.33 Theorem. *If for all* $N > 0$, $\varlimsup_{n\to\infty} P'^n(H^n_\infty \ge N) = 1$, *then* $(P'^n)\triangle(P^n)$.

Proof. By (31.1)

$$P'(H_\infty \ge N) \le P'(S_k < \infty) + \frac{2k}{N}$$
$$\le P'(R_k < \infty) - P'(R'_k < \infty) + \frac{2k}{N}$$
$$\le P'(R_k < \infty) + \frac{1}{k} + \frac{2k}{N}.$$

Whence $\lim_{k\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty} P'^n(R^n_k < \infty) = 1$. Comparing with Lemma 14.25, we know $(P'^n)\triangle(P^n)$. □

Obviously, if $(P'^n_0)\triangle(P^n_0)$, then $(P'^n)\triangle(P^n)$. But either $(P'^n_0)\triangle(P^n_0)$ or the condition in Theorem 14.33 is far from necessary for entire separation.

Remark. Naturally, Theorem 14.16 can be deduced from Theorem 14.31, and also one can deduce from Theorem 14.31 that if $P'(H_\infty = \infty) = 1$, then $P' \perp P$. The details are left to the reader.

14.34 Lemma. *The following statements are equivalent:*
1) $\|P^n - P'^n\| \to 0$,
2) $(Z^n - 1)^*_\infty \xrightarrow{P^n} 0$,
3) $(\sqrt{Z^n Z'^n} - 1)^*_\infty \xrightarrow{P^n} 0$.

Proof. 1)⇒2). By the maximal inequality of martingales, for $\varepsilon > 0$

$$\overline{P}((Z-1)^*_\infty \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\overline{E}|Z_\infty - 1| = \frac{1}{2\varepsilon}\|P - P'\|.$$

The assertion follows immediately.

2)⇒1). Obviously, $Z^n_\infty - 1 \xrightarrow{P^n} 0$. For any given $\varepsilon > 0$ and $0 < \delta < \varepsilon < 1$

$$\overline{P}(|Z_\infty - 1| \leq \varepsilon) \geq \int_{[|Z_\infty - 1| \leq \delta]} \frac{1}{Z_\infty} dP \geq \frac{1}{1+\delta} P(|Z_\infty - 1| \leq \delta)$$

Letting $n \to \infty$ and $\delta \to 0$ successively yields $Z^n_\infty - 1 \xrightarrow{\overline{P}^n} 0$, and hence $\|P'^n - P^n\| = 2\overline{E}^n[|Z^n_\infty - 1|] \to 0$, since $|Z^n_\infty - 1| \leq 1$.

Noting that $1 - (\sqrt{ZZ'})^2 = (1-Z)^2$ and $0 \leq \sqrt{ZZ'} \leq 1$, we have

$$(1 - \sqrt{ZZ'})^* \leq |(1-Z)^*|^2 \leq 2(1 - \sqrt{ZZ'})^*.$$

Hence 2) ⟺ 3) follows. □

14.35 Theorem. *The following statements are equivalent:*
1) $\|P^n - P'^n\| \to 0$,
2) i) $\|P^n_0 - P'^n_0\| \to 0$; ii) $H^n_\infty \xrightarrow{\overline{P}^n} 0$,
3) i) $\|P^n_0 - P'^n_0\| \to 0$; ii) $H^n_\infty \xrightarrow{P^n} 0$.

Proof. 1)⇒2). i) is trivial. Recall that $Y = Y_0 + M - A$, where M is a martingale with $M_0 = 0$ and $A = Y_- . H$. By Lemma 14.34, $(Y^n - Y^n_0)^* \xrightarrow{\overline{P}^n} 0$. A is dominated by $(Y - Y_0)^*$, $\Delta(Y - Y_0)^* \leq |\Delta Y| \leq 1$. By Lenglart's inequality we know $A^n_\infty \xrightarrow{\overline{P}^n} 0$.

Observe that on $[\inf_{t\geq 0} Y_t \geq 1/2]$,

$$H_\infty = \left(\frac{1}{Y_-} - 1\right) \cdot A_\infty + A_\infty \leq 2(Y-1)^*_\infty A_\infty + A_\infty,$$

and on $[\inf_{t\geq 0} Y_t < 1/2]$, $(Y - 1)^*_\infty \geq 1/2$. Therefore for any $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(H_\infty \geq \varepsilon) \leq \overline{P}((Y-1)^*_\infty \geq \frac{1}{2}) + \overline{P}([2(Y-1)^*_\infty + 1]A_\infty \geq \varepsilon).$$

Hence $H^n_\infty \xrightarrow{\overline{P}^n} 0$.

2)⇒3) is trivial.

3)⇒1). At first, observe that

$$2H_\infty \geq (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2 * \nu_\infty \geq \lambda\Big(\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} - 1\Big)^2 I_{[N\lambda' < \lambda]} * \nu_\infty$$
$$\geq \lambda\Big(\sqrt{\frac{1}{N}} - 1\Big)^2 I_{[N\lambda' < \lambda]} * \nu_\infty.$$

Hence

$$(\lambda^n I_{[N\lambda'^n < \lambda^n]}) * \nu^n_\infty \xrightarrow{P^n} 0.$$

Applying Theorem 14.31 and Lemma 14.30 we know $(P^n) \triangleleft (P'^n)$ and

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P^n(S^n_k < \infty) = 0. \tag{35.1}$$

Now define $L = \frac{I_{]0,\infty[}}{Y_-}.Y = \frac{1}{Y_-}.M - H$. Using Itô formula, on Γ we have

$$\frac{1}{Y_-}.M = \frac{1}{2}\Big(\frac{I_{]0,\infty[}}{Z_-}.Z + \frac{I_{]0,\infty[}}{Z'_-}.Z\Big) - \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2 * (\mu - \nu)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{Z_-} - \frac{1}{Z'_-}\Big).Z^c + (\sqrt{\lambda\lambda'} - 1) * (\mu - \nu)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{Z_-} - \frac{1}{Z'_-}\Big).Z^{c,P} + (\sqrt{\lambda\lambda'} - 1) * (\mu - \lambda.\nu)$$
$$+ \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{1}{Z_-} - \frac{1}{Z'_-}\Big)\frac{1}{Z_-}\Big].\langle Z^c\rangle + [(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda\lambda'} - 1)] * \nu, \tag{35.2}$$

where $Z^{c,P}$ is the continuous martingale part of Z under P. It is easy to see that on $[0, S_k]$ we have

$$\Big|\Big(\frac{1}{Z_-} - \frac{1}{Z'_-}\Big)\frac{1}{Z_-}\Big|.\langle Z^c\rangle \leq \Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big)^2.\langle Z^c\rangle \leq 8H, \tag{35.3}$$

$$|\sqrt{\lambda\lambda'} - 1| \leq |\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}|,$$
$$|(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda\lambda'} - 1)| \leq (\sqrt{\lambda} + 1)|\sqrt{\lambda} - 1||\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}|,$$
$$|(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda\lambda'} - 1)| * \nu \leq [(\sqrt{\lambda} + 1)(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2] * \nu$$
$$\leq 2(\sqrt{1 + 2k} + 1)H, \tag{35.4}$$

since 1 is between $\sqrt{\lambda}$ and $\sqrt{\lambda'}$, and $|\sqrt{\lambda} - 1| \leq |\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}|$. Under P we have

$$\Big\langle \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{Z_-} - \frac{1}{Z'_-}\Big).Z^{c,P} + (\sqrt{\lambda\lambda'} - 1) * (\mu - \lambda.\nu)\Big\rangle(P)$$
$$\leq \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{Z_-} + \frac{1}{Z'_-}\Big)^2.\langle Z^c\rangle + (2k + 1)(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2 * \nu \leq (2 + 4k)H. \tag{35.5}$$

From (35.2)–(35.5) and Lenglart's inequality we obtain

$$(L^n)^*_{S^n_k} \xrightarrow{P^n} 0. \tag{35.6}$$

On the other hand, since $\langle L^c\rangle_{S_k} \leq 2H_{S_K}$,

$$\langle L^{n,c}\rangle_{S^n_k} \xrightarrow{P^n} 0. \tag{35.7}$$

By the exponential formula, on $[0, S_k]$ we have

$$Y = Y_0\mathcal{E}(L) = Y_0\exp\{L - \frac{1}{2}\langle L^c\rangle + \Sigma(\log(1 + \Delta L) - \Delta L)\}.$$

Noting that $0 \leq x - \log(1+x) \leq x^2$ for $|x| \leq \frac{1}{2}$ and

$$\Delta L = \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta Z}{Z_-}\right)\left(1 + \frac{\Delta Z'}{Z'_-}\right)} - 1,$$

we have

$$0 \leq \sum_t(\Delta L_t - \log(1 + \Delta L_t))I_{[|\Delta L_t| \leq \frac{1}{2}]} \leq \sum_t(\Delta L_t)^2 I_{[|\Delta L_t| \leq \frac{1}{2}]}$$
$$\leq (\sqrt{\lambda\lambda'} - 1)^2 * \mu_\infty \leq (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2 * \mu_\infty.$$

Since $[(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'})^2\lambda] * \mu \leq 2(1 + 2k)H$, using Lenglart's inequality again, we obtain

$$(\Sigma(\Delta L^n - \log(1 + \Delta L^n))I_{[|\Delta L^n| \leq \frac{1}{2}]})_{S^n_k} \xrightarrow{P^n} 0. \tag{35.8}$$

For any $\varepsilon > 0$,

$$[(\Sigma|\log(1 + \Delta L) - \Delta L|)_{S_k} \geq \varepsilon]$$
$$\subset [(\Delta L)^*_{S_k} \geq \frac{1}{2}] \cup [(\Sigma(\Delta L - \log(1 + \Delta L))I_{[|\Delta L| \leq \frac{1}{2}]})_{S_k} \geq \varepsilon]. \tag{35.9}$$

According to (35.6), $(\Delta L^n)^*_{S^n_k} \xrightarrow{P^n} 0$, and from (35.7), (35.8) and (35.9) we get

$$(L^n)^*_{S^n_k} - \frac{1}{2}\langle L^{n,c}\rangle_{S^n_k} + (\Sigma|\log(1 + \Delta L) - \Delta L|)_{S^n_k} \xrightarrow{P^n} 0. \tag{35.10}$$

Since $Y^n_0 - 1 \xrightarrow{P^n} 0$ by i) and

$$Y^n - 1 = Y^n_0 - 1 + Y^n_0\{\exp(L^n - \frac{1}{2}\langle L^{n,c}\rangle + \Sigma(\log(1 + \Delta L^n) - \Delta L^n)) - 1\},$$

from (35.10) we have

$$(Y^n - 1)^*_{S^n_k} \xrightarrow{P^n} 0. \tag{35.11}$$

For any given $\varepsilon > 0$

$$P^n((Y^n - 1)^*_\infty \geq \varepsilon) \leq P^n(S^n_k < \infty) + P^n((Y^n - 1)^*_{S^n_k} \geq \varepsilon).$$

Letting $n \to \infty$ and $k \to \infty$ successively, from (35.11) and (35.1) we know

$$(Y^n - 1)^*_\infty \xrightarrow{P^n} 0.$$

At last, $\|P^n - P'^n\| \to 0$ follows from Lemma 14.34. □

14.36 Theorem. *Let $\tilde{P}^n$ be a probability measure on $\mathcal{F}^n$ such that $P^n \ll \tilde{P}^n$ and $P'^n \ll \tilde{P}^n$. Assume $X^n \in \mathcal{S}(\tilde{P}^n)$ and under $\tilde{P}^n$, X^n has the weak property of predictable representation. Let the predictable characteristics of X^n under P^n, P'^n and $\tilde{P}^n$ be $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n), (\alpha'^n, \beta'^n, \nu'^n)$ and $(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n, \tilde{\nu}^n)$ respectively such that*

$$\nu^n = Y^n \cdot \tilde{\nu}^n, \quad Y^n \in \tilde{\mathcal{P}}^{n+}, \quad [\tilde{a}^n = 1] \subset [a^n = 1],$$
$$\nu'^n = Y'^n \cdot \tilde{\nu}^n, \quad Y'^n \in \tilde{\mathcal{P}}^{n+}, \quad [\tilde{a}^n = 1] \subset [a'^n = 1].$$

Set

$$A^n = (K^n)^2 \cdot \tilde{\beta}^n + (\sqrt{Y^n} - \sqrt{Y'^n})^2 * \tilde{\nu}^n + \Sigma(\sqrt{1 - a^n} - \sqrt{1 - a'^n})^2,$$

where $K^n = \dfrac{d}{d\tilde{\beta}^n}\{I_{\Gamma^n}\cdot[\alpha'^n - \alpha^n - (xI_{[|x| \leq 1]}) * (\nu'^n - \nu^n)]\}$, *and*

$$I^n(N) = I_{[NY^n < Y'^n]} * \nu'^n + \Sigma[(1 - a'^n)I_{[N(1-a^n) < (1-a'^n)]}], \quad N \geq 2.$$

Then $(P'^n) \lhd (P^n)$ if and only if the following conditions are satisfied:

i) $(P'^n_0) \lhd (P^n_0)$,

ii) $\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n(A^n_\infty \geq N) = 0$,

iii) *for any* $\varepsilon > 0$, $\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n(I^n_\infty(N) \geq \varepsilon) = 0$.

Proof. First of all, we want to calculate $i^n(N)$. In fact, $i(N)$ is the P'-compensator of

$$I_\Gamma \cdot \sum I_{[N\frac{Z}{Z_-} < \frac{Z'}{Z'_-}]}I_{[\Delta Z \neq 0]} = I_\Gamma \cdot \{I_{[NY < Y']} * \mu + \sum I_{[N\frac{1-a}{1-\tilde{a}} < \frac{1-a'}{1-\tilde{a}}]}I_{D^c \cap [\tilde{a} > 0]}\},$$

where μ is the jump measure of X and $D = [\Delta X \neq 0]$. Hence $i(N) = I_\Gamma \cdot I(N)$, and actually it is also independent of the choice of $\tilde{P}$. In the sequel, we will use Theorems 14.12 and 14.20 fully.

Necessity. By Theorem 14.20, on $[S^n = \infty]$ we have $A^n \leq 8H^n$. Hence

$$P'^n(A^n_\infty \geq N) \leq P'^n(S^n < \infty) + P'^n(8H^n_\infty \geq N). \tag{36.1}$$

Since $P'^n(R^n < \infty) = 0$, $\lim_{n\to\infty} P'^n(R'^n < \infty) = 0$, hence $\lim_{n\to\infty} P'^n(S^n < \infty) = 0$. Thus by Theorem 14.31 and (36.1) we obtain ii). By the same reason, for any $\varepsilon > 0$, $P'^n(I^n_\infty(N) \geq \varepsilon) \leq P'^n(S^n < \infty) + P'^n(i^n_\infty(N) \geq \varepsilon)$, and we obtain iii).

Sufficiency. On $\bigcap_t[\beta'^n_t = \tilde{\beta}^n_t]$ we have $H^n \leq A^n$. But $P'^n(\bigcup_t[\beta'^n_t \neq \tilde{\beta}^n_t]) = 0$. From ii) we obtain $\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P'^n(H^n_\infty \geq N) = 0$. Similarly,

since $i^n(N) \le I^n(N)$, from iii) we obtain $\lim\limits_{N\to\infty} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P'^n(i^n_\infty(N) \ge \varepsilon) = 0$ for any $\varepsilon > 0$. Then by Theorem 14.31 $(P'^n) \lhd (P^n)$. □

14.37 Remark. Just like Remark 14.32, condition iii) in Theorem 14.36 can be substituted by the following

iii)′ For all $A_n \in \mathcal{F}^n$

$$I_{A_n} \cdot \nu^n_\infty \xrightarrow{P'^n} 0 \Rightarrow I_{A_n} \cdot \nu'^n_\infty \xrightarrow{P'^n} 0;$$

$$(I_{A_n} \cdot \Sigma[(1-a^n)I_{[\hat{a}^n>0]}])_\infty \xrightarrow{P'^n} 0 \Rightarrow (I_{A_n} \cdot \Sigma[(1-a'_n)I_{[\hat{a}_n>0]}])_\infty \xrightarrow{P'^n} 0.$$

In fact, we have iii)⇒iii)′ and iii)′+ii)⇒iii) as well. The proof is left to the reader.

14.38 Theorem. *Under the assumptions of Theorem 14.36, $\|P^n - P'^n\| \to 0$ if and only if the following conditions are satisfied:*

i) $\|P^n_0 - P'^n_0\| \to 0$,

ii) $A^n_\infty \xrightarrow{P^n} 0$.

Proof. It is similar to the proof of Theorem 14.36, but we should use Theorem 14.35 instead of Theorem 14.31. □

§4. Measures Induced by Lévy Processes

In this paragraph we apply the general results to the measures induced by Lévy processes. Assume that $X = (X_t)$ is a cadlag process. Let $F = F^0_+(X)$ and $\mathcal{F} = \bigvee_t \mathcal{F}_t = \bigvee_t \mathcal{F}^0_t(X)$. Let P and P' be two measures on $\mathcal{F}$. Suppose under P or P', X is a Lévy process. Then

$$E[e^{iu(X_t - X_0)}] = \exp\Big\{iuf_t - \frac{1}{2}u^2\beta_t + (e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x|\le 1]}) * \nu_t\Big\};$$

and

$$E'[e^{iu(X_t - X_0)}] = \exp\Big\{iuf'_t - \frac{1}{2}u^2\beta'_t + (e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x|\le 1]}) * \nu'_t\Big\},$$

where (f, β, ν) and (f', β', ν') are all non-random, continuous in t. P (resp. P') is completely determined by P_0 and (f, β, ν) (resp. P'_0 and (f', β', ν')). They are the measures induced by Lévy processes. Let μ be the jump measure of X and X^c (resp. X'^c) be the continuous martingale part of X, if X is a semimartingale under P (resp. P').

14.39 Lemma. *Let g be a (non-random) Borel function on $R_+ \times E$.*

1) *If $\int_{R_+\times E} g^+ d\nu < \infty$, then*

$$E\Big[\exp\Big\{\int_{R_+\times E} g d\mu\Big\}\Big] = \exp\Big\{\int_{R_+\times E} (e^g - 1) d\nu\Big\}. \tag{39.1}$$

2) *If $\int_{R_+\times E} \frac{g^2}{1+|g|} d\nu < \infty$, then*

$$E[\exp\{g * (\mu - \nu)_\infty\}] = \exp\Big\{\int_{R_+\times E} (e^g - 1 - g) d\nu\Big\}. \tag{39.2}$$

Proof. 1) If g is a simple function, $g = \sum_{i=1}^n a_i I_{B_i}$, $B_i \in \mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{B}(E)$, $\nu(B_i) < \infty$, $i = 1, \cdots, n$ and $B_iB_j = \emptyset$ for $i \ne j$, then

$$E\Big[\exp\Big\{\int_{R_+\times E} g d\mu\Big\}\Big] = E\Big[\exp\Big\{\sum_{i=1}^n a_i\mu(B_i)\Big\}\Big] = \prod_{i=1}^n E[\exp\{a_i\mu(B_i)\}]$$
$$= \prod_{i=1}^n \exp\{(e^{a_i} - 1)\nu(B_i)\} = \exp\Big\{\sum_{i=1}^n (e^{a_i} - 1)\nu(B_i)\Big\}$$
$$= \exp\Big\{\int_{R_+\times E} (e^g - 1) d\nu\Big\},$$

i.e., (39.1) holds. If $g \ge 0$, g can be approximated by an increasing sequence of non-negative simple functions. Then (39.1) remains true by the monotone convergence theorem. If $g \le 0$, g can be approximated by a decreasing sequence of non-positive simple functions. In this case (39.1) is still true by the dominated convergence theorem ($\exp\{\int_{R_+\times E} g d\mu\} \le 1$) and the monotone convergence theorem. For a general g, since

$$E\Big[\int_{R_+\times E} g^+ d\mu\Big] = \int_{R_+\times E} g^+ d\nu < \infty,$$

$\int_{R_+\times E} g d\mu$ makes sense. Because $\int_{R_+\times E} gI_{[g>0]} d\mu$ and $\int_{R_+\times E} gI_{[g<0]} d\mu$ are independent, (39.1) remains true:

$$E\Big[\int_{R_+\times E} g d\mu\Big] = E\Big[\int_{R_+\times E} gI_{[g>0]} d\mu\Big] E\Big[\int_{R_+\times E} gI_{[g<0]} d\mu\Big]$$
$$= \exp\Big\{\int_{R_+\times E} [(e^{gI_{[g>0]}} - 1) + (e^{gI_{[g<0]}} - 1)] d\nu\Big\}$$
$$= \exp\Big\{\int_{R_+\times E} (e^g - 1) d\nu\Big\}.$$

2) We have already known that for any $b > 0$

$$\int_{R_+\times E} \frac{g^2}{1+|g|} d\nu < \infty \Longleftrightarrow \int_{R_+\times E} (g^2 I_{[|g|\le b]} + |g| I_{[|g|>b]}) d\nu < \infty.$$

For $gI_{[|g|>b]}$ (39.2) can be deduced from (39.1). Now we may assume $|g| \le b$. There exists a constant $c_b > 0$ such that

$$|e^x - 1 - x| \le c_b x^2, \quad |x| \le 2b.$$

Choose a sequence (g_n) of simple functions such that $g_n \to g$ and

$$|g_n| \le |g|, \quad n \ge 1, \quad \int_{R_+\times E} |g_n - g|^2 d\nu \to 0.$$

Write $\eta = g * (\mu - \nu)_\infty, \eta_n = g_n * (\mu - \nu)_\infty$. Then

$$E[|\eta_n - \eta|^2] = \int_{R_+\times E} |g_n - g|^2 d\nu \to 0,$$

$$E[\exp\{\eta_n\}] = \exp\Big\{\int_{R_+\times E} (e^{g_n} - 1 - g_n) d\nu\Big\}$$

$$\le \exp\Big\{c_b \int_{R_+\times E} g^2 d\nu\Big\} < \infty, \tag{39.3}$$

$$E[\exp\{2\eta_n\}] = \exp\Big\{\int_{R_+\times E} (e^{2g_n} - 1 - 2g_n) d\nu\Big\}$$

$$< \exp\Big\{4c_b \int_{R_+\times E} g^2 d\nu\Big\} < \infty.$$

This implies $(\exp\{\eta_n\})$ is uniformly integrable. Letting $n \to \infty$ in (39.3), we obtain (39.2). □

14.40 Lemma. *Assume $X \in S(P)$ and g is a Borel function on R_+. If $\int_0^\infty g_s^2 d\beta_s < \infty$, then $g.X_\infty^c$ is a normal r.v. and*

$$E[\exp\{g.X_\infty^c\}] = \exp\Big\{\frac{1}{2}\int_0^\infty g_s^2 d\beta_s\Big\}. \tag{40.1}$$

Proof. If $g = \sum_{i=1}^n a_i I_{]t_{i-1},t_i]}$ is a simple function, $0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$, then obviously $g.X_\infty^c \sim N\big(0, \frac{1}{2}\int_0^\infty g_s^2 d\beta_s\big)$ and (40.1) holds. For a general g, the assertions follow by similar procedure of approximation as in the proof of Lemma 14.39.2). □

14.41 Theorem. *$P' \ll P$ if and only if the following conditions are satisfied:*

i) $P_0' \ll P_0$,

ii) $\nu' = Y.\nu$, $Y \in (\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{B}(E))^+$, $\int_{R_+\times E} (1 - \sqrt{Y})^2 d\nu < \infty$,

iii) $\beta' = \beta$,

iv) $f' - f - xI_{[|x|<1]} * (\nu' - \nu) = K.\beta$, $K \in \mathcal{B}(R_+)$, $\int_0^\infty K_s^2 d\beta_s < \infty$.

In this case, the density process of P' w.r.t. P is

$$\frac{dP'}{dP} = \frac{dP_0'}{dP_0}\exp\Big\{K.X^c - \frac{1}{2}K^2.\beta$$
$$+[(\log Y)I_{[|Y-1|\le b]}] * (\mu - \nu) + [(1 - Y + \log Y)I_{[|Y-1|\le b]}] * \nu$$
$$+[(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}] * \mu + [(1 - Y)I_{[|Y-1|>b]}] * \nu\Big\}, \tag{41.1}$$

where $b \in]0, 1[$ is a constant.

Proof. Without loss of generality, we may suppose $X \in S(P)$. Since there exists a continuous function g such that $X - g \in S(P)$, X may be replaced by $X - g$, the filtration F being unchanged.

The necessity follows from Theorems 14.12 and 14.16 immediately.

Sufficiency. For all $t > 0$

$$\int_0^t |d[(xI_{[|x|<1]}) * (\nu' - \nu)_s]| \le (|x(Y - 1)|I_{[|x|\le 1]}) * \nu_t$$
$$\le \{[(x^2 I_{[|x|\le 1]}) * \nu_t][(Y - 1)^2 I_{[|Y-1|\le b]} * \nu_t]\}^{1/2}$$
$$+(|Y - 1| I_{[|Y-1|>b]}) * \nu_t < \infty.$$

This implies f' is a function with finite variation as well and $X \in S(P')$.

Let

$$L = K.X^c + (Y - 1) * (\mu - \nu), \quad Z = Z_0\mathcal{E}(L), \quad Z_0 = \frac{dP_0'}{dP_0}.$$

By the exponential formula and $\Delta L_t = (Y(t, \Delta X_t) - 1)I_{[\Delta X_t \ne 0]}$ we have

$$Z = Z_0\exp\{K.X^c + (Y-1)*(\mu-\nu) - \frac{1}{2}K^2.\beta + (\log Y - Y + 1)*\mu\}. \tag{41.2}$$

Observing that $\log^+ y \le c_b|y - 1|$ when $|y - 1| > b$, $\log^2 y \le c_b|y - 1|^2$ when $|y - 1| \le b$, and $|\log y - y + 1| \le c_b|y - 1|^2$ when $|y - 1| \le b$, where $c_b > 0$ is a constant, dependent on b only, we find

$$(Y - 1) * (\mu - \nu) + (\log Y - Y + 1) * \mu$$
$$= [(Y - 1)I_{[|Y-1|\le b]}] * (\mu - \nu) + [(Y - 1)I_{[|Y-1|>b]}] * (\mu - \nu)$$
$$+[(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}] * \mu + [(-Y + 1)I_{[|Y-1|>b]}] * \mu$$
$$+[(\log Y - Y + 1)I_{[|Y-1|\le b]}] * (\mu - \nu) + [(\log Y - Y + 1)I_{[|Y-1|\le b]}] * \nu$$
$$= [(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}] * \mu + [(\log Y)I_{[|Y-1|\le b]}] * (\mu - \nu)$$
$$-[(Y - 1)I_{[|Y-1|>b]}] * \nu + [(\log Y - Y + 1)I_{[|Y-1|\le b]}] * \nu. \tag{41.3}$$

Since $K.X^c$, $[(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}] * \mu$ and $[(\log Y)I_{[|Y-1|\le b]}] * (\mu - \nu)$ are

independent, from Lemmas 14.39 and 14.40 we obtain

$$E[\mathcal{E}(L)_\infty] = E[\exp\{K.X^c_\infty - \frac{1}{2}K^2.\beta_\infty\}]E[\exp\{[(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}] * \mu_\infty\}]$$
$$\cdot E[\exp\{[(\log Y)I_{[|Y-1|\le b]}] * (\mu-\nu)_\infty\}$$
$$\cdot\exp\{[(-Y+1)I_{[|Y-1|>b]}] * \nu_\infty + [(\log Y - Y+1)I_{[|Y-1|\le b]}] * \nu_\infty\}$$
$$= \exp\{[e^{(\log Y)I_{[|Y-1|>b]}} - 1 + e^{(\log Y)I_{[|Y-1|\le b]}} - 1 - (\log Y)I_{[|Y-1|\le b]}$$
$$+(-Y+1)I_{[|Y-1|>b]} + (\log Y - Y + 1)I_{[|Y-1|\le b]}] * \nu_\infty\} = 1,$$
$$E[Z_0\mathcal{E}(L)_\infty] = E[E[\mathcal{E}(L)_\infty|\mathcal{F}_0]Z_0] = 1.$$

Set $P'' = [Z_0\mathcal{E}(L)_\infty].P$. Then P'' is a probability measure such that $P''_0 = P'_0$ and $P'' \ll P$. From the assumptions it is easy to check that under P'' the predictable triplet of X is just (f', β', ν'), and hence X is a Lévy process under P''. Then $P'' = P'$, (41.1) follows from (41.2) and (41.3), and we are done. □

14.42 Theorem. *P' and P are not singular if and only if the following conditions are satisfied:*

i) *P'_0 and P_0 are not singular,*

ii) *$\nu' = Y'.\overline{\nu}$, $(1-\sqrt{Y'})^2 * \overline{\nu}_\infty < \infty$, where $\overline{\nu} = \frac{1}{2}(\nu+\nu')$,*

iii) *$\beta' = \beta$,*

iv) *$f' - f - (xI_{[|x|\le 1]}) * (\nu' - \nu) = K.\beta$, $K \in \mathcal{B}(R_+)$, $K^2.\beta_\infty < \infty$.*

Proof. Let $\overline{P}$ be a probability such that under $\overline{P}$, X is a Lévy process and $\overline{P}_0 = \frac{1}{2}(P_0 + P'_0)$,

$$\overline{E}[e^{iu(X_t - X_0)}] = \exp\{iu\overline{f}_t - \frac{1}{2}u^2\overline{\beta}_t + (e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x|\le 1]}) * \overline{\nu}_t\},$$

where $\overline{f} = \frac{1}{2}(f+f')$, $\overline{\beta} = \frac{1}{2}(\beta+\beta')$, $\overline{\nu} = \frac{1}{2}(\nu+\nu')$.

Necessity. From Theorem 14.20.1) we have conditions i), iii), iv), and $(\sqrt{Y}-\sqrt{Y'})^2 * \overline{\nu}_\infty < \infty$, where $Y \in (\mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{B}(E))^+$ such that $\nu = Y.\overline{\nu}$. Since $Y + Y' = 2$, 1 is between Y and Y'. Hence ii) holds:

$$(1-\sqrt{Y'})^2 * \overline{\nu}_\infty \le (\sqrt{Y} - \sqrt{Y'})^2 * \overline{\nu}_\infty < \infty.$$

Sufficiency. Observe that

$$(1-\sqrt{Y'})^2 * \overline{\nu}_\infty < \infty$$
$$\iff (|Y'-1|^2 I_{[|Y'-1|\le b]}) * \overline{\nu}_\infty + (|Y'-1|I_{[|Y'-1|>b]}) * \overline{\nu}_\infty < \infty,$$

where $b \in]0,1[$. Since $Y' - 1 = 1 - Y$, we have $(1-\sqrt{Y})^2 * \overline{\nu}_\infty < \infty$ as well. Because

$$\beta = \beta' = \overline{\beta},$$

$$f - \overline{f} - (xI_{[|x|\le 1]}) * (\nu - \overline{\nu}) = -\frac{1}{2}K.\beta,$$
$$f' - \overline{f} - (xI_{[|x|\le 1]}) * (\nu' - \overline{\nu}) = \frac{1}{2}K.\beta.$$

By Theorem 14.41 we know $P \ll \overline{P}$ and $P' \ll \overline{P}$.

Now by Theorem 14.12 we have

$$H(\alpha) = I_\Gamma.\Big[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K^2.\beta + \varphi_\alpha(Y,Y') * \overline{\nu}\Big].$$

Hence the Doob-Meyer decomposition of $Y(\alpha)$ (see Theorem 14.5) is

$$Y(\alpha) = Y_0(\alpha) - M(\alpha) - Y_-(\alpha).\Big[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K^2.\beta + \varphi_\alpha(Y,Y') * \overline{\nu}\Big].$$

Denote $h_t = \overline{E}[Y_t(\alpha)] = h_\alpha(P_t, P'_t)$. Since $Y(\alpha)$ is of class (D),

$$h = h_0 - h_-.\Big[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K^2.\beta + \varphi_\alpha(Y,Y') * \overline{\nu}\Big],$$

and therefore

$$h_\alpha(P,P') = h_\alpha(P_0,P'_0)\exp\Big\{-\Big[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}K^2.\beta_\infty + \varphi_\alpha(Y,Y') * \overline{\nu}_\infty\Big]\Big\}. \tag{42.1}$$

In particular,

$$h_{1/2}(P,P') = h_{1/2}(P_0,P'_0)\exp\{-[\frac{1}{8}K^2.\beta_\infty + \frac{1}{2}(\sqrt{Y}-\sqrt{Y'})^2 * \overline{\nu}_\infty]\} > 0.$$

This implies that P and P' are not singular. □

14.43 Theorem. *Assume that P and P' are not singular. Put*

$$N_1 = \Big[\frac{dP_0}{d\overline{P}_0} = 0\Big] \cup [I_{[Y=0]} * \mu_\infty > 0],$$
$$N_2 = \Big[\frac{dP'_0}{d\overline{P}_0} = 0\Big] \cup [I_{[Y'=0]} * \mu_\infty > 0],$$
$$N = N_1 \cup N_2.$$

Then $P(N_1) = 0$, $P'(N_2) = 0$, and on N^c we have $P' \sim P$,

$$\frac{dP'}{dP} = \frac{dP'_0}{dP_0}\exp\Big\{K.X^c_\infty - \frac{1}{2}K^2.\beta_\infty + \Big[\Big(\log\frac{Y'}{Y}\Big)I_{[|Y-1|>b]}\Big] * \mu_\infty$$
$$+\Big[\Big(\log\frac{Y'}{Y}\Big)I_{[|Y-1|\le b]}\Big] * (\mu-\nu)_\infty + I_{[|Y-1|>b]} * (\nu - \nu')_\infty$$
$$+\Big[\Big(1 - \frac{Y'}{Y} + \log\frac{Y'}{Y}\Big)I_{[|Y-1|\le b]}\Big] * \nu_\infty\Big\}.$$

Proof. This is a consequence of Theorems 14.20 and 14.42. It is only required to calculate the derivative on N^c. To this end, by making use of

(41.1), on N^c we have

$$\frac{dP'}{dP} = \frac{dP'}{d\overline{P}} \Big/ \frac{dP}{d\overline{P}} = \frac{dP'_0}{dP_0} \exp\Big\{K.\overline{X}^c_\infty + \Big[\Big(\log\frac{Y'}{Y}\Big)I_{[|Y-1|>b]}\Big] * \mu_\infty$$
$$+\Big[\Big(\log\frac{Y'}{Y}\Big)I_{[|Y-1|\le b]}\Big] * (\mu-\overline{\nu})_\infty + [(Y-Y')I_{[|Y-1|>b]}] * \nu_\infty$$
$$+\Big[\Big(Y-Y'+\log\frac{Y'}{Y}\Big)I_{[|Y-1|\le b]}\Big] * \overline{\nu}_\infty\Big\}.$$

By Girsanov's theorem $X^c = \overline{X}^c - (X^c, -\frac{K}{2}.\overline{X}^c) = \overline{X}^c + \frac{1}{2}K.\beta$. Besides,

$$\Big[\Big(\log\frac{Y'}{Y}\Big)I_{[|Y-1|\le b]}\Big] * (\mu-\overline{\nu})$$
$$= \Big[\Big(\log\frac{Y'}{Y}\Big)I_{[|Y-1|\le b]}\Big] * (\mu-\nu) + \Big[(Y-1)\Big(\log\frac{Y'}{Y}\Big)I_{[|Y-1|\le b]}\Big] * \overline{\nu}.$$

Whence (43.1) is deduced. □

14.44 Definition. Set

$$d(P,P') = \begin{cases} +\infty, & \text{if } P\perp P', \\ K^2.\beta_\infty + (\sqrt{Y}-\sqrt{Y'})^2 * \overline{\nu}_\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In the sequel, we discuss the contiguity, entire separation and convergence in variation of the measures induced by Lévy processes. We only need to add the index n to all notations.

14.45 Theorem. $(P'^n) \lhd (P^n)$ *if and only if the following conditions are satisfied:*

i) $(P_0'^n) \lhd (P_0^n)$,

ii) $(\nu'^n) \lhd (\nu^n)$,

iii) $\varlimsup_{n\to\infty} d(P^n, P'^n) < \infty$.

Proof. If there exists an infinite number of n such that $P^n \perp P'^n$, then $(P^n)\triangle(P'^n)$ and $\varlimsup_{n\to\infty} d(P^n,P'^n) = +\infty$. Thus, without loss of generality, we may suppose for all n, P^n and P'^n are not singular. Then as in the proof of Theorem 14.42, we have $P^n \ll \overline{P}^n$ and $P'^n \ll \overline{P}^n$. Hence Theorem 14.36 and Remark 14.37 apply. It is only required to note that $A^n_\infty = d(P^n, P'^n)$ is non-random. □

14.46 Theorem. $(P^n)\triangle(P'^n)$ *if and only if* $(P_0^n)\triangle(P_0'^n)$ *or*

$$\varlimsup_{n\to\infty} d(P^n,P'^n) = +\infty.$$

Proof. We may also suppose for all n, P^n and P'^n are not singular.

Necessity comes from (42.1), in this case we have

$$0 = \varliminf_{n\to\infty} h_{1/2}(P^n, P'^n)$$
$$= \varliminf_{n\to\infty} h_{1/2}(P_0^n, P_0'^n)\exp\{-[\tfrac{1}{8}(K^n)^2.\beta^n_\infty + \tfrac{1}{2}(\sqrt{Y^n}-\sqrt{Y'^n})^2 * \overline{\nu}^n_\infty]\}.$$

Then either $\varliminf_{n\to\infty} h_{1/2}(P_0^n, P_0'^n) = 0$ i.e., $(P_0^n)\triangle(P_0'^n)$, or $\varlimsup_{n\to\infty} d(P^n,P'^n) = +\infty$.

The sufficiency follows directly from Theorem 14.33. □

14.47 Theorem. $\|P^n - P'^n\| \to 0$ *if and only if* $\|P_0^n - P_0'^n\| \to 0$ *and* $\lim_{n\to\infty} d(P^n,P'^n) = 0$.

Proof. We may also suppose for all n, P^n and P'^n are not singular. Then Theorem 14.38 applies. □

Problems and Complements

14.1 Let P and P' be two probability measures on $(\Omega,\mathcal{F})$. Then

$$h_\alpha(P,P') = \inf\Big\{\sum_i P(B_i)^\alpha P'(B_i)^{1-\alpha} : \begin{array}{l}(B_1,\cdots,B_n) \text{ is a finite} \\ \text{partition of } (\Omega,\mathcal{F})\end{array}\Big\}.$$

14.2 Define (by using the notations in §1)

$$\Phi_t(\alpha) = e^{-H_t(\alpha)}\prod_{s\le t}[(1-\Delta H_s(\alpha))e^{\Delta H_s(\alpha)}],\ t\ge 0.$$

Then $Y(\alpha) = N(\alpha)\Phi(\alpha)$, where $N(\alpha)\ge 0$ satisfies the following conditions:

i) If T is a stopping time and $\Phi_{T-}(\alpha) > 0$, then $N(\alpha)^T \in \mathcal{M}_{loc}(\tilde{P})$.

ii) $N(\alpha)$ is a $\tilde{P}$ supermartingale.

14.3 Assume $P' \ll P, X\in\mathcal{S}(P)$. Let (α,β,ν) and (α',β',ν') be the predictable characteristics of X under P and P' such that $\nu' = Y.\nu$, $Y\in\tilde{\mathcal{P}}^+$, and $[a=1]\subset[a'=1]$. Then

$$P'(K^2.\beta_\infty + (1-\sqrt{Y})^2 * \nu_\infty + \sum_{s>0}(\sqrt{1-a_s}-\sqrt{1-a'_s})^2 < \infty) = 1,$$

where $K = \frac{d}{d\beta}[I_{\Gamma}.(\alpha'-\alpha-(xI_{[|x|\le 1]}) * (\nu'-\nu)]$.

14.4 Let X be a step process with $X_0 = 0$ and $F = F^0(X)$. Let P and P' be two probability measures on $\mathcal{F} = \bigvee_t \mathcal{F}_t$. Assume that ν and ν' are the Lévy systems of X under P and P' respectively, and

$$P(\nu(R_+\times E)<\infty) = 1,\ \ P'(\nu'(R_+\times E)<\infty) = 1.$$

Then $P' \ll P$ if and only if the following conditions are fulfilled.

i) $\nu' = Y.\nu, Y \in \tilde{\mathcal{P}}^+$, and $[a = 1] \subset [a' = 1]$,

ii) $P'(\nu(R_+ \times E) < \infty) = 1$.

14.5 Let X be a point process and $F = F^0(X)$. Let P and P' be two probability measures on $\mathcal{F} = \bigvee_t \mathcal{F}_t$. Assume that under P, X is a Poisson process with parameter $\lambda > 0$ and Λ is the P'-compensator of X. Then $P' \overset{loc}{\ll} P$ if and only if $d\Lambda_t \ll dt$, $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$. In this case, the density process of P' w.r.t. P is

$$\prod_{T_n \leq t} \left(\frac{\lambda_{T_n}}{\lambda}\right) e^{\lambda t - \Lambda_t},$$

where T_n is the n-th jump time of X.

14.6 Give an example that for each n, $P^n \sim P'^n$, but $(P^n)\triangle(P'^n)$.

14.7 Let $\Omega^n \equiv \Omega, (\mathcal{F}^n)$ be an increasing sequence of σ-fields, $\mathcal{F} = \bigvee_n \mathcal{F}^n$, P and P' be two probability measures on $\mathcal{F}$, $P^n = P|_{\mathcal{F}^n}$, $P'^n = P'|_{\mathcal{F}^n}$. Then 1) $(P'^n) \lhd (P^n) \iff P' \ll P$, 2) $(P'^n)\triangle(P^n) \iff P' \perp P$.

14.8 Let P^n and P'^n be probability measures on $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, $\overline{P}^n = \frac{1}{2}(P^n + P'^n)$, $z'_n = \frac{dP'^n}{d\overline{P}^n}$, F_n be the distribution law of z'_n on $[0,1]$ under $\overline{P}^n$. Then $(P'^n) \lhd (P^n)$ if and only if for any limit point F of (F_n) we have $F(\{1\}) = 0$.

14.9 Let P^n and P'^n be probability measures on $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, $\overline{P}^n = \frac{1}{2}(P^n + P'^n)$, $l_n = \frac{dP'^n}{d\overline{P}^n} \Big/ \frac{dP^n}{d\overline{P}^n}$, F_n and F'_n be the distribution law of l_n on $\overline{R}_+$ under P^n and P'^n respectively.

1) The following two statements are equivalent:

a) $(P'^n) \lhd (P^n)$ and (F_n) weakly converges to a distribution law on R_+.

b) (F'_n) weakly converges to a distribution law on R_+.

2) If (F_n) weakly converges to a distribution law F on R_+, then

$$(P'^n) \lhd (P^n) \iff \int xF(dx) = 1 \iff F(\{0\}) = 0.$$

14.10 Let X be a continuous process with $X_0 = 0$ and $F = F^0_+(X)$. Let P and P' be two probability measures on $\mathcal{F} = \bigvee_t \mathcal{F}_t$ such that under P or P' X is a Lévy process. Then either $P \sim P'$ or $P \perp P'$.

14.11 Let X be a cadlag process with $X_0 = 0$ and $F = F^0_+(X)$. Let P and P' be two probability measures on $\mathcal{F} = \bigvee_t \mathcal{F}_t$ such that under P and P' X is a homogeneous Lévy process. Then either $P \sim P'$ or $P \perp P'$. Find the necessary and sufficient conditions for $P \sim P'$.

14.12 Let X^n be a step process with $X_0^n = 0$ and $F^n = F^0(X^n)$. Let P^n and P'^n be probability measures on $\mathcal{F}^n$, ν^n and ν'^n be the Lévy systems of X^n under P^n and P'^n respectively. Then

$$\|\nu^n - \nu'^n\| \xrightarrow{P^n} 0 \Rightarrow \|P^n - P'^n\| \to 0.$$

Chapter XV

Weak Convergence for Cadlag Processes

In the last two chapters of our book, we shall discuss the weak convergence of distributions of cadlag processes, especially, the weak convergence of distributions for semimartingales. In this chapter, we will introduce some fundamental facts about the weak convergence of distributions for stochastic processes. In §1 we establish that the collection $\mathbf{D}^d$ of all cadlag functions from R_+ to R^d, equipped with the Skorokhod topology, is a Polish space and the Borel σ-field of $\mathbf{D}^d$ coincides with the σ-field generated by the canonical process on $\mathbf{D}^d$. Some deeper properties of convergent sequences under the Skorokhod topology will be discussed in §2. The general results of weak convergence of measures on Polish space and the conditions of tightness for stochastic processes will be given in §3. In §4 we characterize the weak convergence of step processes in terms of the weak convergence of jump times and jump sizes. This approach is simple and elementary.

§1. $D[0,\infty[$ and Skorokhod Topology

15.1 Definition. For $a \in]0,\infty[$, denote by $\mathbf{D}^d_a = D(R^d,[0,a])$ the totality of R^d-valued cadlag functions on $[0,a]$ and by $\mathbf{D}^d = D(R^d,R_+)$ the totality of R^d-valued cadlag functions on R_+. For $d=1$, denote simply $\mathbf{D}_a = \mathbf{D}^1_a$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}^1$.

Similarly, denote by $\mathbf{C}^d_a = C(R^d,[0,a])$ the totality of R^d-valued continuous functions on $[0,a]$ and by $\mathbf{C}^d = C(R^d,R_+)$ the totality of R^d-valued continuous functions on R_+.

15.2 Definition. For each R^d-valued function x on R_+ and $A \subset R_+$, define

$$\overline{\omega}(A,x) = \sup\{|x(s)-x(t)|: \quad s,t \in A\}$$

$$\begin{aligned}\omega(\delta,x,a) &= \sup\{\overline{\omega}([t,t+\delta],x): \quad 0 \le t < t+\delta \le a\},\\ &= \sup\{|x(s)-x(t)|: \quad 0 \le s,t \le a, |t-s| < \delta\},\\ \omega'(\delta,x,a) &= \inf\left\{\max_{1\le i\le r}\overline{\omega}([t_{i-1},t_i[,x): \begin{matrix}0=t_0<t_1<\cdots<t_r=a,\\ \inf_{1\le i\le r-1}(t_i-t_{i-1})>\delta,\end{matrix}\right\},\end{aligned} \tag{2.1}$$

where $|\cdot|$ is the Euclidian norm in R^d.

Obviously, $\omega(\delta,x,a)$, $\omega'(\delta,x,a)$ are nondecreasing in δ.

Note that (2.1) is different from the following definition of $\overline{\omega}'(\delta,x,a)$ in $\mathbf{D}_a$(cf. Billingsley [1]):

$$\overline{\omega}'(\delta,x,a) = \inf\left\{\max_{1\le i\le r}\overline{\omega}([t_{i-1},t_i[,x): \quad \begin{matrix}0=t_0<t_1<\cdots<t_r=a,\\ \inf_{1\le i\le r}(t_i-t_{i-1})>\delta\end{matrix}\right\}.$$

the difference comes from the following fact: for fixed a, point a plays a particular role in $\mathbf{D}_a$, while in $\mathbf{D}$, point a dose not play any essential role.

15.3 Lemma. 1) $\omega'(\delta,x,a) \le \omega(2\delta,x,a)$.

2) If $x \in \mathbf{C}^d_a$, then $\omega(\delta,x,a) \le 2\omega'(\delta,x,a)$.

Proof. 1) For each partition $\{t_j\}_{0\le j\le r}$ of $[0,a]$ satisfying $t_j - t_{j-1} > \delta$, $j = 1,\cdots,r-1$, by adding some points (if necessary), we may assume that $t_j - t_{j-1} \le 2\delta$, thus $\overline{\omega}([t_{j-1},t_j[,x) \le \omega(2\delta,x,a)$, hence $\omega'(\delta,x,a) \le \omega(2\delta,x,a)$.

2) Owing to (2.1), for each $\eta > 0$, there is a partition of $[0,a]$ satisfying $\min_{1\le j\le r-1}(t_j-t_{j-1}) > \delta$ and $\overline{\omega}([t_{j-1},t_j[,a) < \omega'(\delta,x,a)+\eta$, $1 \le j \le r$. Now for $0 < t-s < \delta$, either s,t belong to the same interval $[t_{j-1},t_j[$ and

$$|x(t)-x(s)| \le \overline{\omega}([t_{j-1},t_j[,x) < \omega'(\delta,x,a)+\eta,$$

or s,t belong to two adjacent intervals $[t_{j-1},t_j[$, $[t_j,t_{j+1}[$ respectively and

$$|x(t)-x(s)| \le |x(t)-x(t_j)| + |x(t_j-)-x(s)| \le 2\omega'(\delta,x,a)+2\eta.$$

In sum, $\omega(\delta,x,a) \le 2\omega'(\delta,x,a)+2\eta$. Since η is arbitrary, 2) holds. □

15.4 Theorem. 1) *$x \in \mathbf{D}^d_a$ if and only if* $\lim_{\delta\to 0}\omega'(\delta,x,a) = 0$.

2) *$x \in \mathbf{D}^d$ if and only if for all $N \in \boldsymbol{N}$,* $\lim_{\delta\to 0}\omega'(\delta,x,N) = 0$.

Proof. 1) Due to (2.1), $\lim_{\delta\to 0}\omega'(\delta,x,a) = 0$ is equivalent to the following fact: For each $\varepsilon > 0$, there exists a partition $\{t_j\}_{0\le j\le r}$ of $[0,a]$ satisfying $\max_{1\le j\le r-1}|t_j-t_{j-1}| > \delta$ and

$$\overline{\omega}([t_{j-1},t_j[,x) < \varepsilon \qquad 1 \le j \le r. \tag{4.1}$$

Necessity. For $\varepsilon > 0$, let

$$\tau = \tau(\varepsilon) = \sup\left\{t: \begin{matrix}0=t_0<t_1,\cdots<t_r=t,\\ \max_{1\le j\le r}\overline{\omega}([t_{j-1},t_j[,x)<\varepsilon\end{matrix}\right\}.$$

Since $x(0) = x(0+)$, we have $\tau > 0$. Since $x(\tau-)$ exists, $[0,\tau[$ may be decomposed into a finite number of intervals on each of which the oscillations of x are less than ε. If $\tau < a$, while η is small enough so that $\overline{\omega}([\tau,\tau+\eta[,x) < \varepsilon$, then $[0,\tau+\eta[$ also has the above property. It contradicts the definition of τ. Therefore $\tau = a$ and (4.1) holds.

Sufficiency. Owing to (4.1), x is right-continuous. If $x \notin \mathbf{D}^d_N$, then there is $t_0 \in]0,N]$ such that $x(t_0-)$ does not exist or is infinite. So $\overline{\lim}_{t\uparrow t_0} x(t) - \underline{\lim}_{t\uparrow t_0} x(t) > \varepsilon_0 > 0$. Then for this ε_0 (4.1) does not hold. Hence x is cadlag on $[0,N]$.

2) $x \in \mathbf{D}^d \iff x \in \mathbf{D}^d_N, \quad \forall N \in \boldsymbol{N} \iff \lim_{\delta\downarrow 0} \omega'(\delta, x, N) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}$. □

15.5 Theorem. $x \in \mathbf{D}^d$ *if and only if* x *is the uniformly convergent limit on each compact interval of a sequence of cadlag step functions with a finite number of jumps.*

Proof. Sufficiency. Cadlag step functions with a finite number of jumps belong to $\mathbf{D}^d_a$ for all $a > 0$. Therefore their uniformly convergent limits on each compact interval belong to $\mathbf{D}^d_a$ for all $a > 0$, and hence $x \in \mathbf{D}^d$.

Necessity. By Theorem 15.4, there is a δ_N such that $\omega'(\delta_N, x, N) < \frac{1}{N}$ for $N \in \boldsymbol{N}$. Let $\{t^N_j\}$ be the corresponding partition of $[0,N]$ satisfying $\max_{1\le i\le r} \overline{\omega}([t^N_{j-1}, t^N_j[, x) < \frac{1}{N}$. Set [1]

$$x_N(t) = \sum_{i=1}^{r} x(t^N_{i-1}) I(t^N_{i-1} \le t < t^N_i) + x(N) I(t \ge N).$$

Then x_N is a cadlag step function with a finite number of jumps and

$$\sup_{t\le N-1} |x_N(t) - x(t)| < \frac{1}{N}.$$

Therefore x is the uniformly convergent limit of (x_n) on each compact interval. □

15.6 Definition. Put

$$\Lambda_0 = \left\{\lambda : \begin{array}{l} \lambda \text{ is a strictly increasing continuous function} \\ \text{from } \boldsymbol{R}_+ \text{ to } \boldsymbol{R}_+, \quad \lambda(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \lambda(t) = +\infty \end{array}\right\},$$

$$\|\lambda\|_\Lambda = \sup_{s\ne t} \left|\log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s}\right|, \qquad \lambda \in \Lambda_0,$$

$$\Lambda = \{\lambda : \lambda \in \Lambda_0 \quad \|\lambda\|_\Lambda < \infty\}.$$

[1] For convenience of typesetting, here and in the sequel, we also write $I(t^N_i \le t < t^N_{i+1})$ and $I(A)$ instead of $I_{[t^N_i, t^N_{i+1}[}$ and I_A respectively.

Denote by e the identity mapping from $\boldsymbol{R}_+$ to $\boldsymbol{R}$, and by λ^{-1} the inverse mapping of λ.

From the above definition it is easy to deduce the following facts:

$$\|\lambda\|_\Lambda = \|\lambda^{-1}\|_\Lambda, \qquad \|\lambda \circ \mu\|_\Lambda \le \|\lambda\|_\Lambda + \|\mu\|_\Lambda.$$

$$\sup_{t\le a} |\lambda(t) - t| \le a(e^{\|\lambda\|_\Lambda} - 1), \tag{6.1}$$

$$\sup_{t\le a} |\mu(|\lambda(t) - t|)| \le \sup_s \frac{\mu(s)}{s} \sup_{t\le a} |\lambda(t) - t| \le \sup_{t\le a} |\lambda(t) - t| e^{\|\mu\|_\Lambda}.$$

15.7 Definition. For $x, y \in \mathbf{D}^d$, let

$$\|x\|_a = \sup_{t\le a} |x(t)|, \qquad \|x\| = \sup_t |x(t)|,$$

$$\rho(x, y) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \left\{ \|\lambda\|_\Lambda + \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} (1 \wedge \|(xk_N) \circ \lambda - yk_N\|) \right\}, \tag{7.1}$$

where

$$k_N(t) = \begin{cases} 1, & t \le N, \\ N + 1 - t, & N < t < N + 1, \\ 0, & t \ge N + 1. \end{cases} \tag{7.2}$$

From (7.1) it is easy to verify that $\rho(x,y)$ satisfies

$$\rho(x, y) \ge 0, \quad \rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z). \tag{7.3}$$

15.8 Lemma. *Suppose* $\rho(x_n, x) \to 0$ *as* $n \to \infty$, *then there is a sequence* $(\lambda_n) \subset \Lambda$ *such that*

$$\|\lambda_n - e\| \to 0, \qquad \text{as } n \to \infty, \tag{8.1}$$

$$\forall N \in \boldsymbol{N}, \quad \|x_n \circ \lambda_n - x\|_N \to 0, \qquad \text{as } n \to \infty. \tag{8.2}$$

Proof. By Definition 15.7, if $\rho(x_n, x) \to 0$, there is $(\mu_n) \subset \Lambda$ such that

$$\|\mu_n\|_\Lambda \to 0, \qquad \text{as } n \to \infty, \tag{8.3}$$

$$\forall N \in \boldsymbol{N}, \quad \|(x_n k_N) \circ \mu_n - x k_N\| \to 0, \qquad \text{as } n \to \infty. \tag{8.4}$$

Write $m_n = (e^{\|\mu_n\|_\Lambda} - 1 + n^{-1})^{-1/2}$, then $m_n \to \infty$ by (8.3). Set

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \mu_n(t), & t \le m_n, \\ t - m_n + \mu_n(m_n), & t > m_n. \end{cases}$$

Then $\lambda_n \in \Lambda_0$, and from (6.1) we know

$$\|\lambda_n - e\| = \|\mu_n - e\|_{m_n} \le m_n(e^{\|\mu_n\|_\Lambda} - 1) \le \frac{1}{m_n} \to 0. \tag{8.5}$$

Thus (8.1) holds. For each fixed N, if n is large enough, from (8.5) and (8.4) we have

$$\begin{aligned}\|x_n \circ \lambda_n - x\|_N \le & \|(k_{N+1}x_n) \circ \lambda_n - k_{N+1}x\|_N \\ \le & \|(k_{N+1}x_n) \circ \mu_n - k_{N+1}x\| \to 0.\end{aligned}$$

Thus (8.2) holds. □

Remark. From the above proof it is easy to know that if $\rho(x_n, x) \to 0$, then there is a sequence $(\lambda_n) \subset \Lambda_0$ such that

$$\|\lambda_n - e\| \to 0, \qquad \text{as } n \to \infty,$$

$$\forall N \in \boldsymbol{N} \quad \|x_n - x \circ \lambda_n\|_N \to 0, \qquad \text{as } n \to \infty. \tag{8.6}$$

15.9 Theorem. *ρ is a distance on $\mathbf{D}^d$.*

Proof. Due to (7.3), it suffices to deduce $x = y$ from $\rho(x, y) = 0$. Suppose $\rho(x, y) = 0$. By Lemma 15.8, there is $(\lambda_n) \subset \Lambda$ such that (8.1) holds and $\|x \circ \lambda_n - y\|_N \to 0$, $\forall N \in \boldsymbol{N}$. If x is continuous at t, i.e., $\Delta x(t) = 0$, then

$$|x(t) - y(t)| \le |x(t) - x(\lambda_n(t))| + |x(\lambda_n(t)) - y(t)| \to 0,$$

thus $x(t) = y(t)$ at every continuous point t of x. By Theorem 15.5 the set of discontinuous points of x is at most countable and the continuous points of x are dense everywhere. Hence $x = y$. □

15.10 Theorem. *Suppose $\{x, x_n, n \ge 1\} \subset \mathbf{D}^d$, then the following statements are equivalent:*

1) $\rho(x, x_n) \to 0$,

2) *There is $(\lambda_n) \subset \Lambda$ and (8.1), (8.2) (or (8.1), (8.6)) hold.*

3) *For each $N \in \boldsymbol{N}$, there exists $(\lambda_n^N) \subset \Lambda_0$ such that as $n \to \infty$*

$$\|\lambda_n^N - e\|_N \to 0, \tag{10.1}$$

$$\|x_n \circ \lambda_n^N - x\|_N \to 0 \quad (\text{or } \|x_n - x \circ \lambda_n^N\|_N \to 0).$$

Proof. 1) ⇒2) is the conclusion of Lemma 15.8. 2)⇒ 3) is obvious.

3)⇒ 1): At first, we will prove that for each fixed N there exists a sequence $(\mu_n^N) \subset \Lambda$ such that (for simplicity we suppress the superscript N)

$$\|\mu_n\|_\Lambda \to 0, \tag{10.2}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|x_n - x \circ \mu_n\|_N \le \frac{1}{2N}. \tag{10.3}$$

Let (t_k) be the sequence defined as follows:

$$t_0 = 0,$$

$$t_{k+1} = \begin{cases}\inf\{t > t_k : |x(t) - x(t_k)| > \frac{1}{4N}\}, & \text{if } t_k < \infty, \\ +\infty, & \text{if } t_k = \infty,\end{cases} \qquad k \ge 1.$$

Then $t_k \to \infty$, as $x \in \mathbf{D}^d$. Set

$$\overline{\lambda}_n(t) = \begin{cases}\lambda_n(t), & t \le N, \\ \lambda_n(N) + t - N, & t > N.\end{cases}$$

$$u_{nk} = \overline{\lambda}_n^{-1}(t_k) \qquad (\overline{\lambda}_n(u_{nk}) = t_k).$$

Let

$$\mu_n(t) = \begin{cases} t_k + (t - u_{nk})\frac{t_{k+1} - t_k}{u_{n,k+1} - u_{nk}}, & u_{nk} \le t < u_{n,k+1} \wedge N,\ u_{n,k+1} < \infty, \\ t_k + t - u_{nk}, & u_{nk} \le t < u_{n,k+1} = \infty,\ t < N, \\ \mu_n(N) + t - N, & t > N,\end{cases}$$

then μ_n is piecewise linear, $\mu_n \in \Lambda$ and by (10.1)

$$u_{nk} \to t_k, \quad \|\mu_n\|_\Lambda \to 0, \quad \|\mu_n - e\| = \|\mu_n - e\|_N \to 0 \quad \text{as } n \to \infty,$$

i.e., (10.2) is true. On the other hand, if $t \in [u_{nk}, u_{n,k+1}[\cap [0, N]$, then $\lambda_n(t), \mu_n(t) \in [t_k, t_{k+1}[$ and

$$|x(\lambda_n(t)) - x(\mu_n(t))| \le 1/(2N),$$

$$\begin{aligned}|x_n(t) - x(\mu_n(t))| \le & |x_n(t) - x(\lambda_n(t))| + |x_n(\lambda_n(t)) - x(\mu_n(t))| \\ \le & \|x_n - x \circ \lambda_n\|_N + 1/(2N),\end{aligned}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|x_n - x \circ \mu_n\|_N \le 1/(2N).$$

i.e., (10.3) holds.

Secondly, for all $N \in \boldsymbol{N}$, if (μ_n^N) satisfies (10.2), (10.3), then there is an increasing sequence (n_N) such that for $n \ge n_N$

$$\|\mu_n^N\|_\Lambda \le 1/N, \qquad \|x_n - x \circ \mu_n^N\|_N \le 1/N.$$

Now take $\overline{\mu}_n = \mu_n^N$, $n_N < n < n_{N+1}$, then

$$\lim_{n\to\infty} \|\overline{\mu}_n\|_\Lambda = 0, \tag{10.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x \circ \overline{\mu}_n\|_N = 0, \qquad \forall N \in \boldsymbol{N}.$$

Hence for fixed $N \in \boldsymbol{N}$, if n is large enough, we have

$$\begin{aligned}&\|k_N x_n - (k_N x) \circ \overline{\mu}_n\| \\ \le\ & \|k_N x_n - k_N(x \circ \overline{\mu}_n)\| + \|k_N(x \circ \overline{\mu}_n) - (k_N x) \circ \overline{\mu}_n\| \\ \le\ & \|x_n - x \circ \mu_n\|_{N+1} + \|k_N - k_N \circ \overline{\mu}_n\|\|x\|_{N+2} \\ \le\ & \|x_n - x \circ \overline{\mu}_n\|_{N+1} + \|\overline{\mu}_n - e\|_{N+1}\|x\|_{N+2}.\end{aligned}$$

Using the above inequality and (10.4), it is easy to get $\rho(x_n, x) \to 0$. □

Remarks. 1) For $x, y \in \mathbf{D}^d$, let

$$\widetilde{\rho}(x,y) = \inf_{\lambda \in \Lambda_0} \{\|\lambda - e\| + \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N}(1 \wedge \|(xk_N) \circ \lambda - yk_N\|)\}. \quad (10.5)$$

Then it is also a distance on $\mathbf{D}^d$. According to Theorem 15.10, ρ and $\widetilde{\rho}$ define the same topology in $\mathbf{D}^d$. This topology is called the *Skorokhod topology* in $\mathbf{D}^d$.

2) $\mathbf{D}^d$ is a linear space, but it is not a topological linear space under ρ (or $\widetilde{\rho}$).

15.11 Example. Suppose $x_n(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^n I(t_i^n \le t < t_{i+1}^n)$, where $t_0^n = 0$ and $t_k^n \uparrow \infty$ as $k \to \infty$, $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i I(t_i \le t < t_{i+1})$, where $t_0 = 0$ and $t_k \uparrow \infty$ as $k \to \infty$, i.e., x_n, x are step functions. If

$$\lim_{n\to\infty} t_i^n = t_i, \qquad i \ge 1, \qquad (11.1)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_i^n = a_i, \qquad \text{if } t_i < \infty,$$

then it is easy to verify that $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

In fact, for $N \in \boldsymbol{N}$, if $t_k \le N < t_{k+1}$, take

$$\lambda_n^N(t) = \begin{cases} t_j + \frac{t_{j+1}-t_j}{t_{j+1}^n - t_j^n}(t - t_j^n), & t_j^n \le t < t_{j+1}^n,\ j \le k-1, \\ t_k + t - t_k^n, & t \ge t_k^n, \end{cases}$$

then $\lambda_n^N \in \Lambda$. Using (11.1), if n is large enough, we have

$$\|\lambda_n^N - e\|_N \le \max_{1\le j\le k} |t_j - t_j^n|, \qquad \|x_n - x \circ \lambda_n^N\|_N \le \max_{1\le j\le k} |a_j^n - a_j|.$$

Hence (10.1) and (8.6) hold, and by Theorem 15.10 we have $\rho(x_n, x) \to 0$.

15.12 Theorem. 1) *The Skorokhod topology is weaker than the topology induced by uniform convergence on each compact interval.*

2) *If $\rho(x_n, x) \to 0$ and x is continuous at t_0, then $x_n(t_0) \to x(t_0)$.*

3) *If $x \in \mathbf{C}^d$, then $\rho(x_n, x) \to 0$ if and only if*

$$\|x - x_n\|_a \to 0, \qquad \forall a > 0. \qquad (12.1)$$

Proof. 1) If $\|x - x_n\|_N \to 0$, $\forall N \in \boldsymbol{N}$, then taking $\lambda_n = e$, from Theorem 15.10 we get $\rho(x_n, x) \to 0$.

2) Suppose $(\lambda_n) \subset \Lambda$ and (8.1), (8.6) are satisfied. Then

$$|x(t_0) - x_n(t_0)| \le |x(t_0) - x(\lambda_n(t_0))| + |x(\lambda_n(t_0)) - x_n(t_0)|. \qquad (12.2)$$

Due to the continuity of x at t_0 and $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(t_0) = t_0$, the first term on the right-hand side of (12.2) converges to 0. Owing to (8.6), the second term tends to 0 also.

3) By 1) it suffices to prove that (12.1) is necessary. Suppose $(\lambda_n) \subset \Lambda$ and (8.1), (8.6) are satisfied. Since

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|_a &\le \|x - x \circ \lambda_n\|_a + \|x \circ \lambda_n - x_n\|_a \\ &\le \omega(\|\lambda_n - e\|_a, x, a + \|\lambda_n - e\|_a) + \|x \circ \lambda_n - x_n\|_a, \end{aligned} \qquad (12.3)$$

by the uniform continuity on compact and (8.6), we know that the right-hand side of (12.3) tends to zero, and hence (12.1) is true. □

15.13 Remark. For $x, y \in \mathbf{C}^d$ set

$$\rho_u(x,y) = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N}(1 \wedge \|x - y\|_N).$$

Then the ρ_u-convergence is equivalent to uniform convergence on compact and it is easy to verify directly that $\mathbf{C}^d$ is a Polish space under ρ_u.

15.14 Lemma. *For $x \in \mathbf{D}^d$ set*

$$x_n(t) = x\left(\frac{[nt]}{n} \wedge n\right), \qquad (14.1)$$

where $[a]$ is the integer part of a. Then $\lim_n \rho(x_n, x) = 0$.

Proof. It is obvious that $x_n \in \mathbf{D}^d$. For given $\varepsilon > 0$, take N and $\delta > 1/2$ such that

$$2^{-N} < \varepsilon/4, \quad \text{and} \quad \omega'(\delta, x, N+1) < \varepsilon/4.$$

If $\{t_j, 1 \le j \le r+1\}$ is a partition of $[0, N+1]$ satisfying $t_j - t_{j-1} > \delta$, $1 \le j \le r$, $t_r > N + 1/2$ and

$$\overline{\omega}([t_{j-1}, t_j[, x) < \varepsilon/4. \qquad (14.2)$$

Take $n > n_0 = a \vee (8/\varepsilon\delta) \vee 4/\delta$ and set $s_j^n = -[-nt_j]/n$, then $0 < s_j^n - t_j < 1/n$, $s_r^n > N$. Let λ_n be the following piecewise linear function:

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} t_j - (t - t_j)\frac{s_{j+1}^n - s_j^n}{t_{j+1} - t_j}, & t_j \le t < t_{j+1},\ j \le r-1, \\ t - t_r + s_r^n, & t > t_j. \end{cases}$$

Then

$$\|\lambda_n\|_\Lambda \le \sup_{j\le r} \left|\log \frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{t_j - t_{j-1}}\right| \le |\log(1 - \frac{2}{n\delta})| \le \frac{4}{n\delta} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

While $t \in [t_{j-1}, t_j[$, $\lambda_n(t) \in [s_{j-1}^n, s_j^n[$ and $x_n(\lambda_n(t)) \in \{x(s) : s \in [t_{j-1}, t_j[\}$. Hence $|x_n(\lambda_n(t)) - x(t)| < \varepsilon/4$ by (14.2). Therefore

$$\|x_n \circ \lambda_n - x\|_N \le \varepsilon/4,$$

$$\rho(x_n, x) \le \|\lambda_n\|_\Lambda + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(1 \wedge \|x_n \circ \lambda_n - x\|_k) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} \le \varepsilon,$$

so the claim is true. □

15.15 Lemma. $\mathbf{D}^d$ *is separable under the Skorokhod topology.*

Proof. Set

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbf{D}^d : \begin{array}{c} x \text{ is a step function with} \\ \text{a finite number of jumps} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathcal{A} : \begin{array}{c} \text{the jump times of } x \text{ and the} \\ \text{values taken by } x \text{ are all rationals} \end{array} \right\}.$$

It is easy to know that $\mathcal{C}$ is countable. If $\overline{\mathcal{C}}$ denote the closure of $\mathcal{C}$ in $\mathbf{D}^d$, then by Example 15.11 we obtain $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{C}} \subset \mathbf{D}^d$. Meanwhile, Theorem 15.5 means $\overline{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^d$, hence $\overline{\mathcal{C}} = \overline{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^d$ and $\mathbf{D}^d$ is separable. □

15.16 Lemma. $\mathbf{D}^d$ *is complete under* ρ.

Proof. Suppose that (x_n) is a ρ-fundamental sequence. It must include a subsequence $(y_l = x_{n_l}, l \geq 1)$ such that

$$\rho(y_l, y_{l+1}) < 2^{-2l}, \qquad l \geq 1.$$

Hence there exists a sequence $(\overline{\lambda}_l) \subset \Lambda$ such that

$$\|\overline{\lambda}_l^{-1}\|_\Lambda = \|\overline{\lambda}_l\|_\Lambda \leq 2^{-2l},$$

$$\|y_l \circ \overline{\lambda}_l - y_{l+1}\|_l \leq \|(k_{l+1} y_l) \circ \overline{\lambda}_l - k_{l+1} y_{l+1}\| \leq 2^{l+1} 2^{-2l} = 2^{-l+1}.$$

Set

$$\lambda_l(t) = \begin{cases} \overline{\lambda}_l(t), & t \leq l, \\ t - l + \overline{\lambda}_l(l), & t > l. \end{cases}$$

Then for (λ_l) we still have

$$\|\lambda_l^{-1}\|_\Lambda = \|\lambda_l\|_\Lambda \leq 2^{-2l},$$

$$\|y_l \circ \lambda_l - y_{l+1}\|_l \leq 2^{-l+1}, \tag{16.1}$$

thus (6.1) and (16.1) yield

$$\|\lambda_l^{-1} - e\| = \|\lambda_l - e\| = \|\lambda_l - e\|_l \leq l(e^{\|\lambda_l\|_\Lambda} - 1) \leq 2^{-l},$$

$$\|\lambda_{l+k+1}^{-1} \circ \lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1} - \lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1}\| = \|\lambda_{l+k+1}^{-1} - e\| < 2^{-(k+l+1)}.$$

Hence for each l there is a nondecreasing continuous μ_l such that

$$\lim_{k \to \infty} \|\lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1} - \mu_l\| = 0.$$

We have

$$\left| \log \frac{\lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1}(t) - \lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1}(s)}{t - s} \right| \leq \|\lambda_{l+k}^{-1} \circ \cdots \circ \lambda_l^{-1}\|_\Lambda$$

$$\leq \|\lambda_{l+k}^{-1}\|_\Lambda + \cdots + \|\lambda_l^{-1}\|_\Lambda < 2^{-2(l-1)}.$$

Let $k \to \infty$ in the above inequality, we get $\|\mu_l\|_\Lambda \leq 2^{-2(l-1)}$. So $\mu_l \in \Lambda$.

By the definition of μ_l and (16.1) we have

$$\mu_l = \mu_{l+1} \circ \lambda_l^{-1}, \qquad \mu_l^{-1} = \lambda_l \circ \mu_{l+1}^{-1},$$

$$\|y_l \circ \mu_l^{-1} - y_{l+1} \circ \mu_{l+1}^{-1}\|_{l-1} \leq \|y_l \circ \lambda_l - y_{l+1}\|_l \leq 2^{-l+1}.$$

Hence $(y_l \circ \mu_l^{-1})$ is a fundamental sequence in the topology induced by uniform convergence on compact, and there exists $x \in \mathbf{D}^d$ such that

$$\|y_l \circ \mu_l^{-1} - x\|_l \leq 2^{-l+2}.$$

Now applying Theorem 15.10, we have $\lim_{l \to \infty} \rho(y_l, x) = 0$, and furthermore, $\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$. Therefore $\mathbf{D}^d$ is complete. □

15.17 Theorem. $\mathbf{D}^d$ *equipped with the metric* ρ *is a Polish space.*

Proof. This is a direct consequence of Theorem 15.9, Lemmas 15.15 and 15.16. □

15.18 Theorem. *If we denote by* $\mathcal{D}$ *the Borel* σ*-field of* $\mathbf{D}^d$ *equipped with the Skorokhod topology and*

$$\mathcal{D}_\infty = \sigma\{X_t : X_t(x) = x(t), x \in \mathbf{D}^d, t \in \mathbf{R}_+\},$$

i.e., $\mathcal{D}_\infty$ *is the* σ*-field generated by the canonical process on* $\mathbf{D}^d$*, then*

$$\mathcal{D}_\infty = \mathcal{D}. \tag{18.1}$$

Proof. Let g be a bounded continuous real function on $\mathbf{R}^d$ and for fixed t write $h_k(x) = k \int_t^{t+1/k} g(x(s))ds$. While $\rho(x_n, x) \to 0$, we have $g(x_n(s)) \to g(x(s))$, except for at most a countable number of s, and $g \circ x_n$ is uniformly bounded. Hence $h_k(x_n) \to h_k(x)$, i.e., h_k is a continuous function on $\mathbf{D}^d$. Thus $h_k \in \mathcal{D}$. Since $x \in \mathbf{D}^d$ is right-continuous, $\lim_{k \to \infty} h_k(x) = g(x(t))$. Then for fixed t, $g(x(t))$ is a $\mathcal{D}$-measurable function on $\mathbf{D}^d$. Therefore by the monotone class theorem we have $\mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}$.

For $x, y \in \mathbf{D}^d$ set

$$x_n(t) = x\left(\frac{[nt]}{n} \wedge n\right), \qquad y_n(t) = y\left(\frac{[nt]}{n} \wedge n\right).$$

Then x_n is determined by $\{x(\frac{k}{n}), k \leq n^2\}$. For fixed $z \in \mathbf{D}^d$, define

$$g(x) = \rho(x_n, z) = h\left(x\left(\frac{k}{n}\right), 0 \leq k \leq n^2\right),$$

where h is a function on $\mathbf{R}^{n^2+1}$. Obviously,

$$|g(x) - g(y)| = |\rho(x_n, z) - \rho(y_n, z)| \leq \max_{0 \leq k \leq n^2} \left| x\left(\frac{k}{n}\right) - y\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

Thus for $x \in \mathbf{D}^d$, $g(x)$ is a continuous function of $\{x(\frac{k}{n}), 0 \le k \le n^2\}$. Then for fixed z, as a function of x, $\rho(x_n, z) \in \mathcal{D}_\infty$. Now by Lemma 15.14 we have

$$\rho(x, z) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z) \in \mathcal{D}_\infty.$$

Furthermore,

$$O(z, \varepsilon) = \{x : \rho(z, x) < \varepsilon\} \in \mathcal{D}_\infty.$$

Since $\mathbf{D}^d$ is separable, every open set in $\mathbf{D}^d$ is $\mathcal{D}_\infty$-measurable. Thus $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\infty$. □

15.19 Definition. On $\mathbf{D}^d$ set

$$\mathcal{D}_t^0 = \sigma(x(u) : u \le t), \quad \mathcal{D}^0 = \bigvee_{t>0} \mathcal{D}_t^0, \quad \boldsymbol{D}^0 = (\mathcal{D}_t^0)_{t\ge 0}.$$

$(\mathbf{D}^d, \mathcal{D}^0)$ is called the *canonical measurable space on* $\mathbf{D}^d$. If there is a probability $\boldsymbol{P}$ on $(\mathbf{D}^d, \mathcal{D}^0)$, let

$$\mathcal{D}_t = \bigcap_{s>t} (\mathcal{D}_s^0)^P, \quad \mathcal{D} = \bigvee_t \mathcal{D}_t, \quad \boldsymbol{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\ge 0},$$

then the $\Phi_D = (\mathbf{D}^d, \mathcal{D}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{P})$ is called the *canonical probability space with filtration* or *canonical filtered probability space*. Recall that the stochastic process $(X_t)_{t\ge 0}$ defined by

$$X_t(x) = x(t), \qquad x \in \mathbf{D}^d, \quad t \in \boldsymbol{R}_+,$$

is called the *canonical process*.

15.20 Lemma. 1) *For $x \in \mathbf{D}^d$, set*

$$\phi_1(t, x) = x^*(t) = \sup_{s\le t} |x(s)|,$$

$$\phi_2(t, x) = \sup_{s\le t} |\Delta x(s)|.$$

Then for fixed t, ϕ_1 and ϕ_2 are upper semi-continuous functions of x in $\mathbf{D}^d$, that is

$$\phi_i(t, x) \ge \varlimsup_{\rho(x,y)\to 0} \phi_i(t, y), \qquad i = 1, 2.$$

Furthermore, if $\Delta x(t) = 0$, then ϕ_i is continuous at x, $i = 1, 2$.

2) *$\omega'(\delta, x, N)$ is an upper semi-continuous function of x.*

Proof. 1) Since $x \in \mathbf{D}^d$ is right-continuous in t, so are ϕ_1 and ϕ_2. If x is continuous in t, so are ϕ_1 and ϕ_2.

At first, we suppose $\rho(x_n, x) \to 0$ and x is continuous at t. Then there is a sequence $(\lambda_n) \subset \Lambda$ such that

$$\|\lambda_n\|_\Lambda \to 0, \quad \|\lambda_n - e\|_N \to 0, \quad \|x_n - x \circ \lambda_n\|_N \to 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}.$$

Meanwhile,

$$\begin{aligned}|x_n^*(t) - x^*(t)| &\le |x_n^*(t) - x^*(\lambda_n(t))| + |x^*(\lambda_n(t)) - x^*(t)| \\ &\le \|x_n - x \circ \lambda_n\|_N + |x^*(\lambda_n(t)) - x^*(t)|, \qquad t \le N.\end{aligned}$$

Thus ϕ_1 is continuous at x. In the general case, take $\varepsilon > 0$ such that x is continuous at $t + \varepsilon$, then $\lim_{n\to\infty} x_n^*(t + \varepsilon) = x^*(t + \varepsilon)$. Since x^* is right continuous in t, letting $t + \varepsilon$ tend to t along the continuous points of x, we have

$$x^*(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} x^*(t + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} x_n^*(t + \varepsilon) \ge \varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(t).$$

Thus ϕ_1 is upper semi-continuous. Similarly, ϕ_2 has the same property.

2) For $\varepsilon > 0$, there is a partition $\{t_j\}_{1\le j\le r}$ satisfying

$$t_j - t_{j-1} > \delta, \qquad 1 \le j \le r - 1, \tag{20.1}$$

$$\overline{\omega}([t_{j-1}, t_j[, x) < \omega'(\delta, x, N) + \varepsilon/2. \tag{20.2}$$

Now take $\eta > 0$ satisfying $\delta + 2\eta < t_j - t_{j-1}$, $1 < j < r - 1$, $\eta < \frac{1}{4} \wedge (N - t_{r-1})$. If $\bar{\rho}(x, y) < \eta 2^{-N}$, then there exists $\lambda \in \Lambda_0$ such that (see (10.5))

$$\|\lambda - e\| = \|\lambda^{-1} - e\| < \eta,$$

$$\|x \circ \lambda - y\|_N < \eta. \tag{20.3}$$

Set $s_j = \lambda^{-1}(t_j)$, then $\{s_1, \cdots, s_{r-1}, N\}$ is a partition of $[0, N]$. By (18.1)

$$|s_j - s_{j-1}| > -|s_j - \lambda(s_j)| + |t_j - t_{j-1}| - |\lambda(s_{j-1}) - s_{j-1}| > \delta, \quad 1 \le j \le r-1.$$

Owing to (20.3) and (20.2), we have

$$\begin{aligned}\overline{\omega}([s_{j-1}, s_j[, y) &\le \overline{\omega}([\lambda(s_{j-1}), \lambda(s_j)[, x) + 2\eta \\ &< \omega'(\delta, x, N) + \varepsilon/2 + 2\eta < \omega'(\delta, x, N) + \varepsilon, \quad 1 \le j \le r.\end{aligned}$$

This means $\omega'(\delta, y, N) < \omega'(\delta, x, N) + \varepsilon$, as $\bar{\rho}(x, y) < \eta 2^{-N}$. Therefore $\omega'(\delta, x, N)$ is an upper semi-continuous function of x. □

15.21 Lemma. *Suppose Γ is a relatively compact set in $\boldsymbol{R}^d$ and*

$$H(\Gamma, \delta) = \left\{ x \in \mathbf{D}^d : \begin{array}{c} \{x(t) : t \ge 0\} \subset \Gamma, \text{ and } x \text{ is a step} \\ \text{function for which the lengths of intervals} \\ \text{between adjacent jump times are} > \delta \end{array} \right\},$$

then $H(\Gamma, \delta)$ is relatively compact in $\mathbf{D}^d$.

Proof. It suffices to prove that each sequence $(x_n) \subset H(\Gamma, \delta)$ has a convergent subsequence. Denote by $t_k(x_n)$ the k-th jump time of x_n. Using the diagonal method we may choose a subsequence (y_n) of (x_n) such that for each k, $(t_k(y_n))$ satisfies one of the following conditions:

(a) $\lim_{n\to\infty} t_k(y_n) = s_k < \infty$ and $\lim_{n\to\infty} y_n(t_k(y_n)) = \alpha_k$.

(b) $\lim_{n\to\infty} t_k(y_n) = s_k = \infty$.

If $t_{k-1}(y_n) < \infty$, then $t_k(y_n) - t_{k-1}(y_n) > \delta$. Thus $s_k - s_{k-1} \geq \delta$ while $s_{k-1} < \infty$. Set

$$y(t) = \sum_k \alpha_k I(s_k \leq t < s_{k+1}).$$

It is easy to verify directly that $\rho(y_n, y) \to 0$ and $H(\Gamma, \delta)$ is relatively compact. □

15.22 Theorem. *Under the Skorokhod topology a set $K \subset \mathbf{D}^d$ is relatively compact if and only if the following conditions hold:*

$$\sup_{x \in K} \|x\|_N < \infty, \qquad \forall N \in \boldsymbol{N}, \tag{22.1}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in K} \omega'(\delta, x, N) = 0, \qquad \forall N \in \boldsymbol{N}. \tag{22.2}$$

Proof. Necessity. For fixed $N \in \boldsymbol{N}$, by Lemma 15.20, $\phi_1(x) = \|x\|_N$ is an upper semi-continuous functional on $\mathbf{D}^d$, hence it is bounded on compact $\overline{K}$ and (22.1) holds.

Also for fixed N, owing to Lemma 15.20, $\omega'(\delta, x, N)$ is upper semi-continuous in x and is nondecreasing in δ, $\lim_{\delta \to 0} \omega'(\delta, x, N) = 0$. Hence by Dini's theorem $\omega'(\delta, x, N)$ uniformly converges to zero on compact $\overline{K}$ as $\delta \to 0$, so (22.2) is true.

Sufficiency. For each $N \in \boldsymbol{N}$, take $\Gamma_N = \{x(s) : x \in K, s \leq N\}$, then by (22.1) Γ_N is a relatively compact set in $\boldsymbol{R}^d$. From (22.2), there is $\delta_N \leq 1$ such that

$$\sup_{x \in K} \omega'(\delta_N, x, N+1) < \frac{1}{N}. \tag{22.3}$$

Using the notations of Lemma 15.21, write $K_N = H(\Gamma_N, \delta_N)$, then K_N is a relatively compact set in $\mathbf{D}^d$. From (22.3), for $x \in K$, there exists a partition $\{t_j\}_{1 \leq j \leq r+1}$ of $[0, N+1]$ such that

$$t_j - t_{j-1} > \delta, \quad 1 \leq j \leq r, \qquad t_r \geq N,$$

$$\overline{\omega}([t_{j-1}, t_j[, x) < \frac{1}{N}, \qquad 1 \leq j \leq r+1.$$

Set $\lambda = e \in \Lambda$,

$$y(t) = \sum_{j=1}^{r-1} x(t_{j-1}) I(t_{j-1} \leq t < t_j) + x(t_r) I(t \geq t_r),$$

then $y \in K_N$ and

$$\rho(x, y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge \|x - y\|_{n+1}) \leq \frac{1}{N} + \sum_{j \geq N} 2^{-j} < \frac{2}{N}.$$

Thus $x \in K_N^{2/N} = \{z : \rho(z, K_N) < \frac{2}{N}\}$. Therefore $K \subset K_N^{2/N}$ for all N and

$$K \subset \bigcap_{N \geq 1} \overline{K_N^{2/N}}.$$

Meanwhile $\bigcap_{N \geq 1} \overline{K_N^{2/N}}$ is compact, so K is relatively compact. □

15.23 Definition. For $x \in \mathbf{D}^d$, define

$$\omega''(\delta, x, N) = \sup\left\{|x(t) - x(t_1)| \wedge |x(t_2) - x(t)| : \begin{array}{l} 0 \leq t_1 < t < t_2 \leq N, \\ t_2 < t_1 + \delta. \end{array}\right\} \tag{23.1}$$

15.24 Theorem. *Under the Skorokhod topology a set $K \subset \mathbf{D}^d$ is relatively compact if and only if the following conditions hold:*

$$\sup_{x \in K} \|x\|_N < \infty, \qquad \forall N \in \boldsymbol{N}, \tag{24.1}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in K} \overline{\omega}([0, \delta[, x) = 0, \tag{24.2}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in K} \omega''(\delta, x, N) = 0, \qquad \forall N \in \boldsymbol{N}. \tag{24.3}$$

Proof. It suffices to prove that if (22.1) (i.e., (24.1)) holds, (22.2) is equivalent to (24.2) and (24.3).

Necessity. If $N \geq \delta$, $\overline{\omega}([0, \delta[, x) \leq \omega'(\delta, x, N)$, so (24.2) is necessary.

For given $\varepsilon, \delta > 0$, there is a partition $\{s_j\}_{1 \leq j \leq r}$ of $[0, N]$ such that $s_{j+1} - s_j > \delta$, $1 \leq j \leq r-2$, $s_{r-1} \geq N-1$ and $\overline{\omega}([s_j, s_{j+1}[, x) < \omega'(\delta, x, N) + \varepsilon$. Now for $0 \leq t_j < t < t_{j+1} \leq N-1$, $t_{j+1} - t_j < \delta$, at least one of $[t_j, t[$ and $[t, t_{j+1}[$ is included in some $[s_i, s_{i+1}[$. Thus $\omega''(\delta, x, N-1) < \omega'(\delta, x, N) + \varepsilon$. Therefore (24.3) may be deduced from (22.2).

Sufficiency. For given $\varepsilon > 0$, take $\delta > 0$ such that

$$\omega''(\delta, x, N) < \varepsilon, \quad \overline{\omega}([0, \delta[, x) < \varepsilon, \qquad \forall x \in K. \tag{24.4}$$

Now we will prove

$$\omega'(\delta/2, x, N) < 6\varepsilon, \qquad \forall x \in K. \tag{24.5}$$

At first, for $t_1 < s < t_2 < t_1 + \delta$ it must be that

$$\overline{\omega}([t_1, s], x) \wedge \overline{\omega}([s, t_2], x) \leq 2\varepsilon. \tag{24.6}$$

In fact, for $t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq s$ if $|x(\tau_1) - x(\tau_2)| > \varepsilon$, then by (24.4) for $\sigma_1, \sigma_2 \in [s, t_2]$ we have $|x(\sigma_i) - x(\tau_2)| < \varepsilon$, $i = 1, 2$ and $|x(\sigma_1) - x(\sigma_2)| < 2\varepsilon$. Hence (24.6) holds.

Secondly, from (24.6) we may get $|\Delta x(\tau_1)| \wedge |\Delta x(\tau_2)| \leq 2\varepsilon$, as $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$. Now take a sequence (s_j) such that

$$\delta/2 < s_{j+1} - s_j \leq \delta \text{ and } |\Delta x(s)| \leq 2\varepsilon, \qquad \text{as } s \notin \{s_j\}.$$

Finally, for each fixed j set

$$\sigma_1 = \sup\{s : \overline{\omega}([s_{j-1}, s[, x) \leq 2\varepsilon\}, \quad \sigma_2 = \inf\{t : \overline{\omega}([t, s_j[, x) < 2\varepsilon\}.$$

Owing to (24.6), we have $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Now if $\sigma_1 < s_j$,

$$\begin{aligned}\overline{\omega}([s_{j-1}, s_j[, x) &\leq \overline{\omega}([s_{j-1}, \sigma_1[, x) + |\Delta x(\sigma_1)| + \overline{\omega}([\sigma_1, s_j[, x) \\ &\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon = 6\varepsilon. \end{aligned} \tag{24.7}$$

If $\sigma_1 \geq s_j$, then by the definition of σ_1 (24.7) is also true. Thus (24.5) holds, and hence (22.2) may be derived from (24.2) and (24.3). □

15.25 Corollary. *Suppose $L \subset \mathbf{D}^d$ and*

$$\sup_{x \in L} \|x\|_N < \infty, \qquad \forall N \in \boldsymbol{N}.$$

Then L is not relatively compact if and only if there exists a sequence $(x_n) \subset L$ such that at least one of the following conditions holds:

a) There are (t_n^1), (t_n^2) such that

$$\lim_{n\to\infty} t_n^i = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x_n(t_n^i) = a_i, \quad i = 1, 2,$$

and $a_1 \neq a_2$;

b) There are $t_n^1 < t_n^2 < t_n^3$ such that

$$\lim_{n\to\infty} t_n^i = t < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} x_n(t_n^i) = a_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

and $a_1 \neq a_2$, $a_2 \neq a_3$.

§2. Continuity for Skorokhod Topology

Throughout this paragraph, the convergence of (x_n) to x in $\mathbf{D}^d$ always means the covergence under the Skorokhod topology (unless otherwise stated), and it is denoted simply by $x_n \to x$.

15.26 Lemma. *Suppose $x_n \to x$ in $\mathbf{D}^d$. Then for each $t > 0$ there exists a sequence (t_n) such that $t_n \to t$ and*

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{t_n \leq s \leq t_n+\delta} |x_n(s) - x(t)| = 0, \tag{26.1}$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{t_n-\delta \leq s < t_n} |x_n(s) - x(t-)| = 0. \tag{26.2}$$

In particular,

$$x_n(t_n) \to x(t), \qquad x_n(t_n-) \to x(t-), \tag{26.3}$$

$$\Delta x_n(t_n) \to \Delta x(t), \tag{26.4}$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} |\overline{\omega}([t_n - \delta, t_n + \delta], x_n) - |\Delta x(t)|| = 0,$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \overline{\omega}([t_n - \delta, t_n[, x_n) \vee \overline{\omega}([t_n, t_n + \delta], x_n) = 0. \tag{26.5}$$

Besides, set $y_n(s) = x_n(s) - \Delta x_n(t_n) I(s \geq t_n)$, $y(s) = x(s) - \Delta x(t) I(s \geq t)$, then $y_n \to y$.

Proof. Suppose that $(\lambda_n) \subset \Lambda$ satisfies (8.1) and (8.2). Take $t_n = \lambda_n(t)$, then $\lambda_n^{-1}(s) \in [t, t + \delta_n']$, while $s \in [t_n, t_n + \delta]$, where $\delta > 0$ and $\delta_n' = \lambda_n^{-1}(t_n + \delta) - \lambda_n^{-1}(t_n)$. According to (8.1), if n is large enough, $t_n + \delta \leq t + 2\delta$, $\delta_n' \leq 2\delta$ and for $s \in [t_n, t_n + \delta]$

$$\begin{aligned}|x_n(s) - x(t)| &\leq |x_n(s) - x(\lambda_n^{-1}(s))| + |x(\lambda_n^{-1}(s)) - x(t)| \\ &\leq |x_n(s) - x(\lambda_n^{-1}(s))| + \overline{\omega}([t, t + \delta_n'], x) \\ &\leq \|x_n - x \circ \lambda_n^{-1}\|_{t+2\delta} + \overline{\omega}([t, t + 2\delta], x),\end{aligned}$$

now by (8.2) and the right continuity of x we get (26.1). Similarly, (26.2) holds also. (26.3)-(26.5) can be deduced directly from (26.1) and (26.2). Finally, we have

$$\begin{aligned}|y_n(\lambda_n(s)) - y(s)| &= |x_n(\lambda_n(s)) - x(s) + (\Delta x_n(t_n) - \Delta x(t)) I(s \geq t)| \\ &\leq |x_n(\lambda_n(s)) - x(s)| + |\Delta x_n(t_n) - \Delta x(t)|.\end{aligned}$$

Hence from (26.4) we know that (λ_n) satisfies (8.1) and (8.2) for (y_n) as well, and $y_n \to y$. □

Remark. From (26.5) it is easy to know that if $\Delta x(t) \neq 0$, then the (t_n) saitsfying (26.4) is essentially unique, i.e., if $t_n' \to t$ and $\lim_{n\to\infty} \Delta x_n(t_n') \neq 0$, it must be $t_n' = t_n$ while n is large enough. But if $\Delta x(t) = 0$, then (26.3) and (26.4) hold for every (t_n) satisfying $t_n \to t$.

15.27 Theorem. *Suppose that $x_n \to x$, $y_n \to y$ and for each $t > 0$ there exists a sequence $t_n \to t$ such that $\Delta x_n(t_n) \to \Delta x(t)$ and $\Delta y_n(t_n) \to \Delta y(t)$. Then*

$$x_n + y_n \to x + y, \tag{27.1}$$

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \qquad (\text{in} \quad \mathbf{D}^{2d}). \tag{27.2}$$

Proof. It suffices to prove that $(x_n + y_n)$ is relatively compact, because the convergence of $(x_n + y_n)$ at the common continuous points of x and y guarantees the uniqueness of limit points of $(x_n + y_n)$.

Since $x_n \to x$, $y_n \to y$ we have $\sup_n \|x_n + y_n\|_N < \infty$ for all $N \in \boldsymbol{N}$. If $(x_n + y_n)$ is not relatively compact, then one of a) and b) in Corollary 15.25 holds. If a) holds, there are $t_n^i \to 0$, $i = 1, 2$, such that

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n)(t_n^1) \neq \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n)(t_n^2).$$

But $\lim_{n\to\infty} x_n(t_n^i) = x(0)$, $\lim_{n\to\infty} y(t_n^i) = y(0)$, therefore a) is impossible.

If b) holds, there are $t_n^1 < t_n^2 < t_n^3$, $t_n^i \to t$, and $(x_n + y_n)(t_n^i) \to a_i$, but $a_1 \neq a_2 \neq a_3$. Let (t_n) be the sequence in the assumption. Now by

Lemma 15.26 and its remark, (x_n), (y_n) satisfy (26.5), and for $(x_n + y_n)$ we get

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \varpi([t_n - \delta, t_n[, x_n + y_n) \vee \varpi([t_n, t_n + \delta], x_n + y_n) = 0. \quad (27.3)$$

Now there are an infinite number of n, then such that either $t_n^2 < t$ or $t_n^2 \geq t$. For the former case we have

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \varpi([t_n - d, t_n[, x_n + y_n) \geq |a_1 - a_2| \neq 0.$$

For the latter case we have

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \varpi([t_n, t_n + \delta], x_n + y_n) \geq |a_2 - a_3| \neq 0.$$

These contradict (27.3). Hence b) is impossible also. Therefore $(x_n + y_n)$ is relatively compact and (27.1) holds.

Write $\bar{x}_n = (x_n, 0) \in \mathbf{D}^{2d}$, $\bar{y}_n = (0, y_n) \in \mathbf{D}^{2d}$, then $\bar{x}_n \to (x, 0) = \bar{x}$, $\bar{y}_n \to (0, y) = \bar{y}$. Now by (27.1) we get $(x_n, y_n) = \bar{x}_n + \bar{y}_n \to \bar{x} + \bar{y} = (x, y)$. □

15.28 Corollary. *Suppose $x_n \to x \in \mathbf{C}^d$, $y_n \to y$, then $x_n + y_n \to x + y$, $(x_n, y_n) \to (x, y)$.*

Proof. Since $x \in \mathbf{C}^d$, hence $x_n(t_n) \to x(t)$ for every (t_n) converging to t. Thus from Lemma 15.26 we know that (x_n), (y_n) satisfy the assumptions of Theorem 15.27 and the claims are true. □

15.29 Definition. For $x \in \mathbf{D}^d$ define

$$J(x) = \{t > 0 : \Delta x(t) \neq 0\}, \quad (29.1)$$

$$U(x) = \{u > 0 : |\Delta x(t)| = u \text{ for some } t\}. \quad (29.2)$$

Then $J(x)$, the collection of all discontinuous points of x, is at most countable.

For $u > 0$, denote

$$t^0(x, u) = 0,$$

$$t^p(x, u) = \inf\{t > t^p(x, u) : |\Delta x(t)| > u\},$$

$$x^u(t) = x(t) - \sum_{p \geq 1} \Delta x(t^p(x, u)) I(t \geq t^p(x, u)).$$

$t^p(x, u)$ is the p-th jump time of x with the norm of jump size greater than u. Because $x \in \mathbf{D}^d$, $\lim_{p\to\infty} t^p(x, u) = \infty$.

15.30 Theorem. *For $u > 0$ and $p \geq 1$, the following mappings on $\mathbf{D}^d$:*

$$f_1(x) = t^p(x, u), \qquad f_2(x) = x(t^p(x, u)),$$

$$f_3(x) = x(t^p(x, u)-), \qquad f_4(x) = \Delta x(t^p(x, u)),$$

if $t^p(x, u) < \infty$, and

$$f_5(x) = x^u,$$

are continuous at x while $u \notin U(x)$.

Proof. Let $x_n \to x$, $u \notin U(x)$. Write $t_n^p = t^p(x_n, u)$, $t^p = t^p(x, u)$. We will prove the continuity of f_i, $1 \leq i \leq 4$, by induction on p. It is apparent for $p = 0$.

Assume that the continuity of f_i, $1 \leq i \leq 4$, has been established for p. Then $\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{p+1} \geq \lim_{n\to\infty} t_n^p = t^p$. If $t^p = \infty$, $\lim_{n\to\infty} t_n^{p+1} = \infty = t^{p+1}$ immediately. Below we assume $t^p < \infty$. If $\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{p+1} = t^p$, then there is a subsequence (n') satisfying $t_{n'}^{p+1} \to t^p$, meanwhile $\Delta x_{n'}(t_{n'}^{p+1}) > u$. By the remark of Lemma 15.26, $t_{n'}^{p+1} = t_{n'}^p$ while n' is large enough. This contradicts $t_n^{p+1} > t_n^p$, therefore $\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{p+1} > t^p$. On the other hand, for any closed $I \subset]t^p, t^{p+1}[$, $\sup_{t \in I} |\Delta x(t)| \leq u$. In view of Lemma 15.20.1),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{t \in I} |\Delta x_n(t)| \leq u.$$

Hence $\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{p+1} \geq t^{p+1}$. Again by Lemma 15.26 and $u \notin U(x)$ we have $t_n^{p+1} \to t^{p+1}$ and $x_n(t_n^{p+1}) \to x(t^{p+1})$, $x_n(t_n^{p+1}-) \to x(t^{p+1}-)$, $\Delta x_n(t_n^{p+1}) \to \Delta x(t^{p+1})$ if $t^{p+1} < \infty$. This means for all $p \geq 1$, $f_i(x)$, $1 \leq i \leq 4$, are continuous at x.

Using the above results and Lemma 15.26.3), it is easy to prove by induction that for $q \geq 1$

$$x_n^{uq}(\cdot) = x_n(\cdot) - \sum_{p=1}^{q} \Delta x_n(t_n^p) I(\cdot \geq t_n^p)$$

$$\to x(\cdot) - \sum_{p=1}^{q} \Delta x(t^p) I(\cdot \geq t^p) = x^{uq}.$$

On the other hand, $x_n^u = x_n^{uq}$ on $[0, t_n^q[$ and $x^u = x^{uq}$ on $[0, t^q[$. Meanwhile for each $N \in \mathbf{N}$, while n, q are large enough we have $t_n^q > N$, $t^q > N$. Thus $x_n^u \to x^u$, due to Theorem 15.10. □

15.31 Corollary. *Suppose that g is a continuous mapping from $\mathbf{R}^d$ to $\mathbf{R}^h$ and for some $u > 0$,*

$$g(x) = 0, \qquad |x| \leq u.$$

Write

$$\bar{x}(t) = \sum_{s \leq t} g(\Delta x(s)).$$

then $x \mapsto (x, \bar{x})$ is a continuous mapping from $\mathbf{R}^d$ to $\mathbf{R}^{d+h}$.

Proof. Take a positive $u \notin U(x)$ such that $g(x) = 0$ while $|x| \le u$. Suppose $x_n \to x$. Using the notations of Theorem 15.30, write

$$\bar{x}_n^q = \sum_{p=1}^{q} g(\Delta x_n(t_n^p)) I(t \ge t_n^p), \qquad \bar{x}^q = \sum_{p=1}^{q} g(\Delta x(t^p)) I(t \ge t^p).$$

Then, similarly to the proof of Theorem 15.30, we have

$$\bar{x}_n^q \to \bar{x}^q, \qquad \bar{x}_n \to \bar{x}, \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Moreover, since the jump times of $\bar{x}_n$, $\bar{x}$ are that of x_n, x respectively, from Theorem 15.27 we get $(x_n, \bar{x}_n) \to (x, \bar{x})$ and hence the claim holds. □

15.32. Recall that if x is a step function, then it has the following canonical representation:

$$x(t) = \sum_{i \ge 0} x(t_i) I_{[t_i, t_{i+1}[}(t), \quad t \ge 0,$$

where i) $0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le \cdots$, $t_n \uparrow \infty$,

ii) $t_i < \infty \Rightarrow t_i < t_{i+1}$,

iii) $t_i < \infty \iff x(t_i) \ne x(t_{i-1})$, $\quad i \ge 1$.

If $n = \inf\{k : t_k = +\infty\} < \infty$, then for $k \ge n$, $x(t_k) = x(t_{n-1})$. t_j, $j \ge 1$, are the *jump times of* x.

15.33 Theorem. *Suppose that x, x^n, $n \ge 1$, are step functions, (t_j), (t_j^n) are the jump times of x, x^n respectively, $t_0 = t_0^n = 0$. Then the following statements are equivalent:*

1) *For all $j \ge 1$*

$$f(t_j^n, x^n(t_j^n)) \to f(t_j, x(t_j)), \qquad \text{as } n \to \infty \tag{33.1}$$

where $f(t,x)$ is a function on $\overline{R}_+ \times R$ to $\overline{R}_+ \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ defined by

$$f(t,x) = \left(t, \frac{\arctan x}{2^t}\right). \tag{33.2}$$

2) *$x^n \to x$ as $n \to \infty$, and for all $N > 0$*

$$\inf\{|\Delta x^n(t_j^n)| : 0 < t_j^n \le N, n \ge 1\} > 0. \tag{33.3}$$

Proof. It is apparent that for f defined by (33.2), (33.1) is equivalent to the following fact:

$$t_i^n \to t_i, \qquad i \ge 1, \tag{33.4}$$

$$x^n(t_i^n) \to x(t_i), \qquad i \in \{j \ge 0 : t_j < \infty\}. \tag{33.5}$$

Meanwhile (33.3) is equivalent to the following fact: For all $N > 0$, there exists $\varepsilon_N > 0$ such that if $0 < t_j^n \le N$ then

$$|\Delta x^n(t_j^n)| \ge \varepsilon_N. \tag{33.6}$$

1) ⇒ 2). Define a piecewise linear function $\lambda_n(t)$ as follows:

$$\lambda_n(t) = t_j^n + (t - t_j^n)\frac{t_{j+1}^n - t_j^n}{t_{j+1} - t_j}, \qquad t_j^n \le t < t_{j+1}^n.$$

Then by (33.4) and (33.5) it is easy to verify that for each $N > 0$,

$$\|\lambda_n - e\|_N \to 0, \qquad \|x^n \circ \lambda_n - x\|_N \to 0.$$

Hence according to Theorem 15.10, $\rho(x^n, x) \to 0$. On the other hand, x has at most a finite number of discontinuous points in $[0, N]$ and

$$\min_{0 < t_j \le N} |\Delta x(t_j)| > 0. \tag{33.7}$$

(33.3) is deduced from (33.4),(33.5) and (33.7).

2) ⇒ 1) For $N > 0$, let ε_N satisfy (33.6). Take $\delta < \varepsilon_N \wedge \inf\{|\Delta x(t_j)| : 0 < t_j \le N\}$. Using the notations of (29.3), write $t_j = t^j(x, \delta)$, $t_j^n = t^j(x^n, \delta)$. Then we have $t_j^n < N$ when $t_j < N$ and n is large enough. Hence Theorem 15.30 yields

$$t_j^n = t^j(x^n, \delta) \to t^j(x, \delta) = t_j,$$

$$x^n(t_j^n) = x^n(t^j(x^n, \delta)) \to x(t^j(x, \delta)) = x(t_j).$$

Since N may be an arbitrary positive number, (33.4) and (33.5) hold, and thus 1) is true. □

Remark. If (33.3) does not hold, then (33.1) cannot be derived from $x^n \to x$. For example, $x(t) \equiv 0$, $x^n(t) = \frac{1}{n} I_{[1/n, \infty[}(t)$, $\rho(x^n, x) \to 0$. But $t_1^n = \frac{1}{n}$, $t_1 = +\infty$ and (33.1) is not true.

§3. Weak Convergence and Tightness

15.34 In this paragraph we suppose that S is a Polish Space, i.e., there is a distance ρ on S such that under ρ, S is a completely separable metric space. Denote by $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S)$ the Borel σ-field of S. Set

$C_b(S) =$ the collection of all bounded continuous functions on S.

$C_u(S) =$ the collection of all bounded uniformly continuous functions on S.

$\mathcal{P}(S) =$ the collection of all probability measures on $(S, \mathcal{B})$.

For $f \in C_b(S)$ denote

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Then $\|\cdot\|$ is a norm, under which $C_b(S)$ is a Banach space and $C_u(S)$ is separable. For $f \in C_b(S)$ and $\mu \in \mathcal{P}(S)$ denote

$$\mu(f) = \int_S f(x)\mu(dx).$$

Recall that for μ, $\nu \in \mathcal{P}(S)$, if $\mu(F) = \nu(F)$ for all closed F, then $\mu = \nu$; if $\mu(f) = \nu(f)$ for all $f \in C_u(S)$, then $\mu = \nu$ as well.

15.35 Definition. Suppose that $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(S)$, if

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f), \quad \forall f \in C_b(S), \tag{35.1}$$

then we say that (μ_n) *weakly converges to* μ and denote it by $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

15.36 Definition. Let $\mu \in \mathcal{P}(S)$, f be a mapping from S to another Polish space S' and D_f be the set of all discontinuous points of f. If $\mu(D_f) = 0$, then f is called *μ-a.s.* (or *a.s.*) *continuous*. For $A \subset S$, denote by ∂A the boundary of A. If I_A is μ-a.s. continuous, i.e., $\mu(\partial A) = 0$, A is called a *μ-continuous set*.

Remark. If $S' = R$, then $D_f \in \mathcal{B}$. In the general case, $\mu(D_f) = 0$ means $D_f \subset A \in \mathcal{B}$ and $\mu(A) = 0$. Thus a μ-a.s. continuous mapping f may not be measurable w.r.t. $\mathcal{B}$, but it is measurable w.r.t. the μ-completion $\mathcal{B}^\mu$ of $\mathcal{B}$.

The following theorem gives some equivalent statements of weak convergence (cf. Billingsley [1]).

15.37 Theorem. *Suppose that μ_n, $\mu \in \mathcal{P}(S)$, then $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ is equivalent to each of the following statements:*

1) *For every bounded μ-a.s. continuous f,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f), \tag{37.1}$$

2) $\forall f \in C_u(S)$, (37.1) *holds*,
3) $\overline{\lim_n}\, \mu_n(F) \leq \mu(F)$, $\forall$ *closed set* F,
4) $\underline{\lim_n}\, \mu_n(G) \geq \mu(G)$, $\forall$ *open set* G,
5) $\lim_n \mu_n(A) = \mu(A)$, $\forall \mu$*-continuous set* A.

In particular, if $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ and h is a μ-a.s. continuous mapping from S to another Polish space S', then $\mu_n \circ h^{-1} \xrightarrow{w} \mu \circ h^{-1}$.

From the above theorem it is easy to verify that if $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ is a dense subset of unit sphere of $C_u(S)$. Let

$$d(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\mu(\varphi_n) - \nu(\varphi_n)|,$$

then d is a distance on $\mathcal{P}(S)$ and the topology induced by d coincides with the topology of weak convergence.

15.38 Definition. Let $A \subset \rho(S)$. If for every $\varepsilon > 0$ there is a compact $K_\varepsilon \subset S$ such that

$$\inf_{\mu\in A} \mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon, \tag{38.1}$$

then A is said to be *tight*.

15.39 Theorem. *Let $A \subset \mathcal{P}(S)$. Then under the topology of weak convergence A is relatively compact if and only if A is tight.*

This is a fundamental result of measure theory on metric spaces, due to Y. V. Prokhorov, its proof may be found in many textbooks(cf. Billingsley [1]).

15.40 Theorem. *A subset A of $\mathcal{P}(\mathbf{D}^d)$ is tight if and only if the following conditions hold:*

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{\mu\in A} \mu(\{x : \|x\|_N \geq a\}) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}, \tag{40.1}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\mu\in A} \mu(\{x : \omega'(\delta, x, N) \geq \eta\}) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N},\ \eta > 0. \tag{40.2}$$

Proof. Necessity. Since A is tight, for any given $\varepsilon > 0$ there exists a compact K_ε such that $\inf_{\mu\in A} \mu(K_\varepsilon) > 1-\varepsilon$. Hence Theorem 15.22 implies $\sup_{x\in K_\varepsilon} \|x\|_N < \infty$ and

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{x\in K_\varepsilon} \omega'(\delta, x, N) = 0. \tag{40.3}$$

Thus for $a > \sup_{x\in K_\varepsilon} \|x\|_N$ we have $\{x : \|x\|_N \geq a\} \subset K_\varepsilon^c$,

$$\sup_{\mu\in A} \mu(\{x : \|x\|_N \geq a\}) \leq \sup_{\mu\in A} \mu(K_\varepsilon^c) < \varepsilon,$$

i.e., (40.1) holds.

By (40.3) for any $\eta > 0$ there is δ_η such that $\sup_{x\in K_\varepsilon} \omega'(\delta_\eta, x, N) < \eta$, hence $\{x : \omega'(\delta_\eta, x, N) \geq \eta\} \subset K_\varepsilon^c$ and

$$\sup_{\mu\in A} \mu(\{x : \omega'(\delta_\eta, x, N) \geq \eta\}) \leq \sup_{\mu\in A} \mu(K_\varepsilon^c) < \varepsilon,$$

i.e., (40.2) holds.

Sufficiency. By (40.1), (40.2) for any given $\varepsilon > 0$, $n \in \boldsymbol{N}$ and $k \geq 1$ there are a_N and δ_{Nk} such that

$$\sup_{\mu\in A} \mu(\{x : \|x\|_N > a_N\}) \leq \varepsilon 2^{-N-1},$$

$$\sup_{\mu\in A} \mu(\{x : \omega'(\delta_{Nk}, x, N) \geq 1/k\}) < \varepsilon 2^{-N-k-1}.$$

Put

$$C_{Nk} = \{x : \|x\|_N \le a_N\} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x : \omega'(\delta_{Nk}, x, N) \le 1/k\right\},$$

$$C_\varepsilon = \bigcap_{N=1}^{\infty} C_{N\varepsilon}.$$

Then Theorem 15.22 implies that C_ε is relatively compact. But we have

$$\inf_{\mu\in A} \mu(C_{N\varepsilon}) \ge 1 - \varepsilon 2^{-N}, \quad N \ge 1, \quad \inf_{\mu\in A} \mu(C_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon.$$

Therefore A is tight. □

15.41 Definition. Suppose that for each n, X^n is an S-valued random element on a probability space $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$, $\mathcal{L}(X^n) = P^n \circ (X^n)^{-1}$ is the distribution of X^n, X is an S-valued random element on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and $\mathcal{L}(X) = P \circ X^{-1}$ is the distribution of X. If $\mathcal{L}(X^n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$, we say that (X^n) *converges in distribution* (or *in law*) *to* X and denote it by $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. If $(\mathcal{L}(X^n))$ is tight, we say that the set of the distributions of (X^n) is *tight*, or (X^n) is *tight*.

It is easy to know from the definition of weak convergence that $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ is equivalent to that for every $f \in C_b(S)$

$$E^n[f(X^n)] \to E[f(X)],$$

where E^n, E denote the expectations corresponding to P^n, P respectively. By Theorem 15.39 $\{\mathcal{L}(X^n)\}$ is relatively compact if and only if $\{\mathcal{L}(X^n)\}$ is tight.

In the definition, for different n the probability space $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ may be different. But it is not hard to see that we may find a probability space $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{P})$ on which a sequence (Y^n) of S-valued random elements is defined such that $\mathcal{L}(X^n) = \mathcal{L}(Y^n)$, $n \ge 1$. Therefore in the sequel for simplicity we always assume that the sequence of random elements is defined on a common probability space.

15.42 Theorem (Skorokhod's representation theorem). *Suppose that* $(\mu_0, \mu_n, n \ge 1) \subset \mathcal{P}(S)$ *and* $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$, *then there exist a probability space* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *and a sequence* $(X_n, n \ge 0)$ *of* S*-valued random elements defined on it such that* $\mu_n = \mathcal{L}(X_n)$, $n \ge 0$, *and*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(X_n, X_0) = 0, \quad \text{a.s.}.$$

Proof. Take $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ and denote by P the Lebesgue measure on $[0, 1]$. Firstly, we divide S into:

$$S = \sum_i S_i, \quad S_{i_1\cdots i_k} = \sum_{j=1}^{\infty} S_{i_1\cdots i_k j}, \quad k \ge 1.$$

(here $\sum$ denotes the union of disjoint sets) and

$$dia(S_{i_1,\cdots i_k}) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in S_{i_1\cdots i_k}\} \le 2^{-k}, \quad k \ge 1.$$

$$\mu_n(\partial S_{i_1,\cdots i_k}) = 0, \ n \ge 0.$$

Due to the separability of S, such a division of S exists (for example we may divide S by means of the μ_n-continuous balls with centers in a countable dense subset of S and radii less than 2^{-k-1}).

Secondly, we divide $[0, 1]$ into the sum of intervals as follows:

$$[0, 1] = \sum_i \Delta_i^{(n)}, \quad \Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)} = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{i_1\cdots i_k j}^{(n)}, \quad k \ge 1, \quad n \ge 0,$$

$$|\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}| = \mu_n(S_{i_1\cdots i_k}),$$

where $|\Delta|$ denotes the length of interval Δ and $\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}$ are arranged in the lexicographical order.

Thirdly, we define random elements X_n as follows. Set

$$X_n^{(k)}(\omega) = \begin{cases} x_{i_1\cdots i_k}, & \text{if } \omega \in \Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}, \ S_{i_1\cdots i_k}^0 \ne \emptyset, \\ x, & \text{if } \omega \in \Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}, \ S_{i_1\cdots i_k}^0 = \emptyset, \end{cases}$$

where x is a fixed point of S, $x_{i_1\cdots i_k}$ is a point of $S_{i_1\cdots i_k}^0$, the interior of $S_{i_1\cdots i_k}$. Then each $X_n^{(k)}$ is an S-valued random element. Since $x_{i_1\cdots i_{k+p}} \in S_{i_1\cdots i_{k+p}}^0 \subset S_{i_1\cdots i_k}^0$, we have $\rho(X_n^{(k)}(\omega), X_n^{(k+p)}(\omega)) \le 2^{-k}$, $p \ge 1$. Due to the completeness of S, there is an S-valued random element X_n such that

$$\lim_{k\to\infty} X_n^{(k)}(\omega) = X_n(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad n \ge 0.$$

We are going to prove that $X_n \to X_0$ P-a.s.. For any $\varepsilon > 0$, take k such that $2^{-k} < \varepsilon/2$. If $\omega \in (\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(0)})^o$, since

$$|\Delta_{i_1\cdots i_j}^{(n)}| = \mu_n(S_{i_1\cdots i_j}) \to \mu_0(S_{i_1\cdots i_j}) = |\Delta_{i_1\cdots i_j}^{(0)}|, \quad j \ge 1,$$

by virtue of the arrangement of $\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}$, there is an n_k such that for $n > n_k$ we have $\omega \in \Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}$ and

$$X_n^{(k)}(\omega) = x_{i_1\cdots i_k}, \quad X_0^{(k)}(\omega) = x_{i_1\cdots i_k}; \quad n \ge 0,$$

$$\rho(X_n, X_0) \le \rho(X_n, X_n^{(k)}) + \rho(X_n^{(k)}, X_0^{(k)}) + \rho(X_0^{(k)}, X_0)$$
$$\le 2 \cdot 2^{-k} < \varepsilon.$$

Therefore $X_n \to X$ on $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i_1\cdots i_k} (\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(0)})^o \right)$.

Finally, we prove that $\mathcal{L}(X_n) = \mu_n$. Denote $C = \{S_{i_1\cdots i_k},\ i_j \geq 1,\ 1 \leq j \leq k,\ k \geq 1\}$. Then C is a π-class and

$$P(X_n^{(k+p)} \in S_{i_1\cdots i_k}) = |\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}| = \mu_n(S_{i_1\cdots i_k}), \quad p \geq 1,$$

$$P(X_n \in S_{i_1\cdots i_k}) = \mu_n(S_{i_1\cdots i_k}).$$

Thus $\mathcal{L}(X_n)$ and μ_n coincide on C and by the montone class theorem we obtain $\mathcal{L}(X_n) = \mu_n$. □

15.43 Definition In the remainders of this paragraph we consider the cadlag processes only, their distributions are probability measures on Polish space $\mathbf{D}^d$. Below X and X^n all stand for $\boldsymbol{R}^d$-valued cadlag processes, unless explicity stated.

Similar to (29.1) and (29.2), define

$$J(X) = \{t > 0 : P(\Delta X_t \neq 0) > 0\}, \tag{43.1}$$

$$U(X) = \{u > 0 : P(|\Delta X_t| = u \ \text{ for some } t > 0\} > 0\}, \tag{43.2}$$

$$T_0(X, u) = 0,$$

$$T_{p+1}(X, u) = \inf\{t > T_p(X, u) : |\Delta X_t| \geq u\}, \ p \geq 0. \tag{43.3}$$

15.44 Lemma. *$J(X)$ and $U(X)$ are at most countable.*

Proof. Obviously, the conclusion comes from the following identities:

$$J(X) = \bigcup_{n,p\geq 1} \Big\{t : P\Big(T_p\Big(X, \frac{1}{n}\Big) = t\Big) > 0\Big\},$$

$$U(X) = \bigcup_{n,p\geq 1} \Big\{u : P\Big(|\Delta X_{T_p(X,\frac{1}{n})}| = u, T_p\Big(X, \frac{1}{n}\Big) < \infty\Big) > 0\Big\}. \qquad \square$$

15.45. Theorem. *Suppose that $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Then*

1) The finite-dimensional distributions of X^n converge to that of X along $D = \boldsymbol{R}_+ \setminus J(X)$, i.e.,

$$(X_{t_1}^n, \cdots, X_{t_p}^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, \cdots X_{t_p}) \quad t_i \in D, \ p \geq 1.$$

(We also denote it by $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}_f(D)} X$.)

2) Suppose that g is a continuous function on $\overline{\boldsymbol{R}}_+ \times \boldsymbol{R}^d \times \boldsymbol{R}^d$, satisfying $g(\infty, x, y) = 0$ and $u \in U(X)$. Then

$$(g(T_i(X^n, u), X^n_{T_i(X^n,u)}, \Delta X^n_{T_i(X^n,u)}), 1 < i < k)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} (g(T^i(X, u), X_{T_i(X,u)}, \Delta X_{T_i(X,u)}), 1 \leq i \leq k).$$

3) If g is a continuous function on $\boldsymbol{R}^d$, vanishing in a neighbourhood of 0, then

$$(X^n, \Sigma g(\Delta X^n)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, \Sigma g(\Delta X)).$$

Proof. By virtue of Theorem 15.37, if h is $\mathcal{L}(X)$-a.s. continuous then $h(X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(X)$.

1) Take $h(x) = (x(t_1), \cdots x(t_p))$, $t_i \in D$, then from Theorem 15.12.2) h is $\mathcal{L}(X)$-a.s. continuous.

2) Use the notations in (29.3) and take

$$h(x) = (g(t^i(x, u), x(t^i(x, u)), \Delta x(t^i(x, u)), 1 \leq i \leq k).$$

Then from the assumption concerning g and Theorem 15.30, h is $\mathcal{L}(X)$-a.s. continuous.

3) Take $h(x) = \Big(x, \sum_{s\leq \cdot} g(\Delta x(s))\Big)$. Then by Corollary 15.31 h is $\mathcal{L}(X)$-a.s. continuous. □

15.46 Lemma. *$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ if and only if the following conditions hold:*
i) (X^n) is tight,
ii) All possible limit points of $(\mathcal{L}(X^n))$ are identical.

Proof. Due to Prokhorov theorem, it is obvious. □

By virtue of the previous theorem, in order to establish the weak convergence of $(\mathcal{L}(X^n))$ we may verify the tightness and uniqueness of limit points for $(\mathcal{L}(X^n))$ separately.

Suppose D is a dense subset of $\boldsymbol{R}_+$, if $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}_f(D)} X$, then it is easy to know that the possible limit point is unique.

From Theorem 15.40, we also have the following theorem.

15.47 Theorem. *(X^n) is tight if and only if the following conditions hold:*

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\geq 1} P\Big(\sup_{t\leq N} |X_t^n| \geq a\Big) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}, \tag{47.1}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\geq 1} P(\omega'(\delta, X^n, N) \geq \eta) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}, \eta > 0. \tag{47.2}$$

or equivalently,

$$\lim_{a\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\Big(\sup_{t\leq N} |X_t^n| \geq a\Big) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}, \tag{47.3}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P(\omega'(\delta, X^n, N) \geq \eta) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}, \eta > 0. \tag{47.4}$$

15.48 Definition. If $(\mu_n) \subset \mathcal{P}(\mathbf{D}^d)$ is tight and for every possible limit point μ of (μ_n) $\mu(\mathbf{C}^d) = 1$, then (μ_n) is said to be *C-tight*. (X^n) is said to be *C-tight*, if $(\mathcal{L}(X^n))$ is C-tight.

15.49 Lemma. *The following statements are equivalent.*

1) (X^n) *is C-tight,*

2) (X^n) *is tight and*

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\sup_{t\le N}|\Delta X_t^n| \ge \varepsilon\Big) = 0, \quad \forall N\in \boldsymbol{N}, \varepsilon>0, \tag{49.1}$$

3)

$$\lim_{a\to\infty}\overline{\lim_n} P\Big(\sup_{t\le N}|X_t^n| \ge a\Big) = 0, \quad \forall N\in \boldsymbol{N}, \tag{49.2}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_n} P(w(\delta, X^n, N) \ge \eta) = 0, \quad \forall N\in \boldsymbol{N}, \eta>0. \tag{49.3}$$

Proof. 1) $\Rightarrow$ 2). Under 1) (X^n) is tight, hence it suffices to prove (49.1) for any convergent subsequence of (X^n). For simplicity we may assume that $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Then X is a continuous process and $J(X)=\emptyset$. Thus Lemma 15.20 and Theorem 15.37 entail

$$\sup_{t\le N}|\Delta X_t^n| \xrightarrow{\mathcal{L}} \sup_{t\le N}|\Delta X_t|, \qquad \forall N>0.$$

But X is continuous and $\sup_{t\le N}|\Delta X_t| = 0$, so (49.1) holds.

2) $\Rightarrow$ 3). Due to the tightness of (X^n), (47.3) implies that (49.2) is necessary. (49.3) is deduced from (47.4), (49.1) and the following easy inequality

$$w(\delta, x, N) \le 2w'(\delta, x, N) + \sup_{t\le N}|\Delta x(t)|.$$

3) $\Rightarrow$ 1). It is apparent that (49.2) and (49.3) imply the tightness of (X^n). Assume that $(X^{n'})$ is a convergent subsequence of (X^n) and $X^{n'} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Then Lemma 15.20 and Theorem 15.37 entail

$$\sup_{s\le t}|\Delta X_s^n| \xrightarrow{\mathcal{L}} \sup_{s\le t}|\Delta X_s|, \qquad \forall t\notin J(X).$$

But $\sup_{s\le t}|\Delta X_s^n| \le w(\delta, X^n, t)$, hence (49.3) implies $\sup_{s\le t}|\Delta X_s| = 0$ a.s. while $t\in J(X)$. Therefore X is continuous and (X^n) is C-tight. □

15.50 Lemma. *Suppose that for all $n, q\in \boldsymbol{N}$, the process X^n has the following decomposition:*

$$X^n = U^{nq} + V^{nq} + W^{nq},$$

where i) *for each q, $(U^{nq})_{n\ge1}$ is tight,* ii) *for each q, $(V^{nq})_{n\ge1}$ is tight and there is a sequence (a_q) of real numbers such that $\lim_q a_q = 0$ and*

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{t\le N}|\Delta V_t^{nq}| > a_q) = 0, \quad \forall N\in\boldsymbol{N}, \tag{50.1}$$

iii)

$$\lim_{q\to\infty}\overline{\lim_n} P(\sup_{t\le N}|W_t^{nq}| > \eta) = 0, \quad \forall N\in\boldsymbol{N},\ \eta>0. \tag{50.2}$$

Then (X^n) is tight.

Proof. Due to the tightness of $(U^{nq})_{n\ge1}$, $(V^{nq})_{n\ge1}$ and (50.2), (X^n) satisfies (47.3). Using the following easy inequalities:

$$w(\delta, x, N) \le 2\sup_{t\le N}|x(t)|,$$

$$w'(\delta, x+y, N) \le w'(\delta, x, N) + w(2\delta, y, N),$$

$$w(\delta, x, N) \le 2w'(\delta, x, N) + \sup_{t\le N}|\Delta x(t)|,$$

we get

$$\begin{aligned} w'(\delta, X^n, N) &\le w'(\delta, U^{nq}+V^{nq}, N) + w(2, W^{nq}, N)\\ &\le w'(\delta, U^{nq}, N) + 2w'(2\delta, V^{nq}, N) + \sup_{t\le N}|\Delta V_t^{nq}| + 2\sup_{t\le N}|W_t^{nq}|. \end{aligned}$$

For any $\varepsilon>0$, $\eta>0$, from (50.2) there is a number q such that $a_q\le\eta$ and

$$\overline{\lim_n} P(\sup_{t\le N}|W_t^{nq}| > \eta) \le \varepsilon.$$

Now by virtue of assumptions i) and ii) we may choose n_0 and $\delta>0$ such that while $n\ge n_0$ we have

$$P(w'(\delta, U^{nq}, N) > \eta) < \varepsilon, \quad P(w'(2\delta, V^{nq}, N) > \eta) < \varepsilon,$$

$$P(\sup_{t\le N}|\Delta V^{nq}| > \eta) < \varepsilon, \quad P(\sup_{t\le N}|W_t^{nq}| > \eta) < 2\varepsilon.$$

Thus $P(w'(\delta, X^n, N) > 6\eta) < 5\varepsilon$ and (X^n) satisfies (47.4), therefore (X^n) is tight. □

Remark. If for each q, (V^{nq}) is C-tight, then ii) holds.

15.51 Corollary. *Assume that (Y^n) and (Z^n) are two sequences of $\boldsymbol{R}^d$-valued cadlag processes. If (Y^n) is C-tight and (Z^n) is tight (resp. C-tight), then (Y^n+Z^n), (Y^n, Z^n) are tight (resp. C-tight).*

Proof. For (Y^n+Z^n), it suffices to apply Lemma 15.50 with $U^{nq}=Z^n$, $V^{nq}=Y^n$, $W^{nq}=0$ and $a_q=\dfrac{1}{q}$. Using the same technique as in Theorem 15.27, we get the conclusion about (Y^n, Z^n). □

15.52 Lemma. *Suppose that X^n admits a decomposition $X^n = Y^{nq} + Z^{nq}$ satisfying*

i)

$$\lim_{q\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty} P(\sup_{t\le N}|Z_t^{nq}| > \eta) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}, \quad \eta > 0. \tag{52.1}$$

ii) $Y^{nq} \xrightarrow{\mathcal{L}} W^q$, *as* $n \to \infty$, $q \ge 1$ *and*

$$W^q \xrightarrow{\mathcal{L}} W \qquad as \quad q \to \infty. \tag{52.2}$$

Then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} W$.

Proof. For $x, y \in \mathbf{D}^d$, (7.1) yields $\rho(x,y) \le \|x-y\|_N + 2^{-N+1}$. For any $\varepsilon > 0$, take N satisfying $2^{-N+1} < \varepsilon$. Thus for any closed set F we have

$$\boldsymbol{P}(X^n \in F) \le \boldsymbol{P}(Y^{nq} \in F^{2\varepsilon}) + \boldsymbol{P}(\sup_{t\le N}|Z^{nq}| > \varepsilon),$$

where $F^{2\varepsilon} = \{y : \rho(y,F) < 2\varepsilon\}$. Applying Theorem 15.37, we get

$$\varlimsup_n \boldsymbol{P}(X^n \in F) \le \varlimsup_n \boldsymbol{P}(Y^{nq} \in F^{2\varepsilon}) + \varlimsup_n \boldsymbol{P}(\sup_{t\le N}|Z^{nq}| > \varepsilon)$$

$$\le \boldsymbol{P}(W^q \in \overline{F^{2\varepsilon}}) + \varlimsup_n \boldsymbol{P}(\sup_{t\le N}|Z^{nq}| > \varepsilon).$$

Letting $q \to \infty$, by (52.1) and (52.2) we obtain

$$\varlimsup_n \boldsymbol{P}(X^n \in F) \le \lim_q \boldsymbol{P}(W^q \in \overline{F^{2\varepsilon}}) \le \boldsymbol{P}(W \in \overline{F^{2\varepsilon}}).$$

Since $F = \bigcap_{\varepsilon>0} F^\varepsilon$, letting $\varepsilon \downarrow 0$, we have

$$\varlimsup_n \boldsymbol{P}(X^n \in F) \le \boldsymbol{P}(W \in F).$$

Now the claim is deduced from Theorem 15.37. □

15.53 Definition. Let A, B be two increasing processes. We say that A *strongly majorizes* B, and denote it by $B \prec A$, if the process $A - B$ itself is increasing.

15.54 Theorem. 1) *Suppose that* (X^n), (Y^n) *are two sequences of increasing processes and* $X^n \prec Y^n$, $n \ge 1$. *If* (Y^n) *is tight (resp. C-tight), then so is* (X^n).

2) *Suppose that* (X^n) *is a sequence of real processes with finite variation,* $Y^n = \mathrm{Var}(X^n)$ *is the variation process of* X^n. *If* (Y^n) *is tight (resp. C-tight), then so is* (X^n).

Proof. 1) Since

$$|X_t^n - X_s^n| \le |Y_t^n - Y_s^n|, \quad X_t^n \le Y_t^n, \tag{54.1}$$

we have $\sup_{t\le N}|X_t^n| \le \sup_{t\le N}|Y_t^n|$, $\omega'(\delta, X^n, N) \le \omega'(\delta, Y^n, N)$, $\omega(\delta, X^n, N) \le \omega(\delta, Y^n, N)$. Applying Theorem 15.47 and Lemma 15.49, the tightness (resp. C-tightness) of (X^n) may be deduced from the tightness (resp. C-tightness) of (Y^n).

2) Since (54.1) is also true, the proof of 1) remains available. □

The following criterion for tightness is due to D. Aldous.

15.55 Theorem. *Suppose that* (X^n) *is a sequence of adapted cadlag* $\boldsymbol{R}^d$*-valued processes on a filtered probability space* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t), \boldsymbol{P})$. *Then* (X^n) *is tight if the following conditions hold:*

$$\lim_{a\to\infty}\varlimsup_n \boldsymbol{P}(\sup_{t\le N}|X_t^n| \ge a) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}, \tag{55.1}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_n \sup_{S,T\in\mathcal{T}_N, S\le T\le S+\delta} \boldsymbol{P}(|X_T^n - X_S^n| \ge \varepsilon) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}, \varepsilon > 0, \tag{55.2}$$

where $\mathcal{T}_N$ *is the collection of all stopping times bounded by* N.

Proof. Since (55.1) is just (47.3), it suffices to prove that (47.4) may be deduced from (55.2).

For fixed $N \in \boldsymbol{N}$, $\varepsilon > 0$ and $\eta > 0$, due to (55.2), for each $\tau > 0$ there are $\delta(\tau) > 0$ and $n(\tau) \in \boldsymbol{N}$ such that

$$n \ge n(\tau), S, T \in \mathcal{T}_N, S \le T \le S + \delta(\rho) \Rightarrow \boldsymbol{P}(|X_T^n - X_S^n| \ge \eta) \le \tau. \tag{55.3}$$

Set

$$S_0^n = 0, \quad S_{k+1}^n = \inf\{t > S_k^n : |X_t^n - X_{S_k^n}^n| \ge \eta\}.$$

Applying (55.3) to $\tau = \varepsilon$, $S = S_k^n \wedge N$, $T = S_{k+1}^n \wedge (S_k^n + \delta(\tau)) \wedge N$ and noticing that $|X_{S_{k+1}^n}^n - X_{S_k^n}^n| \ge \eta$ while $S_{k+1}^n < \infty$, we have

$$n > n(\varepsilon), \ k \ge 1 \Rightarrow \boldsymbol{P}(S_{k+1}^n \le N, S_{k+1}^n \le S_k^n + \delta(\varepsilon)) \le \varepsilon.$$

We choose $q \in \boldsymbol{N}$ with $q\delta(\varepsilon) > 2N$. Then applying (55.3) entails that

$$n \ge n_0 = n(\varepsilon) \vee n\left(\frac{\varepsilon}{q}\right), k \ge 0 \Rightarrow \boldsymbol{P}\left(S_{k+1}^n \le N, S_{k+1}^n \le S_k^n + \delta\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)\right) \le \frac{\varepsilon}{q}. \tag{55.4}$$

Since $S_q^n = \sum_{k=1}^q (S_k^n - S_{k-1}^n)$, we have

$$\frac{\delta(\varepsilon)q}{2}\boldsymbol{P}(S_q^n \le N) > N\boldsymbol{P}(S_q^n \le N) \ge \boldsymbol{E}(S_q^n I_{[S_q^n \le N]})$$

$$= \boldsymbol{E}\Big(\sum_{k=1}^q (S_k^n - S_{k-1}^n) I_{[S_q^n\le N]}\Big)$$

$$\ge \sum_{k=1}^q \boldsymbol{E}((S_k^n - S_{k-1}^n) I(S_q^n \le N, S_k^n - S_{k-1}^n > \delta(\varepsilon)))$$

$$\ge \sum_{k=1}^q \delta(\varepsilon)[\boldsymbol{P}(S_q^n \le N) - \boldsymbol{P}(S_q^n \le N, S_k^n - S_{k-1}^n \le \delta(\varepsilon))]$$

$$\ge \delta(\varepsilon)q\boldsymbol{P}(S_q^n \le N) - \delta(\varepsilon)q\varepsilon, \qquad n \ge n(\varepsilon).$$

Hence

$$P(S_q^n \le N) < 2\varepsilon, \quad \text{as } n \ge n(\varepsilon). \tag{55.5}$$

Next, set $A^n = [S_q^n > N] \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{q} \big[S_k^n - S_{k-1}^n > \delta\big(\frac{\varepsilon}{q}\big)\big]\Big)$. By (55.4) and (55.5) we obtain

$$P(A^n) > 1 - 3\varepsilon, \quad \text{as } n \ge n_0. \tag{55.6}$$

Now if $\omega \in A^n$, we take $r = \inf(i : S_i^n \ge N)$, $t_i = S_i^n$, $i \le r-1$ and consider the partition of $[0, N]$: $0 = t_0 < \cdots < t_r = N$. From the definitions of A^n and S_i^n we get

$$\overline{\omega}([t_{i-1}, t_i[, X^n) \le 2\eta, \ 1 \le i \le r,$$

$$t_i - t_{i-1} \ge \delta\Big(\frac{\varepsilon}{q}\Big), \quad 1 \le i \le r-1,$$

hence $\omega'\Big(\delta\big(\frac{\varepsilon}{q}\big), X^n(\omega), N\Big) < 2\eta$. Thus (55.6) implies

$$P\Big(\omega'\Big(\delta\Big(\frac{\varepsilon}{q}\Big), X^n, N\Big) > 2\eta\Big) < 3\varepsilon, \quad \text{as } n \ge n_0.$$

Therefore (47.4) holds and (X^n) is tight. □

15.56 Theorem. *Let (X^n) be a sequence of locally square integrable martingales. If $(\langle X^n \rangle)$ is C-tight, then (X^n) is tight.*

Proof. Since $(X^n)^2$ is dominated by predictable increasing process $\langle X^n \rangle$, for $a, b > 0$ Lenglart's inequality (the Corollary 9.24) implies

$$P(\sup_{t \le N} |X_t^n| > a) \le \frac{b}{a^2} + P(\langle X^n \rangle_N \ge b),$$

$$\overline{\lim_n} P(\sup_{t \le N} |X_t^n| > a) \le \frac{b}{a^2} + \overline{\lim_{n\to\infty}} P(\langle X^n \rangle_N \ge b).$$

Letting $a \to \infty$ and $b \to \infty$ successively yields (55.1).

Next, for $S, T \in \mathcal{T}_N$, $S \le T \le S + \delta$, consider $N^n = X^n - (X^n)^S$. $(N^n)^2$ is dominated by $\langle X^n \rangle - \langle X^n \rangle^S$. For $\varepsilon > 0$ and $\eta > 0$, again applying Lenglart's inequality, we have

$$\begin{aligned} P(|X_T^n - X_S^n| > \varepsilon) &\le \frac{\eta}{\varepsilon^2} + P(\langle X^n \rangle_T - \langle X^n \rangle_S \ge \eta) \\ &\le \frac{\eta}{\varepsilon^2} + P(\omega(\delta, \langle X^n \rangle, N) \ge \eta). \end{aligned}$$

By virtue of the C-tightness of $(\langle X^n \rangle)$, (49.3) implies

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_n} \sup_{S,T \in \mathcal{T}_N, S \le T \le S+\delta} P(|X_T^n - X_S^n| > \varepsilon) \le \frac{\eta}{\varepsilon^2}.$$

Since η may be arbitrary positive number, (55.2) holds and the tightness of (X^n) follows from Theorem 15.55. □

§4. Weak Convergence of Step Processes

Before discussion the general conditions for weak convergence of semimartingales in the next chapter, we give the conditions for weak convergence of step processes in this paragraph, since in this case we can characterize the weak convergence in terms of jump times and jump sizes. The priorities of this appoach lie in that one may avoid the verification of tightness and obtain the necessary conditions at the same time. Markov step processes and the approximation of Markov step processes via Markov sequences are also discussed.

15.57 Lemma. *Let $X, X^n, n \ge 1$ be step processes, $\rho(X^n, X) \xrightarrow{P} 0$ (resp. $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) and*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P(0 < |\Delta X_{T_1^n}^n I_{[T_1^n \le N]}| \le \varepsilon) = 0, \quad \forall N > 0, \tag{57.1}$$

where T_1^n is the first jump time of X^n. Then for $f(t, x) = (t, 2^{-1} \arctan x)$ we have

$$f(T_1^n, X_{T_1^n}^n) \xrightarrow{P} (\text{resp. } \xrightarrow{\mathcal{L}}) f(T_1, X_{T_1}). \tag{57.2}$$

Proof. By virtue of Theorem 15.42, it suffices to prove the conclusion for the case of convergence in probability. Take $u_k \downarrow 0$, $u_k \in U(X)$. Then Theorem 15.30 implies $X_0^n \xrightarrow{P} X_0$,

$$T_1(X^n, u_k) \xrightarrow{P} T_1(X, u_k), \quad \forall k \ge 1, \tag{57.3}$$

and on $T_1(X, u_k) < \infty$,

$$\Delta X^n(T_1(X^n, u_k)) \xrightarrow{P} \Delta X(T_1(X, u_k))^{1)}, \quad \forall k \ge 1. \tag{57.4}$$

Next, for given $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, by (57.1) there are t, k such that for all n we have

$$\begin{aligned} P(t \le T_1 < \infty) + P(0 < |\Delta X(T_1)| I_{[T_1 \le t]} < u_k) \\ + P(0 < |\Delta X^n(T_1^n)| I_{[T_1^n \le t]} < u_k) < \eta. \end{aligned}$$

[1] For convenience of typesetting, we write $\Delta X(t)$ instead of ΔX_t.

Thus

$$\begin{aligned}
&P(|T_1^n - T_1| \geq \varepsilon \text{ or } |\Delta X^n(T_1^n) - \Delta X(T_1)| > \varepsilon, T_1 < \infty)\\
&\quad\leq P(t \leq T_1 < \infty) + P(0 < |\Delta X^n(T_1^n)| I_{[T_1^n < t]} < u_k)\\
&\qquad + P(0 < |\Delta X(T_1)| I_{[T_1 < t]} < u_k)\\
&\qquad + P(T_1 < t, T_1^n \geq t, |\Delta X(T_1)| I_{[T_1 < t]} \geq u_k)\\
&\qquad + P(|T_1^n - T_1| \geq \varepsilon \text{ or } |\Delta X^n(T_1^n) - \Delta X(T_1)| \geq \varepsilon,\\
&\quad |\Delta X^n(T_1^n)| I_{[T_1^n \leq t]} \geq u_k, |\Delta X(T_1)| I_{[T_1 \leq t]} \geq u_k)\\
&\quad\leq \eta + P(T_1^n \geq t, T_1(X, u_k) < t)\\
&\qquad + P(|T_1(X^n, u_k) - T_1(X, u_k)| \geq \varepsilon, T_1(X, u_k) \leq t)\\
&\qquad + P(|\Delta X^n(T_1(X^n, u_k)) - \Delta X(T_1(X, u_k))|\\
&\quad \geq \varepsilon, T_1(X, u_k) \leq t).
\end{aligned} \tag{57.5}$$

By (57.3) we get

$$P(T_1^n \geq t, T_1(X, u_k) < t) \leq P(T_1(X^n, u_k) \geq t,\ T_1(X, u_k) < t) \to 0. \tag{57.6}$$

According to (57.3), (57.4) and (57.6), letting $n \to \infty$ and $\eta \to 0$ successively on the right-hand side of (57.5) yields

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_1^n - T_1| \geq \varepsilon \text{ or } |\Delta X^n(T_1^n) - \Delta X(T_1)| \geq \varepsilon, T_1 < \infty) = 0. \tag{57.7}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}
P(T_1^n < t, T_1 = \infty)&\\
&\leq P(0 < |\Delta X^n(T_1^n)| I_{[T_1^n \leq t]} < u_k)\\
&\quad + P(|\Delta X^n(T_1^n)| I_{[T_1^n \leq t]} \geq u_k, T_1 = \infty)\\
&\leq \eta + P(T_1(X^n, u_k) \leq t, T_1(X, u_k) = \infty).
\end{aligned}$$

Letting $n \to \infty$ and $\eta \to 0$ successively also yields

$$\lim_{n\to\infty} P(T_1^n < t, T_1 = \infty) = 1. \tag{57.8}$$

(57.7), (57.8) and $X_0^n \xrightarrow{P} X_0$ mean $f(T_1^n, X^n(T_1^n)) \xrightarrow{P} f(T_1, X(T_1))$. □

15.58 Theorem. *Suppose that $X, X^n, n \geq 1$, are step processes, (T_j), (T_j^n) are the jump times of X, X^n respectively. Then the following statements are equivalent:*

1) *For $f(t, x) = (t, 2^{-t} \arctan x)$,*

$$(f(T_j^n, X_{T_j^n}^n),\ j \geq 0) \xrightarrow{\mathcal{L}} (f(T_j, X_{T_j}),\ j \geq 0). \tag{58.1}$$

2) *$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ and*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} P(0 < |\Delta X_{T_j^n}^n| I_{[T_j^n \leq t]} < \varepsilon) = 0 \quad \forall j \geq 1, t > 0. \tag{58.2}$$

Proof. 1) $\Rightarrow$ 2). By Theorem 15.42, without loss of generality, we may suppose that

$$f(T_j^n, X_{T_j^n}^n) \to f(T_j, X_{T_j}) \quad \text{a.s.}, \quad \forall j > 0.$$

Then Theorem 15.33 implies $\rho(X^n, X) \to 0$, a.s. and

$$\inf\{|\Delta X_{T_j^n}^n| : 0 < T_j^n \leq t, n \geq 1\} > 0 \quad \text{a.s.}, \quad \forall t > 0.$$

Hence 2) is valid.

2) $\Rightarrow$ 1). By virtue of Theorem 15.42, we may assume that $\rho(X^n, X) \to 0$ a.s.. Then Lemma 15.57 entails $f(T_1^n, X_{T_1^n}^n) \xrightarrow{P} f(T_1, X_{T_1})$.

Put $\tilde{X}^n = X^n - X_{T_1^n} 1_{[T_1^n, \infty[}, \tilde{X} = X - X_{T_1} 1_{[T_1, \infty[}$. Then by Theorem 15.30 $\rho(\tilde{X}^n, \tilde{X}) \xrightarrow{P} 0$. Hence $f(T_2^n, \Delta X_{T_2^n}^n) \xrightarrow{P} f(T_2, \Delta X_{T_2})$ and consequently $f(T_2^n, X_{T_2^n}^n) \xrightarrow{P} f(T_2, X_{T_2})$. By induction it is easy to know that

$$f(T_j^n, X_{T_j^n}^n) \xrightarrow{P} f(T_j, X_{T_j}), \quad \forall j \geq 1,$$

and therefore (58.1) holds (cf. Problem 15.8). □

15.59 Corollary. *Suppose that $X, X^n, n \geq 1$, are counting processes, $X_0 = X_0^n = 0$, (T_j), (T_j^n) are the successive jump times of X, X^n respectively, then the following statements are equivalent:*

1) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

2) $(T_j^n, j \geq 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} (T_j, j \geq 1)$,

3) *for a dense subset D of $\mathbf{R}_+$*

$$X_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}_f(D)} X_t, \quad t \in D. \tag{59.1}$$

Proof. 1) $\Longleftrightarrow$ 2) is trivial, since for counting processes X, X^n we have $X_{T_j^n}^n = j$ on $[T_j^n < \infty]$, $X_{T_j} = j$ on $[T_j < \infty]$.

1) $\Rightarrow$ 3) is apparent. Conversely, for $t_j \in D$, $j \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}
P(T_j^n \leq t_j,\ 1 \leq j \leq k) &= P(X_{t_j}^n \geq j,\ 1 \leq j \leq k)\\
&= P(X_{t_j}^n \geq j - \frac{1}{2}, 1 \leq j \leq k) \to P(X_{t_j} \geq j - \frac{1}{2}, 1 \leq j \leq k)\\
&= P(X_{t_j} \geq j, 1 \leq j \leq k) = P(T_j \leq t_j, 1 \leq j \leq k),
\end{aligned}$$

hence 2) and also 1) are true. □

In order to discuss the weak convergence of Markov step processes, we state some elementary results about the weak convergence of Markov sequences in advance.

15.60 Definition. Suppose that S is a Polish space, $\mathcal{E}$ is the Borel σ-field on S. Let $N(x, A), N^n(x, A), n \geq 1$, be transition probability kernels on $(S, \mathcal{E})$, and $g, g_n, n \geq 1$ be functions on S.

If for all $f \in C_b(S)$, $N(\cdot, f) \in C_b(S)$, then N is called *Fellerian*.

If for all $f \in C_b(S)$ and compact $K \subset S$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in K} |N^n(x, f) - N(x, f)| = 0,$$

then (N^n) is called *uniformly convergent to* N *on compact* and denoted by $N^n \xrightarrow{uc} N$. If (g_n) uniformly converges to g on compact we also denote it by $g_n \xrightarrow{uc} g$.

If for all $f \in C_b(S)$ and sequence $(x_n) \subset S$ with $x_n \to x$,

$$\lim_{n\to\infty} N^n(x_n, f) = N(x, f),$$

we denote it by $N^n \rightrightarrows N$. If for all $(x_n) \subset S$ with $x_n \to x$ $\lim_{n\to\infty} g_n(x_n) = g(x)$ holds, then denote it by $g_n \rightrightarrows g$.

The following lemmas are easy and their proofs are left to the reader.

15.61 Lemma. *Suppose that N, N^n, $n \geq 1$, are transition probability kernels, and g, g_n, $n \geq 1$, are functions on a Polish space S. Then*

1) *$N^n \rightrightarrows N$ if and only if N is Fellerian and $N^n \xrightarrow{uc} N$.*

2) *$g_n \rightrightarrows g$ if and only if $g_n \xrightarrow{uc} g$ and g is continuous.*

15.62 Lemma. *Suppose that $X = (X_k, k \geq 0)$, $X^n = (X^n_k, k \geq 0)$, $n \geq 1$, are S-valued Markov sequences, μ, μ^n are the initial distributions, and p, p^n are the one step transition probability kernels of X, X^n respectively. Then the following statements are equivalent:*

1) *$p^n \rightrightarrows p$,*

2) *for all μ^n with $\mu^n \xrightarrow{w} \mu$, $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ holds.*

Moreover, in this case, if $\mu^n \xrightarrow{w} \mu$, then for every continuous mapping f from S to S

$$(f(X^n_k), k \geq 0) \xrightarrow{\mathcal{L}} (f(X_k), k \geq 0).$$

Let $X = (X_t)$ be a real Markov step process, $(T_k, k \geq 1)$ be its sequence of jump times, $T_0 = 0$. Then by the strong Markov property it is not hard to know that $(T_k, X_{T_k})_{k\geq 0}$ is an $\overline{R}_+ \times R$-valued temporarily homogeneous Markov sequence. It is also called the *jump chain* of X and the distribution of X is uniquely determined by the initial distribution μ of X and the one step transition probability $R(s, x; dt, dy)$ of (T_k, X_{T_k}), so we also write $\mathcal{L}(X) \sim (\mu, R)$.

15.63 Lemma. *Suppose that X, X^n, $n \geq 1$, are Markov step processes, $\mathcal{L}(X^n) \sim (\mu^n, R^n)$, $\mathcal{L}(X) \sim (\mu, R)$ and $(T_k, X_{T_k}, k \geq 0)$ is the jump chain of X. If $\mu^n \xrightarrow{w} \mu$, for $f(t, x) = (t, 2^{-t} \arctan x)$, $s_n \to s < \infty$, $x_n \to x$ and all $g \in C_b(\overline{R}_+ \times R)$*

$$\iint g \circ f(t, y) R^n(s_n x_n; dt, dy) \to \iint g \circ f(t, y) R(s, x; dt, dy), \tag{63.1}$$

then $(f(T^n_k, X_{T^n_k}),\ k \geq 0) \xrightarrow{\mathcal{L}} (f(T_k, X_{T_k}),\ k \geq 0)$ and $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proof. At first, we prove that (63.1) holds for $s = \infty$ as well. In fact, from the definition of R we have

$$\iint g \circ f(t, y) R(\infty, x; dt, dy) = g(\infty, 0).$$

while $s_n \to \infty$, for $\varepsilon > 0$ there is $N > 0$ such that

$$\Big| \iint g \circ f(t, y) R^n(s_n, x_n; dt, dy) - g(\infty, 0) \Big|$$
$$= \Big| \int_{s_n}^{\infty} \int_R [g(t, 2^{-t} \arctan y) - g(\infty, 0)] R^n(s_n, x_n; dt, dy) \Big| < \varepsilon, \ n \geq N.$$

Hence (63.1) holds for $s = \infty$. Now Lemma 15.62 implies

$$(f(T^n_k, X^n_{T^n_k}),\ k \geq 0) \xrightarrow{\mathcal{L}} (f(T_k, X_{T_k}), \quad k \geq 0),$$

and $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ is deduced by Theorem 15.58. □

Let $X = (X_t)$ be a temporarily homogeneous real Markov step process with transition probability $(p_t(x, A))$ and corresponding infinitesimal characteristics:

$$Q(x, A) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{-I_A(x) + p_t(x, A)}{t}, \tag{64.1}$$

$$q(x) = -Q(x, \{x\}), \tag{64.2}$$

$$N(x, A) = \begin{cases} \dfrac{Q(x, A \setminus \{x\})}{q(x)}, & \text{if } q(x) \neq 0, \\ I_A(x), & \text{if } q(x) = 0. \end{cases} \tag{64.3}$$

In this case, the one step transition probability R for the jump chain (T_j, X_{T_j}) of X may be written as follows (cf. He and Wang [3])

$$R(s, x; dt, A) = \begin{cases} e^{-q(x)(t-s)} q(x) N(x, A) dt I_{[t>s]}, & q(x) > 0, s < \infty, \\ \delta_\infty(dt) \delta_x(A), & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{64.4}$$

Meanwhile, it is not hard to compute that the Lévy system ν of X

$$\nu(dt, dx) = q(X_{t-}) N(X_{t-}, X_{t-} + dx) dt. \tag{64.5}$$

Recall that the distribution of X is uniquely determined by its initial distribution μ and q, N. So we write $\mathcal{L}(X) \sim (\mu, q, N)$.

15.64 Lemma. *Let (q, N), $(q^n, N^n), n \geq 1$, be the infinitesimal characteristics of temporally homogeneous Markov step processes X, X^n, $n \geq 1$, and R, R^n be connected with $(q, N), (q, N^n)$ by (64.4) respectively. If $q^n \Rightarrow q$ and for $x_n \to x \in \{y : q(y) > 0\}$ we have*

$$N^n(x_n, g) \to N(x, g), \quad \forall g \in C_b(\boldsymbol{R}),$$

then for $s_n \to s$, $x_n \to x$ and all $g \in C_b(\overline{\boldsymbol{R}}_+ \times \boldsymbol{R})$

$$\iint g \circ f(t, y) R^n(s_n, x_n; dt, dy) \to \iint g \circ f(t, y) R(s, x; dt, dy), \tag{64.6}$$

where $f(t, x) = (t, 2^{-1} \arctan x)$.

Proof. For $g \in C_b(\overline{\boldsymbol{R}}_+ \times \boldsymbol{R})$, $g \circ f$ is a bounded continuous function on $\overline{\boldsymbol{R}}_+ \times \boldsymbol{R}$ and for any $t_0 \in \overline{\boldsymbol{R}}_+$

$$\lim_{t \to t_0} \sup_y |g \circ f(t, y) - g \circ f(t_0, y)| = 0.$$

If $q(x) > 0$, then

$$\begin{aligned} &\iint g \circ f(t, y) R^n(s_n, x_n; dt, dy) \\ &= \int N^n(x_n, dy) \int_{s_n}^{\infty} g \circ f(t, y) q^n(x_n) e^{-q^n(x_n)(t-s_n)} dt \\ &= \int N^n(x_n, dy) h_n(y), \end{aligned} \tag{64.7}$$

$$\begin{aligned} h_n(y) &= \int_{s_n}^{\infty} g \circ f(t, y) q^n(x_n) e^{-q^n(x_n)(t-s_n)} dt \\ &= \int_0^{\infty} g \circ f\Big(s_n + \frac{t}{q^n(x_n)}, y\Big) e^{-t} dt \\ &\to \int_0^{\infty} g \circ f\Big(s + \frac{t}{q(x)}, y\Big) e^{-t} dt \qquad \text{(uniformly in } y \text{ as } n \to \infty) \\ &= \int_s^{\infty} g \circ f(t, y) q(x) e^{-q(x)(t-s)} dt = h(y). \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} &\Big| \int N^n(x_n, dy) h_n(y) - \int N(x, dy) h(y) \Big| \\ &\quad \leq \sup_y |h_n(y) - h(y)| + |N^n(x_n, h) - N(x, h)| \to 0 \end{aligned}$$

So (64.6) holds.

Assume $q(x) = 0$. While $q^n(x_n) = 0$, we have

$$R^n(s_n, x_n; g \circ h) = g \circ f(\infty, x_n) = g(\infty, 0) = R(s, x; g \circ f).$$

While $q^n(x_n) > 0$, (64.7) is still valid and as $n \to \infty$

$$h_n(y) = \int_0^{\infty} g \circ f\Big(s_n + \frac{t}{q^n(x_n)}, y\Big) e^{-t} dt \to g(\infty, 0) \quad \text{(uniformly in } y).$$

Thus

$$R^n(s_n, x_n; g \circ f) = \int h_n(y) N^n(x_n, dy) \to g(\infty, 0) = R(s, x; g \circ h).$$

In sum, (64.6) holds. □

15.65 Theorem. *Let X, X^n, $n \geq 1$, be temporally homogeneous Markov step processes, $\mathcal{L}(X) \sim (\mu, q, N)$, $\mathcal{L}(X^n) \sim (\mu^n, q^n, N^n)$. Then the following statements are equivalent:*

1) i) $q^n \Rightarrow q$,

ii) *for all $x_n \to x \in \{y : q(y) > 0\}$,*

$$\int g(y) N^n(x_n, dy) \to \int g(y) N(x, dy), \quad \forall g \in C_b(\boldsymbol{R}). \tag{65.1}$$

2) *for all $\mu^n \xrightarrow{w} \mu$, $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ holds and*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \boldsymbol{P}(0 < |\Delta X^n_{T_1^n} I_{[T_1^n \leq N]}| < \varepsilon) = 0, \quad \forall N \in \boldsymbol{N}. \tag{65.2}$$

Proof. 1) ⇒ 2). In view of Lemma 15.64, (64.6) is valid. Thus Lemma 15.63 implies $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ and $(f(T_k^n, X^n_{T_k^n}), k \geq 0) \xrightarrow{\mathcal{L}} (f(T_k, X_{T_k}), k \geq 0)$, hence (65.2) is deduced from Theorem 15.58.

2) ⇒ 1). Assume $x_n \to x$, take $\mu^n = \delta_{x_n}$, $\mu = \delta_x$. Then $\mu^n \xrightarrow{w} \mu$. By the assumption, $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ and (65.2) hold. Hence by Lemma 15.57 $T_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}} T_1$. But

$$\boldsymbol{P}(T^n > t) = \exp[-q^n(x_n)t], \quad \boldsymbol{P}(T > t) = \exp[-q(x)t],$$

thus $q^n(x_n) \to q(x)$. If $q(x) > 0$, then $T_1 < \infty$ a.s.. Lemma 15.57 yields also $X^n_{T_1^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X_{T_1}$ and for $g \in C_b(\boldsymbol{R})$,

$$\int g(y) N^n(x_n, dy) = \boldsymbol{E}[g(X^n_{T_1^n})] \to \boldsymbol{E}[g(X_{T_1})] = \int g(y) N(x, dy).$$

So (65.1) holds. □

Remark. The following example explains that (65.2) may not be relaxed for 2) ⇒ 1).

Let X, Y be two independent homogeneous Poisson processes with intensity 1 and $X^n = X + \frac{1}{n} Y$, then X, X^n, $n \geq 1$, are temporally homogeneous Markov step processes and

$$\begin{aligned} &q(x) \equiv 1, \quad N(x, dy) = \delta_{x+1}(dy), \\ &q^n(x) \equiv 2, N^n(x, dy) = \frac{1}{2}\delta_{x+1}(dy) + \frac{1}{2}\delta_{x+1/n}(dy). \end{aligned}$$

Obviously, $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, but 1) does not hold.

15.66 Corollary. *Let X, X^n, $n \geq 1$, be temporally homogeneous Markov step processes with state space $\{0, 1, 2, \cdots\}$. The Q-matrices of X, X^n are (q_{ij}), (q_{ij}^n) respectively. Then the following statements are equivalent:*

1) *for all i, j, $q_{ij}^n \to q_{ij}$;*

2) *for all $\mu^n \xrightarrow{w} \mu$, $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$;*

3) *for all i, if $\mu^n = \mu = \delta_i$, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

15.67 Theorem. *Suppose that for each n, $Y^n = (Y_k^n)_{k \geq 0}$ is a temporally homogeneous real Markov sequences with initial distribution μ^n and transition probability $p^n(x, dy)$. Let $\varepsilon_n \downarrow 0$. Define*

$$X_t^n = Y_{[\frac{t}{\varepsilon_n}]}^n = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^n I(k\varepsilon_n \leq t < (k+1)\varepsilon_n), \quad t > 0. \tag{66.1}$$

Let X be a temporally homogeneous Markov step process, $\mathcal{L}(X) \sim (\mu, q, N)$. Then the following statements are equivalent:

1) *for all $x_n \to x$,* i)

$$\frac{1}{\varepsilon_n}(p^n(x_n, \{x_n\}) - 1) \to -q(x), \tag{66.2}$$

ii) *If $q(x) > 0$, for all $g \in C_b(\boldsymbol{R})$*

$$\frac{1}{\varepsilon_n} \int g(y) 1_{[y \neq x_n]} p^n(x_n, dy) \to q(x) \int g(y) N(x, dy); \tag{66.3}$$

2) *for all $\mu^n \to \mu$, $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ and (65.2) holds.*

Proof. Notice that X^n is a Markov step process, but may not be temporally homogeneous. The transition probability for the jump chain of X^n is

$$R^n(k\varepsilon_n, x; \{l\varepsilon_n\}, dy) = \begin{cases} [p(x, \{x\})]^{l-k-1} I_{[y \neq x]} p^n(x, dy), & p^n(x, \{x\}) \neq 1, \\ & k < l \\ I_{[l=\infty]} \delta_x(dy), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1) $\Rightarrow$ 2). Similarly to the proof of Theorem 15.65, it suffices to verify (63.1). Assume that $s_n = k\varepsilon_n \to s < \infty$, $x_n \to x$, $g \in C_b(\overline{\boldsymbol{R}}_+ \times \boldsymbol{R})$ and $f(t, x) = (t, 2^{-t} \arctan x)$, we have

$$\begin{aligned} &\iint g \circ f(t, y) R^n(s_n, x_n; dt, dy) \\ &= \int \sum_{k=1}^{\infty} g \circ f(s_n + k\varepsilon_n, y)(p^n(x_n, \{x_n\}))^{k-1} I_{[y \neq x]} p^n(x_n, dy) \\ &= \int h_n(y) \frac{1}{\varepsilon_n} I_{[y \neq x_n]} p^n(x_n, dy), \end{aligned}$$

$$h_n(y) = \int_{s_n}^{\infty} g \circ f(s_n + \left[\frac{t - s_n}{\varepsilon_n}\right] \varepsilon_n + \varepsilon_n, y)(p^n(x_n, \{x_n\}))^{\left[\frac{t - s_n}{\varepsilon_n}\right]} dt.$$

If $q(x) > 0$, then

$$h_n(y) \to \int_s^{\infty} g \circ f(t, y) \exp[-q(x)(t - s)] dt,$$

and the above convergence is uniform in y. Hence

$$\begin{aligned} &\iint g \circ f(t, y) R^n(s_n, x_n; dt, dy) \\ &\to \int \int_s^{\infty} g \circ f(t, y) \exp[-q(x)(t - s)] dt q(x) I_{[y \neq x]} N(x, dy) \\ &= \iint g \circ f(t, y) R(s, x; dt, dy). \end{aligned}$$

If $q(x) = 0$, then

$$h_n(y) \frac{1 - p^n(x_n, \{x_n\})}{\varepsilon_n} \to g(\infty, 0), \quad \text{uniformly in } y.$$

Thus

$$\begin{aligned} &\iint g \circ f(t, y) R^n(s_n, x_n; dt, dy) \\ &= \int h_n(y) \frac{1 - p^n(x_n, \{x_n\})}{\varepsilon_n} \frac{I_{[y \neq x_n]}}{1 - p^n(x_n, \{x_n\})} p^n(x_n, dy) \\ &\to g(\infty, 0) = \iint g \circ f(t, y) R(s, x; dt, dy). \end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1). Assume $x_n \to x_0$. Take $\mu^n = \delta_{x_n}$, $\mu = \delta_{x_0}$, $u > 0$. Write $p_n = p^n(x_n, \{x_n\})$. If (T_j^n) and (T_j) are the jump times of X^n and X respectively, Lemma 15.57 implies $T_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}} T_1$ and

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}[\exp(-uT_1^n)] &= \frac{1 - p_n}{1 - p_n \exp(-u\varepsilon_n)} \exp(-u\varepsilon_n) \\ &\to \boldsymbol{E}[\exp(-uT_1)] = \frac{q(x)}{q(x) + u}. \end{aligned}$$

It is not hard from this relation to conclude that $p_n \to 1$ and $\frac{1}{\varepsilon_n}(1 - p_n) \to q(x)$. Hence (66.2) is true.

If $q(x) > 0$, then $T_1 < \infty$ a.s. Lemma 15.57 also yields $X^n_{T^n_1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X_{T_1}$ and for all $g \in C_b(\mathbf{R})$

$$E[g(X^n_{T^n_1})] = \frac{1}{1-p_n} \int g(y) I_{[y \neq x_n]} p^n(x_n, dy)$$

$$\to E[g(X_{T_1})] = \int g(y) N(x, dy). \qquad (66.4)$$

(66.4) and (66.2) imply (66.3). □

15.67 Corollary. *Assume that for each n, Y^n is a temporarily homogenous Markov sequence with state space $\{0, 1, 2, \cdots\}$ and one step transition probability (p^n_{ij}) and X is a temporarily homogeneous Markov step process with state space $\{0, 1, 2, \cdots\}$ and Q-matrix (q_{ij}). Let $\varepsilon_n \downarrow 0$. If X^n is defined by (66.1), then the following statements are equivalent:*

1) for all i, j, $(p^n_{ij} - \delta_{ij})/\varepsilon_n \to q_{ij}$;

2) for all $\mu^n \xrightarrow{w} \mu$, $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$;

3) for all i, if $\mu^n = \mu = \delta_i$, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Problems and Complements

15.1 Consider the following functions:

$$x_n(t) = 1_{[t \geq 1-2/n]}, \quad y_n(t) = 1_{[t \geq 1-1/n]}.$$

Explain that $\mathbf{D}$ is not a topological vector space and $\mathbf{D}^2$ is not the product topological space of $\mathbf{D}$ by $\mathbf{D}$.

15.2 Consider the elements $x_n(t) = I_{[1<t\leq 1+1/n]}$ of $\mathbf{D}$. Explain that $\mathbf{D}$ is not complete under $\bar{\rho}$ defined by (10.5).

15.3 Let $\rho_u(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)|$. Explain that $\mathbf{D}^d$ is not separable under ρ_u, but in $\mathbf{D}^d_a$ the σ-field generated by ρ_u-open balls coincides with $\sigma(x(u) : u \leq a)$.

15.4 Prove that under ρ defined by (7.1) $\mathbf{C}^d$ is a closed subset of $\mathbf{D}^d$.

15.5 Let x, x_n, $n \geq 1$, be increasing cadlag functions on $\mathbf{R}_+$, null at zero. Then the following statements are equivalent:

1) $x_n \to x$ under the Skorokhod topology.

2) There is a dense subset D of $\mathbf{R}_+$ such that i) $x_n(t) \to x(t)$, $t \in D$, ii) for all $t > 0$ there is a sequence (t_n) such that $\Delta x_n(t_n) \to \Delta x(t)$, $t_n \to t$, and moreover, $t_n < t$ if $t \in D$.

3) There is a dense subset D of $\mathbf{R}_+$ such that for $t \in D$ $x_n(t) \to x(t)$, $\sum_{s<t}(\Delta x_n(s))^2 \to \sum_{s \leq t}(\Delta x(s))^2$.

15.6 Let S be a Polish space. 1) If N is a Fellerian transition probability kernel on $(S, \mathcal{B}(S))$, then for each $\varepsilon > 0$ and compact $K \subset S$ there is a compact $C_{\varepsilon,K} \subset S$ such that $\sup_{x \in K} N(x, C^c_{\varepsilon,K}) < \varepsilon$.

2) If N, N^n, $n \geq 1$, are transition probability kernels and $N^n \Rightarrow N$, then for all $\varepsilon > 0$ and compact $K \subset S$ there is a compact $C_{\varepsilon,K} \subset S$ such that $\overline{\lim}_n \sup_{x \in K} N^n(x, C^c_{\varepsilon,K}) < \varepsilon$.

15.7 Suppose that $M, N, M^n, N^n, n \geq 1$, are transition probability kernels on a Polish space S. If $M^n \Rightarrow M$, $N^n \Rightarrow N$, then $M^n * N^n \Rightarrow M * N$ where $M * N(x, f) = \int_S M(x, dy) N(y, f)$.

15.8 Let $\mathbf{R}^\infty = \prod_{i=1}^\infty \mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}$ and equip $\mathbf{R}^\infty$ with the product topology. Prove that i) $\mathbf{R}^\infty$ is a Polish space, ii) Let $\mathcal{B}^\infty$ be the Borel σ-field of $\mathbf{R}^\infty$, π_k be the projection of $\mathbf{R}^\infty$ to $\mathbf{R}^k = \prod_{i=1}^k \mathbf{R}_i$, μ, μ_n be probability measures on $\mathbf{R}^\infty$. Then $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ if and only if for all $k \geq 1$, $\mu_n \circ \pi_k^{-1} \xrightarrow{w} \mu \circ \pi_k^{-1}$.

15.9 Let $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_n$ be probability measures on $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$. Set

$$G_n(x) = \inf\{y \in \mathbf{R} : \mathbf{P}_n(]-\infty, y]) \geq x\},$$

$$G(x) = \inf\{y \in \mathbf{R} : \mathbf{P}(]-\infty, y]) \geq x\}.$$

Let ξ be r.v uniformly distributed on $]0, 1]$. Prove that $\mathbf{P}_n$ (resp. $\mathbf{P}$) is the law of $G_n(\xi)$ (resp. $G(\xi)$) and $\lim_{n\to\infty} G_n(\xi) = G(\xi)$ a.s..

15.10 Assume that S is a Polish space, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(S)$. $\mathcal{A}$ is closed under the formation of finite intersection and each open set in S may be expressed as a countable union of sets in $\mathcal{A}$. If $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_n$, $n \geq 1$, are probability measures with $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, then $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$.

15.11 Assume that $\mathcal{G}$ is a family of real continuous functions on $\mathbf{R}^d$, for any different $a, b, c \in \mathbf{R}^d$. There is $f \in \mathcal{G}$ such that $f(a), f(b), f(c)$ are different. Prove that a sequence (X^n) of $\mathbf{R}^d$-valued cadlag processes is tight if and only if i) for all $\varepsilon > 0$, $t > 0$ there is a compact $K_{\varepsilon,t} \subset \mathbf{R}^d$ such that

$$\mathbf{P}(X^n_s \in K_{\varepsilon,t}, s \leq t) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n \geq 1,$$

ii) $\forall f \in \mathcal{G}$, $(f(X^n), n \geq 1)$ is tight.

15.12 A sequence (X^n) of cadlag processes is tight if and only if

i) $\lim_{a\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X^n_t| > a) = 0, \forall t > 0$,

ii) $\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{P}(\omega'(\delta, X^n, N) > \eta) = 0, \forall \eta > 0$, $N \in \mathbf{N}$.

15.13 Suppose that a sequence (X^n) of cadlag processes satisfies

i) (X^n_0) is tight.

ii) $\sup_{0 \leq t \leq N} \sup_{n \geq 1} \mathbf{P}(|X^n_{t+h} - X^n_t| > \eta_N(h)) < \varepsilon_N(h)$, $\forall h > 0$, $N > 0$,

where $\varepsilon_N(h)$, $\eta_N(h)$ satisfy $\int_{]0,a]} \frac{\eta_N(h)}{h} dh < \infty$, $\int_{]0,a]} \frac{\varepsilon_N(h)}{h^2} dh < \infty$ for

some $a > 0$. Then (X^n) is C-tight. In particular, if (X^n) satisfies i) and

$$P(|X_t^n - X_s^n| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^r}(F(t) - F(s))^{1+\alpha}, 0 \leq s < t, \lambda > 0,$$

where $r \geq 0$, $\alpha > 0$ and F is a nondecreasing continuous function, then (X^n) is C-tight.

15.14 Prove that a sequence (X^n) of measurable cadlad processes is C-tight if and only if i) (X_0^n) tight, ii)

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{S, T \in R_N, S \leq T \leq S+\delta} P(|X_T^n - X_S^n| > \varepsilon) = 0,$$

where R_N is the collection of all non-negative r.v. bounded by N.

15.15 Assume that X^n is a temporally homogeneous right-continuous Markov process with initial distibution μ^n and Fellerian transition probability function $p_t^n(x, A)$. If (μ^n) is tight and

$$\lim_{t \to 0} \sup_{x,n} p_t^n(x, O_\varepsilon^c(x)) = 0,$$

where $O_\varepsilon^c(x) = \{y : |y - x| \geq \varepsilon\}$, then (X^n) is tight. Furthermore, if

$$\lim_{t \to 0} \sup_{x,n} p_t^n(x, O_\varepsilon^c(x))/t = 0,$$

then (X^n) is C-tight.

15.16 Let $(T_j^n)_{j \geq 1}$ be the sequence of jump times of a counting process X^n, $W_j^n = T_j^n - T_{j-1}^n, j \geq 1$, $T_0^n = 0$. Characterize the tightness of (X^n) in terms of $(W_j^n, j \geq 1, n \geq 1)$.

15.17 Assume that X, X^n, $n \geq 1$, are renewal processes with renewal functions $m(t) = E[X_t]$, $m^n(t) = E[X_t^n]$ respectively, F, F^n are the (sub-) distributions of intervals between successive jump times of X, X^n respectively. Prove that the following conditions are equivalent:

i) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

ii) $m^n \xrightarrow{v} m$, i.e., $\int_{R_+} f(t) dm^n(t) \to \int_{R_+} f(t) dm(t)$ for every continuous function f with compact support,

iii) $F^n \xrightarrow{v} F$.

15.18 For $x \in \mathbf{D}^d$, set $S_a(x) = \inf\{t : |x(t-)| \geq a \text{ or } |x(t)| \geq a\}$.

1) If $a \notin V(x) = \{b : S_b(x) < S_{b+}(x)\}$, then $x \mapsto S_a(x)$ is a continuous function on $\mathbf{D}^d$.

2) Let $V'(x) = \{a > 0 : S_a(x) \in J(x) \text{ and } |x(S_a(x))| = a\}$, $x^{S_a}(t) = x(t \wedge S_a)$. Then $x \mapsto (x, x^{S_a})$ is continuous from $\mathbf{D}^d$ into $\mathbf{D}^{2d}$ at each x such that $a \notin V(x) \cup V'(x)$.

15.19. Assume that X, X^n, $n \geq 1$, are adapted cadlag R^d-valued processes. Then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ if and only if there is at most a countable subset $A \subset R_+$ such that

$$(X^n)^{S(a,X^n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X^{S(a,X)}, \quad \forall a \in R_+ \setminus A,$$

where $S(a, X) = \inf\{t : |X_t| \geq a \text{ or } |X_{t-}| \geq a\}$, $X_t^S = X_{t \wedge S}$.

15.20 Assume that X, X^n, α^n, $n \geq 1$, are the cadlag processes, α is a deterministic continuous function. If $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, $\sup_{s \leq t} |\alpha_s^n - \alpha_s| \xrightarrow{P} 0$, $\forall t > 0$, then $X^n + \alpha^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + \alpha$.

Chapter XVI

Weak Convergence for Semimartingales

In this chapter we will discuss the conditions of weak convergence for semimartingales and some of their applications. The general sufficient conditions of weak convergence to quasi-left-continuous (abbreviated as q. l. c.) semimartingales will be given in §1. In §2 and §3 the general results will be applied to the case, where the limit process is a Lévy process whether continuous or not. In particular, it includes the weak convergence for processes with independent increments. Finally, the results will be applied to the case, where the limit process is a generalized diffusion process in §4. The classical results of weak convergence for empirical processes are also given in §4.

For the sake of simplicity, in this chapter we consider the real-valued processes only, most of the results still hold for $\mathbf{R}^d$-valued processes. The basic setting is a filtered probability space $\Phi = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$. unless otherwise stated, all semimartingales are defined on Φ.

§1. Convergence to a Quasi-left-continuous Semimartingale

16.1 Definition. Let h be a bounded real function. If for some $a > 0$ it satisfies

$$h(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1/a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \qquad |h(x)| \leq a, \tag{1.1}$$

then h is called a *truncation function*. $\mathbf{Z}$ is the collection of all truncation functions and $\mathbf{Z}_c$ is the collection of all continuous truncation functions. Set $h_1(x) = xI_{[|x| \leq 1]}$. Then $h_1 \in \mathbf{Z}$.

16.2 Definition. Suppose that X is a semimartingale, (α, β, ν) is its predictable triplet, μ is the jump measure of X. By using a truncation function h, we can get its integral representation, similar to that in Theorem 11.25. If h satisfies (1.1) then $x - h(x) = 0$ as $|x| < 1/a$. Put

$$\check{X}(h) = \Sigma(\Delta X - h(\Delta X)) = (x - h(x)) * \mu, \tag{2.1}$$

$$X(h) = X - \check{X}(h). \tag{2.2}$$

Since $|\Delta X(h)| = |\Delta X - \Delta \check{X}(h)| = |h(\Delta X)| \leq a$, $X(h) \in \mathcal{S}_p$. It has the following canonical decomposition

$$X(h) = X_0 + M(h) + \alpha(h), \quad M(h) \in \mathcal{M}_{loc,0}, \quad \alpha(h) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}_0.$$

On the other hand, Theorem 11.25 gives

$$\begin{aligned} X(h) &= X - \check{X}(h) \\ &= X_0 + \alpha + X^c + (xI_{[|x| \leq 1]}) * (\mu - \nu) + (xI_{[|x| > 1]}) * \mu - (x - h) * \mu \\ &= X_0 + X^c + h * (\mu - \nu) + \alpha + (h(x) - xI_{[|x| \leq 1]}) * \nu. \end{aligned}$$

Therefore

$$M(h)^d = h * (\mu - \nu), \tag{2.3}$$

$$\alpha(h) = \alpha + (h(x) - xI_{[|x| \leq 1]}) * \nu, \tag{2.4}$$

$$X = X_0 + X^c + h * (\mu - \nu) + \alpha(h) + (x - h(x)) * \mu. \tag{2.5}$$

If $h(x) = h_1(x) = xI_{[|x| \leq 1]}$, then $\alpha(h_1) = \alpha$. Denote $\widehat{h} = \Delta\alpha(h)$ and $\widetilde{\beta}(h) = \langle M(h) \rangle$. From (2.4) and (2.3) we have

$$\widehat{h}_t = \int h(x) \widehat{\nu}_t(dx), \tag{2.6}$$

$$\langle M(h) \rangle = \beta + h^2 * \nu - \Sigma(\Delta\alpha(h))^2. \tag{2.7}$$

Later we will see that it is more convenient to state the conditions of weak convergence for semimartingales in terms of $(\alpha(h), \widetilde{\beta}(h), \nu)$ for $h \in \mathbf{Z}_c$. Since $(\alpha(h), \widetilde{\beta}(h), \nu)$ and (α, β, ν) are determined by each other, $(\alpha(h), \beta, \nu)$ or $(\alpha(h), \widetilde{\beta}(h), \nu)$ are also called the *predictable characteristics* (*or predictable triplet*) of X, and α or $\alpha(h)$ the *first characteristic* of X, β or $\widetilde{\beta}(h)$ the *second characteristic*.

It is easy to know that for $h, g \in \mathbf{Z}$,

$$\alpha(h) - \alpha(g) = (h - g) * \nu, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}(h) - \widetilde{\beta}(g) &= (h^2 - g^2) * \nu - \Sigma((\Delta\alpha(h))^2 - (\Delta\alpha(g))^2) \\ &= (h^2 - g^2) * \nu - (\widehat{h}h - \widehat{g}g) * \nu \end{aligned} \tag{2.9}$$

Suppose that X is a locally square integrable semimartingale (see Theorem 11.31), its canonical decomposition is

$$X = X_0 + M' + \alpha', \quad M' \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc},0}, \quad \alpha' \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{P}.$$

Then

$$\alpha' = \alpha(h) + (x - h(x)) * \nu, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\langle M' \rangle &= \widetilde{\beta}(h) + (x^2 - h^2(x)) * \nu - \sum((\widehat{x})^2 - (\widehat{h})^2) \\ &= \beta + x^2 * \nu - \Sigma(\widehat{x})^2.\end{aligned} \tag{2.11}$$

$\langle M' \rangle$ is also denoted by β'.

16.3 Theorem. *Suppose that $(X^n)_{n\geq 1}$ is a sequence of semimartingales, and for each n $(\alpha^n(h), \widetilde{\beta}^n(h), \nu^n)$ is the predictable triplet of X^n.*

1) *If the following conditions are satisfied:*

i) *(X_0^n) is tight,*

ii) $\forall N > 0, \quad \varepsilon > 0$

$$\lim_{a\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P(\nu^n([0, N] \times \{x : |x| > a\}) > \epsilon) = 0, \tag{3.1}$$

iii) *$(\alpha^n(h))_{n\geq 1}$, $(\widetilde{\beta}^n(h))_{n\geq 1}$ are C-tight and $(g_p * \nu^n)_{n\geq 1}$ is C-tight for all $p \in \boldsymbol{N}$, $g_p(x) = (p|x| - 1)^+ \wedge 1$, then $(X^n)_{n\geq 1}$ is tight.*

2) *Conversely, if $(X^n)_{n\geq 1}$ is tight, then* 1) i) *and* ii) *hold.*

In order to prove the theorem we need the following two lemmas.

16.4. Lemma. *If conditions* 1) iii) *in Theorem* 16.3 *holds for a certain $h \in \boldsymbol{Z}$, then it holds for all $h \in \boldsymbol{Z}$.*

Proof. If $h, \overline{h} \in \boldsymbol{Z}$, then they satisfy (1.1) for some $a > 0$. Take $p \in \boldsymbol{N}$, $p \geq 2a$. then

$$|h(x) - \overline{h}(x)| \leq 2ag_p(x), \quad |h^2(x) - \overline{h}^2(x)| \leq a^2 g_p(x),$$

$$\mathrm{Var}[\alpha^n(h) - \alpha^n(\overline{h})] \prec |h - \overline{h}| * \nu^n \prec 2ag_p * \nu^n,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\Sigma((\Delta\alpha^n(h))^2 - (\Delta\alpha^n(\overline{h}))^2)] &\prec \Sigma|\Delta\alpha^n(h) + \Delta\alpha^n(\overline{h})||\Delta\alpha^n(h - \overline{h})| \\ &\prec 4a|h - \overline{h}| * \nu^n \prec 8a^2 g_p * \nu^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\widetilde{\beta}^n(h) - \widetilde{\beta}^n(\overline{h})] &= \mathrm{Var}[(h^2 - \overline{h}^2) * \nu^n - \Sigma((\Delta\alpha^n(h))^2 - (\Delta\alpha^n(\overline{h}))^2)] \\ &\prec a^2 g_p * \nu^n + 8a^2 g_p * \nu^n = 9a^2 g_p * \nu^n,\end{aligned}$$

hence from Theorem 15.54 and Corollary 15.51 the assertion follows. □

16.5 Lemma. 1) *For $N > 0$, $a > 0$, the following two conditions are equivalent:*

i) $\lim_n P(\sup_{s\leq N} |\Delta X_s^n| > a) = 0$,

ii) $\lim_n P(\nu^n([0, N] \times \{x : |x| > a\}) > \varepsilon) = 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$

2) *For $N > 0$, the following two conditions are equivalent:*

i) $\lim_{a\to\infty} \overline{\lim_n} P(\sup_{s\leq N} |\Delta X_s^n| > a) = 0$,

ii) $\lim_{a\to\infty} \overline{\lim_n} P(\nu^n([0, N] \times \{x : |x| > a\}) > \epsilon) = 0, \quad \forall\epsilon > 0.$

Proof. 1) Set

$$A^n = I_{[|x|>a]} * \mu^n = \sum I_{[|\Delta X^n|>a]},$$

$$\widetilde{A}_t^n = I_{[|x|>a]} * \nu_t^n = \nu^n([0, t] \times \{x : |x| > a\}).$$

Then $\widetilde{A}^n$ is the compensator of A^n, and $A^n, \widetilde{A}^n$ are dominated by each other. By Lenglart's inequality

$$P(\sup_{s\leq N} |\Delta X_s^n| > a) \leq P(A_N^n \geq 1) \leq \varepsilon + P(\widetilde{A}_N^n \geq \varepsilon),$$

whence 1) ii) $\Rightarrow$ 1) i) and 2) ii) $\Rightarrow$ 2) i) are deduced.

On the other hand, again by Lenglart's inequality,

$$P(\widetilde{A}_N^n \geq \varepsilon) \leq \eta + \frac{1}{\varepsilon} E(\sup_{s\leq N} \Delta A_s^n) + P(A_N^n > \varepsilon\eta).$$

Since $|\Delta A^n| \leq 1$ and $[\sup_{s\leq N} \Delta A_s^n > 0] = [A_N^n \geq \varepsilon\eta \wedge 1] = [\sup_{s\leq N} |\Delta X_s^n| > a]$,

$$P(\widetilde{A}_N^n \geq \varepsilon) \leq \eta + \Big(\frac{1}{\varepsilon} + 1\Big) P(\sup_{s\leq N} |\Delta X_s^n| > a).$$

Now letting $n \to \infty$ $(a \to \infty)$ and $\eta \to 0$ successively, 1) i) $\Rightarrow$ 1) ii) and 2) i) $\Rightarrow$ 2) ii) are deduced. □

16.6 The proof of Theorem 16.3. For fixed $h \in Z$. Let $h_q(x) = qh(x/q)$, then $h_q \in \boldsymbol{Z}$. We will prove the tightness of (X^n) by making use of Lemma 15.50 and (2.5). For each n we have

$$\begin{aligned}X^n &= X_0^n + M^n(h_q) + \alpha^n(h_q) + \check{X}^n(h_q) \\ &= U^{nq} + V^{nq} + W^{nq},\end{aligned}$$

where $U^{nq} = X_0^n + M^n(h_q)$, $V^{nq} = \alpha^n(h_q)$, $W^{nq} = \check{X}^n(h_q)$. By Lemma 16.4 $(V^{nq})_{n\geq 1}$ is C-tight for all q. Expression (XV.50.2) holds for $a_q = 1/q$. Also by Lemma 16.4 $(\widetilde{\beta}^n(h_q) = \langle M^n(h_q)\rangle)_{n\geq 1}$ is C-tight for all q. Hence

by Corollary 15.51 $(U^{nq})_{n\geq 1}$ is tight for all q. Finally, if $h \in \mathcal{Z}$ satisfies (1.1) for some a, then $h_q(x) = x$ as $|x| < aq$ and

$$\Delta \check{X}^n(h_q) = \Delta X^n - h_q(\Delta X^n) = 0, \quad \text{on } [|\Delta X^n| < aq].$$

Therefore

$$P(\sup_{s\leq N} |W_s^{nq}| > 0) \leq P(\sup_{s\leq N} |\Delta X_s^n| \geq aq).$$

Now by Lemma 16.5.2) and (3.1), (XV. 50.2) holds. Hence all conditions of Lemma 15.50 are satisfied and $(X^n)_{n\geq 1}$ is tight.

2) Conversely, if $(X^n)_{n\geq 1}$ is tight, 1) i) holds apparently. Meanwhile, $\sup_{t\leq N} |\Delta X_t^n| \leq 2 \sup_{t\leq N} |X_t^n|$, hence from (XV. 47.3) we have

$$\lim_{a\to\infty} \overline{\lim_{n}} P(\sup_{t\leq N} |\Delta X_t^n| > a) = 0.$$

Now it is easy from Lemma 16.5.2) to know that (3.1) is necessary. □

16.7 Definition. Suppose that $\Phi_D = (\mathbf{D}^1, \mathcal{D}, D, P_D)$ is the canonical filtered probability space and the filtration $D = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$ satisfies the usual conditions. Let X be the canonical process. Assume that α is a predictable process with finite variation and $\alpha_0 = 0$ on Φ_D and $\alpha(h)$ is connected with α by (2.4); β is a continuous increasing process with $\beta_0 = 0$ on Φ_D, and $\bar{\beta}(h)$ is connected with β by (2.7); ν is a predictable random measure on Φ_D. In what follows, the triplet (α, β, ν) (or $(\alpha(h), \bar{\beta}(h), \nu)$) satisfying the above conditions is also called a *predictable triplet* on Φ_D.

The main topic in this paragraph is the following problem: if (X^n) is a sequence of semimartingales with predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$ on Φ, in terms of $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$ and (α, β, ν), what are the sufficient conditions to guarantee that $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ and X is a semimartingale with predictable triplet (α, β, ν).

Suppose that Y is a r.v. on Φ_D, and X^n is a semimartingale on Φ, then $Y \circ X^n$ is a r.v. on Φ.

Before stating the main results, we introduce some conditions and notations. Let $D \subset R_+$ and set

$$[\alpha\text{-}D]: \quad \alpha_t^n(h) - \alpha_t(h) \circ X^n \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t \in D, \quad \text{for some } h \in \mathcal{Z}_c.$$

$$[\bar{\beta}\text{-}D]: \quad \bar{\beta}_t^n(h) - \bar{\beta}_t(h) \circ X \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t \in D, \quad \text{for some } h \in \mathcal{Z}_c. \tag{7.1}$$

$$[\nu\text{-}D]: \quad g * \nu_t^n - (g * \nu_t) \circ X^n \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t \in D,\ g \in J_1. \tag{7.2}$$

$$[\sup\ \alpha]: \quad \sup_{t\leq N} |\alpha_t^n(h) - \alpha_t(h) \circ X^n| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall N > 0, \quad \text{for some } h \in \mathcal{Z}_c.$$

$$[\sup\ \bar{\beta}]: \quad \sup_{t\leq N} |\bar{\beta}_t^n(h) - \bar{\beta}_t(h) \circ X^n| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall N > 0, \quad \text{for some } h \in \mathcal{Z}_c.$$

$$[\sup\ \nu]: \quad \sup_{t\leq N} |g * \nu_t^n - (g * \nu_t) \circ X^n| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall N > 0, \quad g \in J_1, \tag{7.3}$$

where

$$J_1 = \left\{ f \in C_b(R_+): \begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ exists and is finite,} \\ f(x) \text{ is zero in a neighbour of } 0 \end{array} \right\} \tag{7.4}$$

$[C]$: For $g \in J_1$, $h \in \mathcal{Z}_c$, $\alpha(h)$, $\bar{\beta}$, $g * \nu$ are continuous processes.

It is easy to see that for $h, g \in \mathcal{Z}_c$, $h - g \in J_1$ and $h^2 - g^2 \in J_1$. Hence it is easy to deduce from (2.8), (2.9) that under $[\nu\text{-}D]$ (resp. $[\sup\ \nu]$) and $[C]$, if $[\alpha\text{-}D]$ or $[\bar{\beta}\text{-}D]$ (resp. $[\sup\ \alpha]$ or $[\sup\ \bar{\beta}]$) hold for some $h \in \mathcal{Z}_c$, then they hold for all $h \in \mathcal{Z}_c$.

If we deal with locally square integrable semimartingales, we also need the following conditions:

$$[\sup\ \alpha']: \quad \sup_{t\leq N} |\alpha_t'^n - \alpha_t' \circ X^n| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall N > 0. \tag{7.5}$$

$$[\beta'\text{-}D]: \quad |\beta_t'^n - \beta_t' \circ X^n| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t \in D. \tag{7.6}$$

Similarly, we can also define $[\alpha'\text{-}D]$ and $[\sup\ \beta']$.

16.8 Lemma. *Suppose that $G^n \in \mathcal{V}_0(\Phi)$, $G \in \mathcal{V}_0(\Phi_D)$, $H^n \in \mathcal{V}^+(\Phi)$, $H \in \mathcal{V}^+(\Phi_D)$ and F is a deterministic continuous function,* $\mathrm{Var}(G^n) \prec H^n$, $\mathrm{Var}(G) \prec H \prec F$. *If D is a dense subset of R_+ and*

$$G_t^n - G_t \circ X^n \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t \in D, \tag{8.1}$$

$$H_t^n - H_t \circ X^n \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t \in D, \tag{8.2}$$

then

$$\sup_{s\leq t} |G_s^n - G_s \circ X^n| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0 \tag{8.3}$$

Proof. For $\varepsilon > 0$, take $\{t_i\} \subset D$ such that $t_0 = 0$, $t_i < t_{i+1}$, $t_i \to \infty$ and $F(t_{i+1}) - F(t_i) < \varepsilon$. Now for $s \in [t_i, t_{i+1}]$ we have

$$\begin{aligned}
|G_s^n - G_s \circ X^n| &\leq |G_s^n - G_{t_i}^n| + |G_{t_i}^n - G_{t_i} \circ X^n| + |G_{t_i} \circ X^n - G_s \circ X^n| \\
&\leq H_{t_{i+1}}^n - H_{t_i}^n + |G_{t_i}^n - G_{t_i} \circ X^n| + \varepsilon \\
&\leq |H_{t_{i+1}}^n - H_{t_{i+1}} \circ X^n| + \varepsilon + |H_{t_i} \circ X^n - H_{t_i}^n| + |G_{t_i}^n - G_{t_i} \circ X^n| + \varepsilon,
\end{aligned}$$

$$\sup_{s\leq t} |G_s^n - G_s \circ X^n| \leq 2\varepsilon + \sup_{i: t_{i-1}\leq t} \{2|H_{t_i}^n - H_{t_i} \circ X^n| + |G_{t_i}^n - G_{t_i} \circ X^n|\},$$

Therefore (8.3) is derived from (8.1) and (8.2). □

16.9 Corollary. *If D is a dense subset of R_+ and the following strong majoration condition holds: there exists an increasing continuous (deterministic) function F such that*

$$\mathrm{Var}(\alpha) + \beta + (1 \wedge x^2) * \nu \prec F, \tag{9.1}$$

then $[\tilde{\beta}\text{-}D] \Longleftrightarrow [\sup\ \tilde{\beta}]$, $[\nu\text{-}D] \Rightarrow [\sup\ \nu]$.

Proof. It suffices to take $G^n = H^n = \tilde{\beta}^n$ (resp. $g * \nu^n$), $G = H = \tilde{\beta}$ (resp. $g * \nu$) in Lemma 16.8. □

16.10 Lemma. *Suppose that $G^n \in V_0(\Phi)$, $G \in V_0(\Phi_D)$, $\mathrm{Var}(G) \prec F$, and F is an increasing (deterministic) right-continuous function.*

1) *If $\rho(G^n, G \circ X^n) \xrightarrow{P} 0$, then (G^n) is tight.*

2) *If $\sup_{s \leq t} |G^n_s - G_s \circ X^n| \xrightarrow{P} 0$ for all $t > 0$ and F is continuous, then (G^n) is C-tight.*

Proof. Since $\mathrm{Var}(G) \prec F$, Theorem 15.54 implies that the sequence $(G \circ X^n)$ is tight. Moreover, if F is continuous, then $(G \circ X^n)$ is C-tight. Now, suppose $(G \circ X^{n'})$ is a subsequence of $(G \circ X^n)$ and

$$G \circ X^{n'} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y,$$

the assumption in 1) implies that $G^{n'} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ as well, this also means (G^n) is tight. Moreover, if F is continuous, then (G^n) is C-tight. □

16.11 Theorem. *Suppose that (X^n) is a sequence of semimartingales on Φ and (α, β, ν) is a predictable triplet on Φ_D. If*

i) *(X^n_0) is tight;*

ii) *For a dense subset D of R_+ $[\sup\ \alpha]$, $[\tilde{\beta}\text{-}D]$, $[\nu\text{-}D]$ holds;*

iii) *Strong majoration condition holds: there exists an increasing continuous function F such that*

$$\mathrm{Var}(\alpha) + \beta + (x^2 \wedge 1) * \nu \prec F, \tag{11.1}$$

iv) *Condition on big jumps holds:*

$$\lim_{a \to \infty} \sup_y \nu(y, [0, t] \times \{x : |x| > a\}) = 0; \tag{11.2}$$

then (X^n) is tight.

Proof. We will verify that (X^n) satisfies the conditions of Theorem 16.3.1). The assumption i) is just the same as i) of Theorem 16.3.1).

For $p > 0$, consider

$$g_p(x) = (p|x| - 1)^+ \wedge 1 \in J_1.$$

Then $g_p(x) \leq (p^2 \vee 1)(x^2 \wedge 1)$. For fixed $t \in D$, $\varepsilon > 0, \eta > 0$, (11.2) implies that there exists $a > 0$ such that

$$\sup_y g_{2/a} * \nu_t(y) \leq \sup_y \nu_t\Big(y, [0, t] \times \Big\{x : |x| > \frac{a}{2}\Big\}\Big) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.3}$$

Due to $[\nu\text{-}D]$, if n is large enough, we have

$$P(|g_{2/a} * \nu^n_t - (g_{2/a} * \nu_t) \circ X^n| > \frac{\varepsilon}{2}) \leq \eta. \tag{11.4}$$

Since $\nu^n([0, t] \times \{x : |x| > a\}) \leq g_{2/a} * \nu^n_t$, (11.3) and (11.4) imply

$$P(\nu^n([0, t] \times \{x : |x| > a\}) \geq \varepsilon) \leq \eta.$$

Thus condition ii) of Theorem 16.3.1) holds.

For $h \in \mathcal{Z}$, using (2.4) and (11.1) we have

$$\mathrm{Var}(\alpha(h)) \prec kF, \tag{11.5}$$

where k is a constant. From (11.5), $[\sup\ \alpha]$ and Lemma 16.10.2) the C-tightness of $(\alpha^n(h))$ is deduced. Due to Corollary 16.9, $[\sup\ \tilde{\beta}]$ and $[\sup\ \nu]$ hold. Thus for $g \in J_1$ the C-tightness of $(\tilde{\beta}^n(h))$ and $(g * \nu^n)$ is also deduced from Lemma 16.10.2). In sum, condition iii) in Theorem 16.3.1) holds and the tightness of (X^n) is a consequence of Theorem 16.3. □

Remark. From (2.8) it is easy to see that for any $h \in \mathcal{Z}$, if α is replaced by $\alpha(h)$, F is replaced by kF (k is a constant depending on h) in (11.1), then (11.1) is still true.

16.12 Lemma. *Suppose that a family of r.v. $(Z^n_i, i \in I, n \geq 1)$ satisfies the following conditions:*

i) *$(Z^n_i, i \in I, n \geq 1)$ is uniformly integrable,*

ii) *$\forall i \in I$ $Z^n_i \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_i$, as $n \to \infty$,*

then $(Z_i, i \in I)$ is uniformly integrable and

$$\lim_{n \to \infty} E[Z^n_i] = E[Z_i], \quad i \in I. \tag{12.1}$$

Proof. Due to the uniform integrability of $(Z^n_i, i \in I, n \geq 1)$ for any $\varepsilon > 0$ there exists an N such that

$$E[|Z^n_i| I(|Z^n_i| > N)] < \varepsilon, \quad i \in I, \quad n \geq 1.$$

In fact, by Skorokhod's representation theorem we may assume $Z^n_i \to Z_i$, a.s.. Then by Fatou's lamma

$$E[|Z_i| I(|Z_i| > N)] \leq \varliminf_n E[|Z^n_i| I(|Z^n_i| > N)] < \varepsilon, \quad i \in I.$$

Therefore $(Z_i, i \in I)$ is uniformly integrable and (12.1) holds. □

16.13 Lemma. *Suppose that $(N^n), (Y^n)$ are two sequences of adapted cadlag processes on Φ, N, Y are two adapted cadlag processes on Φ_D, and $G = (\mathcal{G}_t)$ is the usual natural filtration of (N, Y). If the following conditions are satisfied:*

i) $(N^n, n \geq 1)$ is a sequence of martingales and for each $t > 0$ $(N_s^n, s \leq t, n \geq 1)$ is uniformly integrable,

ii) D is a dense subset of $\boldsymbol{R}_+$ and $(N^n, Y^n) \xrightarrow{\mathcal{L}_f(D)} (N, Y)$,

then N is a $\boldsymbol{G}$-martingale.

Proof. Take $u_1 < \cdots < u_k < s < t$, $u_i, s, t \in D$ and $f \in C_b(\boldsymbol{R}^{2k})$. Since N^n is a martingale,

$$\boldsymbol{E}[(N_t^n - N_s^n) f(Y_{u_1}^n, \cdots, Y_{u_k}^n, N_{u_1}^n, \cdots, N_{u_k}^n)] = 0. \tag{13.1}$$

Owing to uniform integrability of $(N_s^n, s \leq t, n \geq 1)$, letting $n \to \infty$ in (13.1), by Lemma 16.12 we have

$$\boldsymbol{E}[(N_t - N_s) f(Y_{u_1}, \cdots, Y_{u_k}, N_{u_1}, \cdots, N_{u_k})] = 0.$$

Now by the monotone class theorem for $\xi \in b\mathcal{G}_{s-}^0$ we get

$$\boldsymbol{E}[(N_t - N_s)\xi] = 0, \qquad t > s, t, s \in D.$$

where $\mathcal{G}_t^0 = \sigma\{N_s, Y_s, s \leq t\}$. For arbitrary $s < t$, take $s_k < t_k$ such that $s_k, t_k \in D$, $s_k \downarrow\downarrow s$, $t_k \downarrow\downarrow t$. Since $\mathcal{G}_{s+}^0 \subset \mathcal{G}_{s_k-}^0$, N is right continuous, and $(N_s, s \leq t)$ is uniformly integrable, for $\xi \in b\mathcal{G}_{s+}^0$ we have

$$\boldsymbol{E}[(N_t - N_s)\xi] = 0.$$

Therefore N is a $\boldsymbol{G}$-martingale. □

16.14 Lemma. *Suppose that (X^n) and (M^n) are two sequences of adapted cadlag processes on Φ, for each n M^n is a martingale, X is the canonical process on Φ_D, M is a cadlag process on Φ_D, D is a dense subset of $\boldsymbol{R}_+$ and $D \subset \boldsymbol{R} \setminus J(X)$. If the following conditions are satisfied:*

i) for each $t > 0$, $(M_s^n, s \leq t, n \geq 1)$ is uniformly integrable;

ii) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$;

iii) for each $t \in D$, $x \mapsto M_t(x)$ is an $\mathcal{L}(X)$-a.s. continuous mapping on $\mathbf{D}$;

iv) for each $t \in D$, $M_t^n - M_t \circ X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$;

then M is a martingale on Φ_D.

Proof. If N^n, Y^n, N and Y are replaced by M^n, X^n, M and X in Lemma 16.13 respectively, then condition i) of Lemma 16.13 holds and $\mathcal{G}_t$ is just $\mathcal{D}_t$. Now conditions ii) and iii) yield

$$(M_{t_j} \circ X^n, X_{t_j}^n)_{1 \leq j \leq k} \xrightarrow{\mathcal{L}} (M_{t_j} \circ X, X_{t_j})_{1 \leq j \leq k} = (M_{t_j}, X_{t_j})_{1 \leq j \leq k}, \quad t_j \in D.$$

Moreover, from condition iv) we get

$$(M_{t_j}^n, X_{t_j}^n)_{1 \leq j \leq k} \xrightarrow{\mathcal{L}} (M_{t_j}, X_{t_j})_{1 \leq j \leq k}, t_j \in D.$$

Thus condition ii) of Lemma 16.13 also holds and we know that M is a martingale on Φ_D. □

16.15 Lemma. *Suppose that $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}^2$, $|\Delta M| \leq a$, then there exist two constants k_1, k_2, irrelevant to a and M, such that*

$$\boldsymbol{E}[M_t^{*4}] \leq k_1 a^2 (E[\langle M\rangle_t^2])^{1/2} + k_2 E[\langle M\rangle_t^2]. \tag{15.1}$$

Proof. At first, we suppose that M and $\langle M\rangle$ are bounded. Write $N = [M] - \langle M\rangle \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}$. Then $|\Delta N| = |(\Delta M)^2 - {}^p((\Delta M)^2)| \leq a^2$ and

$$[N] = \sum (\Delta N)^2 \prec a^2 \mathrm{Var}(N) \prec a^2([M] + \langle M\rangle).$$

Hence $\langle N\rangle \prec 2a^2 \langle M\rangle$. Now by B-D-G inequality (Theorem 10.36) we get

$$\begin{aligned} E[M_t^{*4}] &\leq kE[M]_t^2 \leq 2kE[\langle M\rangle_t^2] + 2kE[N_t^2] \\ &= 2kE[\langle M\rangle_t^2] + 2kE[\langle N\rangle_t] \leq 2kE[\langle M\rangle_t^2] + 4a^2 k (E[\langle M\rangle_t^2])^{1/2}. \end{aligned}$$

Thus (15.1) holds with $k_1 = 4k$ and $k_2 = 2k$. Finally, for any $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc},0}^2$, set

$$T_n = \inf\{t : |M_t| \geq n \text{ or } \langle M\rangle_t \geq n\},$$

then from $|\Delta M| \leq a$ we have $|M^{T_n}| \leq n + a$, $\langle M\rangle^{T_n} \leq n + a^2$. Therefore (15.1) holds for M^{T_n}. Letting $n \to \infty$, we know that (15.1) also holds for M. □

16.16 Theorem. *Suppose that for each n X^n is a semimartingale with predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$. Let X be the canonical process on Φ_D. If $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, there exists a continuous (in t) triplet (α, β, ν) on Φ_D and a dense subset D of $\boldsymbol{R}_+$, $D \subset \boldsymbol{R}_+ \setminus J(X)$ such that the following conditions are satisfied:*

i) $[\alpha\text{-}D], [\bar{\beta}\text{-}D], [\nu\text{-}D]$ hold;

ii) for some $h \in \mathcal{Z}_c$,

$$\sup_{y \in \mathbf{D}} |\bar{\beta}_t(y, h)| < \infty, \quad \sup_{y \in \mathbf{D}} |g * \nu_t(y)| < \infty, t \geq 0, g \in J_1; \tag{16.1}$$

iii) *continuity condition holds: For each $t \in D$, $g \in J_1$ and some $h \in Z_c$, the following mappings on* $\mathbf{D}$ *are $\mathcal{L}(X)$-a.s. continuous under the Skorokhod topology:*

$$y \mapsto \alpha_t(y, h), \quad y \mapsto \tilde{\beta}_t(y, h), \quad y \mapsto g * \nu_t(y), \tag{16.2}$$

then X is a semimartingale on Φ_D with predictable characteristics (α, β, ν).

Remark. Due to the continuity of (α, β, ν), (2.8) and (2.9) become

$$\alpha(h) - \alpha(g) = (h - g) * \nu,$$

$$\tilde{\beta}(h) - \tilde{\beta}(g) = (h^2 - g^2) * \nu.$$

If $h, g \in Z_c$, then $h - g$, $h^2 - g^2 \in J_1$; and if (16.1) and (16.2) hold for some $h \in Z_c$, then they hold for all $h \in Z_c$ as well.

Proof. For fixed $g \in J_1$, $h \in Z_c$, set

$$X^n(h) = X^n - \Sigma(\Delta X^n - h(\Delta X^n)), \quad X(h) = X - \Sigma(\Delta X - h(\Delta X)),$$

$$V^n = X^n(h) - \alpha^n(h) - X^n_0, \qquad V = X(h) - \alpha(h) - X_0,$$

$$Z^n = V^{n2} - \tilde{\beta}^n(h), \qquad Z = V^2 - \tilde{\beta}(h),$$

$$N^{ng} = \Sigma g(\Delta X^n) - g * \nu^n, \qquad N^g = \Sigma g(\Delta X) - g * \nu,$$

then

$$X^n(h) = X(h) \circ X^n. \tag{16.3}$$

By virtue of (2.4) and (2.7), for every n, V^n, Z^n, N^{ng} are local martingales on Φ and we need to prove that V, Z, N^g are local martingales on Φ_D. To this end, we will use Lemma 16.14.

a) Take $T \in D$. If $\sup_y \tilde{\beta}_T(y, h) \leq K$, set

$$T_n = \inf\{t : \tilde{\beta}^n_t(h) \geq K + 1\}, \quad M^n_t = V^n_{t \wedge T_n \wedge T}, \quad M = V^T.$$

We shall prove that $M = V^T$ is a martingale. If $|h| \leq a$, then

$$E[\sup_t |M^n_t|^2] \leq 4E[(M^n_\infty)^2] \leq 4E[\tilde{\beta}^n_{T_n}(h)] \leq 4(K + 1 + 4a^2).$$

Thus condition i) of Lemma 16.14 holds. The assumption that $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ guarantees the condition ii) of Lemma 16.14. For $t \in D \subset R \setminus J(X)$, Corollary 15.31 yields that the mapping $x \mapsto X_t(h)$ is continuous on $\mathbf{D}$. Furthermore, $x \mapsto V_t(x)$, $x \mapsto M_t(x) = V_{t \wedge T}(x)$ are also continuous on $\mathbf{D}$ and 16.14.iii) is met. Finally, due to (16.3)

$$V^n_t - V_t \circ X^n = \alpha_t(h) \circ X^n - \alpha^n_t(h).$$

$$P(|M^n_t - M_t \circ X^n| > \varepsilon) = P(|V^n_{t \wedge T_n \wedge T} - V_{t \wedge T} \circ X^n| > \varepsilon)$$
$$\leq P(T_n < T) + P(|\alpha_{t \wedge T}(h) \circ X^n - \alpha^n_{t \wedge T}(h)| > \varepsilon). \tag{16.4}$$

Since $\tilde{\beta}(h) \circ X^n \leq K$, $\tilde{\beta}^n_T(h) - \tilde{\beta}_T(h) \circ X^n \xrightarrow{P} 0$,

$$P(T_n < T) = P(\tilde{\beta}^n_T(h) \geq K + 1)$$
$$\leq P(|\tilde{\beta}^n_T(h) - \tilde{\beta}_T(h) \circ X^n| > 1) \to 0. \tag{16.5}$$

Therefore from $[\alpha\text{-}D]$ and (16.4) we know that 16.14. iv) holds and Lemma 16.14 yields that $M = V^T$ is a martingale and $V \in \mathcal{M}_{loc}$.

b) Let T, T_n be the same as in a) and

$$M^n_t = Z^n_{t \wedge T \wedge T_n}, \quad M = Z^T.$$

By Lemma 16.15, there exists a constant K' depending only on h and K such that

$$E[\sup_t |V^n_{t \wedge T_n}|^4] \leq K'.$$

Hence $(Z^n_{t \wedge T \wedge T_n}, t \geq 0, n \geq 1)$ is uniformly integrable and 16.14. i) holds. Conditions 16.14. ii) and 16.14. iii) may be verified the same as in a). Moreover,

$$M^n_t - M_t \circ X^n = (V^n_{t \wedge T \wedge T_n})^2 - (V_{t \wedge T} \circ X^n)^2 - (\tilde{\beta}^n_{t \wedge T \wedge T_n} - \tilde{\beta}_{t \wedge T} \circ X^n)$$
$$= (V^n_{t \wedge T \wedge T_n} - V_{t \wedge T} \circ X^n)(V^n_{t \wedge T \wedge T_n} + V_{t \wedge T} \circ X^n)$$
$$- (\tilde{\beta}^n_{t \wedge T \wedge T_n} - \tilde{\beta}_{t \wedge T} \circ X^n),$$

we have seen above that $(V_{t \wedge T \wedge T_n}, V_{t \wedge T} \circ X^n, n \geq 1)$ are uniformly integrable and that $V^n_{t \wedge T \wedge T_n} - V_{t \wedge T} \circ X^n \xrightarrow{P} 0$. Then, similarly to a), 16.14. iv) can be easily deduced from $[\tilde{\beta}\text{-}D]$ and (16.5). Thus $M = Z^T$ is a martingale and $Z \in \mathcal{M}_{loc}$.

c) Take $T \in D$. If $\sup_y g * \nu_T(y) \leq K$, let

$$T_n = \inf\{t : g * \nu^n_t(y) \geq K + 1\}, \quad M^n_t = N^{ng}_{t \wedge T \wedge T_n}, \quad M_t = N^g_{t \wedge T}.$$

Since

$$\langle M^n \rangle_t \leq g^2 * \nu^n_{t \wedge T_n} \leq K'' = (K + 1 + \|g\|)\|g\|,$$

we have

$$E[\sup_t |M^n_t|^2] \leq 4E[\langle M^n \rangle_\infty] \leq 4K''.$$

Hence $(M^n_t, t \geq 0, n \geq 1)$ is uniformly integrable and 16.4.i) is met. Conditions 16.14.ii) and 16.14.iii) may be verified the same as in a). Finally,

$$M^n_t - M_t \circ X^n = g * \nu^n_{t \wedge T \wedge T_n} - (g * \nu_{t \wedge T}) \circ X^n.$$

Similarly to a), one may deduce from $[\nu\text{-}D]$ that 16.14.iv) holds also. Thus $M = (N^g)^T$ is a martingale and $N^g \in \mathcal{M}_{loc}$.

Since for each $g \in J_1$, V, Z, N^g are local martingales, therefore X is a semimartingale with predictable characteristics (α, β, ν). □

16.17 Theorem. *Suppose that for each n X^n is a semimartingale on Φ with predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$. Let X be the canonical process on Φ_D. If there exists a predictable triplet (α, β, ν) on Φ_D and a dense subset D of R_+ such that the following conditions are satisfied:*

i) $\mathcal{L}(X_0^n) \xrightarrow{w} \lambda_0$;

ii) $[\sup\ \alpha], [\bar{\beta}\text{-}D], [\nu\text{-}D]$ *hold;*

iii) *strong majoration condition holds: there exists an increasing (deterministic) continuous function such that:*

$$\mathrm{Var}(\alpha) + \beta + (x^2 \wedge 1) * \nu \prec F; \tag{17.1}$$

iv) *condition on big jumps holds:*

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{y\in \mathbf{D}} \nu(y, [0,t] \times \{x : |x| > a\}) = 0, \quad \forall t > 0; \tag{17.2}$$

v) *Continuity condition holds: for each $t \in D$, $g \in J_1$ and some $h \in Z_c$, the following mappings are continuous on* $\mathbf{D}$:

$$x \mapsto \alpha_t(x, h), x \mapsto \bar{\beta}_t(x, h), x \mapsto g * \nu_t(x). \tag{17.3}$$

vi) *P_D is the unique solution of the semimartingale problem $(X, \mathcal{D}^0; \lambda_0, \alpha, \beta, \nu)$, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Remark. vi) means X is a semimartingale with predictable triplet (α, β, ν) and (17.1) guarantees that X is q.l.c.

Proof. At first, we observe that due to (17.1), if $g \in J_1$, the processes $\alpha, \beta, g * \nu$ are all continuous and for any $h \in Z$ there exists a constant k such that

$$\mathrm{Var}(\alpha(h)) + \bar{\beta}(h) + (1 \wedge x^2) * \nu \prec kF.$$

Due to conditions i)–iv), all conditions of Theorem 16.11 are satisfied and Theorem 16.11 implies that (X^n) is tight.

Suppose that there is a convergent subsequence of $(\mathcal{L}(X^n))$, for simplicity, we denote it still by $(\mathcal{L}(X^n))$ and assume

$$\mathcal{L}(X^n) \xrightarrow{w} P'. \tag{17.4}$$

P' is a distribution on $(\mathbf{D}, \mathcal{D})$. We will prove that

$$J'(X) = \{t > 0 : P'(\Delta X_t \neq 0) > 0\} = \emptyset.$$

For $t > 0$, $\varepsilon > 0$, by (17.1) there exist $s < t < s'$ such that

$$g_{2/\varepsilon} * \nu_{s'}(y) - g_{2/\varepsilon} * \nu_s(y) < \varepsilon, \quad y \in \mathbf{D}, \tag{17.5}$$

where $g_p(x) = (p|x| - 1)^+ \wedge 1$. Then there are also $r, r' \in R_+ \setminus J'(X)$ and $s \le r < t < r' \le s'$. Now similarly to Lemma 15.20, we have

$$\mathcal{L}(\sup_{r<u\le r'} |\Delta X_u^n|) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(\sup_{r<u\le r'} |\Delta X_u| \,|P'),$$

where $\mathcal{L}(\cdot|P')$ is the distribution under P'. Moreover,

$$P'(|\Delta X_t| > \varepsilon) \le P'(\sup_{r<u\le r'} |\Delta X_u| > \varepsilon) \le \varliminf_n P(\sup_{r<u\le r'} |\Delta X_u^n| > \varepsilon)$$
$$\le \varlimsup_n P(\sup_{s<u\le s'} |\Delta X_u^n| > \varepsilon) \le \varlimsup_n P\Big(\sum_{s<u\le s'} g_{2/\varepsilon}(\Delta X_u^n) \ge 1\Big).$$

Since $(\sum_{s\le u<\cdot} g_{2/\varepsilon}(\Delta X_u^n))^p = (I_{]s,\infty[}g_{2/\varepsilon}) * \nu^n$, Lenglart's inequality implies that

$$P'(|\Delta X_t| > \varepsilon) \le 2\varepsilon + \varlimsup_n P(g_{\varepsilon/2} * \nu_{s'}^n - g_{\varepsilon/2} * \nu_s^n \ge 2\varepsilon).$$

But from $[\nu\text{-}D]$ we have

$$\begin{aligned} g_{2/\varepsilon} * \nu_s^n - (g_{2/\varepsilon} * \nu_{s'}) \circ X^n \xrightarrow{P} 0, \\ g_{2/\varepsilon} * \nu_s^n - (g_{2/\varepsilon} * \nu_s) \circ X^n \xrightarrow{P} 0. \end{aligned} \tag{17.6}$$

Hence (17.6) and (17.5) entail

$$P'(|\Delta X_t| > \varepsilon) \le 2\varepsilon.$$

Since ε may be an arbitrary positive number, $P'(|\Delta X_t| \neq 0) = 0$ and $J'(X) = \emptyset$.

Now it remains to verify that the conditions of Theorem 16.16 are satisfied. Since $J'(X) = \emptyset$, for $\mathcal{L}(X|P')$ the subset D in the assumption satisfies the requirements of Theorem 16.16 and condition i) in Theorem 16.16 is valid. Condition ii) in Theorem 16.16 is deduced from condition iii) in Theorem 16.17 and condition iii) in Theorem 16.16 is just condition v) in Theorem 16.17. Hence Theorem 16.16 implies that X is a semimartingale on $(\mathbf{D}, \mathcal{D}, D, P')$ with predictable triplet (α, β, ν), i.e. P' is a solution of the semimartingale problem $(X, \mathcal{D}^0; \lambda_0, \alpha, \beta, \nu)$. Now from condition vi) we get $P' = P_D$. This means that the limit point of $(\mathcal{L}(X^n))$ is unique and

$$\mathcal{L}(X^n) \xrightarrow{w} P_D = \mathcal{L}(X). \quad \square$$

Conditions iii)—vi) in Theorem 16.17 are imposed upon the predictable triplet (α, β, ν) on Φ_D and condition i) is necessary for $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Condition ii) requires that the triplets $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$ of X^n converge in probability to the triplet (α, β, ν) in a special way. It is not a natural requirement, because conclusion is only concerned with convergence in distribution. Hence it is reasonable to expect that condition ii) should be replaced by $(\alpha^n, \beta^n, g * \nu^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\alpha, \beta, g * \nu)$. But the following example explains that even for counting processes, the convergence in distribution of compensators cannot guarantee the convergence in distribution of processes.

16.18 Example. Suppose the $N = (N_t)$ is a Poisson process on Φ with parameter 1, $\theta \in \mathcal{F}_0$ is a r.v. independent of N, and $P(\theta = 0) = P(\theta = 1) = 1/2$. Let

$$A_t = \log 2(t - \theta(t-1)^+),$$

$$X_t = N_{A_t}, \qquad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t \log 2},$$

$$Y_t = X_t I_{[0,1]}(t) + I_{[X_1 > 0]} N_{t \log 2} I_{]1,\infty[}(t).$$

Then X and Y are counting processes. Since $A = (A_t)$ is continuous and $(\mathcal{G}_t)$-adapted, the compensators of X and Y w.r.t. $(\mathcal{G}_t)$ are

$$X_t^p = A_t,$$

$$Y_t^p = A_t^1 + I_{[X_1 > 0]}(t-1) \log 2 I_{]1,\infty[} = \ln 2(t - I_{[X_1 = 0]}(t-1)^+).$$

Because $A_1 = \ln 2$, X_1 is independent of θ and A,

$$P(X_1 = 0) = e^{-\ln 2} = 1/2, \qquad P(X_1 > 0) = 1/2.$$

Hence $\mathcal{L}(X^p) = \mathcal{L}(Y^p)$. But

$$P(X_2 = 0) = P(X_2 = 0, \theta = 0) + P(X_2 = 0, \theta = 1)$$
$$= e^{-2\log 2}/2 + e^{-\log 2}/2 = 3/8,$$

$$P(Y_2 = 0) = P(X_1 = 0) = e^{-\log 2} = 1/2.$$

Thus X and Y have different distributions.

Now we will give a theorem about weak convergence for square integrable semimartingales and express the conditions in terms of ν and α', β' defined by (2.10), (2.11).

16.19 Theorem. *Suppose that for each n X^n is a locally square integrable semimartingale with predictable characteristics $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$ and*

$$\lim_{a \to \infty} \overline{\lim_n} P((x^2 I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n > \epsilon) = 0, \quad \forall t > 0. \tag{19.1}$$

Let X be the canonical process on Φ_D. If there exist a predictable triplet (α, β, ν) on Φ_D and a dense subset D of R_+ such that the following conditions are satisfied:

i) $\mathcal{L}(X_0^n) \xrightarrow{w} \lambda_0$,

ii) *[sup α'], [β'-D], [ν-D] hold;*

iii) *there exists an increasing (deterministic) continuous function F such that*

$$\mathrm{Var}(\alpha') + \beta + x^2 * \nu \prec F; \tag{19.2}$$

iv)

$$\lim_{a \to \infty} \sup_{y \in \mathbf{D}} (x^2 I_{|x|>a}) * \nu_t(y) = 0, \quad \forall t > 0; \tag{19.3}$$

v) *for each $t \in D$ and $g \in J_1$, the followig mappings are continuous on $\mathbf{D}$:*

$$x \mapsto \alpha_t'(x), \quad x \mapsto \beta_t'(x), \quad x \mapsto g * \nu_t(x);$$

vi) *P_D is the unique solution of the semimartingale problem $(X, \mathbf{D}^0; \lambda_0, \alpha, \beta, \nu)$; then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Proof. We will verify that the assumptions here imply all assumptions of Theorem 16.17. Comparing these assumptions, it suffices to validate (17.1)-(17.3), [sup α] and [$\tilde{\beta}$-D].

For $h \in \mathcal{Z}$, from (2.11) we know that there is a constant k such that

$$|\alpha(h) - \alpha'| = |h(x) - x| * \nu \le k x^2 * \nu,$$

$$\mathrm{Var}(\alpha(h)) \prec \mathrm{Var}(\alpha') + k x^2 * \nu \prec kF.$$

Therefore (17.1) is valid and for $g \in J_1$, $\alpha(h), \beta, g * \nu$ are continuous in t.

For $h \in \mathcal{Z}_c$, set

$$k_a(x) = (h(x) - x)(1 - g_{1/a}(x)) \in J_1,$$

$$\overline{k}_a(x) = (h^2(x) - x)(1 - g_{1/a}(x)) \in J_1,$$

where $g_p(x) = (p|x| - 1)^+ \wedge 1$. From (2.10) and (2.11) ensure

$$\alpha(h) - \alpha' = (h(x) - x) * \nu - k_a(x) * \nu + ((h(x) - x) g_{1/a}(x)) * \nu, \tag{19.4}$$

$$\tilde{\beta}(h) - \tilde{\beta} = x^2 * \nu - h^2(x) * \nu - \overline{k}_a(x) * \nu + ((h^2(x) - x^2) g_{1/a}(x)) * \nu \tag{19.5}$$

There is a constant k such that

$$|h(x) - x| g_{1/a}(x) \le k x^2 I_{[|x|>a]}, \tag{19.6}$$

$$|h^2(x) - x^2| g_{1/a}(x) \le k x^2 I_{[|x|>a]}.$$

Due to (19.3), if a is large enough, the second term in (19.4) and (19.5) may be less than any given positive number. Therefore the continuity condition of Theorem 16.17 may be deduced from condition v) in Theorem 16.19.

Similarly to (19.4), we have

$$\alpha^n(h) - \alpha'^n = k_a(x) * \nu^n + R_a^n,$$
$$|R_a^n| \le kx^2 I_{[|x|>a]} * \nu^n.$$

Hence [sup α] may be deduced from (19.1) (19.3), [ν-D] and [sup α'].

Finally, by (2.12)

$$\tilde{\beta}^n(h) - \beta'^n = \overline{k}_a(x) * \nu^n + \overline{R}^n(a) + \Sigma\gamma^n, \tag{19.7}$$
$$|\overline{R}^n(a)| = |(h^2(x) - x^2) * \nu^n| \le k(x^2 I_{[|x|>a]}) * \nu^n, \tag{19.8}$$
$$\gamma_s^n = (\Delta\alpha_s^n(h))^2 - (\Delta\alpha_s'^n)^2.$$

Therefore, if we can prove $\sum_{s\le t} \gamma_s^n \xrightarrow{P} 0$, then [$\tilde{\beta}$-$D$] may be deduced from (19.8), (19.1), (19.3) and [β'-D]. But

$$\Big|\sum_{s\le t} \gamma_s^n\Big| \le \sum_{s\le t} |\Delta\alpha_s^n(h) - \Delta\alpha_s'^n|(|\Delta\alpha_s^n(h)| + |\Delta\alpha_s'^n|), \tag{19.9}$$
$$\sum_{s\le t} |\Delta\alpha_s^n(h) - \Delta\alpha_s'^n| \le k_a(x) * \nu_t^n + k(x^2 I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n.$$

For fixed t, by (19.2), [ν-D] and (19.1), $(k_a(x) * \nu_t^n + k(x^2 I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n,\ n \ge 1)$ is tight. Owing to [sup α] and [sup α'],

$$\sup_{s\le t} |\Delta\alpha_s^n(h)| = \sup_{s\le t} |\Delta\alpha_s^n(h) - \Delta\alpha_s(h) \circ X^n| \xrightarrow{P} 0, \tag{19.10}$$
$$\sup_{s\le t} |\Delta\alpha_s'^n| = \sup_{s\le t} |\Delta\alpha_s'^n - \Delta\alpha_s' \circ X^n| \xrightarrow{P} 0. \tag{19.11}$$

Now from (19.9)—(19.11) we get $\sum_{s\le t} \gamma_s^n \xrightarrow{P} 0$ and all assumptions of Theorem 16.17 hold. Therefore $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. □

§2. Convergence to a Lévy Process

16.20 Lemma. *Assume that X is a semimartingale (resp. process with independent increments) with predictable triplet (α, β, ν), $\tilde{\alpha}$ is a predictable process with finite variation (resp. deterministics right-continuous function), then $\overline{X} = X - \tilde{\alpha}$ is also a semimartingale (resp. process with*

independent increments) and its predictable triplet $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\nu})$ may be written as follows:

$$\overline{\alpha}_t(h) = \alpha_t(h) - \tilde{\alpha}_t + \sum_{s\le t} \int_R V(s,x)\nu(\{s\} \times dx) + \sum_{s\le t} V(s,0)(1 - a_s),$$
$$\overline{\beta} = \beta,$$
$$\overline{\nu}([0,t] \times A) = \int_0^t \int_R I_A(x - \Delta\tilde{\alpha}_s) I_{[x\ne\Delta\tilde{\alpha}_s]} \nu(ds, dx) + \sum_{s\le t} (1 - a_s) I_{[\Delta\tilde{\alpha}_s\ne 0]} I_A(-\Delta\tilde{\alpha}_s) \tag{20.1}$$

where $a_s = \nu(\{s\} \times \boldsymbol{R})$,

$$V(t,x) = \Delta\tilde{\alpha}_t + h(x - \Delta\tilde{\alpha}_t) - h(x). \tag{20.2}$$

In particular, if $\tilde{\alpha}$ is continuous, then

$$\overline{\alpha}(h) = \alpha(h) - \tilde{\alpha}, \quad \overline{\beta} = \beta, \quad \overline{\nu} = \nu. \tag{20.3}$$

Proof. At first, assume that X is a semimartingale. $\overline{X}^c = X^c$ implies $\overline{\beta} = \beta$. Suppose that $\mu^X, \mu^{\overline{X}}$ are the jump measures of $X, \overline{X}$ respectively, $W \in \tilde{\mathcal{P}}^+$ and $W'(s,x) = W(s, x - \Delta\tilde{\alpha}_s) I_{[x\ne\Delta\tilde{\alpha}_s]}$. Then

$$W * \mu_t^{\overline{X}} = \sum_{s\le t} W(s, \Delta X_s - \Delta\tilde{\alpha}_s) I_{[\Delta X_s \ne \Delta\tilde{\alpha}_s]}$$
$$= W' * \mu_t^X + \sum_{s\le t} W(s, -\Delta\tilde{\alpha}_s) I_{[\Delta\tilde{\alpha}_s\ne 0, \Delta X_s = 0]}.$$

By virtue of Theorem 5.42, there is a sequence (T_n) of predictable times with disjoint graphs such that $\bigcup_n [T_n]$ is the predictable support of the thin set $[\Delta X \ne 0] \cup [\Delta\tilde{\alpha} \ne 0]$. Write $D = [\Delta X \ne 0]$. Then $a = {}^p(I_D)$ and

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}[W * \mu_\infty^{\overline{X}}] \\ &= \boldsymbol{E}(W' * \mu_\infty^X) + \sum_{p\ge 1} \boldsymbol{E}[W(T_p, -\Delta\tilde{\alpha}_{T_p}) I_{[\Delta\tilde{\alpha}(T_p)\ne 0]} I_{D^c}(T_p) I_{[T_p<\infty]}] \\ &= \boldsymbol{E}(W' * \nu_\infty^X) + \sum_{p\ge 1} \boldsymbol{E}[\overline{W}(T_p, -\Delta\tilde{\alpha}_{T_p}) I_{[\Delta\tilde{\alpha}(T_p)\ne 0]}(1 - a_{T_p}) I_{[T_p<\infty]}] \\ &= \boldsymbol{E}[W * \overline{\nu}_\infty], \end{aligned}$$

where $\overline{\nu}$ is defined by (20.1). Thus $(\mu^{\overline{X}})^p = \overline{\nu}$.

Next, let $h \in Z_c$. By (2.2) and direct calculation we have

$$\overline{X}(h) = \overline{X} - \sum[\Delta\overline{X} - h(\Delta\overline{X})]$$
$$= X_0 + M(h) + \alpha(h) - \tilde{\alpha} + V * \mu^X + \sum V(\cdot,0) I_{D^c}.$$

Since $h(x) = x$ while $|x| < c$, $V(t,x) = 0$ while $|x| + |\Delta\tilde{\alpha}_t| < c$. It is easy to know that

$$V * \mu^X \in \mathcal{A}_{loc}, \quad (V * \mu^X)^p = V * \nu,$$

$$\sum V(\cdot,0) I_{D^c} \in \mathcal{A}_{loc}, \quad (\sum V(\cdot,0) I_{D^c})^p = \sum V(\cdot,0)(1-a).$$

Hence

$$\overline{X}(h) - (V * \nu + \Sigma V(\cdot,0)(1-a) + \alpha(h) - \bar{\alpha})$$
$$= X_0 + M(h) + V * (\mu - \nu) + \Sigma V(\cdot,0)(I_{D^c} - (1-a)) \in \mathcal{M}_{loc}.$$

Therefore $\overline{\alpha}(h)$, given by (20.1), is the first characteristic of $\overline{X}$.

Finally, if X is a process with independent increments, calculating the characteristic functions of $\overline{X}$ yields (20.1) and (20.2). □

Remark. For convenience of calculation, introduce the following predictable random measures on $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}$:

$$\nu^*([0,t] \times A) = \nu([0,t] \times A) + \sum_{s \le t} (1 - a_s)\delta_0(A) I_{[a_s > 0] \cup [\tilde{a}_s > 0]}(s),$$

$$\overline{\nu}^*([0,t] \times A) = \overline{\nu}([0,t] \times A) + \sum_{s \le t} (1 - \overline{a}_s)\delta_0(A) I_{[\overline{a}_s > 0] \cup [\tilde{a}_s > 0]}(s),$$

where $\overline{a}_s = \overline{\nu}(\{s\} \times \boldsymbol{R})$. Then for non-negative $f(s,x)$ with $f(s,0) = 0$ we have

$$f * \nu^* = f * \nu, \quad f * \overline{\nu}^* = f * \overline{\nu}.$$

Using these notations, (20.1) may be written as follows:

$$\overline{\alpha}_t(h) = \alpha_t(h) - \overline{\alpha}_t + \sum_{s \le t} \int_R V(s,x) \nu^*(\{s\} \times dx), \tag{20.4}$$

$$\overline{\beta} = \beta,$$

$$\int_0^t \int_R W(s,x) \overline{\nu}^*(ds,dx) = \int_0^t \int_R W(s, x - \Delta\tilde{\alpha}_s) \nu^*(ds,dx), \tag{20.5}$$

where $W \in \tilde{\mathcal{P}}^+$. Moreover, from (2.7) we obtain

$$\tilde{\beta}(h) = \langle M(h) \rangle = \beta + (h - \hat{h}) * \nu^*, \tag{20.6}$$

where $\hat{h}_s = \int h(x)\nu(\{s\} \times dx) = \int h(x)\nu^*(\{s\} \times dx)$. The corresponding characteristic $\tilde{\overline{\beta}}(h)$ for $\overline{X}$ is

$$\overline{\overline{\beta}}(h) = \beta + (h - k)^2 * \overline{\nu}^*, \tag{20.7}$$

$$k_s = \int h(x) \overline{\nu}^*(\{s\} \times dx) = \int h(x - \Delta\tilde{\alpha}_s) \nu^*(\{s\} \times dx)$$
$$= \int h(x - \Delta\tilde{\alpha}_s)\nu(\{s\} \times dx) + (1 - a_s) h(-\Delta\tilde{\alpha}_s). \tag{20.8}$$

In particular,

$$\overline{\overline{\beta}}(h) - \tilde{\beta}(h) = (h - k)^2 * \overline{\nu}^* - (h - \hat{h}) * \nu^*$$
$$= [(h(x - \Delta\tilde{\alpha}) - k)^2 - (h(x) - \hat{h})^2] * \nu^*. \tag{20.9}$$

16.21 Lemma. *Let $h \in \mathcal{Z}_c$ with $|h(x)| \le K$ (constant), $h(x) = x$ while $|x| \le c$. If $\tilde{\alpha} = \alpha(h)$ and*

$$\sup_{s \le t} |\Delta\tilde{\alpha}_s(h)| < \varepsilon < c/2 \quad a.s., \tag{21.1}$$

then for $\overline{\alpha}, \overline{\overline{\beta}}, \nu$ given by (20.1), (20.7) and (20.8) we have

$$\mathrm{Var}_t[\overline{\alpha}(h)] \le [\varepsilon + \omega(\varepsilon,h)]\nu([0,t] \times \{x : |x| > c/2\}), \tag{21.2}$$

$$\sup_{s<t} |\overline{\overline{\beta}}_s(h) - \tilde{\beta}_s(h)| \le 4K[\varepsilon + 3\omega(\varepsilon,h)]\nu([0,t] \times \{x : |x| > c/2\}), \tag{21.3}$$

$$\sup_{s \le t} |g * \overline{\nu}_s - g * \nu_s| \le \omega(\varepsilon, g)\nu([0,t] \times \{x : |x| > 2\varepsilon\}), \tag{21.4}$$

where $\omega(\delta,h) = \sup_{|x-x'| \le \delta} |h(x) - h(x')|$, $g \in J_1$ defined by (7.1) and $g(x) = 0$ as $|x| \le 2\varepsilon$.

Proof. If $|x| < c/2$, then (21.1) implies $|x| + |\Delta\tilde{\alpha}_s| < c$ and $V(s,x) = 0$. Meanwhile, $|V(s,x)| = |\Delta\tilde{\alpha}_s + h(x - \Delta\tilde{\alpha}_s) - h(x)| < \varepsilon + \omega(\varepsilon,h)$. Hence

$$\mathrm{Var}_t(\overline{\alpha}(h)) \le \sup_{s \le t} \sum_{r \le s} \left| \int_{[|x| \ge c]} V(r,x)\nu(\{r\} \times dx) \right|$$
$$\le [\varepsilon + \omega(\varepsilon,h)]\nu([0,t] \times \{x : |x| > c/2\}).$$

$$\sup_{s<t} |g * \overline{\nu}_s - g * \nu_s| = \sup_{s<t} \left| \int_0^s \int_{[|x| > 2\varepsilon]} [g(x - \Delta\alpha_r) - g(x)]\nu(dr \times dx) \right|$$
$$\le \omega(\varepsilon, g)\nu([0,t] \times \{x : |x| > 2\varepsilon\}).$$

If $|x| < c/2$, for h and k given by (20.8), we have

$$|h(x - \Delta\alpha_s(h)) - k_s - h(x) + \hat{h}_s|$$
$$= \left| -\Delta\alpha_s(h) + \Big(\int_{[|x|<c/2]} + \int_{[|x| \ge c/2]} \Big)[h(x) - h(x - \Delta\alpha_s(h))]\nu^*(\{s\} \times dx) \right|$$
$$\le [\varepsilon + \omega(\varepsilon,h)]\nu(\{s\} \times \{|x| \ge c/2\});$$

if $|x| \ge c/2$,

$$|h(x - \Delta\alpha_s) - k_s - h(x) + \hat{h}_s|$$
$$\le \omega(\varepsilon,h) + \left| \int_R [h(x) - h(x - \Delta\alpha_s(h))]\nu^*(\{s\} \times dx) \right| \le 2\omega(\varepsilon,h).$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\le t}|\overline{\widetilde{\beta}}^n_s(h) - \widetilde{\beta}_s(h)| \\
&\le \sum_{s\le t}\int_R \left|h(x-\Delta\bar{\alpha}_s) - k_s)^2 - (h(x) - \hat{h}_s)^2\right|\nu^*(\{s\}\times dx) \\
&\le 4K\sum_{s\le t}\int_{\{|x|<\frac{c}{2}\}} + \int_{\{|x|\ge\frac{c}{2}\}} |h(x-\Delta\bar{\alpha}_s) - k_s - h(x) + \hat{h}_s|\nu^*(\{s\}\times dx) \\
&\le 4K[\varepsilon + 3\omega(\varepsilon, h)]\nu^n([0,t]\times\{|x| > \tfrac{c}{2}\}).
\end{aligned}$$

So (21.2) (21.4) hold. □

16.22 Theorem. *Suppose that for each n X^n is a semimartingale on Φ with predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$ and X is a Lévy process with predictable triplet (α, β, ν). If the following conditions are satisfied: i) $X^n_0 \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$, ii) [sup α], $[\tilde{\beta}\text{-}D]$, $[\nu\text{-}D]$ (cf. (7.1)–(7.3)) hold for a dense subset D of R_+, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Proof. Since X is a Lévy process, without loss of generality, we may assume that X is a Lévy process on canonical filtered probability space Φ_D with deterministic triplet (α, β, ν), which is continuous in t.

At first, assume $\alpha(h) = 0$, for some $h \in Z_c$, then X is a semimartingale. We will verify that all assumptions of Theorem 16.17 are satisfied. Conditions i) and ii) in Theorem 16.17 are just conditons i) and ii) in Theorem 16.22 respectively. Take $F = \beta + (x^2 \wedge 1) * \nu$, then condition iii) holds. Since α, β, ν are deterministic, (17.2) and condition v) hold, and Corollary 11.37 yields condition vi). Therefore by Theorem 16.17 we have $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Next, if $\alpha(h) \ne 0$, set

$$Y = X - \alpha(h), \quad Y^n = X^n - \alpha^n(h).$$

By Lemma 16.20, Y is a Lévy process with predictable triplet $(\bar{\alpha}, \overline{\beta}, \bar{\nu})$:

$$\bar{\alpha}(h) = 0, \quad \overline{\beta} = \beta, \quad \overline{\widetilde{\beta}}(h) = \widetilde{\beta}(h), \quad \bar{\nu} = \nu. \tag{22.1}$$

Y^n is a semimartingale with predictable triplet $(\bar{\alpha}^n, \overline{\beta}^n, \bar{\nu}^n)$:

$$\bar{\alpha}^n_t(h) = \sum_{s\le t}\int_R V(s,x)\nu^{n*}(\{s\}, dx), \tag{22.2}$$

$$\overline{\widetilde{\beta}}^n(h) = \widetilde{\beta}^n + (h - k^n)^2 * \bar{\nu}^{n*}, \tag{22.3}$$

$$k^n_s = \int h(x)\bar{\nu}^{n*}(\{s\}, dx),$$

$$g * \bar{\nu}^{n*}_t = \int_0^t\int_R g(x - \Delta\alpha^n_s(h))\nu^{n*}(ds\times dx). \tag{22.4}$$

We will verify that all assumptions of this theorem also hold for Y^n and Y. Since $\mathcal{L}(Y^n_0) = \mathcal{L}(X^n_0) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X_0) = \mathcal{L}(Y_0)$, Condition i) holds for Y^n and Y. Due to [sup α] and the continuity of $\alpha(h)$, for all $t > 0$,

$$\sup_{s\le t}|\Delta\alpha^n_s(h)| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Meanwhile for $h \in Z_c$, there are $c > 0$ and K such that $|h(x)| \le K$ and $h(x) = x$ while $|x| \le c$. By virtue of $[\nu\text{-}D]$, $(\nu^n([0,t]\times\{x : |x| > c/2\}))_{n\ge1}$ is tight. Therefore Lemma 16.21 and condition ii) in Theorem 16.22 imply that

$$\sup_{s\le t}|\bar{\alpha}^n_s(h)| \xrightarrow{P} 0, \quad \overline{\widetilde{\beta}}^n_t(h) - \widetilde{\beta}_t(h) \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0,$$

$$g * \bar{\nu}^n_t - g * \nu_t \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0,\ g \in J.$$

So all assumptions of this theorem also hold for Y^n and Y. The result proved for the case of $\alpha(h) = 0$ implies $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$. Now, due to [sup α], the continuity and non-randomness of $\alpha(h)$, we get (cf. Problem 15.20)

$$X^n = Y^n + \alpha^n(h) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y + \alpha(h) = X. \qquad \square$$

16.23 Corollary. *Suppose that for each n, X^n is a cadlag process with independent increments on Φ, the predictable triplet of X^n is $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$, and X is a Lévy process with predictable triplet (α, β, ν). If the following conditions are satisfied: i) $X^n_0 \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$, ii) for a dense subset D of R_+, [sup α], $[\tilde{\beta}\text{-}D]$ and $[\nu\text{-}D]$ hold, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Proof. Since X^n and X are processes with independent increments, $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$ and (α, β, ν) are deterministic.

If for each n, X^n is a semimartingale (i.e., $\alpha^n(h)$ is a function with finite variation), then Theorem 16.22 implies $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. In general, set

$$Y^n = X^n - \alpha^n(h), \qquad Y = X - \alpha.$$

Then Y is a Lévy process with predictable triplet $(0, \beta, \nu)$. Y^n is a process with independent increments, its predictable triplet $(\bar{\alpha}^n, \overline{\beta}^n, \bar{\nu}^n)$ is given by (22.2) (22.4). By (21.2), $\bar{\alpha}^n(h)$ is a function with finite variation, and hence Y^n is a semimartingale. Now by the same argument as in Theorem 16.22 we have $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ and $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. □

16.24 Theorem *Suppose that for each n, X^n is a semimartingale on Φ with predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$, and X is a Lévy process with predictable triplet (α, β, ν). If*

$$\lim_{a\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P((x^2 I_{[|x|>a]} * \nu_t^n > \eta) = 0, \quad \forall \eta > 0, t > 0, \tag{24.1}$$

and i) $X_0^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$, ii) *for a dense subset D of $\boldsymbol{R}_+$, [sup α'], [β'-D] and [ν-D] (cf. (7.5) (7.6) (7.21)) hold, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Proof. From the proof of Theorem 16.19 we know that (24.1) and [sup α'], [β'-D] [ν-D] guarantee that [sup α], [$\tilde{\beta}$-D] hold. Hence $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ is deduced from Theorem 16.22. □

16.25 Corollary. *Suppose that for each n, X^n is a process with independent increments, its predictable triplet is $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$, and X is a Lévy process with predictable triplet (α, β, ν). If*

$$\lim_{a\to\infty} \overline{\lim_{n}} (x^2 I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n = 0, \quad \forall t > 0. \tag{25.1}$$

and i) $X_0^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$, ii) *for a dense subset D of $\boldsymbol{R}_+$, [sup α'], [β'-D] and [ν-D] hold, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Proof. From the proof of Theorem 16.19 we know that (25.1) and [sup α'], [β'-D], [ν-D] guarantee that [sup α], [$\tilde{\beta}$-D] hold. Hence $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ is deduced from Corollary 16.23. □

Remark. Theorems 16.22 and 16.24 give sufficient conditions of convergence in law for semimartingales to a Lévy process. Comparing with Theorems 16.17 and 16.19, the assumptions of Theorems 16.22 and 16.24 are rather simple and natural. Even if they are not necessary (cf. the remark after Theorem 16.30), when X^n is a process with independent increments, conditions i) and ii) in Theorem 16.23 (and conditions i) and ii) in Theorem 16.24 under assumption (25.1)) are necessary (cf. Theorem 3.4 and Theorem 3.7 of Chapter VII in Jacod and Shiryaev [1]).

16.26. Assume that $\tilde{\Phi} = (\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}, \boldsymbol{P})$ is a probability space with a filtration of discrete time. Recall that $\tau = (\tau_t)_{t\geq 0}$ is a time change on $\tilde{\Phi}$ if each path of τ is an $\boldsymbol{N}$-valued cadlag function and for each t, τ_t is an $\boldsymbol{F}$-stopping time.

For each n let $U^n = (U_k^n)_{k\geq 1}$ be an adapted sequence of r.v. on $\tilde{\Phi}$, $\tau^n = (\tau_t^n)$ be a time change on $\tilde{\Phi}$. Set

$$\mathcal{G}_t^n = \mathcal{F}_{\tau_t^n},$$

then $\boldsymbol{G}^n = (\mathcal{G}_t^n)$ is a filtration on $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$. Put

$$X_t^n = \sum_{k\leq\tau_t^n} U_k^n, \quad t > 0, \tag{26.1}$$

then X^n is a semimartingale on $\Phi^n = (\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{G}^n, \boldsymbol{P})$. For $h \in Z$, the predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$ of X^n are:

$$\alpha_t^n(h) = \sum_{k\leq\tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[h(U_k^n)], \tag{26.2}$$

$$\tilde{\beta}_t^n(h) = \sum_{k\leq\tau_t^n} \boldsymbol{D}_{k-1}[h(U_k^n)], \quad \beta_t^n = 0, \tag{26.3}$$

$$\nu^n(dt, dx) = \sum_k I_{[x\neq 0, k\leq\tau_t^n(\varepsilon)]} \boldsymbol{P}_{k-1}[U_k^n \in dx]\delta_k(dt),$$

$$g * \nu_t^n = \sum_{k\leq\tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[g(U_k^n) I_{[U_k^n\neq 0]}], \tag{26.4}$$

where $\boldsymbol{E}_{k-1}[\xi] = \boldsymbol{E}[\xi|\mathcal{F}_{k-1}]$, $\boldsymbol{D}_{k-1}[\xi] = \boldsymbol{E}_{k-1}[\xi]^2 - (\boldsymbol{E}_{k-1}[\xi])^2$. Moreover, if $\boldsymbol{E}[(U_k^n)^2] < \infty$, then X^n is a locally square integrable semimartingale and

$$X_t^n = \sum_{k\leq\tau_t^n} U_k^n = \sum_{k\leq\tau_t^n} (U_k^n - \boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n]) + \sum_{k\leq\tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n],$$

$$\alpha_t'^n = \sum_{k\leq\tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n], \tag{26.5}$$

$$\beta_t'^n = \sum_{k\leq\tau_t^n} \boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n]. \tag{26.6}$$

16.27 Theorem. *Assume that for each $n \in \boldsymbol{N}$, $U^n = (U_k^n, k \geq 1)$ is an adapted sequence of r.v. on $\tilde{\Phi}$, $\tau^n = (\tau_t^n)_{t\geq 0}$ is a time change on $\tilde{\Phi}$ with $\tau_0 = 0$, and*

$$X_t^n = \sum_{k\leq\tau_t^n} U_k^n. \tag{27.1}$$

Suppose that X is a Lévy process with predictable triplet (α, β, ν) and $X_0 = 0$.

1) *If for a dense subset D of $\boldsymbol{R}_+$ the following conditions hold:*

[sup α] : $\displaystyle\sup_{s\leq t} \Big| \sum_{k\leq\tau_s^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[h(U_k^n)] - \alpha_s(h) \Big| \xrightarrow{P} 0$, $\forall t > 0$ *and for some $h \in Z_c$,*

[$\tilde{\beta}$-D] : $\displaystyle\sum_{k\leq\tau_t^n} \boldsymbol{D}_{k-1}[h(U_k^n)] \xrightarrow{P} \tilde{\beta}_t(h)$, $\forall t \in D$ *and for some $h \in Z_c$,*

[ν-D] : $\displaystyle\sum_{k\leq\tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[g(U_k^n)] \xrightarrow{P} g * \nu_t$, $\forall t \in D$, $g \in J_1$,

then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

2) *If (U_k^n) satisfies the following conditions:*

$$\lim_{a\to\infty}\overline{\lim_n} P\Big(\sum_{k\le\tau_t^n} E_{k-1}[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|>a]}] > \eta\Big) = 0 \quad \forall \eta > 0, t > 0.$$

and for a dense subset D of R_+

$$[\sup\ \alpha']: \sup_{s\le t}\Big|\sum_{k\le\tau_s^n} E_{k-1}[U_k^n] - \alpha'_s\Big| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0.$$

$$[\beta'\text{-}D]: \sum_{k\le\tau_t^n} D_{k-1}[U_k^n] \xrightarrow{P} \beta'_t, \quad \forall t \in D,$$

$$[\nu\text{-}D]: \sum_{k\le\tau_t^n} E_{k-1}[g(U_k^n)] \xrightarrow{P} g*\nu_t, \quad \forall t\in D, g\in J,$$

then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proof. Since for each semimartingale X^n defined by (27.1), its predictable triplet is given by (26.2)-(26.6), 1) and 2) follow directly from Theorems 16.22 and 16.24 respectively. □

In particular, applying the previous results to a sequence of independent r.v., we get the following corollary.

16.28 Corollary. *Suppose that for each n, $U^n = (U_k^n, k\ge 1)$ is a sequence of F-independent r.v. on $\bar\Phi$, $\tau^n = (\tau_t^n)$ is a time change on $\bar\Phi$ with $\tau_0^n = 0$ and (X_t^n) is defined by (27.1). Let X be a Lévy process with predictable triplet (α,β,ν).*

1) *If for a dense subset D of R_+ the following conditions hold:*

$$[\sup\ \alpha]: \sup_{s\le t}\Big|\sum_{k\le\tau_s^n} E[h(U_k^n)] - \alpha_s(h)\Big| \to 0, \ \forall t>0 \text{ and for some } h\in Z_c.$$

$$[\tilde\beta\text{-}D]: \sum_{k\le\tau_t^n} D[h(U_k^n)] \to \tilde\beta_t(h), \quad \forall t\in D \text{ and for some } h \in Z_c.$$

$$[\nu\text{-}D]: \sum_{k\le\tau_t^n} E[g(U_k^n)] \to g*\nu_t, \quad \forall t\in D, \quad g\in J_1.$$

then $X \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

2) *If (U_k^n) satisfies the following conditions:*

$$\lim_{a\to\infty}\overline{\lim_n} P\Big(\sum_{k\le\tau_t^n} E[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|>a]} > \eta\Big) = 0, \quad \forall\eta>0,\ t>0,$$

and for a dense subset D of R_+

$$[\sup\ \alpha']: \sup_{s\le t}\Big|\sum_{k\le\tau_s^n} E[U_k^n] - \alpha'_s\Big| \to 0. \quad \forall t>0,$$

$$[\beta'\text{-}D]: \sum_{k\le\tau_t^n} D[U_k^n] \to \beta'_t, \quad \forall t\in D,$$

$$[\nu\text{-}D]: \sum_{k\le\tau_t^n} E[g(U_k^n)] \to g*\nu_t, \quad \forall t\in D,\ g\in J_1,$$

then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

16.29 Lemma. *Assume that for each n, X^n is a step process on Φ, μ^n is the jump measure of X^n, $\nu^n = (\mu^n)^p$. Let X be both a step process and a Lévy process, and ν be the dual predictable projection of jump measure μ of X. If the following conditions are satisfied:*

i) $X_0^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

ii) *for a dense subset D of R_+*

$$g*\nu_t^n \xrightarrow{P} g*\nu_t, \quad \forall t\in D,\ g\in J_2, \tag{29.1}$$

where $J_2 = \{g : g(x) \text{ and } g(x)/x \text{ are bounded continuous on } R\setminus\{0\}\}$, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proof. Let (α^n,β^n,ν^n) be the predictable triplet of X^n, then

$$\alpha^n(h) = h(x)*\nu^n,\quad \beta^n = 0,\quad \tilde\beta^n(h) = h^2*\nu^n - \sum(\Delta\alpha^n(h))^2.$$

And the predictable triplet (α,β,ν) of X is

$$\alpha(h) = h*\nu,\quad \beta=0,\quad \tilde\beta(h) = h^2*\nu.$$

Because $J_2\supset J_1$, (29.1) implies $[\nu\text{-}D]$. For each $f\in J_2$, $f*\nu_t$ is continuous in t. Thus Lemma 16.8 entails

$$\sup_{s\le t}|f*\nu_s^n - f*\nu_s| \xrightarrow{P} 0,\quad \forall t>0,\quad f\in J_2.$$

Since $Z_c\subset J_2$, (29.1) also implies $[\sup\ \alpha]$. If $h\in Z_c$, then $h^2\in J_2$, and owing to the continuity of $\alpha(h)$ and $[\sup\ \alpha]$ we have $\sup_{s\le t}|\Delta\alpha_s^n| \xrightarrow{P} 0, \forall t>0$,

$$\begin{aligned}|\tilde\beta_t^n(h) - \tilde\beta_t(h)| &\le |h^2*\nu_t^n - h^2*\nu_t| + \textstyle\sum_{s\le t}|\Delta\alpha_s^n(h)|^2\\ &\le |h^2*\nu_t^n - h^2*\nu_t| + \sup_{s\le t}|\Delta\alpha_s^n(h)||h*\nu_t^n| \xrightarrow{P} 0,\end{aligned}$$

i.e., $[\tilde\beta\text{-}D]$ holds. Therefore Theorem 16.22 implies $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. □

16.30 Theorem. *Assume that for each n, X^n is an adapted counting process, $(X^n)^p - A^n$. X is a Poisson process, $X^p - A$ is continuous. If for a dense subset D of R_+*

$$A_t^n \xrightarrow{P} A_t,\quad \forall t\in D, \tag{30.1}$$

then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proof. X^n is a semimartingale and its predictable triplet (α^n,β^n,ν^n) satisfies

$$\alpha_t^n(h) = h(1)A_t^n,\ \tilde\beta_t^n(h) = h^2(1)\Big(A_t^n - \sum_{s\le t}(\Delta A_s^n)^2\Big),\ g*\nu_t^n = g(1)A_t^n.$$

Similarly, the predictable triplet (α, β, ν) of X satisfies

$$\alpha_t^n(h) = h(1)A_t, \quad \tilde{\beta}_t(h) = h^2(1)A_t, \quad g * \nu_t^n = g(1)A_t.$$

Since A is continuous and nondecreasing in t, it is easy to deduce [sup α], $[\tilde{\beta}\text{-}D]$, $[\nu\text{-}D]$ from (30.1). Thus Theorem 16.22 implies $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. □

Remark. The following example explains that (30.1) is not necessary for convergence of counting processes to a Poisson process.

Suppose that X is a homogeneous Poisson process with $E[X_t] = \lambda t$, (T_k) is the sequence of jump times of X. F is the complete natural filtration of X. Set

$$X_t^n = \sum_{k \geq 1} I_{[t \geq T_k + 1/n]},$$

then X^n is a counting process. Since $(T_k + 1/n)_{k \geq 1}$ is a sequence of predictable times, $X^n \in \mathcal{P}$ and $(X^n)^p = X^n$. Because $T_k + 1/n \to T_k$ as $n \to \infty$, we have $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ by Corollary 15.59. But $(X^n)_t^p = X_t^n \not\to \lambda t = (X)_t^p$.

§3. Convergence to a Continuous Lévy Process

In this paragraph we will apply the general results for convergence in law of semimartingales to a special case, where the limit process is a continuous Lévy process. In particular, we will give sufficient conditions for convergence in law of locally square integrable martingales and semimartingales to a continuous Lévy process. By the way, necessary conditions for these cases are also discussed.

16.31 Lemma. *If for each n, X^n is a semimartingale with jump measure μ^n and predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$, then the following statements are equivalent:*

1) $(\Delta X^n)_t^* = \sup_{s \leq t} |\Delta X_s^n| \xrightarrow{P} 0$, as $n \to \infty$, $\forall t > 0$,

2) $(x^2 I_{[|x| > \varepsilon]}) * \mu_t^n \xrightarrow{P} 0$, as $n \to \infty$, $\forall t > 0$, $\varepsilon > 0$.

3) $[\Delta_0]$: $I_{[|x| \geq \varepsilon]} * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0$, as $n \to \infty$, $\forall t > 0$, $\varepsilon > 0$.

4) $f * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0$, as $n \to \infty$, $\forall t > 0$, $f \in J_1$.

In this case, for any $h, h' \in \mathcal{Z}$ we have

$$\sup_{s \leq t} |\alpha_s^n(h) - \alpha_s^n(h')| \xrightarrow{P} 0, \qquad \sup_{s \leq t} |\tilde{\beta}_s^n(h) - \tilde{\beta}_s^n(h')| \xrightarrow{P} 0, \tag{31.1}$$

$$(\check{X}^n(h))_t^* = \sup_{s \leq t} |\check{X}_s^n(h)| \xrightarrow{P} 0, \tag{31.2}$$

$$(\Delta M^n(h))_t^* = \sup_{s \leq t} |\Delta M_s^n(h)| \xrightarrow{P} 0, \tag{31.3}$$

where $\check{X}^n(h) = \sum(\Delta X^n - h(\Delta X^n))$, $X^n(h) = X^n - \check{X}^n(h) = X_0^n + M^n(h) + \alpha^n(h)$, and $M^n(h) \in \mathcal{M}_{loc,0}$.

Proof. Notice that for $\varepsilon > 0$ and $0 < \delta \leq 1$

$$[(\Delta X^n)_t^* \geq \varepsilon] = \left[\sum_{s \leq t} I_{[|\Delta X_s^n| \geq \varepsilon]} \geq \delta\right] = [I_{[|x| \geq \varepsilon]} * \mu_t^n \geq \delta]$$

$$= [(x^2 I_{[|x| \geq \varepsilon]}) * \mu_t^n \geq \varepsilon^2]. \tag{31.4}$$

Hence 1) $\Longleftrightarrow$ 2). Because $(I_{[|x| \geq \varepsilon]} * \mu^n)^p = I_{[|x| \geq \varepsilon]} * \nu^n$ and $\Delta(I_{[|x| \geq \varepsilon]} * \mu^n) \leq 1$, Lenglart's inequality implies the equivalence of 2) and 3).

For $f \in J_1$, there is a constant a such that $f(x) = 0$ while $|x| < 1/a$ and $|f(x)| \leq a$. Put $g(x) = (\frac{2}{\varepsilon}|x| - 1)^+ \wedge 1 \in J_1$. Then

$$|f * \nu_t^n| \leq a I_{[|x| \geq 1/a]} * \nu_t^n, \qquad I_{[|x| \geq \varepsilon]} * \nu_t^n \leq g * \nu_t^n.$$

Hence 3) and 4) are equivalent. If $h, h' \in \mathcal{Z}$, there exists a constant a such that

$$h(x) = h'(x) = x, \quad |x| \leq 1/a, \qquad |h(x)| \leq a, \quad |h'(x)| \leq a.$$

Thus $|h(x) - h'(x)| \leq 2a I_{[|x| \geq 1/a]}$. By (2.8) and (2.9) we get

$$|\alpha_t^n(h) - \alpha_t^n(h')| = |(h - h') * \nu_t^n| \leq 2a I_{[|x| \geq 1/a]} * \nu_t^n,$$

$$|\tilde{\beta}_t^n(h) - \tilde{\beta}_t^n(h')| = \left|(h^2 - h'^2) * \nu_t^n - \textstyle\sum_{s \leq t}[(\Delta\alpha_s^n(h))^2 - (\Delta\alpha_s^n(h'))^2]\right|$$

$$\leq 8a^2 I_{[|x| \geq 1/a]} * \nu_t^n.$$

Therefore 3) implies (31.1).

Finally, since $[(\check{X}^n(h))_t^* \neq 0] \subset [(\Delta X^n(h))_t^* \geq 1/a]$, (31.2) holds. Meanwhile, if $0 < \varepsilon < 1/a$, we have

$$|\Delta M_t^n(h)| = |\Delta X_t^n(h) - \Delta\alpha_t^n(h)|$$

$$\leq |\Delta X_t^n| + |\Delta \check{X}_t^n(h)| + \left|\int_{[|x| \geq \varepsilon]} h(x)\nu^n(\{t\}, dx)\right| + \varepsilon,$$

$$(\Delta M^n(h))_t^* \leq (\Delta X^n)_t^* + 2(\check{X}^n(h))_t^* + a I_{[|x| \geq \varepsilon]} * \nu_t^n + \varepsilon.$$

Hence (31.3) is true. □

16.32 Lemma. *Assume $M^n \in \mathcal{M}_{loc}^2$ and $t > 0$ is fixed.*

1) *If $(\langle M^n \rangle_t, n \geq 1)$ is tight, then $([M^n]_t, n \geq 1)$, $(\sup_{s \leq t} |M_s^n|, n \geq 1)$ are tight.*

2) *If* $E\sup_{s\le t}|\Delta M_s^n|^2 \le C < \infty$, *then the tightness of* $([M^n]_t,\ n\ge 1)$, $(\sup_{s\le t}|M_s^n|,\ n\ge 1)$ *and* $(\langle M^n\rangle_t,\ n\ge 1)$ *are equivalent.*

Proof. 1) Since $\langle M^n\rangle = [M^n]^p$, $(M^n)^2 - \langle M^n\rangle \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ and $\langle M^n\rangle$ is predictable, 1) may be deduced by Lenglart's inequality.

2) Since $\langle M^n\rangle$ is dominated by $[M^n]$ and $(\Delta[M^n])_t^* = (\Delta M^n)_t^{*2} \in L^1$, the tightness of $(\langle M^n\rangle_t)$ may be deduced from the tightness of $([M^n]_t)$ by Lenglart's inequality. Meanwhile, by Davis inequality, $\sqrt{[M^n]}$ is dominated by $k(M^n)^*$, where $k>0$ is a constant, and $\Delta(M^{n*}) \le (\Delta M^n)^*$. Hence the tightness of $([M^n]_t,\ n\ge 1)$ may also be deduced from that of $((M^n)_t^*,\ n\ge 1)$. □

16.33 Lemma. *Assume that* $M^n \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$, $|\Delta M^n|\le c$ *and for all* $t>0$ $(\Delta M^n)_t^* \xrightarrow{P} 0$.

1) *We have*

$$(\Delta\langle M^n\rangle)_t^* \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t>0. \tag{33.1}$$

2) *If* $([M^n]_t,\ n\ge 1)$ *is tight, then*

$$\sup_{s\le t}|[M^n]_s - \langle M^n\rangle_s| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t>0. \tag{33.2}$$

Proof. 1) Since $\Delta[M^n] = (\Delta M^n)^2 \le c^2$, $E(\Delta[M^n])_t^{*2} \to 0$ by the dominated convergence theorem. But $\Delta\langle M^n\rangle = {}^p(\Delta[M^n])$ and by Doob's inequality (Theorem 2.15)

$$E[\Delta(\langle M^n\rangle)_t^{*2}] \le 4E[(\Delta[M^n])_t^{*2}] \to 0,$$

hence $(\Delta\langle M^n\rangle)_t^* \xrightarrow{P} 0$.

2) Set $Y^n = [M^n] - \langle M^n\rangle$, then $|\Delta Y^n|\le c^2$, $Y^n \in \mathcal{M}^{2,d}_{\mathrm{loc}}$ and

$$\begin{aligned}[Y^n]_t &= \sum_{s\le t}(\Delta[M^n]_s - \Delta\langle M^n\rangle_s)^2 \le 2\sum_{s\le t}[(\Delta[M^n]_s)^2 + (\Delta\langle M^n\rangle_s)^2]\\ &\le 2(\Delta[M^n])_t^*[M^n]_t + 2(\Delta\langle M^n\rangle)_t^*\langle M^n\rangle_t.\end{aligned}$$

Owing to the tightness of $(\langle M^n\rangle_t, n\ge 1)$, (33.1) and the assumptions, we get $[Y^n]_t \xrightarrow{P} 0$. Furthermore, by the boundness of $|\Delta Y|$ and Lenglart's inequality we obtain

$$\sup_{s\le t}|[M^n]_s - \langle M^n\rangle_s| = (Y^n)_t^* \xrightarrow{P} 0.$$

(33.2) holds. □

16.34 Corollary. *If* $M^n \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$, $|\Delta M^n|\le c$, β *is a (deterministic) continuous function, and* D *is a dense subset of* $\mathbf{R}_+$, *then the following statements are equivalent:*

1) $[M^n]_t \xrightarrow{P} \beta_t,\ \ \forall t\in D$,

2) $(\Delta M^n)_t^* \xrightarrow{P} 0$, $\forall t>0$ *and*

$$\langle M^n\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \forall t\in D. \tag{34.1}$$

Proof. 1) ⇒ 2). By Lemma 16.8, 1) is equivalent to

$$\sup_{s\le t}|[M^n]_s - \beta_s| \xrightarrow{P} 0.$$

Then $((\Delta M^n)^2)_t^* = (\Delta[M^n])_t^* \xrightarrow{P} 0$, and (34.1) is deduced from (33.2).

2) ⇒ 1). By Lemma 16.32.1) we know $([M^n]_t, n\ge 1)$ is tight. Now 1) may also be obtained from (33.2). □

16.35 Lemma. *Let* $M^n \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$, $|\Delta M^n|\le c$ *and* $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$. *If*

$$M^n \xrightarrow{\mathcal{L}} M, \tag{35.1}$$

then

$$[M^n] \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle M\rangle. \tag{35.2}$$

Furthermore, if $\langle M\rangle$ *is deterministic, then*

$$\sup_{s\le t}|[M^n]_s - \langle M\rangle_s| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t>0. \tag{35.3}$$

Proof. Let $0 = t_0^k < t_1^k < \cdots$ be a partition of $\mathbf{R}_+$ for each k such that

$$\lim_{k\to\infty}\sup_j |t_j^k - t_{j-1}^k| = 0.$$

By Itô formula,

$$(M^n_{t_j^k} - M^n_{t_{j-1}^k})^2 = 2\int_{]t_{j-1}^k, t_j^k]}(M^n_{u-} - M^n_{t_{j-1}^k})dM^n_u + ([M^n]_{t_j^k} - [M^n]_{t_{j-1}^k}),$$

$$\begin{aligned}[M^n]_t &= \sum_{j\ge 1}(M^n_{t_j^k\wedge t} - M^n_{t_{j-1}^k\wedge t})^2 - 2\sum_{j\ge 1}\int_{]t_{j-1}^k\wedge t, t_j^k\wedge t]}(M^n_{u-} - M^n_{t_{j-1}^k})dM^n_u\\ &= Y_t^{nk} + Z_t^{nk},\end{aligned} \tag{35.4}$$

$$\langle Z^{nk}\rangle_t \le 4[\omega(\max_j(t_j^k - t_{j-1}^k), M^n, t)]^2\langle M^n\rangle_t. \tag{35.5}$$

By the assumptions, (M^n) is C-tight, hence Lemma 15.49 implies

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_n}P(\omega(\max_j(t_j^k - t_{j-1}^k), M^n, t)\ge\eta) = 0, \forall\eta>0, t>0. \tag{35.6}$$

By virtue of the assumptions and Lemma 16.32, $(\langle M^n\rangle_t, n \geq 1)$ is tight for each $t > 0$. Hence (35.5), (35.6) and Lenglart's inequality imply

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_n} P((Z^{nk})_t^* \geq \eta) = 0, \quad \forall t > 0, \eta > 0. \tag{35.7}$$

Next, write $Y_t^k = \sum_{j\geq 1} (M_{t_j^k \wedge t} - M_{t_{j-1}^k \wedge t})^2$. From (35.1) and the remark of Theorem 19.33 we have

$$Y^{nk} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y^k, \quad \text{as } n \to \infty, \quad \forall k \geq 1. \tag{35.8}$$

$$Y^k \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle M\rangle, \quad \text{as } k \to \infty. \tag{35.9}$$

Finally, due to (35.4), (35.7) (35.9), applying Lemma 15.52, we get (35.2). If $\langle M\rangle$ is deterministic and continuous, then (35.2) implies (35.3). □

16.36 Theorem. *Assume that for each n, X^n is a semimartingale on Φ with predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$, and X is a continuous Lévy process with predictable triplet $(\alpha, \beta, 0)$. If [sup α] holds, then the following statements are equivalent:*

1) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

2) i) $X_0^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$,

 ii) *for a dense subset D of $\mathbf{R}_+$*, $[M^n(h)]_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$,

 iii) $[\Delta_0]$: $I_{[|x|\geq\varepsilon]} * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0$, $\forall t > 0, \varepsilon > 0$,

3) i) $X_0^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$,

 ii) *for a dense subset D of $\mathbf{R}_+$*, $[\beta\text{-}D]$ *holds*,

 iii) $f * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0$, $\forall t > 0$, $f \in J_1$

Proof. 1) ⇒ 2). 2) i) is apparent. Since (X^n) is C-tight, Lemma 15.49 implies $(\Delta X^n)_t^* \xrightarrow{P} 0$. Hence by Lemma 16.31, 2)iii) holds and $(\check{X}^n(h))_t^* \xrightarrow{P} 0$. Furthermore, by [sup α] we get

$$\begin{aligned} M^n(h) &= X^n - X_0^n - \check{X}^n(h) - \alpha^n(h) \\ &= X^n - X_0^n - \check{X}^n(h) - \alpha - (\alpha^n(h) - \alpha) \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}} X - X_0 - \alpha = M \in \mathcal{M}_{loc,0}^c. \end{aligned}$$

Notice that $\langle M\rangle = \beta$ is deterministic and M is Gaussian. Therefore (35.2) entails 2)ii).

2) ⟺ 3). By Lemma 16.31, 2) iii) and 3) iii) are equivalent and they imply (31.4). Hence under 2) iii) or 3) iii) the equivalence of 2) ii) and 3) ii) follows from Corollary 16.34.

3) ⇒ 1). This is just the conclusion of Theorem 16.22. □

16.37 Example Assume that W is a Brownian motion on Φ, $b = (b_t)$ is an adapted process with $|b| \leq 1$. Let

$$Y_t = \int_0^t b_s ds + W_t,$$

and G be the usual natural filtration of Y. If ${}^o b$ is the G-optional projection of b, take

$$X_t^n = X_t - \int_0^t (b_s - {}^o b_s) ds + W_t,$$

then the predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$ of X^n on Φ is:

$$\alpha_t^n = \int_0^t (b_s - {}^o b_s) ds, \quad \beta_t^n = t, \quad \nu^n = 0.$$

But X^n is a G-Brownian motion (cf. Problem 16.4), hence $\mathcal{L}(X^n) = \mathcal{L}(W)$.

This example illustrates that [sup α] is not necessary for $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

16.38 Lemma. *Assume for each n, X^n is a semimartingale on Φ with predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$. For $\delta > 0$, write*

$$[\Delta_\delta] : (|x|^\delta I_{[|x|>\varepsilon]}) * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0, \quad as \ n \to \infty, \forall t > 0, \ \varepsilon > 0.$$

1) *If $\delta > 0$ and for every $t > 0$, $((\Delta X^n)_t^{*\delta}, n \geq 1)$ is uniformly integrable, then*

$$\lim_{a\to\infty} \overline{\lim_n} P((|x|^\delta I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n > \eta) = 0, \quad \forall t > 0, \eta > 0. \tag{38.1}$$

2) *For $\delta > 0$, $[\Delta_\delta]$ holds if and only if $[\Delta_0]$ and (38.1) hold.*

3) *If $X^n \in \mathcal{M}_{loc}$ and $[\Delta_1]$ holds, then for every $h \in Z$*

$$\mathrm{Var}(\alpha^n(h))_t \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0. \tag{38.2}$$

4) *If (38.2) holds, $\alpha^{nc}(h) = \alpha^n(h) - \Sigma\Delta\alpha^n(h)$, then*

$$(\alpha^{nc}(h))_t^* + \sum_{s\leq t} |\Delta\alpha_s^n(h)| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0. \tag{38.3}$$

5) *If (38.3) holds, then*

$$(\alpha^n(h))_t^* \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0. \tag{38.4}$$

Proof. 1) Write $V_t^n(a) = (|x|^\delta I_{[|x|>a]}) * \mu_t^n = \sum_{s\leq t} |\Delta X_s^n|^\delta I_{[|\Delta X_s^n|>a]}$. Then $\Delta V_t^n(a) = |\Delta X_t^n|^\delta I_{[|\Delta X_t^n|>a]}$, $(V^n(a))^p = (|x|^\delta I_{[|x|>a]}) * \nu^n$. By

Lenglart's inequality we have

$$P((|x|^\alpha I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n) > \eta)$$
$$< \frac{1}{\eta}(\varepsilon + E[\sup_{s\le t} |\Delta X_s^n|^\delta I_{[|\Delta X_s^n|>a]}]) + P(V_t^n(a) \ge \varepsilon)$$
$$\le \frac{\varepsilon}{\eta} + \Big(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{a^\delta}\Big) E((\Delta X^n)_t^{*\delta} I_{[(\Delta X^n)_t^* > \varepsilon]}).$$

Letting $n \to \infty$, $a \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ successively we get (38.1).

2) For $a > \varepsilon > 0$

$$(|x|^\delta I_{[|x|>\varepsilon]}) * \nu_t^n \le (|x|^\delta I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n + a^\delta I_{[|x|\ge\varepsilon]} * \nu_t^n.$$

Letting $n \to \infty$, $a \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ successively, $[\Delta_\delta]$ follows from $[\Delta_0]$ and (38.1). The reverse implication is apparent.

3) If $X^n \in \mathcal{M}_{loc}$, then $\alpha^n(h) = (h(x) - x) * \nu^n$. For $h \in Z$ there is a constant a such that $h(x) = x$ while $|x| < 1/a$ and

$$\mathrm{Var}(\alpha^n(h))_t \le |h(x) - x| * \nu_t^n \le a(|x| I_{[|x|>1/a]}) * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0.$$

Hence (38.2) is true.

4) and 5) are obvious, since $(\alpha^n(h))_t^* \le (\alpha^{nc}(h))_t^* + \sum_{s\le t} |\Delta\alpha_s^n(h)| \le \mathrm{Var}(\alpha^n(h))_t$. □

16.39 Lemma. *Let $X^n \in \mathcal{M}_{loc,0}$ with $|\Delta X^n| \le K$ (a constant), $X \in \mathcal{M}_{loc,0}^c$ with deterministic $\langle X\rangle = \beta$, and D be a dense subset of R_+. Then the following statements are equivalent:*

1) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

2) $[X^n]_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$.

3) $[\Delta_0]$ *and* $\langle X^n\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$.

Proof. Notice that 2) implies $(\Delta X^n)_t^{*2} = (\Delta[X^n])_t^* \xrightarrow{P} 0$. If take $h \in Z_c$ such that $h(x) = x$ while $|x| \le K$, then $\check{X}^n(h) = 0$, $\alpha^n(h) = 0$, $M^n(h) = X^n$. Hence the equivalence is just a consequence of Theorem 16.36. □

16.40 Theorem. *Let $X^n \in \mathcal{M}_{loc,0}$ with predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$, $X \in \mathcal{M}_{loc,0}^c$ with deterministic $\langle X\rangle = \beta$, and D be a dense subset of R_+. If for some $h \in Z$*

$$(\alpha^{nc}(h))_t^* + \sum_{s\le t} |\Delta\alpha_s^n(h)| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0, \tag{40.1}$$

then the following assertions are equivalent:

1) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

2) $[X^n]_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$,

3) $[\Delta_0]$ *and for some(every)* $h \in Z$, $[M^n(h)]_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$,

4) $[\Delta_0]$ *and* $[\tilde{\beta}\text{-}D]$ *holds for some(every)* $h \in Z$:

$$\tilde{\beta}_t^n(h) = \langle M^n(h)\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \forall t \in D.$$

Proof. At first, notice that each of 1) and 2) implies $[\Delta_0]$. By Lemma 16.38.5), (40.1) entails $[\sup\ \alpha]$. Then by Theorem 16.36, 1), 3) and 4) are equivalent to each other.

If $h \in Z$ satisfies

$$h(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1/a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \qquad |h(x)| \le a, \tag{40.2}$$

then

$$|[X^n]_t - [M^n(h)]_t| = \Big|\sum_{s\le t} (\Delta X_s^n)^2 - \sum_{s\le t} (h(\Delta X_s^n) - \Delta\alpha_s^n(h))^2\Big|$$
$$\le \sum_{s\le t} |(\Delta X_s^n)^2 - (h(\Delta X_s^n))^2| + 3a \sum_{s\le t} |\Delta\alpha_s^n(h)|,$$
$$[|[X^n]_t - [M^n(h)]_t| > \varepsilon] \subset \Big[(\Delta X^n)_t^* > \frac{1}{a}\Big] \cup \Big[\sum_{s\le t} |\Delta\alpha_s^n(h)| > \frac{\varepsilon}{3a}\Big].$$

Due to $[\Delta_0]$ and (40.1), 2) and 3) are equivalent. □

16.41 Theorem. *Let $X^n \in \mathcal{M}_{loc,0}^2$, $X \in \mathcal{M}_{loc,0}^{2,c}$ with deterministic $\langle X\rangle = \beta$ and D be a dense subset of R_+. Recall*

$$[\Delta_2]: \qquad (x^2 I_{[|x|>\varepsilon]}) * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Then the following assertions are equivalent:

1) $[\Delta_2]$ *and* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

2) $[\Delta_2]$ *and* $\langle X^n\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$,

3) $[\Delta_2]$ *and* $[X^n]_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$,

4) $[\Delta_2]$ *and* $\langle M^n(h)\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$ *and for some* $h \in Z$,

5) $[\Delta_2]$ *and* $[M^n(h)]_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$ *and for some* $h \in Z$,

6) $\langle X^n\rangle \xrightarrow{P} \beta_t$, $[X^n]_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$,

7) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *and* $\langle X^n\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$.

Proof. Due to Lemma 16.38, $[\Delta_2]$ implies $[\Delta_0]$ and (40.1). So by Theorem 16.40, we know 1), 3), 4) and 5) are equivalent mutually. If $[\Delta_2]$

holds and $h \in \mathcal{Z}$ satisfies (40.2), then

$$|\langle X^n\rangle_t - \langle M^n(h)\rangle_t| = \left|(x^2 - h^2(x)) * \nu_t^n + \sum_{s\le t}(\Delta \alpha_s^n(h))^2\right|$$

$$\le (a^4+1)(x^2 I_{[|x|>\frac{1}{a}]}) * \nu_t^n + a\sum_{s\le t}|\Delta\alpha_s^n(h)| \xrightarrow{P} 0.$$

Hence 2) and 4) are equivalent.

It is obvious that 6) is deduced from 2) and 3). Conversely, if 6) is true, then $[\Delta_0]$ holds and

$$(|x| I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n \le \frac{1}{a}(x^2 I_{[|x|>a]}) * \nu_t^n \le \frac{1}{a}\langle X^n\rangle_t.$$

Hence (38.1) holds for $\delta = 1$. Now Lemma 38.1 implies (38.3). Thus for h satisfying (40.2) by Theorem 16.40 we have

$$\langle X^n\rangle_t - \langle M^n(h)\rangle_t = \langle X^n\rangle_t - \beta_t - (\langle M^n(h)\rangle_t - \beta_t) \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0,$$

$$|(x^2 - h^2(x)) * \nu_t^n| = \left|\langle X^n\rangle_t - \langle M^n(h)\rangle_t - \textstyle\sum_{s\le t}(\Delta\alpha_s^n(h))^2\right|$$

$$\le |\langle X^n\rangle_t \langle M^n(h)\rangle_t| + a\,\mathrm{Var}(\alpha^n(h))_t \xrightarrow{P} 0,$$

$$(x^2 I_{[|x|\ge\varepsilon]}) * \nu_t^n \le (x^2 I_{[|x|\ge a]}) * \nu_t^n + a^2 I_{[|x|\ge\varepsilon]} * \nu_t^n$$

$$\le |(x^2 - h^2(x)) * \nu_t^n| + 2a^2 I_{[|x|\ge\varepsilon\wedge(1/a)]} * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0.$$

$[\Delta_2]$ holds and therefore 6) is equivalent to 2).

If 7) holds, $[\Delta_0]$ is also true. By the same argument, $[\Delta_2]$ may be deduced from $[\Delta_0]$ and $\langle X^n\rangle_t \xrightarrow{P} \beta_t$, $\forall t \in D$. Hence 7) is also equivalent to 2). □

16.42 Recall the notations in 16.26. For each n let $U^n = (U_k^n, k \ge 1)$ be an adapted sequence of r.v. on $\bar{\Phi} = (\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_k)_{k\ge 0}, \boldsymbol{P})$. $\tau^n = (\tau_t^n)$ be a time change on $\bar{\Phi}$. Write

$$X_t^n = \sum_{k\le\tau_t^n} U_k^n. \tag{42.1}$$

Then the following statements are obtained, while applying Lemma 16.38 to X^n:

1) $\max_{1\le k\le\tau_t^n}|U_k^n| \xrightarrow{P} 0$ is equivalent to $[\Delta_0]$: $\sum_{j=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{P}_{k-1}(|U_k^n| > \varepsilon) \xrightarrow{P} 0$.

2) If $U^n = (U_k^n, k \ge 1)$ is a sequence of martingale differences, i.e., $\boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n] = 0$, $[\Delta_0]$ holds and $(\max_{1<k<\tau_t^n}|U_k^n|, n \ge 1)$ is uniformly integrable, then $\sum_{k=1}^{\tau_t^n} |\boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n I_{[U_k^n|<a]}]| \xrightarrow{P} 0$.

3) If $[\Delta_2]$ holds: $\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|>\varepsilon]}] \xrightarrow{P} 0$, $\forall\varepsilon > 0$, then $[\Delta_0]$ is valid.

Applying these results to X^n in (42.1), we may get diverse conditions for the sums in row of array $(U_k^n, k \ge 1, n > 1)$. The next theorem is an example.

16.43 Theorem. *Suppose that for each n, $(U_k^n, k \ge 1)$ is a sequence of martingale differences on $\tilde{\Phi}$, $\tau^n = (\tau_t^n)$ is a time change on $\tilde{\Phi}$. Let $X \in \mathcal{M}_{loc,0}^{2,c}$ with deterministic $\langle X\rangle = \beta$ and D be a dense subset of $\boldsymbol{R}_+$. If one of the following conditions holds:*

1) $\boldsymbol{E}[\max_{1\le k\le\tau_t^n}|U_k^n|] \to 0$, $\sum_{k=1}^{\tau_t^n}(U_k^n)^2 \xrightarrow{P} \beta_t$, *as* $n \to \infty, \forall t \in D$,

2) $\max_{1\le k\le\tau_t^n}|U_k^n| \xrightarrow{P} 0$, $\sum_{k=1}^{\tau_t^n}(U_k^n)^2 \xrightarrow{P} \beta_t$, $\sum_{k=1}^{\tau_t^n}|\boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|>1]}]| \xrightarrow{P} 0$, *as* $n \to \infty$, $\forall t \in D$,

3) $\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|>\varepsilon]}] \xrightarrow{P} 0$, $\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[(U_k^n)^2] \xrightarrow{P} \beta_t$, *as* $n \to \infty$, $\forall t \in D, \varepsilon > 0$, *then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, where X^n is defined by* (42.1).

The following corollary is usual called Donsker's invariance principle.

16.44 Corollary. *Suppose $(Y_k, k \ge 1)$ is an i.i.d. sequence of r.v., $\boldsymbol{E}[Y_k] = 0$, $\boldsymbol{D}[Y_k] = 1$. Let*

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]} Y_k.$$

Then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} W$, where W is a standard Brownian motion.

Proof. Take $\mathcal{F}_k = \sigma\{Y_j, j \le k\}$, $U_k^n = \frac{1}{\sqrt{n}}Y_k$, $\tau_t^n = [nt]$, then

$$\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{E}[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|>\varepsilon]}] = \frac{[nt]}{2}\boldsymbol{E}[Y_1^2 I_{[|Y_1|>\sqrt{n}\varepsilon]}] \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

Hence $[\Delta_2]$ is valid. Meanwhile,

$$\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{D}[(U_k^n)] = \frac{[nt]}{n} \to t, \quad \text{as } n \to \infty.$$

So the condition 16.43.3) holds and $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} W$ by Theorem 16.43. □

§4. Convergence to a Generalized Diffusion

16.45 Definition. If X is a semimartingale on a filtered probability space $\Phi = (\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$ and for some $h \in \mathcal{Z}_c$ its predictable triplet (α, β, ν)

can be expressed by

$$\alpha_t(h) = \int_0^t b(s, X_s)ds, \qquad \beta_t = \int_0^t a(s, X_s)ds, \tag{45.1}$$

$$\nu(dt, dx) = K(t, X_t, dx)dt, \tag{45.2}$$

where $a \geq 0$ and b are Borel functions on $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}$. K is a transition kernel from $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}$ to $\boldsymbol{R}$ satisfying

$$K(t, x, \{0\}) = 0, \quad \int (1 \wedge y^2) K(t, x, dy) < \infty, \quad \forall t > 0,$$

then X is called *a generalized diffusion* or *a diffusion with jumps*. (b, a, K) is also called the *infinitesimal characteristics of* X. In particular, if $\nu = 0$, X is called a *diffusion* and its trajectories are continuous almost surely. If $b(s, x)$, $a(s, x)$ and $K(s, x, dy)$ do not depend upon s, X is called a *homogeneous (generalized) diffusion*.

If $\lambda_0 = \mathcal{L}(X_0)$, then $\boldsymbol{P}$ is a solution of the semimartingale problem $\Gamma_s(X, \boldsymbol{F}; \lambda_0, \alpha, \beta, \nu)$.

From (2.8) it is easy to know that for every $h \in Z$, $\alpha(h)$ has the same expression as (45.1) with a different $b(s, x)$ depending upon h and

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_t(h) &= \int_0^t \tilde{a}(s, X_s, h)ds, \\ \tilde{a}(s, x, h) &= a(s, x) + \int K(s, x, dy)h^2(y). \end{aligned} \tag{45.3}$$

Let X be a homogeneous generalized diffusion with infinitesimal characteristics (b, a, K). For $f \in \boldsymbol{C}^2(\boldsymbol{R})$ put

$$Af(x) = b(x)f'(x) + \frac{1}{2}a(x)f''(x) + \int K(x, dy)[f(x+y) - f(x) - h(y)f'(y)].$$

Then by Itô formula it is easy to known that

$$Y_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s)ds, \quad t \geq 0,$$

is a local martingale.

16.46 Definition. Assume that X is a homogeneous generalized diffusion with predictable triplet (α, β, ν). If

i) for each $x \in \boldsymbol{R}$, $\Gamma_s(X, \boldsymbol{F}; \delta_x, \alpha, \beta, \nu)$ has a unique solution $\boldsymbol{P}_x$,

ii) for each $A \in \mathcal{F}$, $x \mapsto \boldsymbol{P}_x(A)$ is a Borel function,

then we say that the *uniqueness-measurability hypothesis* holds for X.

If X satisfies this hypothesis, for every distribution λ on $\boldsymbol{R}$ the semimartingale problem $\Gamma_s(X, \boldsymbol{F}; \lambda, \alpha, \beta, \nu)$ has a unique solution.

The conditions for validity of the uniqueness-measurability hypothesis can be found in §III 2.c of Jacod and Shiryaev [1].

It is easy to verify that the uniqueness-measurability hypothesis holds for Brownian motion and Ornstein-Uhlenbeck processes.

16.47 Theorem. *Suppose for each n, X^n is a homogeneous generalized diffusion on Φ with infinitesimal characteristics (b^n, a^n, K^n) for some $h \in Z_c$, and X is a homogeneous generalized diffusion on the canonical probability space Φ_D with infinitesimal characteristics (b, a, K) for $h \in Z_c$. If* i) $X_0^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$, ii) $b^n \rightrightarrows b$, $a^n \rightrightarrows a$, $K^n \rightrightarrows K(\cdot, g)$, $\forall g \in J_1$, iii) *the uniqueness-measurability hypothesis is met for X, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Proof. For simplicity, we only prove this theorem under the following additional assumptions of uniformity:

$$\sup_x |b^n(x) - b(x)| \to 0, \quad \sup_x |a^n(x) - a(x)| \to 0, \tag{47.1}$$

$$\sup_x |K^n(x, g) - K(x, g)| \to 0, \quad \text{as} \quad n \to \infty, \quad \forall g \in J_1, \tag{47.2}$$

$$\sup_x \left[|b(x)| + a(x) + \int K(x, dy)(1 \wedge y^2)\right] \leq L < \infty, \tag{47.3}$$

$$\lim_{b \to \infty} \sup_x K(x, \{y : |y| \geq b\}) = 0. \tag{47.4}$$

For the general case, the proof needs to use the stopping technique and is left to the reader (cf. Problem 16.2 or Jacod and Shiryaev [1]).

Now we will verify that all conditions of Theorem 16.17 are met. Condition i) in Theorem 16.17 is just the condition i) in Theorem 16.47. From (45.1) and (47.1) we have

$$|\alpha_t^n(h) - \alpha_t(h) \circ X^n| = \left|\int_0^t b^n(X_s^n) - b(X_s^n)ds\right| \leq t \sup_x |b^n(x) - b(x)| \to 0.$$

Hence [sup α] holds. Similarly, [β-$\boldsymbol{R}_+$], [ν-$\boldsymbol{R}_+$] also hold and the condition i') in Theorem 16.17 is satisfied. If take $F(t) = Lt$, then (47.3) implies (17.3). The condition iv) in Theorem 16.17 follows from (47.4).

By virtue of the condition ii) in Theorem 16.47 and Lemma 15.61, b, a and $K(\cdot, g)$ are continuous in x and by (47.3) they are bounded. Hence by (45.1)-(45.4), the condition v) in Theorem 16.17 takes place.

Finally, the condition vi) in Theorem 16.17 follows from the condition iii) in Theorem 16.47. Therefore from Theorem 16.17 we know $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. □

Let X be a homogeneous generalized diffusion with infinitesimal cha-

racteristics (b, a, K). If $\int y^2 K(x, dy) < \infty$, then X is a locally square integrable semimartingale. Let

$$b'(x) = b(x) + \int K(x, dy)(y - h(y)),$$

$$a'(x) = a(x) + \int K(x, dy)y^2,$$

then

$$\alpha'_t = \int_0^t b'(X_s)ds, \quad \beta'_t = \int_0^t a'(X_s)ds.$$

16.48 Theorem. *Assume that for each n, X^n is a homogeneous generalized diffusion on Φ with infinitesimal characteristics (b^n, a^n, K^n) for some $h \in \mathcal{Z}$,*

$$\lim_{b \to \infty} \overline{\lim_{n}} \sup_{|x| \leq a} \int K^n(x, dy)y^2 I_{[|y| \geq b]} = 0, \tag{48.1}$$

and X is a homogeneous generalized diffusion on Φ_D with infinitesimal characteristics (b, a, ν) for $h \in \mathcal{Z}$. If i) $X_0 \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$, ii) $b'^n \Rightarrow b, a'^n \Rightarrow a'$, $K^n(\cdot, g) \Rightarrow K(\cdot, g)$, $\forall g \in J_1$, iii) *the uniqueness-measurability hypothesis is satisfied for X, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Proof. It is easy to verify that (48.1) and $b'^n \Rightarrow b'$, $a'^n \Rightarrow a'$ imply $b^n \Rightarrow b$, $a^n \Rightarrow a$. So $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ follows from Theorem 16.47. □

16.49 Corollary. *Suppose the infinitesimal characteristics of a homogeneous generalized diffusion X^n is $(b^n, 0, K^n)$,*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{|x| \leq a} \int K^n(x, dy)y^2 I_{[|y| > \varepsilon]} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, a > 0. \tag{49.1}$$

and X is a homogeneous diffusion on Φ_D with infinitesimal characteristics $(b, a, 0)$. If i) $X_0^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$, ii) $b'^n \Rightarrow b, a'^n \Rightarrow a$, iii) *the uniqueness-measurability hypothesis is satisfied for X, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

16.50 Example. Assume that Y^n is a homogeneous simple birth-death process with state space $\mathbf{Z}$, birth rate λ_n and death rate μ_n, i.e., Y^n is a Markov step process with infinitesimal characteristic (see (XV.64.1))

$$Q^n(x, A) = \lambda_n \delta_{x+1}(A) + \mu_n \delta_{x-1}(A).$$

Hence Y^n is also a homogeneous diffusion with jumps. Let $X_t^n = h_n Y_t^n$, where h_n is a real. Then X^n is also a homogeneous diffusion with jumps.

its infinitesimal charactersitics are

$$K^n(x, dy) = \lambda_n \delta_{h_n}(dy) + \mu_n \delta_{-h_n}(dy),$$

$$b'^n(x) = \int y K^n(x, dy) = (\lambda_n - \mu_n)h_n, \tag{50.1}$$

$$a'^n(x) = \int y^2 K^n(x, dy) = (\lambda_n + \mu_n)h_n^2.$$

If λ_n, μ_n and h_n obey the following conditions:

$$h_n \downarrow 0, \ (\lambda_n - \mu_n)h_n \to m, \ (\lambda_n + \mu_n)h_n^2 \to \sigma^2, \quad \text{as } n \to \infty, \tag{50.2}$$

then K^n in (50.1) satisfies (49.1). Let X be a continuous semimartingale with predictable triplet $(mt, \sigma^2 t, 0)$, i.e., X is a Brownian motion with drift coefficient mt. If $X_0^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$, then by Corollary 16.49 we have $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. In particular, take

$$h_n = 2^{-n}, \quad \lambda_n = 2^{2n-1}, \quad \mu^n = 2^{2n-1}a^{1/2^n},$$

then $(\lambda_n - \mu_n)h_n \to -\frac{1}{2}\log a$, $(\lambda_n + \mu_n)h_n^2 \to 1$ and $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. X is a standard Brownian motion while $a = 1$.

Now we discuss the problem of approximating a diffusion by Markov sequences.

16.51 Theorem. *Assume that for each n, $Y^n = (Y_k^n, k \geq 0)$ is a temporally homogeneous Markov sequence with transition probability $p^n(x, A)$, and X is a homogeneous diffusion on Φ_D with infinitesimal characteristics $(b, a, 0)$. Let $\varepsilon_n \downarrow 0$ and put*

$$X_t^n = Y_{[t/\varepsilon_n]}^n,$$

$$b^n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n}\int (y - x)p^n(x, dy), \quad a^n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n}\int (y - x)^2 p^n(x, dy).$$

If i) $X_0^n = Y_0^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$, ii) $b^n \Rightarrow b$, $a^n \Rightarrow a$ *and*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x} \frac{1}{\varepsilon_n} \int_R (y - x)^2 I_{[|y-x| \geq \delta]} p^n(x, dy) = 0, \quad \forall \delta > 0, \tag{51.1}$$

iii) *the uniqueness-measurability hypothesis is satisfied for X, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Proof. For simplicity, we also prove this theorem under the following additional assumptions of uniformity:

$$\sup_x |b^n(x) - b(x)| \to 0, \quad \sup_x |a^n(x) - a(x)| \to 0, \quad \text{as } n \to \infty \tag{51.2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_x \frac{1}{\varepsilon_n} \int (y - x)^2 I_{[|y-x| \geq \delta]} p^n(x, dy) = 0, \quad \forall \delta > 0. \tag{51.3}$$

$$\sup_x [|b(x)| + a(x)] \leq L < \infty. \tag{51.4}$$

Set $U_k^n = Y_k^n - Y_{k-1}^n$, then

$$X_t^n - X_0^n = Y_{[t/\varepsilon_n]}^n - Y_0^n = \sum_{k=1}^{[t/\varepsilon_n]} U_k^n.$$

X^n is a locally square integrable semimartingale, its predictable triplet $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$ is

$$\nu^n(dt, dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k\varepsilon_n}(dt) p^n(Y_{k-1}^n, Y_{k-1}^n + dx) I_{[x \neq 0]}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k\varepsilon_n}(dt) p^n(X_{t-}^n, X_{t-}^n + dx) I_{[x \neq 0]},$$

$$(x^2 I_{[|x| \geq \varepsilon]}) * \nu_t^n = \frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^{\varepsilon_n [t/\varepsilon_n]} \int_R x^2 I_{[|x| \geq \varepsilon]} p^n(X_s^n, X_s^n + dx) ds,$$

$$\alpha_t'^n = \sum_{k=1}^{[t/\varepsilon_n]} E[U_k^n | \mathcal{F}_{k-1}] = \int_0^{\varepsilon_n [t/\varepsilon_n]} b^n(X_s^n) ds$$

$$\beta_t'^n = \sum_{k=1}^{[t/\varepsilon_n]} \{ E[(U_k^n)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] - (E[U_k^n | \mathcal{F}_{k-1}])^2 \}$$

$$= \int_0^{\varepsilon_n [t/\varepsilon_n]} [a^n(X_s^n) - \varepsilon_n (b^n(X_s^n))^2] ds.$$

Then (51.2)–(51.4) imply [sup α'], [β'-R_+] and [ν-R_+]. Similarly to the proof of Theorem 16.47, we can verify that all assumptions of Theorem 16.19 are satisfied. Hence $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ □

16.52 Example. Assume that for each n, $\eta^n = (\eta_k^n, k \geq 1)$ is an i.i.d. sequence of r.v. on $\tilde{\Phi}$ such that

$$P(\eta_k^n = 1) = p_n, \quad P(\eta_k^n = -1) = q_n, \quad p_n + q_n = 1.$$

Set

$$Y_k^n = \sum_{j=1}^{k} h_n \eta_j^n, \quad X_t^n = Y_{[t/\varepsilon_n]}^n = \sum_{k=1}^{[t/\varepsilon_n]} h_n \eta_k^n.$$

Then b^n, a^n and the transition probability p^n of Y^n are:

$$p^n(x, dy) = p_n \delta_{x+h_n}(dy) + q_n \delta_{x-h_n}(dy),$$

$$b^n(x) = \varepsilon_n^{-1} \int (y - x) p^n(x, dy) = h_n(p_n - q_n)/\varepsilon_n,$$

$$a^n(x) = \varepsilon_n^{-1} \int (y - x)^2 p^n(x, dy) = h_n^2/\varepsilon_n,$$

and

$$\int (y - x)^2 I_{[|y-x| > h_n]} p^n(x, dy) = 0.$$

If ε_n, h_n, p_n, and q_n obey the following conditions:

$$\varepsilon_n \downarrow 0, \quad h_n^2/\varepsilon_n \to \sigma^2, \quad (p_n - q_n)/h_n \to m/\sigma^2,$$

then $b^n \rightrightarrows m$, $a^n \rightrightarrows \sigma^2$ and $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ by Theorem 16.51, where X is a continuous Lévy process with predictable triplet $(mt, \sigma^2 t, 0)$ and $X_0 = 0$.

16.53 Example. If for each n, $\eta^n = (\eta_k^n, k \geq 0)$ is an Ehrenfest model, i.e., a Markov sequence with transition probability

$$p^n(x, dy) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l_n}\right)\delta_{x+1}(dy) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{l_n}\right)\delta_{x-1}(dy), \quad |x| \leq l_n.$$

Set $Y_k^n = h_n \eta_k^n$, $X_t^n = Y_{[t/\varepsilon]}^n$, then b^n, a^n and the transition probability of (Y_k^n) are:

$$p^n(x, dy) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l_n}\right)\delta_{x+h_n}(dy) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{l_n}\right)\delta_{x-h_n}(dy), \quad |x| \leq l_n h_n,$$

$$b^n(x) = \varepsilon_n^{-1} \int (y - x) p^n(x, dy) = -\frac{x}{l_n \varepsilon_n} I_{[|x| \leq h_n l_n]},$$

$$a^n(x) = \varepsilon_n^{-1} \int (y - x)^2 p^n(x, dy) = \frac{h_n^2}{\varepsilon_n} I_{[|x| \leq h_n l_n]},$$

and

$$\int (y - x)^2 I_{[|y-x| > h_n]} p^n(x, dy) = 0.$$

If h_n, ε_n, and l_n obey the following conditions:

$$\varepsilon_n \downarrow 0, \quad \frac{1}{\varepsilon_n l_n} \to k, \quad \frac{h_n^2}{\varepsilon_n} \to \sigma^2,$$

then $b^n(x) \rightrightarrows -kx$, $a^n \rightrightarrows \sigma^2$. Let X be a continuous semimartingale with $\alpha_t = -kX_t$, $\beta_t = \sigma^2 t$, $\nu = 0$ and $X_0 = 0$, i.e., X is an Ornstein-Uhlenbeck process, then $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ by Theorem 16.51.

We conclude this paragraph by studying the weak convergence of empirical processes.

16.54 Definition. Let $(Z_i, i \geq 1)$ be an i.i.d. sequence of r.v.,

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{[Z_i \leq t]}, \qquad t \in R, \tag{54.1}$$

is called the *empirical process* of size n for (Z_i).

16.55 Lemma. *Let $(Z_i, i \geq 1)$ be an i.i.d. sequence of non-negative r.v.. Assume that $P(Z_i \leq t) = F(t)$ is continuous and $F_n(t)$ is the empirical process of size n for (Z_i). Then*

1) *$Y_t^n = nF_n(t)$, $t \geq 0$, is a counting process, its compensator w.r.t. its natural filtration is*

$$(Y^n)_t^p = \int_0^t (n - Y_{s-}^n) \frac{dF(s)}{1 - F(s)}. \tag{55.1}$$

2) *$V_t^n = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t))$, $t \geq 0$, is a semimartingale. If $h \in Z$, $h(x) = x$ while $|x| \leq 1$, then the predictable characteristics $(\alpha^n, \beta^n, \nu^n)$ of V^n are*

$$\alpha_t^n(h) = -\int_0^t V_{s-}^n \frac{dF(s)}{1 - F(s)}, \tag{55.2}$$

$$\tilde{\beta}_t^n(h) = \int_0^t \Big(1 - \frac{V_{s-}^n}{\sqrt{n}(1 - F(s))}\Big) dF(s), \tag{55.3}$$

$$\nu^n(dt, dx) = \Big[n - \sqrt{n}\frac{V_{t-}^n}{1 - F(t)}\Big] dF(t)\delta_{1/n}(dx). \tag{55.4}$$

Proof. 1) For every i, $A_t = I_{[t \geq Z_i]}$ is a single step process, its compensator w.r.t. its natural filtration is

$$A_t^p = \int_0^t I_{[0, Z_i]}(s) \frac{dF(s)}{1 - F(s)} = \int_0^t (1 - A_{s-}) \frac{dF(s)}{1 - F(s)}.$$

Since $(Z_i, i \geq 1)$ are independent, $(Y_n)^p = \Big(\sum_{i=1}^n I_{[Z_i \leq t]}\Big)^p$ has the form of (55.1).

2) Since $h(x) = x$ while $|x| \leq 1$ and $\Delta V^n \leq 1/\sqrt{n}$, we have $h(\Delta V^n) = \Delta V^n$. Because

$$V_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_t^n - (Y^n)_t^p) + \Big(\frac{1}{\sqrt{n}}(Y^n)_t^p - \sqrt{n}F(t)\Big),$$

hence

$$\alpha_t^n(h) = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y^n)_t^p - \sqrt{n}F(t) = -\int_0^t V_{s-}^n \frac{dF(s)}{1 - F(s)}.$$

Let μ^n be the jump measure of V^n and $g \in J_1$, then

$$g * \mu_t^n = \sum_{s \leq t} g(\Delta Y_s^n / \sqrt{n}) = \sum_{s \leq t} g\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) I_{[\Delta Y_s^n = 1]} = g\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) Y_t^n,$$

$$g * \nu_t^n = g\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)(Y^n)_t^p = g\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \int_0^t \Big[n - \sqrt{n}\frac{V_{s-}^n}{1 - F(s)}\Big] dF(s).$$

Thus (55.4) holds.

Finally, $(Y^n - (Y^n)^p)/\sqrt{n}$ is a martingale with locally integrable variation. Hence $\beta^n = 0$ and

$$\tilde{\beta}_t^n(h) = h^2 * \nu_t^n = \int_0^t \Big(1 - \frac{V_{s-}^n}{\sqrt{n}(1 - F(s))}\Big) dF(s).$$

Therefore (55.2)–(55.4) are all valid. □

16.56 Definition. $X = (X_t, 0 \leq t \leq 1)$ is a *Brownian bridge* if it is a centered continuous Gaussian process with covariance function $c(s,t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$, $s, t \in [0,1]$. (cf. Problem 2.16.) A Brownian bridge is also a continuous semimartingale w.r.t. its usual natural filtration with predictable triplet (α, β, ν) as follows (cf. Problem 16.10):

$$\alpha_t = -\int_0^t \frac{X_s}{1 - s} ds, \quad \beta_t = t, \quad \nu = 0. \tag{56.1}$$

16.57 Theorem. *Let $(Z_i, i \geq 1)$ be an i.i.d. sequence of r.v., uniformly distributed on $(0,1)$, $F_n(t)$ be the empirical process defined by (54.1), $V_t^n = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$, $0 \leq t \leq 1$. Then*

$$V^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X,$$

where X is a Brownian bridge.

Proof. Let $T \in (0,1)$ be fixed. Consider the stopped processes of X and V^n at T:

$$X_t(T) = X_{t \wedge T}, \quad V_t^n(T) = V_{t \wedge T}^n.$$

By (56.1), the predictable triplet $(\alpha(T), \beta(T), \nu(T))$ of $X(T)$ is

$$\alpha(T)_t = -\int_0^{t \wedge T} \frac{X_s}{1 - s} ds, \quad \beta(T)_t = t \wedge T, \quad \nu(T) = 0.$$

It is easy to verify that they meet the localized conditions iii), iv) in Theorem 16.17 (cf. Problem 16.3). Meanwhile, by Lemma 16.55 the predictable triplet $(\alpha^n(T), \beta^n(T), \nu^n(T))$ of $V^n(T)$ is:

$$\alpha^n(h, T)_t = \int_0^{t \wedge T} V_s^n(T) \frac{1}{1 - s} ds,$$

$$\tilde{\beta}^n(h, T)_t = \int_0^{t \wedge T} \Big(1 - \frac{V_s^n}{\sqrt{n}(1 - s)}\Big) ds,$$

$$g * \nu^n(T)_t = \int_0^{t \wedge T} g\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big[n - \frac{\sqrt{n}}{1 - s} V_s^n(T)\Big] ds.$$

For $g \in J_1$, $g\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) = 0$ while n is large enough. Hence $g * \nu^n(T) = 0$ and

$$g * \nu^n(T) - (g * \nu(T)) \circ V^n(T) = 0,$$

$$\alpha^n(h, T) - \alpha(h, T) \circ V^n(T) = 0,$$

$$\tilde{\beta}^n(h, T) - \tilde{\beta}(h, T) \circ V^n(T) = -\int_0^{t \wedge T} \frac{V_s^n}{\sqrt{n}(1 - s)} ds.$$

Since

$$E\Big|\int_0^{t\wedge T}\frac{V_s^n}{\sqrt{n}(1-s)}ds\Big| \le \int_0^{t\wedge T}\frac{(E(V_s^n)^2)^{1/2}}{\sqrt{n}(1-s)}ds$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{T\wedge t}\sqrt{\frac{s}{1-s}}ds \to 0, \quad \text{as } n\to\infty,$$

we have

$$\tilde{\beta}^n(h,T) - \tilde{\beta}(h,T)\circ V^n(T) \xrightarrow{P} 0.$$

Therefore for each $T\in(0,1)$, $V^n(T)\xrightarrow{\mathcal{L}} X(T)$ (cf. Problem 16.3).

Let $U_t^n = V_{1-t}^n$, $U_t^n(T) = U_{t\wedge T}^n = V_{1-t\wedge T}^n$, $t\in(0,1)$. Because Z_i and $1-Z_i$ are identically distributed, so are V^n and U^n. Thus $U^n(T)\xrightarrow{\mathcal{L}} X(T)$.

Now we extend V^n and X to R_+ such that $V_t^n = X_t = 0$ while $t>1$. For $N\ge 1$ we have

$$\sup_{s\le N}|V_s^n| \le \sup_{s\le N}\Big|V_s^n\Big(\frac{2}{3}\Big)\Big| + \sup_{s\le N}\Big|U_s^n\Big(\frac{2}{3}\Big)\Big|,$$

$$\omega'(\delta,V^n,N) \le \omega'\Big(\delta,V^n\Big(\frac{2}{3}\Big),N\Big) + \omega'\Big(\delta,U^n\Big(\frac{2}{3}\Big),N\Big), \quad \text{for } \delta<\frac{1}{3}.$$

Hence from Theorem 15.47 we obtain the tightness of (V^n).

Finally, for $0\le t_1<t_2<\cdots<t_p$, if $t_{i-1}<1\le t_i$ for some i, $V^n(t_{i-1})\xrightarrow{\mathcal{L}} X(t_{i-1})$ entails $(V_{t_1}^n,\cdots,V_{t_{i-1}}^n)\xrightarrow{\mathcal{L}}(X_{t_1},\cdots,X_{t_{i-1}})$. Moreover, $V_{t_i}^n=\cdots=V_{t_p}^n=X_{t_i}=\cdots=X_{t_p}=0$, so we have $(V_{t_1}^n,\cdots,V_{t_p}^n)\xrightarrow{\mathcal{L}}(X_{t_1},\cdots,X_{t_p})$. Since (V^n) is tight, we get $V^n\xrightarrow{\mathcal{L}} X$. □

Problems and Complements

16.1 On the canonical measurable space $(\mathbf{D},\mathcal{D}^0,\boldsymbol{D}^0)$, let $\mathcal{T}^0=\{T: T$ is a $\boldsymbol{D}^0$-stopping time$\}$. We say that the local uniqueness holds for the semimartingale problem $\Gamma_s(X,\boldsymbol{D}^0;\lambda,\alpha,\beta,\nu)$ if for every $T\in\mathcal{T}^0$, any two solutions $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}'$ of the "stopped" semimartingale problem $\Gamma_s(X,\boldsymbol{D}^0;\lambda,\alpha^T,\beta^T,\nu^T)$ coincide on the σ-field $\mathcal{D}_T^0$, where $\nu^T=1_{[0,T]}.\nu$. Prove that if the semimartingale problem $\Gamma_s(X,\boldsymbol{D}^0;\lambda,\alpha,\beta,\nu)$ has a solution $\boldsymbol{P}$ and local uniqueness holds, then for every $T\in\mathcal{T}^0$, $\Gamma_s(X,\boldsymbol{D}^0,\lambda,\alpha^T,\beta^T,\nu^T)$ has a unique solution $\boldsymbol{P}\circ(X^T)^{-1}$.

16.2 Assume that for every $n\in\boldsymbol{N}$, X^n is a semimartingale on Φ with predictable triplet (α^n,β^n,ν^n), X is the canonical process on Φ_D, (α,β,ν) is a predictable triplet on Φ_D, D is a dense subset of $\boldsymbol{R}_+$ and

$S(a)=\inf\{t: |X_t|\ge a \text{ or } |X_{t-}|\ge a\}$, $S^n(a)=\inf\{t: |X_t^n|\ge a$ or $|X_{t-}^n|\ge a\}$. If for some $h\in\mathcal{Z}_c$ the following conditions hold:

i) $\mathcal{L}(X_0^n)\xrightarrow{w}\lambda_0$;

ii)

$[\sup\ \alpha_{loc}]: \ \sup_{s\le t}|\alpha^n_{s\wedge S^n(a)}(h)-\alpha_{s\wedge S(a)}(h)\circ X^n|\xrightarrow{P}0, \quad \forall t,a>0,$

$[\tilde{\beta}_{loc}\text{-}D]: \ \tilde{\beta}^n_{t\wedge S^n(a)}(h)-\tilde{\beta}_{t\wedge S(a)}(h)\circ X^n\xrightarrow{P}0, \quad \forall t\in D, a>0,$

$[\nu\text{-}D]: \ g*\nu^n_{t\wedge S^n(a)}-g*\nu_{t\wedge S(a)}\circ X^n\xrightarrow{P}0, \forall t\in D, a>0, g\in J;$

iii) $\forall a>0$ there is a deterministic increasing continuous function $F(a)$ such that

$$\mathrm{Var}(\alpha^{S(a)})+\beta^{S(a)}+(x^2\wedge 1)*\nu^{S(a)}\prec F(a),$$

iv) $\lim_{b\to\infty}\sup_{y\in\mathbf{D}}\nu(y,[0,t\wedge S(a)]\times\{x:|x|>b\})=0, \quad \forall a,t>0;$

v) $\forall t\in D$, $g\in J_1$, $x\mapsto\alpha_t(x,h)$, $x\mapsto\tilde{\beta}_t(x,h)$, $x\mapsto g*\nu_t(x)$ are continuous functions on $\mathbf{D}$ equipped with the Skorokhod topology;

vi) $\boldsymbol{P}_D$ is a locally unique solution of $\Gamma_s(X,\boldsymbol{D}^0;\lambda_0,\alpha,\beta,\nu)$;

then $X^n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$.

16.3 Assume that for every $n\in\boldsymbol{N}$, X^n is a locally square integrable semimartingale on Φ with predictable triplet (α^n,β^n,ν^n), X, $S(a)$, $S^n(a)$, (α,β,ν), D are the same as in the previous problem. Suppose that

$$\lim_{b\to\infty}\overline{\lim_n}\boldsymbol{P}((x^2 I_{[|x|>b]})*\nu^n_{t\wedge S^n(a)}>\eta)=0, \quad \forall t,a,\eta>0,$$

and the following conditions hold:

i) $\mathcal{L}(X_0^n)\xrightarrow{w}\lambda_0$,

ii)

$[\sup\ \alpha'_{loc}]: \ \sup_{s\le t}|\alpha'^n_{s\wedge S^n(a)}-\alpha'_{s\wedge S(a)}\circ X^n|\xrightarrow{P}0, \quad \forall t,a>0,$

$[\beta'\text{-}D]: \beta'^n_{t\wedge S^n(a)}-\beta'_{t\wedge S(a)}\circ X^n\xrightarrow{P}0, \quad \forall t\in D, \ a>0,$

$[\nu\text{-}D]$: the same as in the previous problem,

iii), v), vi): the same as in the previous problem.

Prove $X^n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$.

16.4 Prove that the X^n in Example 16.37 is a G-Brownian motion.

16.5 Let $M^n\in\mathcal{M}^2_{loc}$, $|\Delta M^n|\le c$. Prove

1) If (M^n) is C-tight, then $([M^n])$ is tight.

2) If $M^n\xrightarrow{\mathcal{L}}M$ and $M\in\mathcal{M}^c_{loc}$, then $(M^n,[M^n])\xrightarrow{\mathcal{L}}(M,\langle M\rangle)$.

16.6 Suppose for each n, $U^n=(U_k^n, k\ge 1)$ is an adapted sequence of r.v. on $\bar{\Phi}$, $\tau^n=(\tau_t^n)$ is a time change on $\bar{\Phi}$, $X_t^n=\sum_{k=1}^{\tau_t^n}U_k^n$, and X is a

continuous Lévy processes with predictable triplet $(\alpha, \beta, 0)$ and $X_0 = 0$. Assume

$$\sup_{s\le t}\Big|\sum_{k=1}^{\tau_s^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|\le 1]}] - \alpha_s\Big| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0,$$

and D is a dense subset of $\boldsymbol{R}_+$. Prove the equivalence of the following assertions:

1) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

2) $\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{P}_{k-1}[|U_k^n| > \varepsilon] \xrightarrow{P} 0, \ \forall t > 0, \varepsilon > 0$,
$\sum_{1\le k\le \tau_t^n}(U_k^n I_{[|U_k^n|\le 1]} - \boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|\le 1]}])^2 \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \forall t \in D$,

3) $\sum_{1\le k\le \tau_t^n} \boldsymbol{P}_{k-1}[|U_k^n| > \varepsilon] \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0, \varepsilon > 0$,
$\sum_{1\le k\le \tau_t^n} \boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|\le 1]}] \xrightarrow{P} \beta_t, \ \forall t \in D$.

16.7 Suppose that for each n, $U^n = (U_k^n)$ is a sequence of martingale differences on $\tilde{\Phi}$, and X is a Lévy process with predictable triplet $(0, \beta, 0)$. Let D, X^n be the same as in the previous problem. Assume

$$\sum_{1\le k\le \tau_t^n} |\boldsymbol{E}_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|\le a]}]| \xrightarrow{P} 0, \qquad \forall t > 0.$$

Prove the equivalence of the following statements:

1) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

2) $\sum_{1\le k\le \tau_t^n} (U_k^n)^2 \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \forall t \in D$,

3) $\sum_{1\le k\le \tau_t^n} \boldsymbol{P}_{k-1}[|U_k^n| > \varepsilon] \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0, \quad \varepsilon > 0$,
$\sum_{1\le k\le \tau_t^n} (U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|\le 1]} \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \forall t \in D$,

4) $\sum_{1\le k\le \tau_t^n} \boldsymbol{P}_{k-1}[|U_k^n| > \varepsilon] \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0, \varepsilon > 0$,
$\sum_{1\le k\le \tau_t^n} \boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n I_{[|U_k^n|\le 1]}] \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \forall t \in D$.

16.8 Use the notations of the previous problem. Write

$$[\Delta_2] : \sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{E}_{k-1}[(U_k^n)^2 I_{[|U_k^n|>\varepsilon]}] \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Prove the equivalence of the following statements:

1) $[\Delta_2]$ and $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

2) $[\Delta_2]$ and $\sum_{k=1}^{\tau_t^n} (U_k^n)^2 \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \forall t \in D$,

3) $[\Delta_2]$ and $\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n] \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \forall t \in D$,

4) $\sum_{k=1}^{\tau_t^n} (U_k^n)^2 \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n] \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \forall t \in D$,

5) $\sum_{k=1}^{\tau_t^n} \boldsymbol{D}_{k-1}[U_k^n] \xrightarrow{P} \beta_t, \quad \forall t \in D$ and $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

16.9 Let W be a standard Brownian motion. Then the process

$$X_t = \begin{cases} (1-t)W(t/(1-t)), & 0 \le t < 1, \\ 0, & t = 1, \end{cases}$$

is a Brownian bridge.

16.10 Let $X = (X_t, 0 \le t \le 1)$ be a Brownian bridge. Prove 1) X is a semimartingale w.r.t. its usual natural filtration with predictable triplet:

$$\alpha_t = -\int_0^t \frac{X_s}{1-s} ds, \quad \beta_t = t, \quad \nu = 0.$$

2) X is a diffusion with infinitesimal characteristics: $b(t, x) = -\dfrac{x}{1-t}$, $a(t, x) = 1$,

3) X satisfies the following stochastic differential equation:

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t} dt + dW_t, \quad X_0 = 0,$$

where W is a standard Brownian motion.

16.11 Let $(Z_i, i \ge 1)$ be an i.i.d. sequence of r.v. with distribution F, and $V_t^n = \sqrt{n}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_{[Z_i\le t]} - F(t))$. Prove that $V^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, where X is a cadlag Gaussian process with $\boldsymbol{E}[X_t] = 0$, $\boldsymbol{E}[X_s X_t] = F(s\wedge t)(1 - F(s\vee t))$.

16.12 Let $(Z_i)_{i\ge 1}$ be an i.i.d. sequence of r.v. with distribution F and continuous density function f, $(F_n(t), t \ge 0)$ be the empirical process defined by (54.1), for each t $P_t^n = nF_n(t/n)$. If X is a homogeneous Poisson process with rate $f(0)$, then $P^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

References

Aldous, D.

[1] Stopping times and tightness, Ann. Probab. 6(1987), 335–340

Arnold, L

[1] *Stochastic Differential Equations, Theory and Applications*, Wiley, 1974.

Bichteler, P.

[1] Stochastic integration theory and L^p theory of semimartingales, Ann. Probab. **9**(1981), 49-89.

Billingsley, P.

[1] *Convergence of Probability Measures*, Wiley, 1968.

Brémaud, P.

[1] *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*, Springer, 1981.

Brémaud, P., Yor, M.

[1] Changes of filtrations and of probability measures, Z. W. **45**(1978), 269-296.

Bretagnolle, J. L.

[1] Processus à accroissements indépendants, Ecole d'Eté de St. Flour, LN in Math. **307**, 1973, 1-26.

Brown, T.

[1] A martingale approach to the Poisson convergence of simple point processes, Ann. Probab., **6** (1978), 615–628.

Burkholder, D., Davis, B., Gundy, R. F.

[1] Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. 6th Berkely Symp. **2**, 1972, 223-240.

Chou, C. S.

[1] Le Processus des sauts d'une martingale locale, Sém. Probab. XI, LN in Math. **581**, 1977, 351–361.

Chou, C. S., Meyer, P. A.

[1] Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels, Sém. Probab. IX, LN in Math. **465**, 1975, 1561-1563.

Chung, K. L., Williams, R.J.

[1] *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhäuser, 1983.

Çinlar, E., Jacod, J., Protter, P., Sharpe, M.

[1] Semimartingales and Markov processes, Z. W. **54**(1980), 161-220.

Courrège, P.

[1] Integrale stochastique par rapport à une martingale de carré intégrable, Sém. Brelot-Choquet-Deny **7**(1962–1963), Institute Henri-Poincaré, 623–638.

Davis, M. H. A.

[1] The representation of martingales of jump processes. SIAM J. Contr. **14** (1976), 623–638.

Dellacherie, C.

[1] *Capacités et Processus Stochastiques*, Springer, 1972.

[2] Intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener et de Poisson, Sém. Probab. VIII, LN in Math. **381**, 1974, 25–26. (Correction Sém. Probab. IX, LN in Math. **465**, 1975, 494.)

[3] Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales, Sém. Probab. XII, LN in Math. **649**, 1978, 742–745.

[4] Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique, Stoch. Proc. Appl. **10**(1980), 115–144.

[5] Mesurabilité des débuts et théorème de section, Sém. Probab. XV, LN in Math. **850**, 1981, 351–360.

Dellacherie, C., Meyer, P. A.

[1] *Probabilités et Potentiel*, 2e édition, chapitres I-IV, Hermann, 1975.

[2] *Probabilités et Potentiel*, 2e édition, chapitres V-VIII, Hermann, 1980.

Dellacherie, C., Meyer, P. A. Yor, M.

[1] Sur certains propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO, Sém. Probab. XII, LN in Math. **649**, 1978, 98-113.

De Sam Lazaro, J., Meyer, P. A.

[1] Methodes de martingales et theorie des flots, Sem. Probab. IV, LN in Math. **465**, 1975, 1-96.

Doléans-Dade, C.

[1] Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de classe (D), Z. W. **9**(1968), 309–314.

[2] Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semi-martingales, Z. W. **16**(1970), 181–194.

[3] Existence and uniqueness of solutions of stochastic differential equations, Z. W. **36**(1976), 93–101.

Doléans-Dade, C., Meyer, P. A.

[1] Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Sém. Probab. IV. LN in Math. **124**, 1970, 77–107.

[2] Equations différentielles stochastiques, Sém. Probab. XI, LN in Math. **581**, 1977, 376–382.

Donsker, M.

[1] Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems, Ann. Math. Statistics **23**(1952), 277-281.

Doob, J. L.

[1] *Stochastic Processes*, Wiley, 1954.

Dubin, L.E., Schwarz, G.

[1] On continuous martingales, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **53**(1965), 913-916.

Dudley, R. M.

[1] Wiener functionals as Itô integrals, Ann. Probab, **5**(1977), 140–141.

Durret, R.

[1] *Brownian Motion and Martingales in Analysis*, Wadsworth Inc., 1984.

Eagleson, G. K., Memin, J.

[1] Sur la contiguite de deux suites de mesures, generalisation d'un theoreme de Kabanov-Liptser-Shiryaev, Sém. Probab. XVI, LN in Math., **920**, 1982, 319-337.

El Karoui, N., Meyer, P. A.

[1] Les changements de temps en théorie générale des processus, Sém. Probab. XI, LN in Math. **581**, 1977, 65-78.

El Karoui, N., Weidenfeld, G.

[1] Théorie générale et changement de temps, ibid, 79-108.

Elliott, R. J.

[1] *Stochastic Calculus and Applications*, Springer, 1981.

[2] Double martingales, Z. W. **34**(1976), 17-28.

Emery, M.

[1] Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques, application aux intégrales multiplicatives stochastiques, Z. W. **41**(1978), 241-262.

[2] Une topologie sur l'espace des semimartingales, Sém. Prob. XIII, LN in Math. **721**, 1979, 260-280.

[3] Equations différentielles stochastiques lipschitziennes: étude de la stabilité, ibid, 281-293.

[4] Une propriete des temps previsibles, Sém. Probab. XIV, LN in Math. **784**, 1980, 316-317.

Emery, M., Stricker, C., Yan, J. A.

[1] Valeurs prises par les martingales locales continues a un instant donne, Ann. Probab. **11** (1983), 635-641.

Ethier, S. N., Kurtz, T. G.

[1] *Markov Processes, Characterization and Convergence*, Wiley, 1986.

Fisk, D. L.

[1] Quasi-martingales, Trans. Amer. Math. Soc. **120**(1965), 369-389.

Fujisaki, M., Kallianpur, G., Kunita, H.

[1] Stochastic differential equations for the non-linear filtering problem, Osaka J. Math. **9**(1972), 19-40.

Gihman, I. I., Skorohod, A. V.

[1] *The Theory of Stochastic Processes* III, Springer, 1979.

Girsanov, I. V.

[1] On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, Theory Probab. Appl. **5**(1960), 285-301(in Russian).

Gong, G. L.

[1] *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, Beijing Univ. Press, 1987(in Chinese).

Greenwood, P., Shiryaev, A. N.

[1] *Contiguity and the Statistical Invariance Principle*, Gordon and Breach, 1985.

Grigelionis, B.

[1] On the representation of integer-valued measures by means of stochastic integrals with respect to Poisson measure, Litovsk. Mat. Sb. **11**(1971), 93-108 (in Russian)

[2] On the absolute continuity of measures corresponding to stochastic processes, Litovsk. Math. Sb. **11**(1971), 783-794 (in Russian).

[3] The characterization of stochastic processes with conditionally independent increments, Litovsk. Math. Sb., **15**(1975), 53-60(in Russian).

[4] Stochastic point processes and martingales, Litovsk. Math. Sb., **15**(1975), 101-114.

[5] Martingale characterization of stochastic process with independent increments, Litovsk. Math. Sb., **17** (1977), 75-86(in Russian).

Hajek, J., Sidak, Z.

[1] *Theory of Rank Tests*, Academic Press, 1967.

Hall, W. J., Loynes, R. M.

[1] On the concept of contiguity, Ann. Probab., 5(1977), 278-282.

He, S. W.

[1] Some remark on single jump processes, Sém. Probab. XVII, LN in Math. **986**, 1983, 347-348.

[2] The representation of Poisson functionals, Sém. Probab. XVII, LN in Math. **986**, 1983, 349-352.

[3] Optimization applications of compensators of Poisson random measures, Prob. Engin. Inf. Sci. 3(1989), 149-155.

He, S. W., Wang, J. G.

[1] The total continuity of natural filtrations and the strong property of predictable representation of jump processes and processes with independent increments, Sém. Probab. XVI, LN in Math. **920**, 1982, 348-354.

[2] The property of predictable representation of the sum of independent semimartingales, Z. W. **61**(1982), 141-152.

[3] Two results on jump processes, Sém. Probab. XVIII, LN in Math. **1059**, 1984, 256-267.

[4] Remarks on absolute continuity, contiguity and convergence in variation of probability measures, Sém. Probab. XXII, LN in Math. **1321**, 1988, 260-270.

[5] Chaos decomposition and the property of predictable representation, Science in China. Ser. A. **32**(1989), 397-407.

He, S. W., Wang, J. G., Xia, A. H.

[1] Weak convergence of Markov jump processes, Chinese Jour. of Appl. Probab. & Statist. **7**(1991), 73-81(in Chinese).

He, S. W., Yan, J. A., Zheng, W. A.

[1] Sur la convergence des semimartingales continues dans R^n et des martingales dans une variété, Sém. Probab. XVII, LN in Math. **986**, 1983, 179-184.

Huang, Z. Y.

[1] *Elements of Stochastic Analysis*, Wuhan Univ. Press, 1988(in Chinese).

Ikeda, N., Watanabe, S.

[1] *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland. Kodansha, 1981.

Itmi, M.

[1] Processus ponctuels marques stochastiques. Representation des martingales et filtration naturelle quasi-continue a gauche. Sém. Probab. XV, LN in Math. **850**, 1981. 618-626.

Itô, K.

[1] Stochastic integrals, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20**(1944), 519-524.

[2] On a formula concerning stochastic integrales, Nagoya Math. J. **3**(1951), 55-65.

[3] On stochastic differential equations, Mem. Am. Math. Soc. **4**(1951), 1-51.

Jacod, J.

[1] Multivariate point process: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. W. **31**(1975), 235-253.

[2] Un théorem de représentation pour les martingales discontinues. Z. W. **34** (1976), 225-244.

[3] Sur la construction des intégrales stochastiques et les sous-espaces stables de martingales, Sém. Probab. XI. LN in Math. **581**, 1977, 390-410.

[4] *Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales*, LN in Math. **714**, 1979.

[5] Processus à accroissements indépendents une condition nécessaire et suffisante de convergence en loi, Z. W. **63**(1983), 109-136.

[6] Processus de Hellinger, absolulte continuité, contiguïté. Sém. Probab. de Rennes, 1984.

[7] Théorème limits pour les processus, Ecole d'été de St-Flour XIII, LN in Math. **117**, 1985.

[8] Sur la convergence des processus ponctuels, Probab. Th. Rel. Fields, **76**(1987), 573-586.

Jacod, J., Mémin, J.

[1] Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales, Z. W. **35**(1976), 1-37.

Jacod, J., Shiryaev, A. N.

[1] *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, 1987.

Jacod, J., Yor, M.

[1] Etude des solutions extrémales et représentation integrale des solutions pour certains problèmes de martingales. Z. W. **38**(1977), 83-125.

Jeulin, T.

[1] *Semi-martingales et Grossissement d'une Filtration*. LN in Math. **833**, 1980.

Kabanov, Yu., Liptser, R. S.

[1] On convergence in variation of the distributions of multivariate point processes. Z. W. **63**(1983), 475-485.

Kabanov, Yu., Liptser, R. S., Shiryaev, A. N.

[1] Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability distributions. Math. Sb. **35**(1978) 631-680 (Part I), **36**(1980) 31-58 (Part II) (English transl.).

[2] Some limit theorems for simple point processes (martingale approach), Stochastics, **3**(1981), 203-216.

[3] Weak and strong convergence of the distributions of counting processes. Theory Probab. Appl., **28**(1983), 303-336(in Russian).

[4] On the variation distance for probability measures defined on a filtered space, Probab. Theory Rel. Fields, **71**(1986), 19-36.

Kakutani, S.

[1] On equivalence of infinite product measures, Ann. Math. **49**(1948), 214-224.

Kallianpur, G.

[1] *Stochastic Filtering Theory*, Springer, 1980.

Karandikar, R. L.

[1] On Métivier-Pellaumail inequality, Emery topology and pathwise formulae in stochastic calculus. Sankhyā. Ser. A, **51**(1989), 121-143.

Karatzas, I, Shreve, S. E.

[1] *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1987.

Kazamaki, N.

[1] Krickeberg's decomposition for local martingales, Sém. Probab. VI, LN in Math. **258**, 1972, 101-103.

Kopp, E.

[1] *Martingales and Stochastic Integrals*, Cambridge, 1984.

Kunita, H., Watanabe, S.

[1] On square integrable martingales. Nagoya Math. J., **30**(1967), 209-245.

Kussmaul, A. V.

[1] *Stochastic Integration and Generalized Martingales*, Pitman, 1977.

Lenglart, E.

[1] Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilités, Z. W. **39**(1977), 65-70.

[2] Sur la convergence presque sur des martingales locales, C.R.A.S, Paris **284** (1977), 1085-1088.

[3] Relation de domination entre deux processus, Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B, **13**(1977), 171-179.

[4] Sur la localisation des intégrales stochasliques, Sém. Probab. XII. LN in Math. **649**, 1978, 53-56.

[5] Sur l'inégalité de Métivier-Pellaumail. Sém. Probab. XIV, LN in Math **784**, 1980, 125-127.

Le Jan, Y.

[1] Temps d'arret stricts et martingales de sauts. Z. W. **44**(1978), 213-226.

Lépingle, D.

[1] Sur la représentation des sauts des martingales, Sém. Probab. XI, LN in Math. **581**, 1977, 418-434.

[2] Sur le comportement asymptotique des martingales locales, Sém. Probab. XII, LN in Math. **649**, 1978, 148-161.

Letta, G.

[1] *Martingales et Integration Stochastique*, Scoula Normale Superiore. 1984.

Lévy, P.

[1] *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*, Gathier-villars, 1948.

Liu, C. D.

[1] Quand l'inegalité de Kunita-Watanabe est-elle une egalité? Sém. Probab. XX, LN in Math. **1204**, 1986, 140–147.

Liptser, R. S.

[1] A strong law of large numbers for local martingales. Stochastics **3**(1980), 217–228.

Liptser, R. S., Shiryaev, A. N.

[1] *Statistics of Stochastic Processes*, Springer, 1977.

[2] A functional central limit theorem for semimartingales, Theory Probab. Appl. **25**(1980), 667–688(in Russian).

[3] On necessary and sufficient conditions in the functional central limit theorem for semimartingales, Theory Probab. Appl. **26**(1981), 130–135(in Russian).

[4] Weak convergence of semimartingales to stochastically continuous processes with independent and conditionally independent increments, Math. Sb. **116** (1981), 331–358(in Russian).

[5] On a problem of necessary and sufficient conditions in the functional central limit theorem for local martingales, Z. W. **59**(1982), 311–318.

[6] On the problem of "predictable" criteria of contiguity, Proc. 5th Japan-USSR Symp. LN in Math. **1021**, 1983, 384–418.

[7] Weak convergence of a sequence of semimartingales to a process of diffusion type, Math. Sb. **121**(1983), 176–200(in Russian).

[8] On contiguity of probability measures corresponding to semimartingales. Analysis Mathematicae **11**(1985), 93–124.

[9] *Theory of Martingales*, Nauka, 1986(in Russian).

Loève, M.

[1] *Probability Theory*, Springer, 1977.

Maisonneuve, B.

[1] Une mise au point sur les martingales locales continues définies sur un intervalle stochastique. Sém. Probab. XI. Lect. Notes in Math. **581**, 1977, 435–445.

McKean, H. P.

[1] *Stochastic Integrals*, Academic Press, 1969.

Mémin, J.

[1] Distance en variation et conditions de contiguité pour les processus ponctuels, Sém. Probab. de Rennes, 1982.

[2] Sur la contiguité relative de deux suites de processus. Sém. Probab. XVII, LN in Math., **986**, 1983, 371–376.

Memin, J., Shiryaev, A. N.

[1] Distance de Hellinger-Kakutani des lois correspondant a deux processus a accroisements independants, Z. W. **70**(1985), 67–90.

Métivier, M.

[1] *Semimartingales: A Course on Stochastic Processes*, de Gruyter, 1982.

Métivier, M., Pellaumail, J.

[1] On a stopped Doob's inequality and general stochastic equations. Rapport interne n°28, Ecole Polytechnique, 1978.

[2] *Stochastic Integration*, Academic Press, 1980.

Meyer, P. A.

[1] *Probabilités et Potentiels*, Hermann, 1966.

[2] Une présentation de la théorie des ensembles sousliniens. Applications aux processus stochastiques, Séminaire Brelot-Choquet-Deny (théorie du potentiel), 7me année, 1962~1963, 17 pages.

[3] Démonstration simplifiée d'un théorème de Knight, Sém. Probab. V, LN in Math. **191**, 1971, 191–195.

[4] Sur un problème de filtration, Sém. Probab. VII, LN in Math. **321**, 1973, 223–238.

[5] Le dual de $\mathcal{H}^1$ est $\mathcal{BMO}$ (cas continu), ibid. 237–238.

[6] Un cours sur les intégrales stochastiques, ibid. Sém. Probab. X, LN in Math. **511**, 1976, 246–400.

[7] Notes sur les intégrales stochastiques, I-VI. Sém. Probab. XI, LN in Math. **581**, 1977. 446–481.

[8] Sur un théorème de C. Stricker, ibid. 482–489.

[9] Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques, Sém. Probab. XII. LN in Math. **649**, 1978, 757–762.

[10] Caractérisation des semimartingales, d'après Dellacherie, Sém. Probab. XIII, LN in Math. **721**, 1979, 620–623.

[11] Sur la méthode de L. Schwartz pour les e.d.s., Sém. Probab. XXV. LN in Math. **1485**(1991), 108–112.

Meyer, P. A., Zheng, W. A.

[1] Tightness criteria for laws of semimartingales, Ann. Inst. Henri Poincaré (Probab. Stat.) **20** (1984), 353–372.

Neveu, J.

[1] *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson, 1964.

[2] *Martingales à Temps Discret*, Masson, 1972.

[3] Processus ponctuels, Ecole d'été de Saint Flour. LN in Math. **598**. 1977.

Novikov, A. A

[1] On an identity for stochastic integrals, Theory Probab. Appl. **17**(1972), 717–720(in Russian).

Orey, S.

[1] F-processes, Proc. Fifth Berkeley Symp. **2**, 1966, 301–313.

Pollard, D.

[1] *Convergence of Stochastic Processes*, Springer, 1984.

Pratelli, M.

[1] La classe des semimartingales qui permettent d'integrer les processus optionels, Sém. Probab. XVII, LN in Math., **986**, 1983.

Protter, P. E.

[1] On the existence, uniqueness, convergence, and expositions of solutions of systems of stochastic integral equations. Ann. Prob. **5**(1977), 243–261.

[2] Stochastic integration without tears, Stochastics **16**(1986), 295–325.

[3] *Stochastic Integration and Differential Equation: A New Approach*, Springer, 1989.

Rao, K. M.

[1] On decomposition theorems of Meyer, Math. Scand. **24**(1969), 66–78.

[2] Quasi-martingales, Math. Scand. **24**(1969), 79–92.
Rebolledo, R.
[1] *La méthode de martingales appliquée à la convergence en loi des processus*. Mém. Soc. Math. France, **62**, 1979.
Revuz, D., Yor, M.
[1] *Continuous Martingale and Brownian Motion*, Springer, 1991.
Rogers, L. C. G., Williams, D.
[1] *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, Vol. 2 *Itô Calculus*, Wiley, 1987.
Skorokhod, A. V.
[1] *Studies in the Theory of Random Processes*, Addison-Wesley, Reading, 1965.
Stratonovich, R. L.
[1] A new representation for stochastic integrals and equations, SIAM Control, **4**(1966), 362–371.
Stricker, C.
[1] Mesure de Föllmer en théorie des quasi-martingales, Sém. Probab. IX, LN in Math. **465**, 1975, 408–419.
[2] Quasi-martingales, martingales locales, Semi-martingales, et filtrations naturelles. Z. W. **39**(1977), 55–64.
[3] Arbitrage et lois de martingale, Ann. Inst. Henri Poincaré. **26**(1990), 451–460.
Stricker, C., Yor, M.
[1] Calcul stochastique dépendant d'un paramètre, Z. W. **45**(1978), 109–133.
Stroock, D. W.
[1] Applications of Fefferman-Stein type interpolation to probability theory and analysis, Comm. Pure Appl. M. **26**(1973), 477–495.
Stroock, D. W., Varadhan, S. R. S.
[1] *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer, 1979.
Strook, D. W., Yor, M.
[1] On extremal solutions of martingale problems, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **13**(1980), 95–164.
Van Shuppen, J. H., Wong, E.
[1] Translation of local martingales under a change of law, Ann. Probab **2**(1974), 879–888.
Wang, J. G.
[1] On the absolute continuity and singularity of measures induced by the processes with independent increments, Scientia Sinica, **13**(1964), 859–877.
[2] Some remarks on processes with independent increments, Sem. Probab. XV, LN in Math., **850**, 1981, 627–631.
Watanabe, S.
[1] On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Jap. J. Math., **34** (1964), 53–79.
Williams, D.
[1] *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. Vol. 1. Wiley. 1979.

Yan, J. A.
[1] Propriété de représentation prévisible pour les semimartingales spéciales, Sientia Sinica, **23**(1980), 803–813.
[2] Sur une équation différentielle stochastique générale, Sém. Probab. XIV, LN in Math. **784**, 1980, 305–315.
[3] Remarques sur l'intégrale stochastique de processus non bornés, ibid, 128–139.
[4] Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou $\mathcal{H}^1$, ibid, 220–222.
[5] Some formulas for the local times of semimartingales, Chin. Ann. Math. 1(1980), 545–551 (in Chinese).
[6] *An Introduction to Martingales and Stochastic Integrals*, Shanghai Sci. and Tech. Publ. House, 1981(in Chinese).
[7] A propos de l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles, Sém. Probab. XVI, LN in Math. **920**(1982), 338–347.
[8] Martingales locales sur un ouvert droit optionel, Stochastics 8(1982), 161–181.
[9] The change of variables formula for the local times of semimartingales, Kexue Tongbao **33**(1988), 1755–1759.
[10] Some remarks on the theory of stochastic integration, Sém. Probab. XXIV, LN in Math. **1485**, 1991, 95–107.
Yan, J. A., Yoeurp, Ch.
[1] Représentation des martingales comme intégrales stochastiques des processus optionnels, Sém. Probab. X, LN in Math. **511**, 1976, 422–431.
Yoeurp, Ch.
[1] Décomposition des martingales locales et formules exponentielles, ibid. 432–480.
Yor, M.
[1] Représentation intégrale des martingales, étude des distributions extrémales, Article de Thèse de Doctorat, Paris 1976.
[2] Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles, Sém. Probab. X, LN in Math. **511**, 1976, 481–500.
[3] Remarques sur la représentation des martingales comme intégrables stochastiques, Sém. Probab. XI, LN in Math. **581**, 1977, 502–517.
[4] Sous-espaces denses dans L^1 et $\mathcal{H}^1$ et représentation des martingales, Sém. Probab. XII, LN in Math. **649**, 1978, 264–309.
[5] Sur certains commutateurs d'une filtration, Sem. Probab. XV, LN in Math, **850**, 1981, 526–528.
Zheng, W. A.
[1] Semimartingales in predictable random open sets, Sém. Probab. XVI, LN in Math. **920**, 1982, 370–379.
[2] Une remarque sur même intégrale stochastique calculée dans deux filtrations. Sém. Probab. XVIII, LN in Math. **1059**, 1984, 172–178.
[3] Tightness results for laws of diffusion processes, application to stochastic mechanics, Ann. Inst. Henri Poincaré (Probab. Stat.) **21**(1985), 103–124.

Index

M

N

O

P

Q

R

目　　录

第一章

预备知识

我们要求本书读者预先掌握 Loève[1] 或 Neveu[1] 中有关测度论和概率论的基础知识，如测度扩张定理，Radon–Nikodym 定理，控制收敛定理，Fatou 引理，L^p 空间，Hölder 不等式，条件数学期望，Jensen 不等式，条件独立性，乘积概率空间，Fubini 定理等。本章旨在给出上述基础知识的必要的补充。不熟悉解析集的读者，首次阅读时可跳过 §7、§8、§9，但需了解定理 1.32、1.36 及 1.41 的内容。

§1 主要记号

我们用 $\mathbb{N}$ 表示非负整数集合，$\overline{\mathbb{N}}$ 表示 $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$。$\mathbb{R}$ 表示实直线 $]-\infty, +\infty[$，$\overline{\mathbb{R}}$ 表示数直线 $[-\infty, +\infty]$，$\mathscr{B}(\mathbb{R})$，$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ 分别表示 $\mathbb{R}$，$\overline{\mathbb{R}}$ 上的 Borel σ-域。一集合 Ω 到 $\mathbb{R}$（相应地，$\overline{\mathbb{R}}$）中的映象，叫做实值（相应地，数值）函数。

$\mathbb{R}_+$ 表示 $[0, +\infty[$，$\overline{\mathbb{R}}_+$ 表示 $[0, +\infty]$。

集合 A 的补集记为 A^c，$A\backslash B$ 表示 $A\cap B^c$，$A\triangle B$ 为对称差 $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$。

令 Ω 为一集合，Ω 中具有性质 P 的 ω 的集合记为 $\{\omega\in\Omega: P(\omega)\}$。如果不引起混淆，则记为 $\{\omega: P(\omega)\}$ 或简记为 $[P]$。例如，设 f，g 为 Ω 上的两个数值函数，我们用 $[f\geqslant g]$ 表示 $\{\omega\in\Omega: f(\omega)\geqslant g(\omega)\}$。

设 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一子集系，$A\subset\Omega$，我们用 $A\cap\mathscr{F}$ 表示 $\{A\cap B:$

$B\in\mathscr{F}\}$.

设 $\mathscr{C}$ 为 Ω 上的一子集系，我们用 $\sigma(\mathscr{C})$ 表示由 $\mathscr{C}$ 生成的 Ω 上的 σ-域. 设 $(\mathscr{G}_i)_{i\in I}$ 为 Ω 上的一族子集系，我们令 $\sigma(\mathscr{G}_i,\ i\in I)=\sigma(\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{G}_i)$.

设 $(E,\ \mathscr{E})$ 为一可测空间，f 为 Ω 到 E 中的映象，我们用 $\sigma(f)$ 表示 f 在 Ω 上诱导出的 σ-域 $f^{-1}(\mathscr{E})=\{f^{-1}(A):A\in\mathscr{E}\}$.

设 $(E_i,\ \mathscr{E}_i)_{i\in I}$ 是一族可测空间. 对每个 $i\in I$，f_i 是 Ω 到 E_i 中的映象，我们用 $\sigma(f_i,\ i\in I)$ 表示 $\sigma(\sigma(f_i),\ i\in I)$.

设 $f,\ g$ 为两个数值函数，$f\vee g$ 表示 $\sup(f,\ g)$，$f\wedge g$ 表示 $\inf(f,\ g)$. 于是 $f^+=f\vee 0$，$f^-=(-f)\vee 0=-(f\wedge 0)$.

更一般地，$\vee$、$\wedge$ 分别表示上、下确界. 例如，设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列数值函数，令 $\bigvee\limits_n f_n=\sup\limits_n f_n$. 又如，设 $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ 为 Ω 上的一族 σ-域，令 $\bigvee\limits_{i\in I}\mathscr{F}_i=\sigma(\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{F}_i)$.

在实直线 $\mathbb{R}$ 上，$s\uparrow t$ 表示 $s\to t,\ s\leqslant t$；$s\uparrow\uparrow t$ 表示 $s\to t,\ s<t$. 设 (s_n) 为实数列，则 $s_n\uparrow t$，$s_n\uparrow\uparrow t$ 还进一步意味着 (s_n) 为增序列. 对 $\downarrow$，$\downarrow\downarrow$ 有类似说明.

设 (A_n) 为集合序列，我们用 $A_n\uparrow A$ 表示 (A_n) 为单调增且 $A=\bigcup\limits_n A_n$.

设 (f_n) 为数值函数序列，我们用 $f_n\uparrow f$ 表示 (f_n) 为单调增且 $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$.

§2 单调类定理

1.1 定义 令 Ω 为一集合，$\mathscr{C}$ 为 Ω 上的一子集系. 称 $\mathscr{C}$ 为 π-系，如果 $A,\ B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{C}$. 称 $\mathscr{C}$ 为 λ-系，如果

i) $\Omega\in\mathscr{C}$;

ii) $A,\ B\in\mathscr{C},\ A\subset B\Rightarrow B\setminus A\in\mathscr{C}$;

iii) $A_n \in \mathscr{C}$, $A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathscr{C}$.

称 $\mathscr{C}$ 为单调类，如果

$$A_n \in \mathscr{C},\ A_n \uparrow A \quad 或 \quad A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathscr{C}.$$

显然，如果 $\mathscr{C}$ 同时为 π-系和 λ-系，或同时为域和单调类，则 $\mathscr{C}$ 为 σ-域.

下一定理是集合形式的单调类定理.

1.2 定理 设 $\mathscr{C}$, $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的两个子集系，且 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$.

1) 若 $\mathscr{F}$ 为 λ-系，$\mathscr{C}$ 为 π-系，则 $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$.

2) 若 $\mathscr{F}$ 为单调类，$\mathscr{C}$ 为域，则 $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$.

证明 1) 一切包含 $\mathscr{C}$ 的 λ-系之交 $\mathscr{F}'$ 仍是 λ-系. 令

$$\mathscr{F}_1 = \{B \in \mathscr{F}' : \forall A \in \mathscr{C},\ B \cap A \in \mathscr{F}'\},$$

显然，$\mathscr{F}_1$ 是 λ-系，且 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}_1$，故 $\mathscr{F}' = \mathscr{F}_1$. 令

$$\mathscr{F}_2 = \{B \in \mathscr{F}' : \forall A \in \mathscr{F}',\ B \cap A \in \mathscr{F}'\},$$

显然，$\mathscr{F}_2$ 是 λ-系，且 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}_2$，故 $\mathscr{F}' = \mathscr{F}_2$. 这表明 $\mathscr{F}'$ 是 π-系，于是 $\mathscr{F}'$ 为 σ-域. 我们有 $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$.

2) 一切包含 $\mathscr{C}$ 的单调类之交 $\mathscr{F}'$ 仍是单调类. 与1)的证明类似，可证 $\mathscr{F}'$ 是 π-系. 令

$$\mathscr{F}'' = \{B \in \mathscr{F}' : B^c \in \mathscr{F}'\},$$

则 $\mathscr{F}''$ 是单调类，且 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}''$，故 $\mathscr{F}'' = \mathscr{F}'$. 这表明 $\mathscr{F}'$ 是域，于是 $\mathscr{F}'$ 为 σ-域. 我们有 $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$.

作为定理1.2的一个简单应用，我们有

1.3 系 1) 令 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间，ξ, η 为两个可积随机变量. 设 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$, $\mathscr{C}$ 为一 π-系. 如果 $\mathbb{E}[\xi] = \mathbb{E}[\eta]$，且对一切 $A \in \mathscr{C}$，有 $\mathbb{E}[\xi I_A] = \mathbb{E}[\eta I_A]$，则

$$\mathbb{E}[\xi \mid \sigma(\mathscr{C})] = \mathbb{E}[\eta \mid \sigma(\mathscr{C})] \text{ a.s.}, \tag{3.1}$$

2) 令 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为一可测空间，$\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$, $\mathscr{C}$ 为一 π-系. 设 μ, ν 为两个有界符号测度，使得 $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$，且对一切 $A \in \mathscr{C}$，有 $\mu(A) = \nu(A)$，则限于 $\sigma(\mathscr{C})$，μ 与 ν 一致.

证明 我们只证 1), 2)的证明类似. 令

$$\mathscr{G}=\{A\in\mathscr{F}:\mathbb{E}[\xi I_A]=\mathbb{E}[\eta I_A]\},$$

则 $\mathscr{G}$ 为 λ-系, 且由假定, $\mathscr{C}\subset\mathscr{G}$. 故由定理1.2.1), $\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{G}$, 由此推得(3.1).

下一定理是与定理1.2.1)相应的函数形式的单调类定理. 我们今后将经常用到它.

1.4 定理 令 $\mathscr{C}$ 为集合 Ω 上的一 π-系, $\mathscr{H}$ 为 Ω 上的一实值函数的线性空间. 如果下列条件满足:

i) $1\in\mathscr{H}$;

ii) 设 $f_n\in\mathscr{H}$, $0\leqslant f_n\uparrow f$, f 为有限(相应地, 有界), 则 $f\in\mathscr{H}$;

iii) 对一切 $A\in\mathscr{C}$, 有 $I_A\in\mathscr{H}$,

则 $\mathscr{H}$ 包含 Ω 上的一切 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测的实值 (相应地, 有界) 函数.

证明 令 $\mathscr{F}=\{A\subset\Omega:\ I_A\in\mathscr{H}\}$, 则易知 $\mathscr{F}$ 为 λ-系. 依假设, $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$, 故由定理 1.2.1), $\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$.

设 ξ 为一 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测实值(相应地, 有界)函数. 令

$$\xi_n=\sum_{k=0}^{2^n n}\frac{k}{2^n}I_{\left[\frac{k}{2^n}\leqslant\xi^+<\frac{k+1}{2^n}\right]},$$

则 $\xi_n\in\mathscr{H}$, $0\leqslant\xi_n\uparrow\xi^+$. 故由条件 ii), $\xi^+\in\mathscr{H}$. 同理, $\xi^-\in\mathscr{H}$, 从而 $\xi=\xi^+-\xi^-\in\mathscr{H}$.

下面两个定理是与定理1.2.2) 相应的函数形式的单调类定理.

1.5 定理 设 $\mathscr{H}$ 为 Ω 上的一有界函数族, 对一致有界单调序列极限封闭(以下简称 $\mathscr{H}$ 为单调族). 令 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{H}$ 的一子族. 如果下列两条件之一满足:

1) $\mathscr{C}$ 为线性空间, $1\in\mathscr{C}$, 且 $\mathscr{C}$ 对取有限下端运算封闭(从而 $\mathscr{C}$ 为一个格);

2) $\mathscr{C}$ 为一代数[1]，$1\in\mathscr{C}$，且 $\mathscr{C}$ 对一致收敛封闭；
则 $\mathscr{H}$ 包含一切 $\sigma(f,\ f\in\mathscr{C})$ 可测的有界函数.

证明 设条件 1) 成立. 令 $\mathscr{H}'$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的最小单调族，并令

$$\mathscr{H}_1=\{f\in\mathscr{H}':\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha f\in\mathscr{H}'\},$$

则 $\mathscr{H}_1$ 为单调族，且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{H}_1$，故 $\mathscr{H}_1=\mathscr{H}'$. 令

$$\mathscr{H}_2=\{f\in\mathscr{H}':\forall g\in\mathscr{C},\ f+g\in\mathscr{H}',\ f\wedge g\in\mathscr{H}'\},$$

则 $\mathscr{H}_2$ 为单调族，且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{H}_2$，故 $\mathscr{H}_2=\mathscr{H}'$. 令

$$\mathscr{H}_3=\{f\in\mathscr{H}':\forall g\in\mathscr{H}',\ f+g\in\mathscr{H}',\ f\wedge g\in\mathscr{H}'\},$$

则 $\mathscr{H}_3$ 为单调族，且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{H}_3$，故 $\mathscr{H}_3=\mathscr{H}'$. 这表明 $\mathscr{H}'$ 为一线性空间，且为单调族，对取有限下端运算封闭.

令 $\mathscr{G}=\{B\subset\Omega:I_B\in\mathscr{H}'\}$，则 $\mathscr{G}$ 为 σ-域，且 $\mathscr{H}'$ 包含一切 $\mathscr{G}$ 可测有界函数. 因此，为证定理，只需证一切 $f\in\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{G}$ 可测. 令 $f\in\mathscr{C}$，则对任一 $a\in\mathbb{R}$，$(f-a)^+=-[(a-f)\wedge 0]\in\mathscr{C}$. 令 $f_n=n(f-a)^+\wedge 1$，则 $f_n\in\mathscr{C}\subset\mathscr{H}'$，且 $0\leqslant f_n\uparrow I_{[f>a]}$. 由于 $\mathscr{H}'$ 为单调族，故 $I_{[f>a]}\in\mathscr{H}'$，即 $[f>a]\in\mathscr{G}$. 这表明 f 为 $\mathscr{G}$ 可测[2]. 定理得证.

设条件 2) 成立. 往证 $\mathscr{C}$ 对取有限下端运算封闭. 令 $Q_n(x)$ 为 $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ 的 Taylor 展开前 n 项之和，则 $Q_n(x)$ 在 $[-1,\ +1]$ 上一致收敛于 $(1-x)^{\frac{1}{2}}$. 设 $f\in\mathscr{C}$，$|f|\leqslant 1$. 令 $P_n(x)=Q_n(1-x^2)$，则 $P_n(f)$ 一致收敛于 $|f|$，依假设，$P_n(f)\in\mathscr{C}$，故我们有 $|f|\in\mathscr{C}$. 于是对一切 $f\in\mathscr{C}$，有 $|f|\in\mathscr{C}$. 现设 $f,\ g\in\mathscr{C}$，则有

$$f\wedge g=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)\in\mathscr{C}.$$

于是利用上述结果推得定理结论.

---

1) 即 $\mathscr{C}$ 为一个对乘积封闭的线性空间.

2) 作者感谢汪嘉冈同志告知这一关于 f 可测性的证明. 原证明基于关于 $\mathscr{C}$ 为代数这一较强的假定.

1.6 定理 设 $\mathscr{H}$ 为 Ω 上的一有界函数族，对一致有界单调收敛封闭，且对一致收敛封闭. 令 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{H}$ 的一子族. 如果下列两条件之一满足：

1) $\mathscr{H}$ 为线性空间，$1\in\mathscr{H}$，且 $\mathscr{C}$ 对乘积封闭；

2) $\mathscr{C}$ 为一代数，且存在$(f_n)\subset\mathscr{C}$，使得 f_n 一致收敛于 1，

则 $\mathscr{H}$ 包含一切 $\sigma(f,f\in\mathscr{C})$ 可测的有界函数.

证明 设条件 1) 成立. 令 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{C}$ 和 1 生成的代数，则 $\mathscr{D}\subset\mathscr{H}$，$1\in\mathscr{D}$. 令 $\overline{\mathscr{D}}$ 为用 $\mathscr{D}$ 中一致收敛序列极限封闭 $\mathscr{D}$ 所得函数族，则 $\overline{\mathscr{D}}$ 为一代数，对一致收敛封闭，且 $\overline{\mathscr{D}}\subset\mathscr{H}$. 于是由定理 1.5.2)，$\mathscr{H}$ 包含一切 $\sigma(f,\ f\in\overline{\mathscr{D}})$ 可测的有界函数. 特别，$\mathscr{H}$ 包含一切 $\sigma(f,\ f\in\mathscr{C})$ 可测的有界函数.

设条件 2) 成立. 令 $\overline{\mathscr{C}}$ 为用一致收敛序列极限封闭 $\mathscr{C}$ 所得的函数族，则 $\overline{\mathscr{C}}$ 为代数，$1\in\overline{\mathscr{C}}$，且 $\overline{\mathscr{C}}\subset\mathscr{H}$. 此外，$\overline{\mathscr{C}}$ 对一致收敛封闭. 于是由定理 1.5.2)，$\mathscr{H}$ 包含一切 $\sigma(f,\ f\in\overline{\mathscr{C}})$ 可测的有界函数. 由此得到定理结论.

§3 复合函数定理

下一定理称为 Doob 复合函数定理(Doob[1]).

1.7 定理 设 f 为 Ω 到一可测空间$(E,\ \mathscr{E})$中的映象，φ 为 Ω 上的一数值函数. 为要 φ 是 $\sigma(f)$ 可测的，必须且只需存在 E 上一 $\mathscr{E}$ 可测的数值函数 h，使得 $\varphi=h\circ f$（即 $\varphi(\omega)=h(f(\omega))$）. 如果 φ 是实值(有界)的，则可要求 h 也是实值(有界)的.

证明 充分性显然，往证必要性. 令

$$\mathscr{H}=\{h\circ f : h \text{ 为 } E \text{ 上 } \mathscr{E} \text{ 可测实值函数}\},$$

则 $\mathscr{H}$ 为线性空间，且 $1\in\mathscr{H}$. 设 $h_n\circ f\in\mathscr{H}$，$0\leqslant h_n\circ f\uparrow\psi$，且 ψ 有限，令

$$A=\{x\in E : \sup_n h_n(x)<+\infty\},$$

则 $A\in\mathscr{E}$，且 $f(\Omega)\subset A$. 置

$$h(x)=\begin{cases}\sup\limits_{n} h_n(x), & x\in A,\\ 0, & x\in A^c,\end{cases}$$

则 h 为 E 上 $\mathscr{E}$ 可测实值函数，且 $\psi=h\circ f$，故 $\psi\in\mathscr{H}$. 于是 $\mathscr{H}$ 满足定理 1.4 的条件 ii). 设 $C\in\sigma(f)$，则存在某个 $B\in\mathscr{E}$，使得 $C=f^{-1}(B)$，故 $I_C=I_B\circ f\in\mathscr{H}$. 于是由定理 1.4，$\mathscr{H}$ 包含一切 $\sigma(f)$ 可测实值函数. 这表明，设 φ 为 $\sigma(f)$ 可测实值函数，则存在 E 上一 $\mathscr{E}$ 可测实值函数 h，使得 $\varphi=h\circ f$. 若进一步，φ 有界，例如 $|\varphi|\leqslant C$，令 $h'=h^+\wedge C-h^-\wedge C$，则 $\varphi=h'\circ f$.

现设 φ 为 $\sigma(f)$ 可测数值函数，则 $\varphi'=\operatorname{arc\,tg}\varphi$ 为 $\sigma(f)$ 可测实值函数，且 $|\varphi'|\leqslant\frac{\pi}{2}$，于是存在 E 上一 $\mathscr{E}$ 可测实值函数 h'，使得 $\varphi'=h'\circ f$. 令 $h=\operatorname{tg}h'$，则 h 为 E 上 $\mathscr{E}$ 可测数值函数，且有 $\varphi=h\circ f$.

1.8 引理 设 $(\mathscr{G}_i)_{i\in I}$ 为 Ω 上的一族子集系，则对任何 $A\in\sigma(\mathscr{G}_i,\ i\in I)$，存在 I 的可数子集 J（J 依赖于 A），使得 $A\in\sigma(\mathscr{G}_i,\ i\in J)$.

证明 具有所说性质的集合 A 的全体 $\mathscr{F}$ 为一 σ-域，且包含每个 $\mathscr{G}_i$，故 $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{G}_i,\ i\in I)$.

下一定理是复合函数定理的一个重要应用.

1.9 定理 设 $(E_i,\ \mathscr{E}_i)_{i\in I}$ 是一族可测空间，对每个 $i\in I$，f_i 是 Ω 到 E_i 中的一映象. 设 φ 为 Ω 上的 $\sigma(f_i,\ i\in I)$ 可测数值（实值）函数，则存在 I 的可数子集 J 和 $(\prod\limits_{i\in J}E_i,\ \prod\limits_{i\in J}\mathscr{E}_i)$ 上的可测数值（实值）函数 h，使得 $\varphi=h\circ f_J$，这里 f_J 是 Ω 到 $\prod\limits_{i\in J}E_i$ 中的如下映象：$f_J(\omega)=(f_i(\omega))_{i\in J}$.

证明 考虑 φ 为数值函数情形. 令

$$\mathscr{C}=\{[a,\ b]:\ a\leqslant b,\ a,\ b\text{ 为有理数或}\pm\infty\},$$

则由于 $\mathscr{C}\subset\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$ 且 φ 为 $\sigma(f_i,\ i\in I)$ 可测，故有 $\varphi^{-1}(\mathscr{C})\subset\sigma(f_i,\ i\in I)$. 但 $\mathscr{C}$ 只有可列个元素，故由引理 1.8，存在 I 的可数子集

J，使得

$$\varphi^{-1}(\mathscr{C})\subset\sigma(f_i,\ i\in J)=\sigma(f_J).$$

于是有

$$\varphi^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}))=\varphi^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))\subset\sigma(f_J).$$

这表明 φ 为 Ω 上的 $\sigma(f_J)$ 可测函数，故由定理 1.7 推得本定理.

§4 一致可积性，L^1 收敛准则

1.10 定义 设 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbb{P})$ 为一概率空间，$\mathscr{H}$ 为一可积随机变量族（即 $\mathscr{H}\subset L^1(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbb{P})$）. 称 $\mathscr{H}$ 为一致可积族，如果当 $C\to+\infty$ 时，积分

$$\int_{[|\xi|\geqslant C]}|\xi|d\mathbb{P},\ \xi\in\mathscr{H}$$

一致趋于零.

1.11 定理 1) 设 $\mathscr{X}$ 为一致可积族，$\mathscr{H}\subset L^1(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbb{P})$. 如果对任何 $\xi\in\mathscr{H}$，存在 $\eta\in\mathscr{X}$，使得 $|\xi|\leqslant|\eta|$ a. s.，则 $\mathscr{H}$ 为一致可积族.

2) 设 $\mathscr{H}\subset L^p(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbb{P})$，$(p>1)$. 如果 $\sup\limits_{\xi\in\mathscr{H}}\mathbb{E}[|\xi|^p]<+\infty$，则 $\mathscr{H}$ 为一致可积族.

证明 1) 直接由定义 1.10 看出.

2) 令 $a=\sup\limits_{\xi\in\mathscr{H}}\mathbb{E}[|\xi|^p]$，则对任何 $C>0$，我们有

$$\int_{[|\xi|\geqslant C]}|\xi|d\mathbb{P}\leqslant\int_{[|\xi|\geqslant C]}\frac{|\xi|^p}{C^{p-1}}d\mathbb{P}\leqslant\frac{1}{C^{p-1}}\mathbb{E}[|\xi|^p]\leqslant\frac{a}{C^{p-1}}.$$

故由定义 1.10，$\mathscr{H}$ 为一致可积族.

1.12 定理 令 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbb{P})$ 为一概率空间，ξ 为一可积随机变量，$(\mathscr{G}_i)_{i\in I}$ 为一族 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域，则 $(\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}_i])_{i\in I}$ 为一致可积族.

证明 令 $\eta_i=\mathbb{E}[|\xi||\mathscr{G}_i]$，则对任何 $C>0$，我们有

$$\mathbb{P}([\eta_i\geqslant C])\leqslant\frac{1}{C}\mathbb{E}[\eta_i]=\frac{1}{C}\mathbb{E}[|\xi|],\ i\in I,$$

于是

$$\int_{[\eta_i>C]}\eta_i d\mathbb{P}=\int_{[\eta_i>C]}|\xi|d\mathbb{P}\leqslant\delta\mathbb{P}([\eta_i\geqslant C])+\int_{[|\xi|>\delta]}|\xi|d\mathbb{P}$$
$$\leqslant\frac{\delta}{C}\mathbb{E}[|\xi|]+\int_{[|\xi|>\delta]}|\xi|d\mathbb{P}.$$

给定 $\varepsilon>0$，取定 δ，使得 $\int_{[|\xi|>\delta]}|\xi|d\mathbb{P}<\frac{\varepsilon}{2}$，于是当 $C\geqslant\frac{2\delta}{\varepsilon}\mathbb{E}[|\xi|]$时，有$\int_{[\eta_i>C]}\eta_i d\mathbb{P}\leqslant\varepsilon(i\in I)$，这表明 $(\eta_i)_{i\in I}$ 为一致可积族. 故由定理 1.11.1)，$(\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}_i])_{i\in I}$ 为一致可积族.

1.13 定理 令 $\mathscr{H}\subset L^1(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$，则为要 $\mathscr{H}$ 为一致可积族,必须且只需满足下列条件:

i) $a=\sup\limits_{\xi\in\mathscr{H}}\mathbb{E}[|\xi|]<+\infty$;

ii) 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切满足 $\mathbb{P}(A)\leqslant\delta$ 的 $A\in\mathscr{F}$，有

$$\int_A|\xi|d\mathbb{P}\leqslant\varepsilon,\ \xi\in\mathscr{H}. \tag{13.1}$$

证明 必要性. 令 $A\in\mathscr{F}$，$C>0$, 我们有

$$\int_A|\xi|d\mathbb{P}\leqslant C\mathbb{P}(A)+\int_{[|\xi|>C]}|\xi|d\mathbb{P},\ \xi\in\mathscr{H}. \tag{13.2}$$

设 $\mathscr{H}$ 为一致可积族，取 C 足够大，使得对一切 $\xi\in\mathscr{H}$，有

$$\int_{[|\xi|>C]}|\xi|d\mathbb{P}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

在(13.2)中, 令 $A=\Omega$ 得到条件 i); 令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2C}$ 得到条件 ii).

充分性. 设条件 i)、ii)成立. 任给 $\varepsilon>0$，选取 $\delta>0$，使得条件 ii) 成立. 于是当 $C\geqslant\frac{a}{\delta}$ 时，我们有

$$\mathbb{P}([|\xi|\geqslant C])\leqslant\frac{1}{C}\mathbb{E}[|\xi|]\leqslant\frac{a}{c}\leqslant\delta,\ \xi\in\mathscr{H}.$$

故由(13.1)，有

$$\int_{[|\xi|>C]}|\xi|d\mathbb{P}\leqslant\varepsilon,\ \xi\in\mathscr{H}.$$

这表明 $\mathscr{H}$ 为一致可积族.

1.14 系 设$(\xi_t)_{t\in I}$及$(\eta_t)_{t\in I}$都为一致可积族，则$(\xi_t+\eta_t)_{t\in I}$为一致可积族.

下一定理给出了一个L^1收敛准则.

1.15 定理 设(ξ_n)为一可积随机变量序列，ξ为一实值随机变量，则为要$\xi_n\xrightarrow{L^1}\xi$，必须且只需$(\xi_n)$为一致可积，且$\xi_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\xi$.

证明 必要性. 设$\xi_n\xrightarrow{L^1}\xi$. 令$A\in\mathscr{F}$，我们有

$$(15.1)\qquad \int_A|\xi_n|d\mathbb{P}\leqslant\int_A|\xi|d\mathbb{P}+\mathbb{E}[|\xi_n-\xi|].$$

给定$\varepsilon>0$，选取一正整数N，使得当$n>N$时，有$\mathbb{E}[|\xi_n-\xi|]\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 再选取$\delta>0$，使得只要$\mathbb{P}(A)\leqslant\delta$，就有$\int_A|\xi|d\mathbb{P}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，且对一切$n\leqslant N$，只要$\mathbb{P}(A)\leqslant\delta$，就有$\int_A|\xi_n|d\mathbb{P}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 于是由(15.1)，对一切$n$，只要$\mathbb{P}(A)\leqslant\delta$，就有$\int_A|\xi_n|d\mathbb{P}\leqslant\varepsilon$. 此外，我们有$\sup\limits_n\mathbb{E}[|\xi_n|]<+\infty$，故由定理1.13，$(\xi_n)$为一致可积族. 最后，$\xi_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\xi$显然.

充分性. 设(ξ_n)一致可积，且$\xi_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\xi$. 由Fatou引理，$\mathbb{E}[|\xi|]\leqslant\sup\limits_n\mathbb{E}[|\xi_n|]<+\infty$，故$\xi$可积，且$(\xi_n-\xi)$为一致可积(系1.14). 任给$\varepsilon>0$，由定理1.13知，存在$\delta>0$，只要$\mathbb{P}(A)<\delta$，就有

$$\int_A|\xi_n-\xi|d\mathbb{P}<\varepsilon,\quad n\geqslant1.$$

取N充分大，使得对一切$n\geqslant N$，有$\mathbb{P}([|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon])<\delta$. 于是，当$n\geqslant N$时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\xi_n-\xi|]&=\int_{[|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon]}|\xi_n-\xi|d\mathbb{P}+\int_{[|\xi_n-\xi|<\varepsilon]}|\xi_n-\xi|d\mathbb{P}\\&\leqslant\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

这表明$\xi_n\xrightarrow{L^1}\xi$.

§5 条件期望的推广

1.16 定义 令$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为一概率空间，$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子$\sigma$-域. 一随机变量$\xi$叫做关于$\mathscr{G}$为$\sigma$-可积，如果存在$\Omega_n \in \mathscr{G}$, $\Omega_n \uparrow \Omega$ a.s.[1]，使得每个ξI_{Ω_n}为可积.

1.17 定理 1) 为要一随机变量ξ关于$\mathscr{G}$为σ-可积，必须且只需存在一$\mathscr{G}$可测有限值随机变量$\eta>0$ a.s.，使得$\xi\eta$可积.

2) 设ξ为一随机变量. 如果存在$(G_n) \subset \mathscr{G}$，使得$\bigcup_n G_n = \Omega$ a.s.，且每个ξI_{G_n}关于$\mathscr{G}$为σ-可积，则ξ关于$\mathscr{G}$为σ-可积.

证明 1) 充分性显然（令$\Omega_n = \left[\eta \geqslant \frac{1}{n}\right]$即可），往证必要性. 设$\xi$关于$\mathscr{G}$为$\sigma$-可积，即存在$\Omega_n \in \mathscr{G}$, $\Omega_n \uparrow \Omega$，使得每个ξI_{Ω_n}可积. 令

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+\mathbb{E}[|\xi| I_{\Omega_n}])} I_{\Omega_n},$$

则$\eta>0$, η为$\mathscr{G}$可测，且$\xi\eta$可积.

2) 由1)，对每个n，存在$\mathscr{G}$可测有限值随机变量$\eta_n>0$ a.s.，使得$\eta_n \xi I_{G_n}$可积. 令

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n \wedge 1}{2^n(1+\mathbb{E}[\eta_n |\xi| I_{G_n}])} I_{G_n},$$

则$\eta>0$ a.s.，η为$\mathscr{G}$可测，且$\xi\eta$可积. 由1)，η关于$\mathscr{G}$为σ-可积.

熟知：令$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为一概率空间，$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子$\sigma$-域，则对任一非负随机变量$\xi$，我们总可定义条件期望$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}]$（令$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi \wedge n|\mathscr{G}]$ a.s.）. 但即使ξ只取有限值，$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}]$可能在一正概率集合上取$+\infty$. 下一定理表明：若$\xi$非负，则$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}]$为a.s.有限的一个充分（实际上也是必要）的条件是ξ关于$\mathscr{G}$为σ-可积.

---

1) 必要时用$\Omega_n \cup (\Omega \setminus \bigcup_n \Omega_n)$代替$\Omega_n$，可做到$\Omega_n \uparrow \Omega$.

1.18 定理 设 ξ 为一关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积的随机变量, 令

$$\mathscr{C}=\{A\in\mathscr{G}:\mathbb{E}[|\xi|I_A]<+\infty\},$$

则存在唯一的[1] $\mathscr{G}$ 可测实值随机变量 η, 使得对一切 $A\in\mathscr{C}$, 有

$$\mathbb{E}[\xi I_A]=\mathbb{E}[\eta I_A]. \tag{18.1}$$

我们称 η 为 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望, 记为 $\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}]$.

证明 无妨设 ξ 非负. 令 $\Omega_n\in\mathscr{G}$, $\Omega_n\uparrow\Omega$, 使得 ξI_{Ω_n} 可积. 令

$$\eta_n=\mathbb{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{G}]\text{ a. s.},$$

则有 $\eta_{n+1}I_{\Omega_n}=\eta_n$ a.s., $\eta_n\uparrow\eta$ a.s., 其中 η 为一 $\mathscr{G}$ 可测实值随机变量. 令 $A\in\mathscr{C}$, 则有

$$\mathbb{E}[\xi I_A]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi I_A I_{\Omega_n}]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\eta_n I_A]=\mathbb{E}[\eta I_A],$$

此即(18.1). 由(18.1), ηI_{Ω_n} 为 ξI_{Ω_n} 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望, 故 η 是唯一确定的.

1.19 定理 设 ξ 是一关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积的随机变量, η 为一 $\mathscr{G}$ 可测实值随机变量, 则 $\xi\eta$ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积, 且有

$$\mathbb{E}[\xi\eta|\mathscr{G}]=\eta\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}]\text{ a.s.}. \tag{19.1}$$

证明 令 $A_n\in\mathscr{G}$, $A_n\uparrow\Omega$, 使得 ξI_{A_n} 可积; 令 $B_n=[|\eta|\leqslant n]$, 则 $B_n\in\mathscr{G}$, $B_n\uparrow\Omega$; 令 $\Omega_n=A_n\cap B_n$, 则 $\Omega_n\in\mathscr{G}$, $\Omega_n\uparrow\Omega$, 且 $\xi\eta I_{\Omega_n}$ 可积, 故 $\xi\eta$ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积. 我们有((18.1))

$$\mathbb{E}[\xi\eta|\mathscr{G}]I_{\Omega_n}=\mathbb{E}[\xi\eta I_{\Omega_n}|\mathscr{G}]=\eta I_{\Omega_n}\mathbb{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{G}]$$
$$=\eta I_{\Omega_n}\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}]\text{ a.s.}.$$

故得(19.1).

下一定理是条件期望的平滑公式.

1.20 定理 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 为一概率空间, $\mathscr{H}$, $\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的两个子 σ-域, 且 $\mathscr{G}\subset\mathscr{H}$. 令 ξ 是一关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积的随机变量(从而关于 $\mathscr{H}$ 为 σ-可积), 则 $\mathbb{E}[\xi|\mathscr{H}]$ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积, 且有

1) 这里及今后, 涉及随机变量的唯一性时, 总是不计 a. s. 相等的两个随机变量的差别的.

(20.1) $\qquad \mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}]=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{H}|\mathscr{G}]$[1] a.s..

证明 令 $\Omega_n\in\mathscr{G}$, $\Omega_n\uparrow\Omega$, 使得 ξI_{Ω_n} 可积. 由 (18.1) 知 $I_{\Omega_n}\mathbb{E}[\xi|\mathscr{H}]$ 可积, 即 $\mathbb{E}[\xi|\mathscr{H}]$ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积. 由通常的条件期望的平滑公式,

$$\mathbb{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{G}]=\mathbb{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{H}|\mathscr{G}] \text{ a.s.},$$

故有((19.1))

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}]I_{\Omega_n}&=\mathbb{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{G}]=\mathbb{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathscr{H}|\mathscr{G}]\\&=\mathbb{E}[I_{\Omega_n}\mathbb{E}[\xi|\mathscr{H}]|\mathscr{G}]\\&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathscr{H}]|\mathscr{G}]I_{\Omega_n} \text{ a.s..}\end{aligned}$$

由此得(20.1).

下一定理在本书中将经常用到.

1.21 定理 令$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为一概率空间, $\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一子σ-域. 设ξ为一随机变量, $A\in\mathscr{G}$, 使得ξI_A关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积. 令

$$\mathscr{G}'=\sigma\{A\cap G: G\in\mathscr{G}\},$$

则 ξI_A 关于 $\mathscr{G}'$ σ-可积, 且有

(21.1) $\qquad \mathbb{E}[\xi I_A|\mathscr{G}]=\mathbb{E}[\xi I_A|\mathscr{G}']$ a.s..

证明 ξI_A 关于 $\mathscr{G}'$ 为 σ-可积是显然的. 由定理1.19,

$$\mathbb{E}[\xi I_A|\mathscr{G}]=\mathbb{E}[\xi I_A|\mathscr{G}]I_A \text{ a.s.},$$

故 $\mathbb{E}[\xi I_A|\mathscr{G}]$ 可取为 $\mathscr{G}'$ 可测. 但 $\mathscr{G}'\subset\mathscr{G}$, 故由定理1.20,

$$\mathbb{E}[\xi I_A|\mathscr{G}']=\mathbb{E}[\xi I_A|\mathscr{G}|\mathscr{G}']=\mathbb{E}[\xi I_A|\mathscr{G}] \text{ a.s..}$$

注 若ξ可积, 则对任何 $A\in\mathscr{G}$, 有

$$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}]I_A=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}']I_A.$$

§6 本质上确界

1.22 定义 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间, $\mathscr{H}$ 为随机变量的非空族. 称随机变量η为 $\mathscr{H}$ 的本质上确界, 如果η满足下列条件:

---

1) $\mathbb{E}[\xi|\mathscr{H}|\mathscr{G}]$是$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathscr{H}]|\mathscr{G}]$的缩写.

i) 对一切 $\xi\in\mathscr{H}$, 有 $\xi\leqslant\eta$ a.s.;

ii) 设 η' 为任一随机变量, 使得对一切 $\xi\in\mathscr{H}$ 有 $\xi\leqslant\eta'$ a.s., 则有 $\eta\leqslant\eta'$ a.s..

容易看出: 若 $\mathscr{H}$ 的本质上确界存在, 则必唯一(不计 a.s. 相等的两个随机变量的差别), 我们用 $\operatorname{ess.sup}_{\xi\in\mathscr{H}}\xi$ 或 $\operatorname{ess.sup}\mathscr{H}$ 表示之.

下一定理表明, 随机变量的非空族的本质上确界总存在.

1.23 定理 令 $\mathscr{H}$ 为随机变量的非空族. 则 $\mathscr{H}$ 的本质上确界存在, 且有 $\mathscr{H}$ 中的至多可数个元素 (ξ_n), 使得

$$\operatorname{ess.sup}\mathscr{H}=\bigvee_n\xi_n.$$

若进一步, $\mathscr{H}$ 对取有限上端运算封闭, 则 (ξ_n) 可取为一单调增序列.

证明 第二个结论不待证. 为证第一个结论, 不妨设 $\mathscr{H}$ 中的元一致有界, 否则我们可以考虑随机变量族 $\overline{\mathscr{H}}=\{\operatorname{arc\,tg}\xi:\xi\in\mathscr{H}\}$. 此外, 显然可以进一步假定 $\mathscr{H}$ 对取有限上端运算封闭. 这时, 令 $(\xi_n)\subset\mathscr{H}$ 为一单调增序列, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi_n]=\sup_{\xi\in\mathscr{H}}\mathbb{E}[\xi].$$

令 $\eta=\bigvee_n\xi_n$, 往证 η 为 $\mathscr{H}$ 的本质上确界. 为此只需验证定义 1.22 中的两个条件. 条件 ii) 显然成立, 故只需证条件 i) 成立. 设 $\xi\in\mathscr{H}$, 令

$$\xi_n'=\xi_n\vee\xi,$$

则 $(\xi_n')\subset\mathscr{H}$, (ξ_n') 单调增, 且 $\lim_{n\to\infty}\xi_n'=\eta\vee\xi$ 我们有

$$\mathbb{E}[\eta\vee\xi]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi_n']\leqslant\sup_{\xi\in\mathscr{H}}\mathbb{E}[\xi]=\mathbb{E}[\eta].$$

由于 $\eta\vee\xi\geqslant\eta$, 上式表明 $\eta\vee\xi=\eta$ a.s., 此即 $\eta\geqslant\xi$ a.s.. 条件 i) 得证. 定理证毕.

注 令 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 为一概率空间. 设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$, 且 $\mathscr{C}$ 非空. 令

$$\mathscr{H}=\{I_C: C\in\mathscr{C}\},$$

则由定理知,存在$(C_n)\subset\mathscr{C}$,使得

$$I_{\bigcup_n C_n}=\bigvee I_{C_n}=\text{ess. sup}\,\mathscr{H}.$$

我们称$\bigcup_n C_n$为$\mathscr{C}$的本质上确界,并用ess. sup $\mathscr{C}$记之。

§7 解 析 集

1.24 定义 设E为一集合,$\mathscr{E}$为E上一子集族. 如果$\mathscr{E}$包含空集$\emptyset$,称$\mathscr{E}$为E上的一个铺(pavage),称序偶$(E, \mathscr{E})$为铺集.

1.25 定义 令$(F, \mathscr{F})$为一铺集,A为F的一子集. 称A为$\mathscr{F}$解析集,如果存在一紧可距离化空间E和$E\times F$的一子集$B\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$,使得$A$为$B$在$F$上的投影[1]. 这里$\mathscr{K}(E)$是$E$的紧子集全体所成的铺,$(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$是先用可列并后用可列交运算封闭乘积铺$\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F}=\{A\times B: A\in\mathscr{K}(E), B\in\mathscr{F}\}$所得的铺.

今后,我们用$\mathscr{A}(\mathscr{F})$表示$\mathscr{F}$解析集全体. 由定义立刻推知:设$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$,则存在$B\in\mathscr{F}_\sigma$,使得$A\subset B$. 这里$\mathscr{F}_\sigma$是用可列并运算封闭$\mathscr{F}$所得到的铺. 特别,为要$F\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$,必须且只需$F\in\mathscr{F}_\sigma$.

1.26 定理 令$(F, \mathscr{F})$为一铺集. 则

1) $\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$;

2) $\mathscr{A}(\mathscr{F})$对可列并及可列交运算封闭.

证明 1) 显然. 往证2). 令$(A_n)\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 依定义,对每个$n$,存在一紧可距离化空间$E_n$及一$B_n\in(\mathscr{K}(E_n)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$,使得$A_n$为$B_n$在$F$上的投影. 令$E$为乘积拓扑空间$\prod_n E_n$. 设$d_n$为$E_n$上与拓扑相容的距离,在$E$上,令

1) 称集合$\{\omega\in F$:存在$x\in E$,使得$(x, \omega)\in B\}$为B在F上的投影.

$$d((x_n),(y_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)},$$

则 d 为 E 上与拓扑相容的距离. 这表明 E 为紧可距离化空间. 我们用 π 表示 $E\times F$ 到 F 上的投影映象, 令

$$C_n=\prod_{m\neq n}E_m\times B_n,$$

则有

$$\bigcap_n A_n=\bigcap_n\pi(C_n)=\pi(\bigcap_n C_n). \tag{26.1}$$

令 $B_n=\bigcap_k B_{n,k}$, 其中对一切 k, $B_{n,k}\in(\mathscr{K}(E_n)\times\mathscr{F})_\sigma$. 由于 $\prod_{m\neq n}E_m\times B_{n,k}\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_\sigma$, 故 $C_n\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$, 从而 $\bigcap_n C_n\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$. 由(26.1)知 $\bigcap_n A_n\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 这表明 $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ 对可列交运算封闭.

现令 E 为和拓扑空间 $\sum_n E_n$ 的单点紧化. 设 d_n 为 E_n 上与拓扑相容的距离, 在 $E=(\sum_n E_n)\cup\{\delta\}$ 上, 令

$$d(x,\delta)=\frac{1}{n},\quad x\in E_n,$$

$$d(x,y)=\frac{d_n(x,y)}{n(1+d_n(x,y))},\quad x,\ y\in E_n,$$

$$d(x,y)=\frac{1}{k}+\frac{1}{j},\quad x\in E_k,\ y\in E_j,\ k\neq j.$$

则 d 为 E 上与拓扑相容的距离, 从而 E 为紧可距离化空间. 我们用 π 表示 $E\times F$ 到 F 上的投影映象, 并将 $\sum_n(E_n\times F)$ 与 $\sum_n E_n\times F$ 视为同一, 则有

$$\pi(\sum_n B_n)=\bigcup_n A_n. \tag{26.2}$$

由于 $\sum_n B_{n,k}\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_\sigma$, 从而

$$\sum_n B_n=\sum_n\bigcap_k B_{n,k}=\bigcap_k\sum_n B_{n,k}\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}.$$

由 (26.2), $\bigcup_n A_n\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 这表明 $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ 对可列并运算封闭.

1.27 定理 令$(E,\mathscr{E})$，$(F,\mathscr{F})$为两个铺集，$(E\times F,\mathscr{E}\times\mathscr{F})$为其乘积，则有

$$\mathscr{A}(\mathscr{E})\times\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{E}\times\mathscr{F}). \tag{27.1}$$

证明 设$A\in\mathscr{A}(\mathscr{E})$，$B\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，令$A_1\in\mathscr{E}_\sigma$，$B_1\in\mathscr{F}_\sigma$，使得$A\subset A_1$，$B\subset B_1$. 易见$\mathscr{A}(\mathscr{E})\times\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{E}\times\mathscr{F})$，于是由定理1.26，

$$\mathscr{A}(\mathscr{E})\times\mathscr{F}_\sigma\subset(\mathscr{A}(\mathscr{E})\times\mathscr{F})_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{E}\times\mathscr{F}).$$

同理有$\mathscr{E}_\sigma\times\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{E}\times\mathscr{F})$. 因此我们有

$$A\times B=(A\times B_1)\cap(A_1\times B)\in\mathscr{A}(\mathscr{E}\times\mathscr{F}).$$

1.28 定理 令$(F,\mathscr{F})$为一铺集，E为一紧可距离化空间. 则对一切$A'\in\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})$，$A'$到$F$上的投影$A$为$\mathscr{F}$解析集.

证明 存在一紧可距离化空间G及$(\mathscr{K}(G)\times\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$中一元素$A''$，使得$A'$为$A''$在$E\times F$上的投影. 但$G\times E$为紧可距离化空间，$\mathscr{K}(G)\times\mathscr{K}(E)\subset\mathscr{K}(G\times E)$，且$A''$在$F$上的投影为$A$，故依定义，$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$.

1.29 定理 设$(F,\mathscr{F})$为一铺集，$\mathscr{G}$为F上一个铺，满足$\mathscr{F}\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$，则有

$$\mathscr{A}(\mathscr{F})=\mathscr{A}(\mathscr{G})=\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F})). \tag{29.1}$$

证明 设$A\in\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))$，存在一紧可距化空间$E$及一$A'\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{A}(\mathscr{F}))_{\sigma\delta}$，使得$A$为$A'$在$F$上的投影. 但我们有((27.1))

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(E)\times\mathscr{A}(\mathscr{F})&\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}(E))\times\mathscr{A}(\mathscr{F})\\&\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F}),\end{aligned}$$

从而$A'\in\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})$，故由定理1.28，$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 这表明$\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 但显然我们有$\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{G})\subset\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))$，故有(29.1).

1.30 定理 设$(F,\mathscr{F})$为一铺集，A为F的一子集. 令$A\cap\mathscr{F}=\{A\cap B:B\in\mathscr{F}\}$，则有

(30.1) $$\mathscr{A}(A\cap\mathscr{F})=A\cap\mathscr{A}(\mathscr{F}),$$

这里 $A\cap\mathscr{F}$ 考虑为 A 上的一个铺.

证明 设 $C\in\mathscr{A}(A\cap\mathscr{F})$. 存在一紧可距离化空间 E 及一 $C'\in(\mathscr{K}(E)\times(A\cap\mathscr{F}))_{\sigma\delta}$, 使得 C 为 C' 在 A 上的投影. 由于存在 $C''\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$, 使得 $C'=(E\times A)\cap C''$, 故 $C=A\cap\pi(C'')\in A\cap\mathscr{A}(\mathscr{F})$, 这里 π 为 $E\times F$ 到 F 上的投影映象. 这表明 $\mathscr{A}(A\cap\mathscr{F})\subset A\cap\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 反之, 设 $B\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$, 则存在一紧可距离化空间 E 及一 $B'\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$, 使得 $B=\pi(B')$. 这里 π 为 $E\times F$ 到 F 上的投影映象. 由于 $(E\times A)\cap B'\in(\mathscr{K}(E)\times(A\cap\mathscr{F}))_{\sigma\delta}$, 且 $A\cap B=\pi((E\times A)\cap B')$, 故 $A\cap B\in\mathscr{A}(A\cap\mathscr{F})$. 这表明 $A\cap\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(A\cap\mathscr{F})$. 于是有(30.1).

1.31 定理 设 $(F,\mathscr{F})$ 为一铺集. 为要 $\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$, 必须且只需对一切 $A\in\mathscr{F}$, 有 $A^c\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$.

证明 必要性显然, 往证充分性. 令

$$\mathscr{G}=\{A\in\mathscr{A}(\mathscr{F}):A^c\in\mathscr{A}(\mathscr{F})\},$$

则 $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$. 由定理 1.26, $\mathscr{G}$ 为 σ-域, 故 $\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$.

在下一定理中, $\mathbb{R}$ 可用任一具有可数基的局部紧 T_2 型空间[1] (如 $\mathbb{R}_+$)代替.

1.32 定理 令 $\mathscr{B}$ 表示 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\mathscr{K}$ 表示 $\mathscr{K}(\mathbb{R})$. 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为一可测空间, $\mathscr{B}\otimes\mathscr{F}$ 为 $\mathbb{R}\times\Omega$ 上的乘积 σ-域(这里用 $\mathscr{B}\otimes\mathscr{F}$ 以示与乘积铺 $\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ 的区别, 但在以后各章, 仍用 $\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ 表示乘积 σ-域). 则有

1) $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}(\mathscr{K})$, $\mathscr{A}(\mathscr{B})=\mathscr{A}(\mathscr{K})$,

2) $\mathscr{B}\otimes\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})=\mathscr{A}(\mathscr{B}\otimes\mathscr{F})$,

3) 对任何 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})$, A 在 Ω 上的投影为 $\mathscr{F}$ 解析集.

证明 1) 设 $K\in\mathscr{K}$, 则熟知 $K^c\in\mathscr{K}_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{K})$. 由于 $\sigma(\mathscr{K})$

---

1) T_2 型空间又称 Hausdorff 空间.

$=\mathscr{B}$, 故 $\mathscr{K}\subset\mathscr{B}\subset\mathscr{A}(\mathscr{K})$(定理 1.31), 从而 $\mathscr{A}(\mathscr{B})=\mathscr{A}(\mathscr{K})$(定理 1.29).

2) 设 $B\in\mathscr{K}\times\mathscr{F}$, 则 $B^c\in(\mathscr{K}\times\mathscr{F})_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})$, 又由于 $\sigma(\mathscr{K}\times\mathscr{F})=\mathscr{B}\otimes\mathscr{F}$, 故 $\mathscr{K}\times\mathscr{F}\subset\mathscr{B}\otimes\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})$ (定理 1.31), 从而 $\mathscr{A}(\mathscr{B}\otimes\mathscr{F})=\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})$(定理 1.29).

3) 取 $(K_n)\subset\mathscr{K}$, 使得 $\bigcup\limits_n K_n=\mathbb{R}$(例如令 $K_n=[-n,n]$). 对每个 n, 我们有(定理 1.30)

$$(K_n\times\Omega)\cap\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})=\mathscr{A}((K_n\times\Omega)\cap(\mathscr{K}\times\mathscr{F}))$$
$$=\mathscr{A}((K_n\cap\mathscr{K})\times\mathscr{F}).$$

由于 K_n 为紧距离空间, 且 $\mathscr{K}(K_n)=K_n\cap\mathscr{K}$, $A\in\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})$, 故由定理 1.28, $(K_n\times\Omega)\cap A$ 在 Ω 上的投影为 $\mathscr{F}$ 解析集. 但 $A=\bigcup\limits_n[(K_n\times\Omega)\cap A]$, 故 A 在 Ω 上的投影也是 $\mathscr{F}$ 解析集. 定理证毕.

§8 Choquet 容度

1.33 定义 设$(F,\mathscr{F})$为一铺集, 其中 $\mathscr{F}$ 对有限并及有限交运算封闭. 设 $\mathscr{G}$ 为 F 上一铺且 $\mathscr{G}\supset\mathscr{F}_\delta$. 这里 $\mathscr{F}_\delta$ 是用可列交运算封闭 $\mathscr{F}$ 得到的铺. 定义于 $\mathscr{G}$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中取值的集函数 $\boldsymbol{I}$ 称为 $(F,\mathscr{G})$上的 Choquet $\mathscr{F}$-容度, 如果 $\boldsymbol{I}$ 具有下列性质:

i) $\boldsymbol{I}$ 单调增, 即

$$A,\ B\in\mathscr{G},\ A\subset B\Rightarrow \boldsymbol{I}(A)\leqslant\boldsymbol{I}(B). \tag{33.1}$$

ii) $\boldsymbol{I}$ 从下连续. 即设 $A_n\in\mathscr{G}$, $A_n\uparrow A\in\mathscr{G}$, 则

$$\boldsymbol{I}(A)=\sup_n\boldsymbol{I}(A_n). \tag{33.2}$$

iii) $\boldsymbol{I}$ 沿 $\mathscr{F}$ 从上连续. 即设 $A_n\in\mathscr{F}$, $A_n\downarrow A$, 则

$$\boldsymbol{I}(A)=\inf_n\boldsymbol{I}(A_n). \tag{33.3}$$

$\mathscr{G}$ 中一集合 A 称为 $\boldsymbol{I}$-可容的, 如果

(33.4) $$I(A)=\sup_{\substack{B\in\mathscr{F}_\delta\\ B\subset A}} I(B).$$

注 我们这里关于容度的定义较 Dellacherie, Meyer[1] 稍有推广.

1.34 引理 设 I 是 $(F,\mathscr{F}_{\sigma\delta})$ 上的 Choquet $\mathscr{F}$-容度, 则 $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ 中每个元素都是 I-可容的.

证明 令 $A\in\mathscr{F}_{\sigma\delta}$. 若 $I(A)=-\infty$, 则 $I(\emptyset)=-\infty$, $\emptyset\in\mathscr{F}$, 故(33.4)成立, 即 A 可容. 现设 $I(A)>-\infty$. 我们有

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,\quad A_n\in\mathscr{F}_\sigma,\quad n\geqslant 1,$$

$$A_n=\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m},\quad A_{n,m}\in\mathscr{F},\quad n,\ m\geqslant 1.$$

由于 $\mathscr{F}$ 对有限并运算封闭, 故可假定对固定 n, $(A_{n,m})_{m\geqslant 1}$ 为增序列. 为证(33.4), 只需证明: 对任何 $a<I(A)$, 存在 $B\in\mathscr{F}_\delta$, $B\subset A$, 使得 $I(B)\geqslant a$.

设 $a<I(A)$. 由(33.2), 我们有

$$I(A)=I(A\cap A_1)=\sup_m I(A\cap A_{1m}),$$

故存在 m_1, 使得 $I(A\cap A_{1m_1})>a$. 这时

$$I(A\cap A_{1m_1})=I(A\cap A_{1m_1}\cap A_2)=\sup_m I(A\cap A_{1m_1}\cap A_{2m}),$$

于是存在 m_2, 使得 $I(A\cap A_{1m_1}\cap A_{2m_2})>a$. 依此类推, 我们得到一自然数列 $(m_k)_{k\geqslant 1}$, 使得对一切 $k\geqslant 1$, 有

$$I(A\cap A_{1m_1}\cap\cdots\cap A_{km_k})>a.$$

令 $B_n=\bigcap_{k=1}^{n} A_{km_k}$, $B=\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, 由(33.1), $I(B_n)>a$. 又 $B_n\in\mathscr{F}$, $B_n\downarrow B$, 故 $B\in\mathscr{F}_\delta$, 且由(33.3), $I(B)=\inf_n I(B_n)\geqslant a$. 由于 $B_n\subset A_n$, 故 $B\subset A$. 引理得证.

下一定理称为 Choquet 定理.

1.35 定理 设 I 是 $(F,\mathscr{A}(\mathscr{F}))$ 上的 Choquet $\mathscr{F}$-容度, 则

一切 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$ 都是 $\boldsymbol{I}$-可容的.

证明 设 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 则存在一紧可距离化空间 E 及一 $B\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$, 使得 $A=\pi(B)$. 这里 π 为 $E\times F$ 到 F 上的投影映象. 令 $\mathscr{H}$ 为用有限并运算封闭 $\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F}$ 所得的铺, 易知 $\mathscr{H}$ 对有限交运算亦封闭, 且有 $\mathscr{H}_{\sigma\delta}=(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$. 对每个 $H\in\mathscr{H}_{\sigma\delta}$, 令

$$\boldsymbol{J}(H)=\boldsymbol{I}(\pi(H)),$$

往证 $\boldsymbol{J}$ 为 $(E\times F,\ \mathscr{H}_{\sigma\delta})$ 上的 Choquet $\mathscr{H}$-容度. 显然, $\boldsymbol{J}$ 满足定义 1.33 中的性质 i) 及 ii). 剩下只需验证性质 iii).

令 $H=\bigcup\limits_{k=1}^{m}(C_k\times D_k)\in\mathscr{H}$, 其 $C_k\in\mathscr{K}(E)$, $D_k\in\mathscr{F}$. 则对任何 $x\in\pi(H)$, 我们有 $(E\times\{x\})\cap H=C\times\{x\}$, 其中 $C\neq\emptyset$, 且 $C=\bigcup\limits_{\{k:x\in D_k\}}C_k\in\mathscr{K}(E)$. 现设序列 $(B_n)\subset\mathscr{H}$ 单调降. 令 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\pi(B_n)$, 则对每个 n, 存在 $C_n\in\mathscr{K}(E)$, 使得

$$(E\times\{x\})\cap B_n=C_n\times\{x\}.$$

由于 (B_n) 单调降, 故 (C_n) 亦单调降. 又每个 C_n 为 E 的非空紧子集, 故 $\bigcap\limits_n C_n\neq\emptyset$, 于是

$$(E\times\{x\})\cap(\bigcap_n B_n)=\bigcap_n C_n\times\{x\}\neq\emptyset.$$

即有 $x\in\pi(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n)$. 这表明 $\bigcap\limits_n\pi(B_n)\subset\pi(\bigcap\limits_n B_n)$. 但相反的包含关系恒成立, 故有

$$(35.1)\qquad \bigcap_n\pi(B_n)=\pi(\bigcap_n B_n).$$

由于 $\pi(B_n)\in\mathscr{F}$, $\pi(B_n)\downarrow$, 由 (33.3) 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}(\bigcap_n B_n)&=\boldsymbol{I}(\pi(\bigcap_n B_n))=\boldsymbol{I}(\bigcap_n\pi(B_n))\\&=\inf_n\boldsymbol{I}(\pi(B_n))=\inf_n\boldsymbol{J}(B_n).\end{aligned}$$

即定义 1.33 中的性质 iii) 对 $\boldsymbol{J}$ 成立. 于是 $\boldsymbol{J}$ 为 $(E\times F,\ \mathscr{H}_{\sigma\delta})$ 上的 Choquet $\mathscr{H}$-容度.

由于 $B\in\mathscr{H}_{\sigma\delta}$，由引理 1.34 知，$B$ 为 $\boldsymbol{J}$-可容的．但由(35.1)看出：$C\in\mathscr{H}_\delta\Rightarrow\pi(C)\in\mathscr{F}_\delta$，于是有

$$\boldsymbol{I}(A)=\boldsymbol{J}(B)=\sup_{\substack{C\in\mathscr{H}_\delta\\C\subset B}}\boldsymbol{J}(C)=\sup_{\substack{C\in\mathscr{H}_\delta\\C\subset B}}\boldsymbol{I}(\pi(C))\leqslant\sup_{\substack{D\in\mathscr{F}_\delta\\D\subset A}}\boldsymbol{I}(D).$$

但恒有 $\boldsymbol{I}(A)\geqslant\sup\limits_{\substack{D\in\mathscr{F}_\delta\\D\subset A}}\boldsymbol{I}(D)$，故有

$$\boldsymbol{I}(A)=\sup_{\substack{D\in\mathscr{F}_\delta\\D\subset A}}\boldsymbol{I}(D).$$

这表明 A 是 $\boldsymbol{I}$-可容的．定理证毕．

作为 Choquet 定理的一个重要应用，我们将证明可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 中的一切 $\mathscr{F}$ 解析集是普遍可测的．

设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为一可测空间，$\mathscr{P}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上概率测度全体．对每个 $\mathbb{P}\in\mathscr{P}$，我们令 $\mathscr{F}^{\mathbb{P}}$ 表示 $\mathscr{F}$ 按 $\mathbb{P}$ 的完备化．置

$$\widehat{\mathscr{F}}=\bigcap_{\mathbb{P}\in\mathscr{P}}\mathscr{F}^{\mathbb{P}},$$

称 $\widehat{\mathscr{F}}$ 为 $\mathscr{F}$ 的普遍完备化，$\widehat{\mathscr{F}}$ 中的元素称为普遍可测集．

显见，$\hat{\hat{\mathscr{F}}}=\widehat{\mathscr{F}}$．此外，若 $\mathscr{F}$ 关于某个概率测度 $\mathbb{P}$ 为完备，则 $\widehat{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$．

1.36 定理 令 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为一可测空间，则有

$$\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\widehat{\mathscr{F}}=\mathscr{A}(\widehat{\mathscr{F}}).$$

证明 设 $\mathbb{P}\in\mathscr{P}$，令

$$\boldsymbol{I}(A)=\inf_{\substack{B\in\mathscr{F}\\B\supset A}}\mathbb{P}(B),\quad A\in\mathscr{A}(\mathscr{F}).$$

容易验证，$\boldsymbol{I}$ 是 $(\Omega,\mathscr{A}(\mathscr{F}))$ 上的 Choquet $\mathscr{F}$-容度．由 Choquet 定理，对一切 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，有(注意 $\mathscr{F}_\delta=\mathscr{F}$)

$$\boldsymbol{I}(A)=\sup_{\substack{B\in\mathscr{F}\\B\subset A}}\mathbb{P}(B),$$

于是 $A\in\mathscr{F}^{\mathbb{P}}$．但 $\mathbb{P}\in\mathscr{P}$ 是任意的，故 $A\in\widehat{\mathscr{F}}$．这表明 $\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\widehat{\mathscr{F}}$．于是我们有

$$\widehat{\mathscr{F}}\subset\mathscr{A}(\widehat{\mathscr{F}})\subset\hat{\hat{\mathscr{F}}}=\widehat{\mathscr{F}},$$

从而 $\mathscr{A}(\widehat{\mathscr{F}})=\widehat{\mathscr{F}}$．

§9 截口定理

1.37 定义 设 Ω 为一集合，$A\subset\mathbb{R}_+\times\Omega$. 令

$$D_A(\omega)=\inf\{t\in\mathbb{R}_+:(t,\ \omega)\in A\},\ \omega\in\Omega.$$

称 D_A 为集合 A 的初遇. 这里及今后，我们恒约定 $\inf\emptyset=+\infty$.

1.38 定理 对一切 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{F})$，$D_A$ 为 $\hat{\mathscr{F}}$ 可测.

证明 令 $r>0$，则 $[D_A<r]$ 是集合 $A\cap([0,\ r[\times\Omega)$ 在 Ω 上的投影，故由定理 1.32，$[D_A<r]\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 但 $\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\hat{\mathscr{F}}$，故 D_A 为 $\hat{\mathscr{F}}$ 可测.

注 设 (X_t) 为 $(\Omega,\ \mathscr{F})$ 上的一实值可测过程，则 $\sup\limits_t|X_t|$ 为 $\hat{\mathscr{F}}$ 可测. 事实上，对一切 $a>0$，令

$$T_a=\inf\{t:|X_t|>a\},$$

则由定理知，T_a 为 $\hat{\mathscr{F}}$ 可测. 可是

$$[\sup_t|X_t|>a]=[T_a<\infty]\in\hat{\mathscr{F}},$$

这表明 $\sup\limits_t|X_t|$ 为 $\hat{\mathscr{F}}$ 可测.

下一定理常称为截口定理. 这一定理是解析集及容度理论在概率论中最重要的应用之一.

1.39 定理 令 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbb{P})$ 为一概率空间，$A\in\mathscr{A}(\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{F})$，则存在一非负 $\hat{\mathscr{F}}$ 可测随机变量 T，使得

(39.1) $$T(\omega)<\infty\Rightarrow(T(\omega),\ \omega)\in A,$$

(39.2) $$\mathbb{P}([T<\infty])=\mathbb{P}([D_A<\infty]).$$

证明 $\mathbb{P}$ 可以唯一地扩张成为 $\mathscr{F}^{\mathbb{P}}$ 上的一概率测度（仍用 $\mathbb{P}$ 记之）. 由于 $\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{F}^{\mathbb{P}}$，故 $\mathbb{P}$ 为 $(\Omega,\ \mathscr{A}(\mathscr{F}))$ 上的 Choquet $\mathscr{F}$-容度.

令 $\mathscr{H}$ 为用有限并运算封闭 $\mathscr{K}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 所得的铺，易知 $\mathscr{H}$ 对有限交运算亦封闭. 由定理 1.32 知，

$$\mathscr{A}(\mathscr{H})=\mathscr{A}(\mathscr{K}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F})=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{F}).$$

令 π 表示 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 到 Ω 上的投影映象，则对任何 $C\in\mathscr{A}(\mathscr{H})$，由定理 1.32 知 $\pi(C)\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$. 令

$$I(C)=\mathbb{P}(\pi(C)),\ C\in\mathscr{A}(\mathscr{H}).$$

由定理 1.35 的证明可知，I 是 $(\mathbb{R}_+\times\Omega,\ \mathscr{A}(\mathscr{H}))$ 上的 Choquet $\mathscr{H}$-容度.

由于 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{H})$，故由定理 1.35，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $B\in\mathscr{H}_\delta$，$B\subset A$，使得 $I(B)>I(A)-\varepsilon$，即

$$\mathbb{P}(D_B<\infty)>\mathbb{P}(D_A<\infty)-\varepsilon.$$

由于 D_B 为 $\mathscr{F}^{\mathbb{P}}$ 可测，故存在一 $\mathscr{F}$ 可测非负随机变量 S_ε，使得 $S_\varepsilon=D_B$ a.s.. 令 $C\in\mathscr{F}$，$C\subset[S_\varepsilon=D_B]$，使得 $\mathbb{P}(C)=1$. 置

$$T_\varepsilon=S_\varepsilon I_C+(+\infty)I_{C^c},$$

则 T_ε 为 $\mathscr{F}$ 可测，$T_\varepsilon=S_\varepsilon=D_B$ a.s.，且在 $[T_\varepsilon<\infty]$ 上有 $T_\varepsilon=D_B$. 但对每个 $\omega\in\Omega$，$B(\omega)=\{t\in\mathbb{R}_+:\ (t,\ \omega)\in B\}$ 是 $\mathbb{R}_+$ 中的紧集，故 $D_B(\omega)<+\infty\Rightarrow(D_B(\omega),\ \omega)\in B\subset A$. 于是我们有

$$T_\varepsilon(\omega)<\infty\Rightarrow(T_\varepsilon(\omega),\ \omega)\in A,$$

$$\mathbb{P}(T_\varepsilon<\infty)=\mathbb{P}(D_B<\infty)>\mathbb{P}(D_A<\infty)-\varepsilon.$$

令 $T_0=+\infty$，我们归纳定义一列满足(39.1)的 $\mathscr{F}$ 可测非负随机变量 (T_n) 如下：设 T_n 已定义，令

$$A_n=A\cap\{(t,\ \omega):T_n(\omega)=\infty\}=A\cap(\mathbb{R}_+\times[T_n=\infty]),$$

则 $A_n\in\mathscr{A}(\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F})$. 由上所证，存在一 $\mathscr{F}$ 可测非负随机变量 S_n，使得

$$S_n(\omega)<\infty\Rightarrow(S_n(\omega),\ \omega)\in A_n,$$

$$\mathbb{P}(S_n<\infty)\geqslant\frac{1}{2}\mathbb{P}(D_{A_n}<\infty)=\frac{1}{2}\mathbb{P}([T_n=\infty]\cap[D_A<\infty]).$$

我们令 $T_{n+1}=T_n\wedge S_n$，则 T_{n+1} 满足(39.1)，且有

$$(39.3)\quad \mathbb{P}(T_{n+1}<\infty)=\mathbb{P}(T_n<\infty)+\mathbb{P}(S_n<\infty)$$
$$\geqslant\mathbb{P}(T_n<\infty)+\frac{1}{2}\mathbb{P}([T_n=\infty]\cap[D_A<\infty]).$$

令 $T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\bigwedge\limits_n T_n$，由于 $T_{n+1}I_{[T_n<\infty]}=T_nI_{[T_n<\infty]}$，故 $TI_{[T_n<\infty]}=$

$T_n I_{[T_n<\infty]}$, 从而有

$$[T<\infty]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[T_n<\infty],\quad [T=\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty}[T_n=\infty].$$

在(39.3)中, 令 $n\to\infty$ 得

$$\mathbb{P}(T<\infty)\geqslant\mathbb{P}(T<\infty)+\frac{1}{2}\mathbb{P}([T=\infty]\cap[D_A<\infty]).$$

于是 $\mathbb{P}([T=\infty]\cap[D_A<\infty])=0$, 即 $[D_A<\infty]\subset[T<\infty]$ a.s.. 但由于 $[T<\infty]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[T_n<\infty]$, 故 T 满足(39.1), 从而 $[T<\infty]\subset[D_A<\infty]$, 故有 $[D_A<\infty]=[T<\infty]$ a.s., 即(39.2)成立. 定理证毕.

注 今后我们称满足(39.1)的非负随机变量 T 为 A 的一个截口. (39.2)表明, 除了一个 $\mathbb{P}$-零概集外, T 是 A 的一个完整的截口. 截口定理由此得名.

1.40 引理 令 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间, $\mathscr{C}$ 为生成 $\mathscr{F}$ 的一个域. 则对任何 $A\in\mathscr{F}$, 我们有

$$\mathbb{P}(A)=\sup_{\substack{B\in\mathscr{C}_\delta\\ B\subset A}}\mathbb{P}(B)=\inf_{\substack{C\in\mathscr{C}_\sigma\\ C\supset A}}\mathbb{P}(C). \tag{40.1}$$

证明 令 $\mathscr{G}$ 表示 $\mathscr{F}$ 中满足(40.1)的 A 的全体. 由于 $\mathscr{C}_\sigma=\{A: A^c\in\mathscr{C}_\delta\}$, 故有 $A\in\mathscr{G}\Rightarrow A^c\in\mathscr{G}$.

现设 $A_n\in\mathscr{G}$, $A_n\uparrow A$, 往证 $A\in\mathscr{G}$. 给定 $\varepsilon>0$, 取 n 足够大, 使得 $\mathbb{P}(A\setminus A_n)<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $B\in\mathscr{C}_\delta$, $B\subset A_n$, 使得 $\mathbb{P}(A_n\setminus B)<\frac{\varepsilon}{2}$, 于是 $B\subset A$, 且 $\mathbb{P}(A)<\mathbb{P}(B)+\varepsilon$. 另一方面, 对每个 n, 取 $C_n\in\mathscr{C}_\sigma$, $C_n\supset A_n$, 使得 $\mathbb{P}(C_n\setminus A_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}$. 令 $C=\bigcup_n C_n$, 则 $C\in\mathscr{C}_\sigma$, $C\supset A$, 且 $\mathbb{P}(C\setminus A)<\varepsilon$. 这表明 $A\in\mathscr{G}$. 综上所证, $\mathscr{G}$ 为一单调类. 但显然有 $\mathscr{C}\subset\mathscr{G}$, 故 $\mathscr{G}=\mathscr{F}$. 引理得证.

下一定理是定理 1.39 的一个重要应用, 我们将在第五章中用到它.

1.41 定理 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 的一子 σ–域，$\mathscr{C}$ 为生成 $\mathscr{G}$ 的一个域．令 $A\in\mathscr{G}$，则对任给 $\varepsilon>0$，存在一 $B\in\mathscr{C}_\delta$，使得

$$B\subset A, \tag{41.1}$$

$$\mathbb{P}(\pi(A))\leqslant\mathbb{P}(\pi(B))+\varepsilon. \tag{41.2}$$

证明 选定一 $\mathscr{F}$ 可测非负随机变量 T，使之满足 (39.1) 及 (39.2)．在 $\mathscr{G}$ 上定义一测度 μ 如下：

$$\mu(G)=\mathbb{P}(\{\omega:(T(\omega),\ \omega)\in G\}),\ G\in\mathscr{G}.$$

则 A 为 μ 的支撑，且 $\mu(A)=\mathbb{P}([T<\infty])=\mathbb{P}(\pi(A))$．对任何 $G\in\mathscr{G}$，我们有

$$\{\omega:(T(\omega),\ \omega)\in G\}\subset\pi(G).$$

从而 $\mu(G)\leqslant\mathbb{P}(\pi(G))$．对任给 $\varepsilon>0$，由引理 1.40，存在 $B\in\mathscr{C}_\delta$，$B\subset A$，使得 $\mu(A)\leqslant\mu(B)+\varepsilon$．于是

$$\mathbb{P}(\pi(A))=\mu(A)\leqslant\mu(B)+\varepsilon\leqslant\mathbb{P}(\pi(B))+\varepsilon.$$

定理得证．

§10 Lebesgue-Stieltjes 积分

1.42 引理 设 $a(t)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上一非负右连续增函数(允许取 $+\infty$)．令

$$c(t)=\inf\{s:a(s)>t\},\ t\in\mathbb{R}_+, \tag{42.1}$$

则 $c(t)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上非负右连续增函数．设 $t\in\mathbb{R}_+$，则为要 $c(t)<+\infty$，必须且只需 $t<a(\infty)\triangleq\lim\limits_{t\to+\infty}a(t)$．令

$$a_-(t)=a(t-)=\lim_{s\uparrow\uparrow t}a(s),$$

$$c_-(t)=c(t-)=\lim_{s\uparrow\uparrow t}c(s)=\inf\{s:a(s)\geqslant t\}=\sup\{s:a(s)<t\},$$

并约定 $a_-(0)=c_-(0)=0$，则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，我们有

$$a_-(c_-(t))\leqslant a_-(c(t))\leqslant t. \tag{42.2}$$

对一切 $t<a(\infty)$，我们有

(42.3) $$a(c(t))\geqslant a(c_-(t))\geqslant t.$$

特别,如果 a 连续,则对一切 $t<a(\infty)$,我们有 $a(c(t))=a(c_-(t))=t$. 最后, c 与 a 的关系是对称的, 即有

(42.4) $$a(s)=\inf\{t:c(t)>s\},\ s\in\mathbb{R}_+.$$

此外,我们有

(42.5) $$a(s)=\sup\{t:c(t)\leqslant s\},\ s\in\mathbb{R}_+.$$

证明 留给读者作为练习.

下一引理称为 Lebesgue 引理, 它把对增函数的 Lebesgue-Stieltjes 积分化为通常的 Lebesgue 积分. 我们将在第六章用到这一引理.

1.43 引理 设 a 为 $\mathbb{R}_+$ 上一有限值非负右连续增函数. 则对 $\mathbb{R}_+$ 上任一有界或非负 Borel 函数 f, 我们有

(43.1) $$\int_{[0,\infty[}f(s)da(s)=\int_{[0,\infty[}f(c(s))I_{[c<\infty]}^{(s)}ds,$$

(43.2) $$\int_{[0,\infty[}f(s)da(s)=\int_{[0,\infty[}f(c_-(s))I_{[c_-<\infty]}^{(s)}ds,$$

其中 c 如(42.1)定义.

证明 设 $u\in\mathbb{R}_+$, 如果 $f(t)=I_{[0,u]}^{(t)}$, 则由(42.5),

$$\int_{[0,\infty[}f(s)da(s)=a(u)=\sup\{s:c(s)\leqslant u\}=\int_{[0,\infty[}I_{[c\leqslant u]}^{(s)}ds$$
$$=\int_{[0,\infty[}f(c(s))I_{[c<\infty]}^{(s)}ds.$$

于是对这样的 f, (43.1)成立. 由单调类定理(定理 1.4), (43.1)对有界或非负 Borel 函数 f 成立. 最后, 由于集合 $\{s:c(s)\neq c_-(s)\}$ 是至多可数的, 故由(43.1)得(43.2).

下一引理是 Lebesgue-Stieltjes 积分的分部积分公式.

1.44 引理 设 $f(t)$、$g(t)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的两个右连续有限变差函数 (即可表为两个有限值非负右连续增函数之差的函数), 则对 $0\leqslant a<b<+\infty$, 我们有

(44.1) $f(b)g(b)=f(a)g(a)+\int_a^b f(s)dg(s)+\int_a^b g(s)df(s).$

证明 我们有

$$(f(b)-f(a))(g(b)-g(a))=\iint_{]a,b]\times]a,b]} df(x)dg(y)$$

$$=\iint_{a<x<y\leq b} df(x)dg(y)+\iint_{a<y<x\leq b} df(x)dg(y)$$

$$=\int_a^b dg(y)\int_a^y df(x)+\int_a^b df(x)\int_a^{x-} dg(y)$$

$$=\int_a^b [f(y)-f(a)]dg(y)+\int_a^b [g(x-)-g(a)]df(x)$$

$$=\int_a^b f(y)dg(y)+\int_a^b g(x-)df(x)-f(a)[g(b)-g(a)]$$

$$-g(a)[f(b)-f(a)].$$

由此推得(44.1).

§11 Kunita-Watanabe 不等式

下一定理中的(45.1)式称为 Kunita-Watanabe 不等式, 我们将在第七章中用到它.

1.45 定理 设 $a(t)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的右连续有限变差函数, $b(t)$ 及 $c(t)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的非负右连续增函数. 如果 $|a(0)|\leqslant\sqrt{b(0)}\sqrt{c(0)}$, 且对一切 $0\leqslant s<t<+\infty$, 有

$$|a(t)-a(s)|\leqslant\sqrt{b(t)-b(s)}\sqrt{c(t)-c(s)},$$

则对 $\mathbb{R}_+$ 上的任何 Borel 可测函数 f, g 有

(45.1) $$\int_{[0,\infty[}|f(s)g(s)||da(s)|$$

$$\leqslant\left(\int_{[0,\infty[}f^2(s)db(s)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{[0,\infty[}g^2(s)dc(s)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 我们将用到如下初等事实: 设 x, y, z 为三个实数, 且 $x\geqslant0$, $z\geqslant0$, 则为要对一切有理数 λ, 有 $\lambda^2x+2\lambda y+z\geqslant0$, 必须且

只需 $|y|\leqslant\sqrt{xz}$.

令 $\mu(t)=\int_{[0,t]}|da(s)|+b(t)+c(t)$，记 $a'=\frac{da}{d\mu}$，$b'=\frac{db}{d\mu}$，$c'=\frac{dc}{d\mu}$. 设 λ 为一给定的有理数，令

$$\nu(t)=\lambda^2 b(t)+2\lambda a(t)+c(t),$$

则由定理假定及上述初等事实容易看出，ν 为 $\mathbb{R}_+$ 上的非负增函数. 于是我们有

$$\frac{d\nu}{d\mu}=\lambda^2 b'+2\lambda a'+c'\geqslant 0,\quad d\mu\text{- a.e.}$$

但有理数全体是可数的，故上式对一切有理数 λ 同时成立. 因此，由上述初等事实，我们有

$$|a'|\leqslant\sqrt{b'c'},\quad d\mu\text{- a.e.}$$

现设 f, g 为 $\mathbb{R}_+$ 上的两个 Borel 可测函数，由 Schwarz 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty[}|f(s)g(s)||da(s)|&=\int_{[0,\infty[}|f(s)g(s)||a'(s)|d\mu(s)\\&\leqslant\int_{[0,\infty[}|f(s)\sqrt{b'(s)}||g(s)\sqrt{c'(s)}|d\mu(s)\\&\leqslant\left(\int_{[0,\infty[}f^2(s)b'(s)d\mu(s)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{[0,\infty[}g^2(s)c'(s)d\mu(s)\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\int_{[0,\infty[}f^2(s)db(s)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{[0,\infty[}g^2(s)dc(s)\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

注 由证明看出，该定理可推广到一般情形. 设 μ_1, μ_2, μ_3 为可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 上的三个 σ-有限符号测度. 如果对一切 $A\in\mathscr{E}$，有

$$|\mu_1(A)|\leqslant\sqrt{|\mu_2|(A)|\mu_3|(A)}$$

（这里 $|\mu_i|=\mu_i^+ +\mu_i^-$），则对 $(E,\mathscr{E})$ 上任何两个 Borel 可测函数 f, g，有

$$\int_E|fg|d|\mu_1|\leqslant\left(\int_E f^2 d|\mu_2|\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_E g^2 d|\mu_3|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

§12 一个依概率收敛准则

1.46 引理 令$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为一概率空间。

1) 设$\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, 则$|\xi_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} |\xi|$.

2) 设$\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta$, 则$\xi_n\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi\eta$.

3) 设$\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$. 若$|\xi|>0$ a.s., 且对一切n, $|\xi_n|>0$ a.s., 则$\dfrac{1}{\xi_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{1}{\xi}$.

证明 我们只证3), 将1)、2)的证明留给读者. 设$c>0$, 则对任何$\delta>0$, 我们有

$$\begin{aligned}\left[\left|\frac{1}{\xi_n}-\frac{1}{\xi}\right|\geqslant c\right]&=\left[\frac{|\xi_n-\xi|}{|\xi_n\xi|}\geqslant c\right]\\&\subset[|\xi_n-\xi|\geqslant c\delta]\cup[|\xi_n\xi|<\delta]\\&\subset[|\xi_n-\xi|\geqslant c\delta]\cup[|\xi_n\xi-\xi^2|\geqslant\delta]\cup[\xi^2<2\delta].\end{aligned}$$

任给$\varepsilon>0$, 选取$\delta>0$, 使得$\mathbb{P}(\xi^2<2\delta)<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 于是存在$n_0$, 使当$n\geqslant n_0$时, 有

$$\mathbb{P}([|\xi_n-\xi|\geqslant c\delta])<\frac{\varepsilon}{3},\ \mathbb{P}([|\xi_n\xi-\xi^2|\geqslant\delta])<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 当$n\geqslant n_0$, 有$\mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{1}{\xi_n}-\dfrac{1}{\xi}\right|\geqslant c\right]\right)<\varepsilon$. 这表明$\dfrac{1}{\xi_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{1}{\xi}$.

下一定理给出了一个依概率收敛准则.

1.47 定理 我们有

$$\text{(47.1)}\qquad \xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi \Leftrightarrow \frac{\xi_n}{1+|\xi_n|} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\xi}{1+|\xi|} \Leftrightarrow \frac{\xi_n}{1+|\xi_n|} \xrightarrow{L^1} \frac{\xi}{1+|\xi|}.$$

证明 后一等价关系显然, 往证前一等价关系. 设$\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, 则由引理1.46.1), $1+|\xi_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} 1+|\xi|$, 故由引理1.46, $\dfrac{1}{1+|\xi_n|}$

$\xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{1}{1+|\xi|}$，从而 $\dfrac{\xi_n}{1+|\xi_n|} \xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{\xi}{1+|\xi|}$. 反之，设 $\dfrac{\xi_n}{1+|\xi_n|}$ $\xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{\xi}{1+|\xi|}$，则 $\dfrac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|} \xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{|\xi|}{1+|\xi|}$，于是

$$\frac{1}{1+|\xi_n|}=1-\frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1-\frac{|\xi|}{1+|\xi|}=\frac{1}{1+|\xi|}.$$

故由引理1.46，$1+|\xi_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} 1+|\xi|$. 但 $\dfrac{\xi_n}{1+|\xi_n|} \xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{\xi}{1+|\xi|}$，故有 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$.

注 由引理1.46，可以类似证明如下熟知结果：

$$\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi \Leftrightarrow \frac{\xi_n-\xi}{1+|\xi_n-\xi|} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

第 二 章

离散时间鞅

本章只限于介绍离散时间鞅的经典结果，这些结果是研究连续时间鞅的基础．关于离散时间鞅的近代发展，读者可参看 P. A. Meyer[2]，J. Neveu[2]，C. Dellacherie，P. A. Meyer[2]，A. Garsia[1]．

§1 停时与适应过程

令$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为一概率空间，$(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$为一列上升的$\mathscr{F}$的子$\sigma$-域，$\mathscr{F}_\infty$为$\mathscr{F}$的一子$\sigma$-域，且有$\mathscr{F}_\infty\supset\mathscr{F}_{\infty-}\triangleq\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$.

2.1 定义 在$\overline{\mathbb{N}}$中取值的随机变量T叫做停时(关于$(\mathscr{F}_n)$)，如果对一切$n\in\mathbb{N}$，有$[T=n]\in\mathscr{F}_n$，或者等价地，对一切$n\in\mathbb{N}$，有$[T\leqslant n]\in\mathscr{F}_n$.

设T为一停时，我们令

$$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\forall n\in\mathbb{N},\ A\cap[T=n]\in\mathscr{F}_n\},\tag{1.1}$$

称$\mathscr{F}_T$为T前事件σ-域．显然有

$$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\forall n\in\mathbb{N},\ A\cap[T\leqslant n]\in\mathscr{F}_n\}.\tag{1.2}$$

易见，停时T为$\mathscr{F}_T$可测．当$T\equiv n(n\in\overline{\mathbb{N}})$时，我们有$\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_n$.

2.2 定理 设S, T为停时，(S_k)为停时列．

1) $\bigwedge_k S_k$, $\bigvee_k S_k$为停时；

2) $A\in\mathscr{F}_S\Rightarrow A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_T$, $A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_T$;

3) $S\leqslant T\Rightarrow\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$;

4) 设 $A\in\mathscr{F}_S$, 令

$$S_A=SI_A+(+\infty)I_{A^c},$$

则 S_A 为停时, 称 S_A 为停时 S 到 A 上的局限;

5) $n\in\mathbb{N}\Rightarrow T+n$ 为停时.

证明 1) 由下列等式推得:

$$[\bigwedge_k S_k\leqslant n]=\bigcup_k[S_k\leqslant n],$$

$$[\bigvee_k S_k\leqslant n]=\bigcap_k[S_k\leqslant n].$$

2) 设 $A\in\mathscr{F}_S$, 则 $A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_\infty$, 且对一切 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$A\cap[S\leqslant T]\cap[T=n]=(A\cap[S\leqslant n])\cap[T=n]\in\mathscr{F}_n,$$

故 $A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_T$. 同理可证 $A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_T$.

3) 由 2) 推得. 4) 及 5) 都显然.

本章所研究的随机过程都是实值的.

2.3 定义 随机过程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为适应的 (关于 $(\mathscr{F}_n)$), 如果对一切 $n\in\mathbb{N}$, X_n 为 $\mathscr{F}_n$ 可测.

2.4 定理 设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一适应过程, $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, 令

$$T(\omega)=\inf\{n\in\mathbb{N}: X_n(\omega)\in B\},\ \omega\in\Omega.$$

则 T 为停时. 这里约定 $\inf\emptyset=+\infty$.

证明 设 $n\in\mathbb{N}$, 则

$$[T=n]=(\bigcap_{m<n}[X_m\in B^c])\cap[X_n\in B]\in\mathscr{F}_n,$$

故 T 为停时.

2.5 定理 设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一适应过程, ξ 为一 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的实值随机变量, T 为一停时. 令 $X_\infty=\xi$, $X_T(\omega)=X_{T(\omega)}(\omega)$, 则 X_T 为 $\mathscr{F}_T$ 可测.

证明 设 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$, 则有

$$[X_T\in B]=\bigcup_{k\in\overline{\mathbb{N}}}([X_k\in B]\cap[T=k])\in\mathscr{F}_\infty,$$

$$[X_T\in B]\cap[T=n]=[X_n\in B]\cap[T=n]\in\mathscr{F}_n,$$

这表明 $[X_T\in B]\in\mathscr{F}_T$, 即 X_T 为 $\mathscr{F}_T$ 可测.

§2 定义，基本不等式

2.6 定义 一适应过程$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$称为鞅(相应地，上鞅，下鞅)，如果对一切$n\in\mathbb{N}$，X_n为可积，且有

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]=X_n \text{ a.s. }(\text{相应地}, \leqslant X_n, \geqslant X_n).$$

2.7 定理 设(X_n)，(Y_n)为两个鞅(上鞅)，则(X_n+Y_n)为鞅(上鞅)，$(X_n\wedge Y_n)$为上鞅.

证明 显然.

2.8 定理 1) 设(X_n)为一鞅(相应地，下鞅)，f为$\mathbb{R}$上的凸函数(相应地，非降凸函数). 如果对一切$n\in\mathbb{N}$，$f(X_n)$为可积，则$(f(X_n))$为下鞅.

2) 设(X_n)为一上鞅，f为$\mathbb{R}$上的一非降凹函数(即上凸函数). 如果对一切$n\in\mathbb{N}$，$f(X_n)$可积，则$(f(X_n))$为上鞅.

证明 1) 一方面，我们有

$$(8.1)\qquad f(X_n)=f(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]) \text{ a.s. }(\text{相应地}, \leqslant f(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n])).$$

另一方面，由 Jensen 不等式，

$$(8.2)\qquad f(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n])\leqslant\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathscr{F}_n] \text{ a.s.},$$

合并(8.1)、(8.2)知$(f(X_n))$为下鞅.

2) 的证明与1)类似.

2.9 系 1) 设(X_n)为下鞅，则(X_n^+)为下鞅. 如果对一切$n\in\mathbb{N}$，$X_n\log^+X_n$可积，则$(X_n\log^+X_n)$为下鞅，这里$\log^+x=(\log x)I_{[1,\infty[}(x)$.

2) 设(X_n)为鞅(或者非负下鞅)，$\lambda\geqslant1$为一常数. 如果对一切n，$|X_n|^\lambda$为可积，则$(|X_n|^\lambda)$为下鞅.

下一定理是有界停时情形的 Doob 停止定理. 一般情形见定理 2.27.

2.10 定理 设(X_n)为一鞅(相应地，上鞅)，S，T为两个有界

停时，且$S\leqslant T$. 则有

(10.1) $\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]=X_S$ a.s. (相应地，$\leqslant X_S$).

证明 只证上鞅情形. 设$T\leqslant n$, 则$|X_T|\leqslant\sum_{j=0}^{n}|X_j|$, $|X_S|\leqslant\sum_{j=0}^{n}|X_j|$, 从而$X_T$, X_S可积. 令$A\in\mathscr{F}_S$, $j\in\mathbb{N}$, 我们有

$$A\cap[S=j]\cap[T>j]\in\mathscr{F}_j.$$

首先假定$T-S\leqslant 1$. 这时由上鞅性，我们有

$$\int_A(X_S-X_T)d\mathbb{P}=\sum_{j=0}^{n}\int_{A\cap[S=j]\cap[T>j]}(X_j-X_{j+1})d\mathbb{P}\geqslant 0.$$

对一般情形，令

$$R_j=T\wedge(S+j),\quad j=1,\cdots,n,$$

则每个R_j为停时，且$S\leqslant R_1\leqslant\cdots\leqslant R_n=T$, $R_1-S\leqslant 1$, $R_{j+1}-R_j\leqslant 1(1\leqslant j\leqslant n-1)$. 令$A\in\mathscr{F}_S$, 则对一切$1\leqslant j\leqslant n$, $A\in\mathscr{F}_{R_j}$(定理2.2.8)). 利用上面已证结果得

$$\int_A X_S d\mathbb{P}\geqslant\int_A X_{R_1}d\mathbb{P}\geqslant\cdots\geqslant\int_A X_T d\mathbb{P}.$$

但由定理2.5, X_S为$\mathscr{F}_S$可测，故上式表明

$$\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]\leqslant X_S \text{ a.s.},$$

定理得证.

2.11 系 设(X_n)为一上鞅，T为一停时，则有

(11.1) $\mathbb{E}[|X_{T\wedge k}|]\leqslant\mathbb{E}[X_0]+2\mathbb{E}[X_k^-]$,

(11.2) $\mathbb{E}[|X_T I_{[T<\infty]}|]\leqslant 3\sup_n\mathbb{E}[|X_n|]$.

证明 由于(X_n^-)为下鞅，故由定理2.10有

$$\mathbb{E}[|X_{T\wedge k}|]=\mathbb{E}[X_{T\wedge k}]+2\mathbb{E}[X_{T\wedge k}^-]\leqslant\mathbb{E}[X_0]+2\mathbb{E}[X_k^-],$$

此即(11.1). 于是有

$$\mathbb{E}[|X_{T\wedge k}I_{[T<\infty]}|]\leqslant\mathbb{E}[X_0]+2\mathbb{E}[X_k^-]\leqslant 3\sup_n\mathbb{E}[|X_n|].$$

令$k\to\infty$, 由Fatou引理得(11.2).

下一定理中的(12.3)通常称为上鞅极大不等式.

2.12 定理 设(X_n)为一上鞅，$k\in\mathbb{N}$. 则对任何$\lambda>0$，我们有

$$\lambda\mathbb{P}[\sup_{n\leqslant k}X_n\geqslant\lambda]\leqslant\mathbb{E}[X_0]-\int_{[\sup_{n\leqslant k}X_n<\lambda]}X_k d\mathbb{P}, \tag{12.1}$$

$$\lambda\mathbb{P}[\inf_{n\leqslant k}X_n\leqslant-\lambda]\leqslant\int_{[\inf_{n\leqslant k}X_n\leqslant-\lambda]}(-X_k)d\mathbb{P}, \tag{12.2}$$

$$\lambda\mathbb{P}[\sup_{n\leqslant k}|X_n|\geqslant\lambda]\leqslant\mathbb{E}[X_0]+2\mathbb{E}[X_k^-]. \tag{12.3}$$

证明 令$T=\inf\{n\in\mathbb{N}:X_n\geqslant\lambda\}\wedge k$，则$T$为有界停时，且在$[\sup_{n\leqslant k}X_n\geqslant\lambda]$上有$X_T\geqslant\lambda$；在$[\sup_{n\leqslant k}X_n<\lambda]$上，有$T=k$. 于是由定理2.10，有

$$\mathbb{E}[X_0]\geqslant\mathbb{E}[X_T]=\int_{[\sup_{n\leqslant k}X_n\geqslant\lambda]}X_T d\mathbb{P}+\int_{[\sup_{n\leqslant k}X_n<\lambda]}X_T d\mathbb{P}$$

$$\geqslant\lambda\mathbb{P}[\sup_{n\leqslant k}X_n\geqslant\lambda]+\int_{[\sup_{n\leqslant k}X_n<\lambda]}X_k,$$

此即(12.1). 同理可证(12.2). 由(12.1)及(12.2)立刻得到(12.3).

下一不等式通常称为Kolmogorov不等式.

2.13 系 设(X_n)为一鞅. 若$\mathbb{E}[X_k^2]<+\infty$，则对任何$\lambda>0$，有

$$\mathbb{P}[\sup_{n\leqslant k}|X_n|\geqslant\lambda]\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}[X_k^2]. \tag{13.1}$$

证明 由Jensen不等式，对一切$n\leqslant k$，有

$$\mathbb{E}[X_n^2]=\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X_k|\mathscr{F}_n])^2]\leqslant\mathbb{E}[X_k^2]<\infty.$$

故$(-X_n^2)_{n=0,1,\cdots,k}$为上鞅. 对此上鞅及$\lambda^2$应用不等式(12.2)即得(13.1).

下面我们将证明极其重要的上鞅上穿不等式. 为此，先交代一些必要的概念.

设$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$为一适应过程，$[a,b]$为一闭区间. 令

$$T_0=\inf\{n: X_n<a\},$$
$$T_1=\inf\{n: n>T_0,\ X_n>b\},$$
$$\cdots\cdots$$
$$T_{2j}=\inf\{n: n>T_{2j-1},\ X_n<a\},$$
$$T_{2j+1}=\inf\{n: n>T_{2j},\ X_n>b\}.$$

则$(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$为一停时上升列．若$T_{2j-1}(\omega)<+\infty$，则序列$(X_0(\omega), X_1(\omega), \cdots, X_{T_{2j-1}}(\omega))$上穿区间$[a, b]$ j次．我们用$v_a^b[X, k]$表示序列$(X_0, X_1, \cdots, X_k)$上穿$[a, b]$的次数，则显然有

$$[v_a^b[X, k]=j]=[T_{2j-1}\leqslant k<T_{2j+1}]\in\mathscr{F}_k.$$

从而$v_a^b[X, k]$为$\mathscr{F}_k$可测随机变量．

2.14 定理 令(X_n)为一上鞅，$N, j\in\mathbb{N}$，则有

$$\text{(14.1)}\quad \mathbb{P}[v_a^b[X, N]>j]\leqslant\frac{1}{b-a}\int_{[v_a^b[X,N]=j]}(X_N-a)^-d\mathbb{P},$$

$$\text{(14.2)}\quad \mathbb{E}v_a^b[X, N]\leqslant\frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_N-a)^-].$$

证明 无妨假定(X_n)停止于N，即对一切$k\geqslant N$，有$X_k=X_N$，此外假定$a=0$．否则考虑上鞅$(X_{n\wedge N}-a)$．令

$$S=T_{2j}\wedge(N+1),\quad T=T_{2j+1}\wedge(N+1),$$

则S、T为停时，$S\leqslant T\leqslant N+1$．在$[S<N]=[T_{2j}<N]$上，$X_S<0$，故由定理2.10，

$$\int_{[S<N]}X_T d\mathbb{P}\leqslant\int_{[S<N]}X_S d\mathbb{P}\leqslant 0.$$

另一方面，我们有

$$[v_0^b(X, N)>j]=[T_{2j+1}\leqslant N]\subset[S<N,\ X_T>b],$$
$$[S<N, X_T\leqslant b]=[S<N,\ T=N+1]\subset[v_0^b[X, N]=j].$$

于是有

$$b\mathbb{P}[v_0^b[X, N]>j]\leqslant\int_{[v_0^b[X,N]>j]}X_T d\mathbb{P}=\int_{[S<N,\ X_T>b]}X_T d\mathbb{P}$$
$$\leqslant\int_{[S<N,\ X_T\leqslant b]}-X_T\, d\mathbb{P}=\int_{[S<N,\ T=N+1]}-X_{N+1}\, d\mathbb{P}$$

$$= \int_{[S<N,\,T=N+1]} -X_N\, d\mathbb{P} \leqslant \int_{[S<N,\,T=N+1]} X_N^-\, d\mathbb{P}$$

$$\leqslant \int_{[\nu_a^b[X,N]=j]} X_N^-\, d\mathbb{P}.$$

此即(14.1)．在(14.1)两边对 j 求和得(14.2)．

下一定理通常称为 Doob 不等式．

2.15 定理　设(X_n)为一非负下鞅．令 $X^*=\sup\limits_n X_n$，则有

$$\mathbb{E}[X^*]\leqslant\frac{e}{e-1}\left(1+\sup_n \mathbb{E}[X_n\log^+ X_n]\right), \tag{15.1}$$

$$\|X^*\|_p\leqslant q\sup_n\|X_n\|_p, \tag{15.2}$$

其中，$p>1$，$q>1$ 为一对共轭指数，$\|\xi\|_p\triangleq(\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}$．

证明　设 $k\in\mathbb{N}$，令 $X_k^*=\sup\limits_{n\leqslant k}X_n$，对 $\lambda>0$，令 $F(\lambda)=\mathbb{P}(X_k^*>\lambda)$，则由(12.2)，我们有

$$F(\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{[X_k^*>\lambda]}X_k\, d\mathbb{P}.$$

设 $\Psi(\lambda)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上一右连续增函数，且 $\Psi(0)=0$．则由分部积分公式及 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Psi(X_k^*)] &= -\int_0^\infty \Psi(\lambda)\, dF(\lambda)\\ &= \int_0^\infty F(\lambda)\,d\Psi(\lambda) - [\Psi(\lambda)F(\lambda)]_0^\infty\\ &\leqslant \int_0^\infty F(\lambda)\,d\Psi(\lambda)\\ &\leqslant \int_0^\infty\left(\frac{1}{\lambda}\int_{[X_k^*>\lambda]}X_k\, d\mathbb{P}\right)d\Psi(\lambda)\\ &= \mathbb{E}\left[X_k\left(\int_0^{X_k^*}\frac{d\Psi(\lambda)}{\lambda}\right)\right].\end{aligned} \tag{15.3}$$

在(15.3)中，如果令 $\Psi(\lambda)=(\lambda-1)^+$，则有

$$\mathbb{E}[(X_k^*-1)]\leqslant\mathbb{E}[(X_k^*-1)^+]\leqslant\mathbb{E}[X_k\log^+ X_k^*]. \tag{15.4}$$

由于 $\log x\leqslant\frac{x}{e}(x\geqslant 0)$，故对任意 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，有

$$a\log^+ b\leqslant a\log^+ a+b/e.$$

从而有

$$\mathbb{E}[X_k\log^+ X_k^*]\leqslant\mathbb{E}[X_k\log^+ X_k]+\frac{1}{e}\mathbb{E}[X_k^*].$$

于是由(15.4)得

$$\mathbb{E}[X_k^*]\leqslant\frac{e}{e-1}(1+\mathbb{E}[X_k\log^+ X_k]).$$

但由于 $X_k^*\uparrow X^*$，在上不等式中令 $k\to+\infty$，由 Fatou 引理得(15.1)。

在(15.3)中，如果令 $\Psi(\lambda)=\lambda^p$，则有

$$\mathbb{E}[X_k^{*p}]\leqslant\frac{p}{p-1}\mathbb{E}[X_kX_k^{*p-1}]=q\mathbb{E}[X_kX_k^{*p-1}].$$

故由 Hölder 不等式(注意$(p-1)q=p$)得

$$\mathbb{E}[X_k^{*p}]\leqslant q(\mathbb{E}[X_k^p])^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}[X_k^{*p}])^{\frac{1}{q}}. \tag{15.5}$$

为证(15.2)，不妨设 $\sup\limits_n\|X_n\|_p<+\infty$。于是有

$$\|X_k^*\|_p\leqslant\left\|\sum_{n=0}^k X_n\right\|_p\leqslant\sum_{n=0}^k\|X_n\|_p<+\infty.$$

在(15.5)两边用 $(\mathbb{E}[X_k^{*p}])^{\frac{1}{q}}$ 去除，我们有

$$\|X_k^*\|_p\leqslant q\|X_k\|_p.$$

由于 $X_k^*\uparrow X^*$，故由 Fatou 引理得(15.2)。

§3 收敛定理

2.16 定理 设(X_n)为一上鞅．如果 $\sup\limits_n\mathbb{E}[X_n^-]<\infty$ (或者等价地，$\sup\limits_n\mathbb{E}[|X_n|]<\infty$，因为 $\mathbb{E}[|X_n|]=\mathbb{E}[X_n]+2\mathbb{E}[X_n^-]$)，则当 $n\to+\infty$ 时，X_n a.s. 收敛于一可积随机变量 X_∞．若(X_n)为非负上鞅，则对一切 $n\in\mathbb{N}$，有

$$\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_n]\leqslant X_n \text{ a.s.}, \tag{16.1}$$

证明 令 Q 表示 $\mathbb{R}$ 中有理数全体. 设 $a, b\in Q, a<b$. 令 $v_a^b(X)$ 为序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 上穿区间 $[a, b]$ 的次数, 即 $v_a^b(X)=\lim\limits_{N\to\infty}v_a^b[X, N]$. 由(14.2), 我们有

$$\mathbb{E}[v_a^b(X)]\leqslant\frac{1}{b-a}\sup_N\mathbb{E}[(X_N-a)^-]$$

$$\leqslant\frac{1}{b-a}(a^++\sup_N\mathbb{E}[X_N^-])<\infty.$$

于是 $v_a^b(X)<\infty$ a.s.. 令

$$W_{a,b}=\{\liminf_{n\to\infty}X_n<a, \limsup_{n\to\infty}X_n>b\},$$

$$W=\bigcup_{\substack{a<b\\a,b\in Q}}W_{a,b}.$$

由于 $W_{a,b}\subset[v_a^b(X)=+\infty]$, 故 $\mathbb{P}(W_{a,b})=0$, 从而 $\mathbb{P}(W)=0$. 若 $\omega\notin W$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)$ 存在, 记为 $X_\infty(\omega)$; 若 $\omega\in W$, 令 $X_\infty(\omega)=0$. 于是 $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X_\infty$. 由 Fatou 引理,

$$\mathbb{E}[|X_\infty|]\leqslant\sup_n\mathbb{E}[|X_n|]<\infty,$$

即 X_∞ 为可积.

如果(X_n)非负, 则由于对任何 $m>n$ 有

$$\mathbb{E}[X_m|\mathscr{F}_n]\leqslant X_n \text{ a.s.},$$

令 $m\to\infty$, 由 Fatou 引理得(16.1).

2.17 定理 设(X_n)为一鞅 (相应地, 上鞅). 如果(X_n)一致可积, 则存在一可积随机变量 X_∞, 使得 $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}, L^1}X_\infty$, 并且对一切 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_n]=X_n \text{ a.s.(相应地,}\leqslant X_n). \tag{17.1}$$

证明 由于 (X_n) 一致可积, 故 $\sup\limits_n\mathbb{E}[|X_n|]<+\infty$ (定理1.13). 由定理2.16, $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X_\infty$. 于是由定理1.15, $X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$. 由此容易推得(17.1).

2.18 系 设 ξ 为一可积随机变量, 令 $\xi_n=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_n]$, $\eta=\mathbb{E}[\xi$

$|\bigvee_n \mathscr{F}_n]$，则 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}, L^1} \eta$.

证明 由于(ξ_n)为一致可积(定理1.12)，故由定理2.17，$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}, L^1} \xi_\infty$. 设 $A\in\bigcup_n \mathscr{F}_n$，则存在某个$n$，使得$A\in\mathscr{F}_n$，于是有

$$\mathbb{E}[\xi_\infty I_A]=\mathbb{E}[\xi_n I_A]=\mathbb{E}[\xi I_A]=\mathbb{E}[\eta I_A].$$

由于ξ_∞, η 为 $\bigvee_n \mathscr{F}_n$ 可测，且 $\bigvee_n \mathscr{F}_n=\sigma(\bigcup_n \mathscr{F}_n)$，故由系1.3.1)，$\xi_\infty=\eta$ a.s.

2.19 系 设(X_n)为一鞅(或者非负下鞅)，$p>1$. 如果 $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p]<\infty$，则$(X_n)$一致可积，$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}, L^p} X_\infty$，且有

(19.1) $$\|X_\infty\|_p=\sup_n \|X_n\|_p.$$

证明 由定理1.11.2)知，(X_n)一致可积，故由定理2.17，$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty$. 对非负下鞅$(|X_n|)$应用Doob不等式(15.2)，有$X^*\in L^p$. 又$|X_n-X_\infty|^p\leqslant(2X^*)^p$，故由控制收敛定理，$X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty$，从而有(19.1).

下一定理推广了系2.18.

2.20 定理 设(ξ_n)为一可积随机变量序列，且$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi_\infty$. 如果存在一可积随机变量$\xi$，使得对一切$n\in\mathbb{N}$，有$|\xi_n|\leqslant\xi$，则有$\mathbb{E}[\xi_n|\mathscr{F}_n] \xrightarrow{\text{a.s.}, L^1} \mathbb{E}[\xi_\infty|\mathscr{F}_{\infty-}]$，这里$\mathscr{F}_{\infty-}=\bigvee_n \mathscr{F}_n$.

证明 令 $u_m=\inf_{n\geqslant m}\xi_n$，$v_m=\sup_{n\geqslant m}\xi_n$，则$|u_m|\leqslant\xi$，$|v_m|\leqslant\xi$，故有$u_m \xrightarrow{\text{a.s.}, L^1} \xi_\infty$，$v_m \xrightarrow{\text{a.s.}, L^1} \xi_\infty$. 另一方面，

$$\mathbb{E}[u_m|\mathscr{F}_n]\leqslant\mathbb{E}[\xi_n|\mathscr{F}_n]\leqslant\mathbb{E}[v_m|\mathscr{F}_n],\quad n\geqslant m.$$

于是由系2.18，我们有

$$\mathbb{E}[u_m|\mathscr{F}_{\infty-}]\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi_n|\mathscr{F}_n]\leqslant\mathbb{E}[v_m|\mathscr{F}_{\infty-}]\ \text{a.s.},$$

$$\mathbb{E}[u_m|\mathscr{F}_{\infty-}]\leqslant\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi_n|\mathscr{F}_n]\leqslant\mathbb{E}[v_m|\mathscr{F}_{\infty-}]\ \text{a.s.},$$

在上二式两端令$m\to\infty$得知$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi_n|\mathscr{F}_n]=\mathbb{E}[\xi_\infty|\mathscr{F}_{\infty-}]$ a.s.,

又由于$(\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_n])$一致可积，且

$$|\mathbb{E}[\xi_n|\mathscr{F}_n]|\leqslant\mathbb{E}[|\xi_n||\mathscr{F}_n]\leqslant\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_n],$$

故$(\mathbb{E}[\xi_n|\mathscr{F}_n])$一致可积．从而由定理1.15，我们有$\mathbb{E}[\xi_n|\mathscr{F}_n]\xrightarrow{L^1}\mathbb{E}[\xi_\infty|\mathscr{F}_{\infty-}]$．

现在我们研究以$-\mathbb{N}=\{\cdots,-2,-1,0\}$为参数集的上鞅收敛性．

令$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$为一概率空间，$(\mathscr{F}_n)_{n\in-\mathbb{N}}$为一列$\mathscr{F}$的子$\sigma$-域，且当$n,m\in-\mathbb{N}$，$n>m$时，有$\mathscr{F}_m\subset\mathscr{F}_n$．一$(\mathscr{F}_n)_{n\in-\mathbb{N}}$适应过程叫做上鞅，如果对一切$n\in-\mathbb{N}$，$X_n$可积，且有

$$\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_{n-1}]\leqslant X_{n-1}\ \text{a.s.}.$$

2.21 定理 设$(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$为一上鞅．如果$\lim\limits_{n\to-\infty}\mathbb{E}[X_n]<+\infty$，则$(X_n)$为一致可积，且$X_n\xrightarrow{\text{a.s.},L^1}X_{-\infty}$．

证明 我们用$v_a^b[X,-N]$表示序列$(X_{-N},X_{-N+1},\cdots,X_0)$上穿区间$[a,b]$的次数，则由(14.2)得

$$\mathbb{E}v_a^b[X,-N]\leqslant\frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_0-a)^-].$$

令$v_a^b(X)=\lim\limits_{N\to\infty}v_a^b[X,-N]$，我们有

$$\mathbb{E}v_a^b(X)\leqslant\frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_0-a)^-]<+\infty.$$

由于$v_a^b(X)$为序列$(-X_0,-X_{-1},-X_{-2},\cdots)$上穿$[-b,-a]$的次数，故由定理2.16的证明知$X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X_{-\infty}$（注意这一结论无条件地成立，但不必有$|X_{-\infty}|<\infty$ a.s.）．

当$n\to-\infty$时，$\mathbb{E}[X_n]\uparrow A>-\infty$．依假定$A<+\infty$．往证$(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$一致可积．由于$(\mathbb{E}[X_0|\mathscr{F}_n])_{n\in-\mathbb{N}}$一致可积，只需证$(X_n-\mathbb{E}[X_0|\mathscr{F}_n])$一致可积．于是，不妨假定$(X_n)$为非负上鞅．给定$\varepsilon>0$，取自然数$k$足够大，使得$A-\mathbb{E}[X_{-k}]<\frac{\varepsilon}{2}$．对$c>0$及$n<-k$，由上鞅性，我们有

$$\int_{[X_n>c]} X_n\,d\mathbb{P}=\mathbb{E}[X_n]-\int_{[X_n\le c]} X_n\,d\mathbb{P}\le\mathbb{E}[X_n]$$

$$-\int_{[X_n\le c]} X_{-k}\,d\mathbb{P}=\mathbb{E}[X_n]-\mathbb{E}[X_{-k}]$$

$$+\int_{[X_n>c]} X_{-k}\,d\mathbb{P}.$$

由于 $A\geq\mathbb{E}[X_n]\geq\mathbb{E}[X_{-k}]$，故 $\mathbb{E}[X_n]-[X_{-k}]<\frac{\varepsilon}{2}$，$(n<-k)$. 另一方面，由于 $\mathbb{P}([X_n>c])\leq\frac{1}{c}\mathbb{E}[X_n]\leq\frac{A}{c}$，故当 c 足够大时，对一切 $n\in-\mathbb{N}$ 有

$$\int_{[X_n>c]} X_{-k}\,d\mathbb{P}<\frac{\varepsilon}{2},$$

并且对 $j=0,\ -1,\ \cdots,\ -k$ 有 $\int_{[X_j>c]} X_j\,d\mathbb{P}<\varepsilon$. 于是当 c 足够大时，有

$$\sup_n\int_{[X_n>c]} X_n\,d\mathbb{P}\leq\varepsilon.$$

这表明 (X_n) 为一致可积. 既然 $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X_{-\infty}$，故由定理1.15，$X_n\xrightarrow{L^1}X_{-\infty}$.

2.22 系 设 ξ 为一可积随机变量，$(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列单调下降的 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域. 令 $\xi_n=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}_n]$. 则 $\xi_n\xrightarrow{\text{a.s.},\ L^1}\mathbb{E}[\xi|\bigcap_n\mathscr{G}_n]$.

证明 对一切 $n\in-\mathbb{N}$，令 $\mathscr{F}_n=\mathscr{G}_{-n}$，$\eta_n=\xi_{-n}$，则 $(\eta_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ 关于 $(\mathscr{F}_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ 为一致可积鞅. 故由定理 2.21，$\eta_n\xrightarrow[n\to-\infty]{\text{a.s.},\ L^1}\eta_{-\infty}$，即 $\xi_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.},\ L^1}\eta_{-\infty}$.

设 $A\in\bigcap_n\mathscr{G}_n$，我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi_nI_A]=\mathbb{E}[\eta_{-\infty}I_A]$. 但对一切 n，$\mathbb{E}[\xi_nI_A]=\mathbb{E}[\xi I_A]$，故有 $\mathbb{E}[\eta_{-\infty}I_A]=\mathbb{E}[\xi I_A]$，由于 $\eta_{-\infty}$ 为 $\bigcap_n\mathscr{G}_n$ 可测，故 $\eta_{-\infty}=\mathbb{E}[\xi|\bigcap_n\mathscr{G}_n]$. 系证毕.

§4 上鞅的 Riesz 分解

2.23 定义 一非负上鞅(X_n)叫做位势，如果 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n]=0$，即 $X_n\xrightarrow{L^1}0$.

由定理 1.15 知，任何位势为一致可积上鞅.

2.24 定义 设 $X=(X_n)$为一上鞅. 如果存在一鞅 $Y=(Y_n)$及一位势 $Z=(Z_n)$，使得

$$X_n=Y_n+Z_n,$$

则称 X 有 Riesz 分解：$X=Y+Z$.

设(X_n)为一上鞅. 如果(X_n)有 Riesz 分解，则其 Riesz 分解必唯一. 事实上，设 $X_n=Y_n+Z_n$，$X_n=Y'_n+Z'_n$ 为 X 的 Riesz 分解，则$(Y_n-Y'_n)$为鞅，且

$$Y_n-Y'_n=Z'_n-Z_n\xrightarrow{L^1}0.$$

由定理 1.15，$(Y_n-Y'_n)$ 为一致可积鞅. 于是由 (17.1)，对一切 n，有 $Y_n=Y'_n$ a.s.，从而也有 $Z_n=Z'_n$ a.s..

2.25 定理 1) 为要一上鞅(X_n)有 Riesz 分解，必须且只需 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n]>-\infty$.

2) 设 (X_n) 为非负上鞅，$X_n=Y_n+Z_n$ 为其 Riesz 分解，则(Y_n)为一非负鞅.

3) 设(X_n)为一致可积上鞅，则 $X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$. 令

$$Y_n=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_n],\quad Z_n=X_n-Y_n,$$

则 $X_n=Y_n+Z_n$ 为(X_n)的 Riesz 分解.

证明 1) 必要性显然，往证充分性. 设 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n]>-\infty$. 对一切 n, $p\in\mathbb{N}$，令 $Y_{n,p}=\mathbb{E}[X_{n+p}|\mathscr{F}_n]$. 则有

$$\begin{aligned}Y_{n,p+1}&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+p+1}|\mathscr{F}_{n+p}]|\mathscr{F}_n]\\&\leqslant\mathbb{E}[X_{n+p}|\mathscr{F}_n]=Y_{n,p}\ \text{a.s.},\end{aligned}$$

这表明，对固定的 n，$(Y_{n,p})_{p>0}$ 为 a.s. 单调下降序列．令 $Y_n = \lim_{p\to\infty} Y_{n,p}$ a.s.，由于 $\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}[Y_{n,p}] = \lim_{p\to\infty} \mathbb{E}[X_{n+p}] > -\infty$，故 Y_n 可积，且有 $\mathbb{E}[|Y_{n,p} - Y_n|] = \mathbb{E}[Y_{n,p}] - \mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$，即有 $Y_{n,p} \xrightarrow[p\to\infty]{L^1} Y_n$．于是我们有

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathscr{F}_n] = \lim_{p\to\infty} \mathbb{E}[Y_{n+1,p} | \mathscr{F}_n] = \lim_{p\to\infty} \mathbb{E}[X_{n+1+p} | \mathscr{F}_n]$$
$$= \lim_{p\to\infty} Y_{n,p+1} = Y_n \text{ a.s.}.$$

对每个 n，取 Y_n 为 $\mathscr{F}_n$ 可测，则 (Y_n) 为一鞅．令 $Z_n = X_n - Y_n$，由于对一切 p，$Y_{n,p} \leqslant X_n$ a.s.，故 $Y_n \leqslant X_n$ a.s.．于是 (Z_n) 为一非负上鞅．此外有

$$\mathbb{E}[Z_n] = \lim_{p\to\infty} \mathbb{E}[X_n - Y_{n,p}] = \lim_{p\to\infty} \mathbb{E}[X_n - X_{n+p}]$$
$$= \mathbb{E}[X_n] - \lim_{p\to\infty} \mathbb{E}[X_p],$$

于是 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n] = 0$，即 (Z_n) 为一位势．

2) 由 1) 的证明看出．

3) 显然．

注 设 (X_n) 为一非负上鞅，则由定理 2.16，$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty$，且 X_∞ 为可积．令 $Y_n = \mathbb{E}[X_\infty | \mathscr{F}_n]$，$Z_n = X_n - Y_n$，则由 (16.1)，$(Z_n)$ 为非负上鞅，且由系 2.18 知 $Z_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$．但 (Z_n) 不一定是位势．容易看出，为要 (Z_n) 是位势，必须且只需 (X_n) 为一致可积．

§5 Doob 停止定理

2.26 定义 设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一鞅（相应地，上鞅），X_∞ 为一 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的可积随机变量．称 X_∞ 从右封闭 (X_n)，如果对一切 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\mathbb{E}[X_\infty | \mathscr{F}_n] = X_n \text{ a.s.}\ （相应地，\leqslant X_n）．$$

这时，称$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$为右闭鞅(相应地，上鞅)．此外，称$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$为鞅(相应地，上鞅)．

2.27 定理 设$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$为一鞅(相应地，上鞅)，$S$，$T$为两个停时，且$S\leqslant T$．则$X_S$，$X_T$可积，并且有

(27.1) $\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]=X_S$ a.s.（相应地，$\leqslant X_S$）．

证明 设$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$为鞅．令$S_n=SI_{[S\leqslant n]}+(+\infty)I_{[S>n]}$，由于集合$\{0, 1, \cdots, n, +\infty\}$与集合$\{0, 1, \cdots, n, n+1\}$保序同构，故由定理2.10，

$$X_{S_n}=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_{S_n}] \text{ a.s.}.$$

由于$[S=S_n]\cap\mathscr{F}_S=[S=S_n]\cap\mathscr{F}_{S_n}$（定理2.2.2)），故由引理1.21，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_S]I_{[S=S_n]}&=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_{S_n}]I_{[S=S_n]}\\&=X_{S_n}I_{[S=S_n]}=X_SI_{[S=S_n]} \text{ a.s.}.\end{aligned}$$

由于$[S=S_n]\uparrow\Omega$，故得

$$\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_S]=X_S \text{ a.s.}.$$

特别这表明X_S可积．对停时T，也有同样等式．故有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_T]|\mathscr{F}_S]=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_S]\\&=X_S \text{ a.s.}.\end{aligned}$$

设$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$为上鞅．令$Y_n=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_n]$，$Z_n=X_n-Y_n$，$Y_\infty=X_\infty$，$Z_\infty=0$．则$(Y_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$为鞅，$(Z_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$为非负上鞅．由于$\mathbb{E}[Z_{S_n}]\leqslant\mathbb{E}[Z_0]$（定理2.10)，故由Fatou引理，$Z_S$可积，从而$X_S=Y_S+Z_S$为可积．令$T_n=TI_{[T\leqslant n]}+(+\infty)I_{[T>n]}$，则由定理2.10，$Z_{S_n}\geqslant\mathbb{E}[Z_{T_n}|\mathscr{F}_{S_n}]$ a.s.，于是

$$Z_SI_{[S=S_n]}\geqslant\mathbb{E}[Z_{T_n}|\mathscr{F}_{S_n}]I_{[S=S_n]}=\mathbb{E}[Z_{T_n}|\mathscr{F}_S]I_{[S=S_n]} \text{ a.s.}.$$

令$n\to+\infty$，并注意到$Z_{T_n}\uparrow Z_T$，我们有

$$Z_S\geqslant\mathbb{E}[Z_T|\mathscr{F}_S] \text{ a.s.}.$$

但由已证结果，我们有$Y_S=\mathbb{E}[Y_T|\mathscr{F}_S]$ a.s.，故有

$$X_S\geqslant\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S] \text{ a.s.}.$$

2.28 系 设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一致可积鞅. 令 $\mathscr{T}$ 为全体停时所成集合，则 $(X_T I_{[T<\infty]})_{T\in\mathscr{T}}$ 为一致可积族.

证明 由定理 2.17, $X_n \xrightarrow{\text{a.s., } L^1} X_\infty$, 且 $(X_n)_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$ 为鞅. 由定理 2.27,

$$X_T = \mathbb{E}[X_\infty | \mathscr{F}_T], \ T\in\mathscr{T}.$$

故 $(X_T)_{T\in\mathscr{T}}$ 为一致可积族(定理 1.12), 从而 $(X_T I_{[T<\infty]})_{T\in\mathscr{T}}$ 为一致可积族.

下一定理给出上鞅为右闭的一个充要条件.

2.29 定理 设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一上鞅. 为要 (X_n) 为右闭的，必须且只需 $(X_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一致可积(下鞅).

证明 必要性. 设 X_∞ 从右封闭 (X_n), 则对一切 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$X_n \geqslant \mathbb{E}[X_\infty | \mathscr{F}_n] \geqslant -\mathbb{E}[X_\infty^- | \mathscr{F}_n] \text{ a.s.},$$

于是

$$X_n^- \leqslant \mathbb{E}[X_\infty^- | \mathscr{F}_n] \text{ a.s.},$$

由于 $(\mathbb{E}[X_\infty^- | \mathscr{F}_n])$ 为一致可积，故 (X_n^-) 为一致可积.

充分性. 设 (X_n^-) 为一致可积，则 $\sup\limits_n \mathbb{E}[X_n^-] < +\infty$. 故由定理 2.16, $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty$, X_∞ 为一可积随机变量. 往证 X_∞ 从右封闭 (X_n). 设 $A\in\mathscr{F}_n$, 我们有

$$\int_A X_n \, d\mathbb{P} \geqslant \int_A X_{n+m} \, d\mathbb{P} = \int_A X_{n+m}^+ \, d\mathbb{P} - \int_A X_{n+m}^- \, d\mathbb{P}. \tag{29.1}$$

由于 $X_{n+m}^- \xrightarrow[m\to\infty]{L^1} X_\infty^-$ (定理 1.15), 故有

$$\lim_{m\to\infty} \int_A X_{n+m}^- \, d\mathbb{P} = \int_A X_\infty^- \, d\mathbb{P}. \tag{29.2}$$

但 $X_{n+m}^+ \xrightarrow[m\to\infty]{\text{a.s.}} X_\infty^+$, 故由 Fatou 引理得

$$\int_A X_\infty^+ \, d\mathbb{P} \leqslant \liminf_{m\to\infty} \int_A X_{n+m}^+ \, d\mathbb{P}. \tag{29.3}$$

由 (29.1), (29.2), (29.3), 我们有

$$\int_A X_n d\mathbb{P} \geqslant \int_A X_\infty d\mathbb{P}.$$

这表明 X_∞ 从右封闭(X_n).

§6 应用于测度论一例

本节我们将给出鞅收敛定理在测度论上的一个简单而重要的应用.

2.30 引理 设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可分可测空间, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$为生成$\mathscr{F}$的一列集合. 令$\mathscr{F}_n=\sigma\{A_0, \cdots, A_n\}$, $\mathscr{P}_n$为$\mathscr{F}_n$的原子的全体(即$\mathscr{P}_n$为生成$\mathscr{F}_n$的Ω的有限分割). 设$\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$为$(\Omega, \mathscr{F})$上的两个概率测度, 且$\mathbb{Q}$关于$\mathbb{P}$绝对连续, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$为其 Radon-Nikodym 导数. 令

$$X_n=\sum_{A\in\mathscr{P}_n}\frac{\mathbb{Q}(A)}{\mathbb{P}(A)}I_A, \quad n\in\mathbb{N},$$

这里约定$\frac{0}{0}=0$. 则(X_n)关于$(\mathscr{F}_n)$为一致可积鞅, 且$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ a. s..

证明 令$\xi=\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, 熟知

$$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_n]=\sum_{A\in\mathscr{P}_n}\frac{\mathbb{E}[\xi I_A]}{\mathbb{P}(A)}I_A=X_n \text{ a.s.},$$

故(X_n)为一致可积鞅, 且由系 2.18 有

$$\lim_{n\to\infty}X_n=\mathbb{E}[\xi|\bigvee_n\mathscr{F}_n]=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}]=\xi \text{ a.s.},$$

引理得证.

下一定理属于 Doob[1] (pp. 616~617).

2.31 定理 设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可分可测空间, $(E, \mathscr{E})$为一可测空间, $(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$, $(\mathbb{Q}_x)_{x\in E}$为$(\Omega, \mathscr{F})$上的两个测度的可测族(即对一切$A\in\mathscr{F}$, $x\mapsto\mathbb{P}_x(A)$, $x\mapsto\mathbb{Q}_x(A)$为E上的$\mathscr{E}$可测函数), 使得对一切$x\in E$, $\mathbb{Q}_x$关于$\mathbb{P}_x$绝对连续, 则存在$E\times\Omega$上的一$\mathscr{E}\times$

$\mathscr{F}$ 可测的非负实值函数 $X(x, \omega)$，使得对一切 $x \in E$，$X(x, \cdot)$ 为 $\mathbb{Q}_x$ 关于 $\mathbb{P}_x$ 的 Radon-Nikodym 导数.

证明 令 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为生成 $\mathscr{F}$ 的一列集合. 我们沿用引理 2.30 的记号. 令

$$X_n(x, \omega) = \sum_{A \in \mathscr{P}_n} \frac{\mathbb{Q}_x(A)}{\mathbb{P}_x(A)} I_A(\omega) \quad (0/0 = 0),$$

则 X_n 为 $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ 可测. 对每个 $x \in E$，由引理 2.30，$X_n(x, \cdot)$ $\mathbb{P}_x$-a.s. 收敛于 $\frac{d\mathbb{Q}_x}{d\mathbb{P}_x}$. 因此，只需令

$$X(x, \omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n(x, \omega), & \text{若此极限存在且有穷}, \\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases}$$

最后，作为本章的结束，我们将离散时间上鞅的主要性质作一小结.

设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一上鞅，则

$$\begin{array}{l}
(X_n)\text{一致可积} \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\text{a.s., } L^1} X_\infty, \\
\Downarrow \\
(X_n^-)\text{一致可积} \Leftrightarrow (X_n)\text{为右闭的}, \\
\Downarrow \\
\sup\limits_n \mathbb{E}[X_n^-] < +\infty \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty \text{ 且 } X_\infty \text{ 可积}, \\
\Downarrow \\
\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] > -\infty \Leftrightarrow (X_n) \text{ 有 Riesz 分解}.
\end{array}$$

第 三 章

连续时间鞅

本章介绍的内容，除 Föllmer 引理（定理 3.5）是较新结果外，其余都是经典结果.

§1 定义，基本不等式

令 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间，$(\mathscr{F}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ 为一族上升的 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域．即当 $t, s\in\overline{\mathbb{R}}_+$，$t<s$ 时，有 $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_s$，其中每个 $\mathscr{F}_t$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域．对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，我们令

$$\mathscr{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s.$$

3.1 定义 随机过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 称为关于 $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 适应的，如果对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，X_t 为 $\mathscr{F}_t$ 可测．一适应过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$-鞅（上鞅、下鞅），如果对一切 t，X_t 可积，且当 $s<t$，s，$t\in\mathbb{R}_+$ 时，有

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s]=X_s \text{ a.s. (相应地} \leqslant X_s,\ \geqslant X_s).$$

类似地，我们可以定义以 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 或 $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ 为参数集的鞅、上鞅及下鞅.

我们有与定理 2.7，定理 2.8 及系 2.9 相应的结果.

设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为一适应过程，$u=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ 为 $\mathbb{R}_+$ 的一个有限子集．设 u 中的元按大小次序排列为：$t_{k_1}<t_{k_2}<\cdots<t_{k_n}$，我们用 $v_a^b[X, u]$ 表示序列 $\{X_{t_{k_1}}, X_{t_{k_2}}, \cdots, X_{t_{k_n}}\}$ 上穿区间 $[a, b]$ 的次数．对 $\mathbb{R}_+$ 的任一子集 D，我们令

$$v_a^b[X, D] = \sup_{\substack{u \text{为有限集} \\ u \subset D}} v_a^b[X, u].$$

设 $D=\{t_1, t_2, \cdots\}$ 为一可数集，令 $u_n=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$. 显然有

$$v_a^b[X, D] = \lim_{n\to\infty} v_a^b[X, u_n].$$

3.2 定理 设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为一上鞅，D 为 $\mathbb{R}_+$ 的一可数稠子集. 则对任何 $r<s(r, s\in\mathbb{R}_+)$，任何 $a<b(a, b\in\mathbb{R})$ 及 $\lambda>0$，我们有

$$\lambda\mathbb{P}[\sup_{t\in D\cap[r,s]}|X_t|\geqslant\lambda]\leqslant\mathbb{E}[X_r]+2\mathbb{E}[X_s^-], \tag{2.1}$$

$$\mathbb{E}v_a^b[X, D\cap[r, s]]\leqslant\frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_s-a)^-]. \tag{2.2}$$

如果 (X_t) 的几乎所有轨道 $X_\cdot(\omega)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的右连续函数，则上述不等式中的 $D\cap[r, s]$ 可用 $[r, s]$ 代替.

证明 设 $D\cap[r, s]=\{t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\}$，令 $u_n=\{t_1, \cdots, t_n\}$，则用 u_n 代替 $D\cap[r, s]$ 后所相应的不等式(2.1)及(2.2)分别由第二章不等式(12.3)及(14.2)推得（注意 (X_t^-)，$((X_t-a)^-)$ 都是下鞅），然后令 $n\to\infty$，即得(2.1)，(2.2). 定理的最后一个断言是显然的.

下一定理是 Doob 不等式，它直接由定理 2.15 推出.

3.3 定理 设 (X_t) 为一非负下鞅，其几乎所有轨道为右连续. 令 $X^*=\sup_t X_t$，则有

$$\mathbb{E}[X^*]\leqslant\frac{e}{e-1}(1+\sup_t\mathbb{E}[X_t\log^+X_t]), \tag{3.1}$$

$$\|X^*\|_p\leqslant q\sup_t\|X_t\|_p, \tag{3.2}$$

其中 $p>1$，$q>1$ 为一对共轭指数.

§2 上鞅轨道的正则性

3.4 定理 令 (X_t) 为一上鞅，D 为 $\mathbb{R}_+$ 的一可数稠子集，则对几乎所有 ω，对一切 $t\in\mathbb{R}_+$（相应地，$t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$），极限 $\lim\limits_{s\in D, s\downarrow\downarrow t}$

$X_s(\omega)$(相应地, $\lim_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega)$)存在且有穷. 如果$(X_t)$的几乎所有轨道为右连续,则对几乎所有$\omega$, 对一切$t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$, $X_{t-}(\omega)=\lim_{s\in\mathbb{R}_+, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega)$存在且有穷.

证明 设$t\in\mathbb{R}_+$, a, $b\in\mathbb{R}$, $a<b$, 令

$$H_{t,a,b}=\{\omega:\ \sup_{s\in D\cap[0,t]}|X_s(\omega)|=\infty,$$

$$\text{或}\quad v_a^b[X_\cdot(\omega),\ D\cap[0,t]]=\infty\},$$

则$H_{t,a,b}\in\mathscr{F}_t$, 且由定理3.2知, $\mathbb{P}(H_{t,a,b})=0$. 我们用Q表示$\mathbb{R}$中有理数全体,令

$$H_t=\bigcup_{a<b,a,b\in Q} H_{t,a,b},\ H=\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\quad H_t=\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n.$$

则$H_t\in\mathscr{F}_t$, $H_t\uparrow H$, 且$\mathbb{P}(H)=0$. 若$\omega\notin H$, 则对一切$t\in\mathbb{R}_+$(相应地, $t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$), 极限$\lim_{s\in D, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega)$(相应地, $\lim_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega)$)存在且有穷.

如果(X_t)的几乎所有轨道为右连续, 则在以上证明中可用$[0, t]$代替$D\cap[0, t]$(这时不必有$H_{t,a,b}\in\mathscr{F}_t$, 但仍有$\mathbb{P}(H_{t,a,b})=0$), 于是当$\omega\notin H$时, 对一切$t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$, 极限$\lim_{s\in\mathbb{R}_+, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega)$存在且有穷.

下一定理称为Föllmer引理(见Föllmer[1]),它与经典结果的区别,在于取消了关于$\mathscr{F}_0$包含$\mathscr{F}$中一切$\mathbb{P}$-零概集的限制.

3.5 定理 设(X_t)为一上鞅(相应地, 鞅), D为$\mathbb{R}_+$中的一可数稠子集,则存在一$(\mathscr{F}_{t+})$适应过程$(\overline{X}_t)$, 使得

1) $(\overline{X}_t)$的所有轨道为右连续, 且对几乎所有ω, 对一切$t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$\overline{X}_t(\omega)=\lim_{s\in D, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega). \tag{5.1}$$

2) 对几乎所有ω,对一切$t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$, $\overline{X}_{t-}(\omega)=\lim_{s\in\mathbb{R}_+, s\uparrow\uparrow t}\overline{X}_s(\omega)$存在且有穷, 此外有

$$(5.2)\qquad \overline{X}_{t-}(\omega)=\lim_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega).$$

3) 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有

$$(5.3)\qquad X_t\geqslant\mathbb{E}[\overline{X}_t|\mathscr{F}_t]\text{ a.s. (相应地, } X_t=\mathbb{E}[\overline{X}_t|\mathscr{F}_t]\text{ a.s.).}$$

4) $(\overline{X}_t)$ 为 $(\mathscr{F}_{t+})$ 上鞅（相应地，鞅）.

证明 我们沿用定理 3.4 的证明中的记号. 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，令 $H_{t+}=\bigcap_{s>t}H_s$，则 $H_{t+}\in\mathscr{F}_{t+}$. 如果 $\omega\notin H_{t+}$，则存在 $t_1>t$，使得 $\omega\notin H_{t_1}$，故极限 $\lim\limits_{s\in D, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega)$ 存在且有穷. 令

$$(5.4)\qquad \overline{X}_t(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{s\in D, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega), & \omega\notin H_{t+},\\ 0, & \omega\in H_{t+}.\end{cases}$$

则显然 $(\overline{X}_t)$ 为 $(\mathscr{F}_{t+})$ 适应过程. 往证 $(\overline{X}_t)$ 满足所要求的性质.

1) 设 $t\in\mathbb{R}_+$，$\omega\in H_{t+}$. 则对一切 $s>t$，$\omega\in H_{s+}$，于是当 $s\geqslant t$ 时，$\overline{X}_s(\omega)=0$，从而 $\overline{X}_\cdot(\omega)$ 在 t 处右连续. 设 $\omega\notin H_{t+}$，由于 $H_{t+}=\bigcap_{r>t}H_{r+}$，则存在 $r_0>t$，使得对一切 $r_0\geqslant r>t$，有 $\omega\notin H_{r+}$. 给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，$\delta<r_0-t$，使得当 $s\in D$，$s>t$，$s-t<\delta$ 时有 $|\overline{X}_t(\omega)-X_s(\omega)|\leqslant\varepsilon$. 于是当 $r>t$，且 $r-t<\delta$ 时，有

$$|\overline{X}_t(\omega)-\overline{X}_r(\omega)|=\lim_{s\in D, s\downarrow\downarrow r}|\overline{X}_t(\omega)-X_s(\omega)|\leqslant\varepsilon.$$

这表明 $\overline{X}_\cdot(\omega)$ 在 t 处右连续. 因此，$(\overline{X}_t)$ 的一切轨道在 $\mathbb{R}_+$ 上右连续. 最后，如果 $\omega\notin H$，则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，由 (5.4) 得 (5.1).

2) 设 $t>0$，$\omega\notin H$，则 $\lim\limits_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega)$ 存在且有穷. 与 1) 类似可证 (5.2).

3) 只证上鞅情形. 设 $r_n\in D$，$r_n\downarrow\downarrow t$. 对任何 $A\in\mathscr{F}_t$，我们有

$$\int_A X_t\,d\mathbb{P}\geqslant\int_A X_{r_n}\,d\mathbb{P}.$$

由于 (X_{r_n}) 一致可积（定理 2.21），从而由 (5.1) 知 $X_{r_n}\xrightarrow{L^1}\overline{X}_t$，故在上式右端令 $n\to\infty$ 得

$$\int_A X_t d\mathbb{P} \geqslant \int_A \overline{X}_t d\mathbb{P},$$

此即(5.3).

4) 只证上鞅情形. 设 $s<t$, s, $t\in\mathbb{R}_+$. 令 $s_n\in D$, $s_n<t$, 且 $s_n\downarrow\downarrow s$. 又令 $t_n\in D$, $t_n\downarrow\downarrow t$, 则对任何 $A\in\mathscr{F}_{s+}$, 我们有

$$\int_A X_{s_n} d\mathbb{P} \geqslant \int_A X_{t_n} d\mathbb{P}.$$

由于 (X_{s_n}), (X_{t_n}) 一致可积(定理 2.21), 在上式两边令 $n\to\infty$ 得

$$\int_A \overline{X}_s d\mathbb{P} \geqslant \int_A \overline{X}_t d\mathbb{P}.$$

这表明$(\overline{X}_t)$为$(\mathscr{F}_{t+})$上鞅.

3.6 定义 设(X_t)、(Y_t)为两个随机过程, 称(X_t)为(Y_t)的修正, 如果对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $X_t=Y_t$ a.s.; 称(X_t)与(Y_t)无区别, 如果对几乎所有 ω, 轨道 $X_\cdot(\omega)$ 与 $Y_\cdot(\omega)$ 一致.

显然, 两个无区别过程互为修正.

3.7 定理 设(X_t)为一$(\mathscr{F}_t)$上鞅(鞅), 其几乎所有轨道为右连续, 则(X_t)为$(\mathscr{F}_{t+})$上鞅(鞅).

证明 定理的直接证明与定理 3.5.4) 的证明类似. 该定理也可作为定理 3.5.4) 的推论, 因为在定理假定下, $(\overline{X}_t)$与(X_t)无区别.

3.8 定理 设$(\mathscr{F}_t)$右连续, 即对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$. 令$(X_t)$为$(\mathscr{F}_t)$上鞅, 则为要$(X_t)$有右连续适应修正, 必须且只需 $\mathbb{R}_+$ 上的函数 $t\mapsto\mathbb{E}[X_t]$ 为右连续.

证明 任取 $\mathbb{R}_+$ 的一可数稠子集 D, 由于对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t$, 定理 3.5 中的$(\overline{X}_t)$为$(\mathscr{F}_t)$上鞅, 且由(5.3) 得 $X_t\geqslant\overline{X}_t$ a.s.. 令 $t_n\in D$, $t_n\downarrow\downarrow t$, 由于$(X_{t_n})$一致可积(定理 2.21), 故有

$$\mathbb{E}[\overline{X}_t]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{t_n}].$$

因此, 为要 $X_t=\overline{X}_t$ a.s., 或者等价地, $\mathbb{E}[X_t]=\mathbb{E}[\overline{X}_t]$ (因为有 X_t

$\geqslant \overline{X}_t$ a.s.), 必须且只需

$$\mathbb{E}[X_t]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{t_n}].$$

由于 $s\mapsto\mathbb{E}[X_s]$ 是单调非增函数，这等价于它在 t 处右连续. 因此, 如果函数 $s\mapsto\mathbb{E}[X_s]$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上右连续, 则上鞅 $(\overline{X}_t)$ 为上鞅 (X_t) 的右连续适应修正. 反之, 若存在 (X_t) 的右连续适应修正 (Y_t), 则 $\mathbb{E}[X_t]=\mathbb{E}[Y_t]$, 根据上述论证, $t\mapsto\mathbb{E}[Y_t]=\mathbb{E}[X_t]$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的右连续函数.

3.9 系 设 $(\mathscr{F}_t)$ 右连续, 则一切 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅 (X_t) 有右连续适应修正.

§3 收敛定理

关于收敛定理, 我们只叙述结果, 其证明与离散时间情形完全类似.

3.10 定理 设 (X_t) 为一上鞅, 其几乎所有轨道右连续. 如果 $\sup_t\mathbb{E}[X_t^-]<\infty$ (或者等价地, $\sup_t\mathbb{E}[|X_t|]<\infty$), 则当 $t\to\infty$ 时, X_t a.s. 收敛于一可积随机变量 X_∞. 若 (X_t) 为非负上鞅, 则 $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ 为上鞅.

3.11 定理 设 (X_t) 为一一致可积上鞅(鞅), 其几乎所有轨道右连续. 则当 $t\to+\infty$ 时, $X_t\xrightarrow{\text{a.s.},\ L^1}X_\infty$, 并且 $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ 为上鞅(鞅).

3.12 系 设 $(\mathscr{F}_t)$ 右连续. 令 ξ 为一可积随机变量, (ξ_t) 为鞅 $(\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t])$ 的右连续适应修正. 则当 $t\to\infty$ 时, $\xi_t\xrightarrow{\text{a.s.},\ L^1}\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{\infty-}]$, 这里 $\mathscr{F}_{\infty-}=\bigvee_{t\in\mathbb{R}_+}\mathscr{F}_t$.

3.13 系 设 (X_t) 为一鞅(或者非负下鞅), 其几乎所有轨道右连续. 令 $p>1$. 如果 $\sup_t\mathbb{E}[|X_t|^p]<\infty$, 则 (X_t) 为一致可积, 且当 $t\to\infty$ 时, $X_t\xrightarrow{\text{a.s.},\ L^p}X_\infty$. 此外有 $\|X_\infty\|_p=\sup_t\|X_t\|_p$.

3.14 定理 设$(X_t)_{t\geq 0}$关于$(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$为一上鞅，其几乎所有轨道右连续．令$\mathscr{F}_{0+}=\bigcap_{t>0}\mathscr{F}_t$．如果$\sup_{t>0}\mathbb{E}[X_t^-]<\infty$，则当$t\downarrow 0$时，$X_t$ a.s. 且L^1收敛于一$\mathscr{F}_{0+}$可测的可积随机变量X_{0+}，此外$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$为$(\mathscr{F}_{t+})$上鞅．

§4 上鞅的 Riesz 分解

3.15 定义 设(X_t)为一非负上鞅，其几乎所有轨道右连续．称(X_t)为位势，如果$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X_t]=0$.

设$X=(X_t)$为一上鞅，其几乎所有轨道右连续．如果存在一鞅$Y=(Y_t)$及一位势$Z=(Z_t)$，使得

$$X_t=Y_t+Z_t,$$

则称X有 Riesz 分解：$X=Y+Z$．易见，若X有 Riesz 分解，则必唯一．

3.16 定理 设$(\mathscr{F}_t)$右连续．令(X_t)为一上鞅，其几乎所有轨道右连续．

1) 为要(X_t)有 Riesz 分解，必须且只需$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X_t]>-\infty$.

2) 设(X_t)非负，$X_t=Y_t+Z_t$为其 Riesz 分解，则(Y_t)为非负鞅．

3) 设(X_t)一致可积，则$X_t\xrightarrow[t\to\infty]{L^1}X_\infty$．令$(Y_t)$为鞅$\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t]$的右连续适应修正，$Z_t=X_t-Y_t$，则$(Z_t)$为位势．

证明 1) 必要性显然，往证充分性．与定理 2.25 的证明类似，令

$$Y_{t,s}=\mathbb{E}[X_{t+s}|\mathscr{F}_t],\quad t,\ s\in\mathbb{R}_+.$$

当$s>r$时，有

$$Y_{t,s}=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{t+s}|\mathscr{F}_{t+r}]|\mathscr{F}_t]\leqslant\mathbb{E}[X_{t+r}|\mathscr{F}_t]=Y_{t,r}\text{ a.s.}.$$

令$Y_t=\lim_{n\to\infty}Y_{t,n}$ a.s.，则$Y_{t,n}\xrightarrow[n\to\infty]{L^1}Y_t$．设$t>s$，我们有

$$\mathbb{E}[Y_t|\mathscr{F}_s]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[Y_{t,n}|\mathscr{F}_s]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{t+n}|\mathscr{F}_s]$$

$$=\lim_{n\to\infty} Y_{s,n+(t-s)}=Y_s \text{ a.s.}.$$

对每个 $t\in\mathbb{R}_+$，选取 Y_t 为 $\mathscr{F}_t$ 可测，则 (Y_t) 为一鞅. 由于假定 $(\mathscr{F}_t)$ 为右连续，故由系 3.9，(Y_t) 有右连续适应修正，仍记为 (Y_t). 令 $Z_t=X_t-Y_t$，则与定理 2.25 证明类似可证，(Z_t) 为位势.

2) 由 1)的证明看出.

3) 显然.

§5 Doob 停止定理

3.17 定义 在 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 中取值的随机变量 T 叫做$(\mathscr{F}_t)$停时，如果对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t$.

对每个停时 T，令

(17.1) $$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}_\infty: \forall t\in\mathbb{R}_+,\ A\cap[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t\}.$$

称 $\mathscr{F}_T$ 为 T 前事件 σ-域.

令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t+}(t\in\mathbb{R}_+)$，$\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_\infty$，则$(\mathscr{G}_t)$停时称为 $(\mathscr{F}_t)$ 宽停时. 设 T 为 $(\mathscr{F}_t)$ 宽停时，相应于 $(\mathscr{G}_t)$ 的 T 前事件 σ-域 $\mathscr{G}_T$ 用 $\mathscr{F}_{T+}$ 表示，即

(17.2) $$\mathscr{F}_{T+}=\{A\in\mathscr{F}_\infty: \forall t\in\mathbb{R}_+,\ A\cap[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_{t+}\}.$$

有关停时的详尽讨论见第四章第 1 节.

3.18 定理 设 S, T 为停时，(R_n)为停时列.

1) $S\wedge T$, $S\vee T$ 为停时.

2) $A\in\mathscr{F}_S \Rightarrow A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_T$.

3) 设 ξ 为 $\mathscr{F}_S$ 可测随机变量，则 $\xi I_{[S\leqslant T]}$ 为 $\mathscr{F}_T$ 可测.

4) $S\leqslant T\Rightarrow \mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$.

5) $\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{S\wedge T}$.

6) 设 $(\mathscr{F}_t)$ 右连续，则 $R=\bigwedge_n R_n$ 为停时，且有 $\bigcap_n\mathscr{F}_{R_n}=\mathscr{F}_R$.

7) 令

(18.1) $$T^{(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}I_{\left[\frac{k-1}{2^n}\leqslant T<\frac{k}{2^n}\right]}+(+\infty)I_{[T=+\infty]},$$

则 $T^{(n)}$ 为停时，且 $T^{(n)}\downarrow T$.

证明 见第四章 §1.

3.19 定理 设 $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ 为一上鞅(相应地，鞅)，其几乎所有轨道右连续. 令 $S\leqslant T$ 为两停时，则 X_S、X_T 为可积随机变量，且

(19.1) $\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]\leqslant\mathbb{E}[X_S|\mathscr{F}_S]$ a.s.(相应地，$=\mathbb{E}[X_S|\mathscr{F}_S]$).

证明 只证上鞅情形. 对一切自然数 n，令 $D_n=\left\{0,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{2}{2^n},\ \cdots,\ +\infty\right\}$，则 $(X_t)_{t\in D_n}$ 为 $(\mathscr{F}_t)_{t\in D_n}$ 上鞅. 按(18.1)定义 $S^{(n)}$，$T^{(n)}$，由定理 2.27，我们有

$$\mathbb{E}[X_{T^{(n)}}|\mathscr{F}_{S^{(n)}}]\leqslant X_{S^{(n)}}\text{ a.s.},$$

其中 $X_{T^{(n)}}$，$X_{S^{(n)}}$ 可积. 特别对任何 $A\in\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_{S^{(n)}}$，有

(19.2) $$\int_A X_{T^{(n)}}d\mathbb{P}\leqslant\int_A X_{S^{(n)}}d\mathbb{P}.$$

但是我们有

$$\lim_{n\to\infty}X_{T^{(n)}}=X_T\text{ a.s.},\quad \lim_{n\to\infty}X_{S^{(n)}}=X_S\text{ a.s.}.$$

故由(19.2)，为证(19.1)，只需证 $(X_{S^{(n)}})$、$(X_{T^{(n)}})$ 为一致可积.

往证 $(X_{S^{(n)}})$ 一致可积. 由于 $S^{(n-1)}$ 在 D_n 中取值，且 $S^{(n-1)}\geqslant S^{(n)}$，故由定理 2.27，

$$\mathbb{E}[X_{S^{(n-1)}}|\mathscr{F}_{S^{(n)}}]\leqslant X_{S^{(n)}}\text{ a.s.}.$$

对每个 $n\geqslant1$，令

$$Y_{-n}=X_{S^{(n)}},\quad \mathscr{G}_{-n}=\mathscr{F}_{S^{(n)}},$$

则 $(Y_{-n})_{n\geqslant1}$ 为 $(\mathscr{G}_{-n})_{n\geqslant1}$ 上鞅. 由于 $\mathbb{E}[Y_{-n}]=\mathbb{E}[X_{S^{(n)}}]\leqslant\mathbb{E}[X_0]$ (定理 2.27)，故 $(X_{S^{(n)}})=(Y_{-n})$ 为一致可积 (定理 2.21). 同理 $(X_{T^{(n)}})$ 一致可积. 定理证毕.

3.20 系 设 (X_t) 为一上鞅，其几乎所有轨道右连续. 则对任何停时 T，我们有

(20.1) $\mathbb{E}[|X_T|I_{[T<\infty]}]\leqslant 3\sup_t \mathbb{E}[|X_t|]$.

证明 设 $a>0$，令 $X_t^a=X_{t\wedge a}$，$X_\infty^a=X_a$，则 $(X_t^a)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ 为上鞅，且 $X_T^a=X_{T\wedge a}$. 故由定理 3.19(注意 (X_t^-) 为下鞅)，

$$\mathbb{E}[|X_{T\wedge a}|I_{[T<\infty]}]\leqslant\mathbb{E}[|X_{T\wedge a}|]=\mathbb{E}[X_{T\wedge a}]+2\mathbb{E}[X_{T\wedge a}^-]$$
$$\leqslant\mathbb{E}[X_0]+2\mathbb{E}[X_a^-]\leqslant 3\sup_t\mathbb{E}[|X_t|].$$

令 $a\to\infty$ 得(20.1).

下一定理是 Doob 停止定理.

3.21 定理 设 $(\mathscr{F}_t)$ 右连续. 令 $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ 为一上鞅(相应地，鞅)，其几乎所有轨道右连续. 令 S、T 为两个停时，且 $S\leqslant T$，则有

(21.1) $\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]\leqslant X_S$ a.s. (相应地，$=X_S$).

证明 由于$(\mathscr{F}_t)$右连续，故由定理 3.5，不妨假定(X_t)的全部轨道为右连续，否则考虑上鞅$(\overline{X}_t)$，它与(X_t)无区别. 令 R 为一停时，由(18.1)定义停时 $R^{(n)}$，则 $R^{(n)}\downarrow R$. 由于 $X_{R^{(n)}}$ 为 $\mathscr{F}_{R^{(n)}}$ 可测(定理 2.5)，且在整个 Ω 上，$X_{R^{(n)}}\to X_R$，故 X_R 为 $\bigcap_n\mathscr{F}_{R^{(n)}}$ 可测，即 X_R 为 $\mathscr{F}_R$ 可测(定理 3.18.6)). 特别 X_S 为 $\mathscr{F}_S$ 可测，故由(19.1)得(21.1).

下一定理是 Doob 停止定理的加强形式.

3.22 定理 设 $(\mathscr{F}_t)$ 右连续. 令$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ 为一上鞅(相应地，鞅)，其几乎所有轨道右连续，S、T 为两个停时，则有

(22.1) $\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]\leqslant X_{T\wedge S}$ a.s. (相应地，$=X_{T\wedge S}$).

证明 如上一定理证明中所说，不妨假定(X_t)的全部轨道为右连续，于是 X_T 为 $\mathscr{F}_T$ 可测. 故由定理 3.18.3)，$X_TI_{[T<S]}$ 为 $\mathscr{F}_S$ 可测. 考虑 (X_t) 为上鞅情形，由定理 3.21，我们有

$$\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]=\mathbb{E}[X_TI_{[T<S]}+X_{S\vee T}I_{[T\geqslant S]}|\mathscr{F}_S]$$
$$\leqslant X_TI_{[T<S]}+X_SI_{[T\geqslant S]}=X_{S\wedge T}\text{ a.s.}.$$

3.23 系 设$(\mathscr{F}_t)$右连续. 令 ξ 为一可积随机变量，S、T 为

两个停时，则有

$$(23.1)\qquad \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_T]|\mathscr{F}_S]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_S]|\mathscr{F}_T]=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{S\wedge T}]\ \text{a.s.}.$$

证明 设(X_t)为鞅$(\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t])$的右连续适应修正，其中$X_\infty=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_\infty]$．则(23.1)由(22.1)推得．

下一定理进一步推广了定理3.22．

3.24 定理 设$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$为上鞅(相应地，鞅)，其几乎所有轨道右连续，$S$、$T$为两个宽停时，则有

$$(24.1)\qquad \mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_{S+}]\leqslant X_{T\wedge S}\ \text{a.s.}\ (\text{相应地},=X_{T\wedge S}).$$

证明 由定理3.7，$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$为$(\mathscr{F}_{t+})$上鞅(相应地鞅)．由于$S$、$T$为$(\mathscr{F}_{t+})$停时，故由(22.1)推得(24.1)．

下一定理是Doob停止定理的一个简单应用．

3.25 定理 设$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$为一非负上鞅，其全部轨道为右连续．令

$$(25.1)\qquad T_n=\inf\left\{t:X_t<\frac{1}{n}\right\},\ T=\sup_n T_n,$$

则T为$(\mathscr{F}_t)$宽停时，且对几乎所有$\omega\in[T<\infty]$，对一切$t\geqslant T(\omega)$，有$X_t(\omega)=0$；对任何$\omega\in[T>0]$，对一切$t<T(\omega)$，有$X_t(\omega)>0$，$\liminf\limits_{s\uparrow t}X_s(\omega)>0$．我们称$T$为$(X_t)$的归零时．

证明 令Q_+为$\mathbb{R}_+$中有理数全体．对任何$t\in\mathbb{R}_+$，我们有

$$[T_n<t]=\bigcup_{r<t,r\in Q_+}\left[X_r<\frac{1}{n}\right]\in\mathscr{F}_t,$$

从而$[T_n\leqslant t]\in\mathscr{F}_{t+}$．这表明$T_n$为宽停时，故$T$为宽停时．

令$X_\infty=0$，则$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$为右连续上鞅．由定理3.24，对一切$t\in\mathbb{R}_+$，有

$$\mathbb{E}[X_{T\vee t}]\leqslant\mathbb{E}[X_{T_n}]\leqslant\frac{1}{n}.$$

由于n是任意的，故$\mathbb{E}[X_{T\vee t}]=0$，从而$X_{T\vee t}=0$ a.s.，特别有

$$X_tI_{[t>T]}=X_{T\vee t}I_{[t>T]}=0\ \text{a.s.}.$$

由于(X_t)的轨道右连续，这意味着对几乎所有$\omega\in[T<\infty]$，对一切$t\geqslant T(\omega)$，有$X_t(\omega)=0$.

另一方面，我们有

$$[T>t]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[T_n>t].$$

设$t<T(\omega)$，则存在n，使得$T_n(\omega)>t$，于是由T_n的定义知，对一切$s\leqslant t$，$X_s(\omega)\geqslant\frac{1}{n}$，从而$\liminf\limits_{s\uparrow t}X_s(\omega)\geqslant\frac{1}{n}$. 定理证毕.

注 1) 如果在定理中，(X_t)的几乎所有轨道右连续，则由定理3.5，存在一右连续$(\mathscr{F}_{t+})$上鞅$(\overline{X}_t)$，其几乎所有轨道与(X_t)的相同. 设T为$(\overline{X}_t)$的归零时，则T为$(\mathscr{F}_t)$宽停时，且对几乎所有$\omega\in[T<\infty]$，对一切$t\geqslant T(\omega)$，有$X_t(\omega)=0$，同时，对几乎所有$\omega\in[T>0]$，对一切$t<T(\omega)$，有$X_t(\omega)>0$，$\liminf\limits_{s\uparrow t}X_s(\omega)>0$. 我们将$T$称为$(X_t)$的归零时.

2) 设(X_t)为一非负上鞅，其几乎所有轨道为右连续. 令

$$S_1=\inf\{t:X_t=0\quad 或\quad X_{t-}=0\},$$
$$S_2=\inf\{t:X_t=0\},$$
$$S_3=\inf\{t:X_{t-}=0\},$$
$$T_n=\inf\left\{t:\ X_t<\frac{1}{n}\right\},\quad T=\sup_n T_n.$$

则由定理3.25及注1)知，$S_1=S_2=S_3=T$ a. s.. 因此，如果$\mathscr{F}$关于$\mathbb{P}$完备，且$\mathscr{F}_0$包含$\mathscr{F}$中一切$\mathbb{P}$-零概集，则S_1, S_2, S_3, T都是$(\mathscr{F}_t)$宽停时. 若进一步$(\mathscr{F}_t)$右连续，则S_1, S_2, S_3, T都是$(\mathscr{F}_t)$停时.

§6 类 (D) 过程

在本节，我们假定基本概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$为完备的.

3.26 定义 随机过程$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$称为可测过程，如果$(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)$为$\mathbb{R}_+\times\Omega$上的$\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$可测实值函数.

3.27 定义 可测过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 称为在 L^1 中有界，如果

$$\|X\|_1=\sup_{T\in\mathscr{T}}\mathbb{E}[|X_T|I_{[T<\infty]}]<+\infty,$$

这里 $\mathscr{T}$ 为全体 $(\mathscr{F}_t)$ 宽停时．可测过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 称为类 (D) 过程，如果 $\{X_TI_{[T<\infty]}\}_{T\in\mathscr{T}}$ 为一致可积族．

由 Fatou 引理及定理 1.13 知，在上述定义中，全体宽停时 $\mathscr{T}$ 可用全体有界宽停时 $\mathscr{T}_b$ 代替．

3.28 定理 1) 设 $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ 为一非负下鞅，其几乎所有轨道右连续，则 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为类 (D) 过程．

2) 设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为一致可积鞅，其几乎所有轨道右连续，则 (X_t) 为类 (D) 过程．

3) 设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为一上鞅，其几乎所有轨道右连续，则存在 $(\mathscr{F}_t)$ 宽停时列 $T_n\uparrow+\infty$，使得每个 $(X_t^{T_n})$ 为类 (D) 过程[1]．

证明 1) 对任何宽停时 T，由定理 3.24，

$$X_T\leqslant\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_{T+}]\quad \text{a. s.}.$$

由于 $(\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_{T+}])_{T\in\mathscr{T}}$ 为一致可积族（定理 1.12），故 $(X_T)_{T\in\mathscr{T}}$ 为一致可积族，进而 $(X_TI_{[T<\infty]})_{T\in\mathscr{T}}$ 为一致可积族，即 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为类 (D) 过程．

2) 容易由定理 3.11 及定理 3.24 推得．

3) 由定理 3.5，存在一右连续 $(\mathscr{F}_{t+})$ 上鞅 $(\overline{X}_t)$，使得 (X_t) 与 $(\overline{X}_t)$ 无区别．令

$$T_n=\inf\{t:|\overline{X}_t|\geqslant n\}\wedge n,$$

则 T_n 为 $(\mathscr{F}_t)$ 宽停时，且 $T_n\uparrow\infty$．对 $(\mathscr{F}_{t+})$ 上鞅 $(\overline{X}_t^{T_n})_{t\in\mathbb{R}_+}$ 应用定理 3.22 知 $\overline{X}_{T_n}$ 可积．但对一切宽停时 T，

$$|\overline{X}_T^{T_n}|=|\overline{X}_{T\wedge T_n}|\leqslant|\overline{X}_{T_n}|+n,$$

故 $(\overline{X}_t^{T_n})$ 为类 (D) 过程．由于 $(X_t^{T_n})$ 与 $(\overline{X}_t^{T_n})$ 无区别，故 $(X_t^{T_n})$ 为类 (D) 过程．

---

1) 这里及今后，$X^T\triangleq(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$.

下一定理给出非负类(D)上鞅的一个判别准则.

3.29 定理 设(X_t)为一非负上鞅，其几乎所有轨道右连续. 令

$$R_n=\inf\{t: X_t\geqslant n\},$$

则为要(X_t)属于类(D)，必须且只需 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{R_n}I_{[R_n<\infty]}]=0$.

证明 由定理 3.10, $X_t\xrightarrow[t\to\infty]{\text{a.s.}}X_{\infty-}$, $X_{\infty-}$ 为一可积随机变量. 又由定理 3.4 知，对几乎所有 ω, $X_\cdot(\omega)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上右连续，且在 $]0,\infty[$ 上左极限存在且有穷. 于是对几乎所有 ω, $X_\cdot(\omega)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上有界. 从而有 $[R_n=+\infty]\uparrow\Omega$ a.s., $\lim\limits_{n\to\infty}X_{R_n}I_{[R_n<\infty]}=0$ a.s..

下面，不妨假定 $(\mathscr{F}_t)$ 右连续，且 (X_t) 的全部轨道右连续(否则考虑与 (X_t) 无区别的一右连续 $(\mathscr{F}_{t+})$ 上鞅 $(\overline{X}_t)$).

往证必要性. 设(X_t)属于类(D)，则 $(X_{R_n}I_{[R_n<\infty]})$ 一致可积，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{R_n}I_{[R_n<\infty]}]=0$.

现证充分性. 设 $T\in\mathscr{T}$, 令 $A=[X_T\geqslant n]$, 则 $A\in\mathscr{F}_T$. 置

$$T_A=TI_A+\infty I_{A^c}.$$

易证 $T_A\in\mathscr{T}$, 且 $R_n\leqslant T_A$. 令 $X_\infty=0$, 由于$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$为右连续上鞅，故由定理 3.22,

$$\mathbb{E}[X_TI_{[X_T\geqslant n]}]=\mathbb{E}[X_{T_A}]\leqslant\mathbb{E}[X_{R_n}]=\mathbb{E}[X_{R_n}I_{[R_n<\infty]}].$$

依假定, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{R_n}I_{[R_n<\infty]}]=0$. 故由上式知, $\mathbb{E}[X_TI_{[X_T\geqslant n]}]$ 对 $T\in\mathscr{T}$ 一致趋于 0, 即 $(X_T)_{T\in\mathscr{T}}$ 一致可积，亦即 $(X_TI_{[T<\infty]})_{T\in\mathscr{T}}$ 一致可积. 依定义, (X_t) 为类 (D) 过程.

第 四 章

过程与停时

从本章开始，我们将连续用三章的篇幅，介绍随机过程一般理论，同时给出这一理论在过程轨道正则性研究及鞅论等方面的初步应用.

本章的基本出发点，是一可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$及一族上升的$\mathscr{F}$的子σ-域$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$，而自始至终不出现概率测度. §1～4的内容主要取材于C. Dellacherie, P. A. Meyer[1]，§5～7的内容虽不是新的，但在"无概率测度"形式下叙述这些结果，则是第一次. 以往，这些结果都是在所谓"通常条件"下给予证明的.

§1 与停时联系的σ-域

设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可测空间，$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$为一族上升的$\mathscr{F}$的子$\sigma$-域. 令

$$\mathscr{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s, \quad t\in\mathbb{R}_+.$$

$$\mathscr{F}_{t-}=\bigvee_{s<t}\mathscr{F}_s=\sigma\Big(\bigcup_{s<t}\mathscr{F}_s\Big), \quad 0<t\leqslant\infty.$$

此外，我们还添加$\mathscr{F}_{0-}$及$\mathscr{F}_\infty$这两个$\mathscr{F}$的子σ-域，其中$\mathscr{F}_{0-}\subset\mathscr{F}_0$，$\mathscr{F}_{\infty-}\subset\mathscr{F}_\infty$. 因此，今后总认为$(\mathscr{F}_t)_{t\in\{0-\}\cup\overline{\mathbb{R}}_+}$是给定的，这里

$$\overline{\mathbb{R}}_+=\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}.$$

通常，σ-域族$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$是由某个过程产生的. 设$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$是定义于$(\Omega, \mathscr{F})$的一过程，即对每个$t\in\mathbb{R}_+$，$X_t$是$\mathscr{F}$可测函数，令$\mathscr{F}_t=\sigma(X_s:s\leqslant t)$，则$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$为一族上升的$\mathscr{F}$的子$\sigma$-域. 我们

称$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$为过程$(X_t)$的自然$\sigma$-域族. 这时$\mathscr{F}_t$可以直观地了解为过程$X$到$t$时刻以前所包含的全部信息.

σ-域族$(\mathscr{F}_t)$称为右连续的, 如果对一切$t\in\mathbb{R}_+$, 有$\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t$. 对任给$\sigma$-域族$(\mathscr{F}_t)$, 我们总可以将它右连续化, 即令$\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t+}$ $(t\in\mathbb{R}_+)$, 则$(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$为右连续的. 此外, 对一切$0\leqslant t<\infty$, 我们有$\mathscr{G}_{t-}=\mathscr{F}_{t-}$. 通常, 我们补充定义$\mathscr{G}_{0-}=\mathscr{F}_{0-}$, $\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_\infty$.

4.1 定义 $(\Omega, \mathscr{F})$上非负可测函数(可以取$+\infty$值)T, 叫做$(\mathscr{F}_t)$停时[1], 如果对一切$t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t;$$

叫做$(\mathscr{F}_t)$宽停时, 如果对一切$t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$[T<t]\in\mathscr{F}_t,$$

或者等价地, $T\wedge t$为$\mathscr{F}_t$可测.

显然, $(\mathscr{F}_t)$宽停时和$(\mathscr{F}_{t+})$停时是同一个概念. 特别, $(\mathscr{F}_t)$停时也是$(\mathscr{F}_t)$宽停时.

这里, 需要对停时概念作些直观解释. 设想我们对一过程进行观测, 到有限时刻t, 我们所获得的全部信息是$\mathscr{F}_t$. 此外, 我们考察与该过程联系的一随机事件, 它的发生时刻T是随机的. 如果在任何有限时刻t, 我们根据t以前观测得到的信息$\mathscr{F}_t$, 能够判断这一随机事件是否已经发生(即对一切$t\in\mathbb{R}_+$, $[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t$), 则该随机事件发生的时刻$T$就是$(\mathscr{F}_t)$停时. 现在, 我们进一步举例说明停时与宽停时的区别. 设想在平面上预先划定一个区域, 我们对在平面上作随机游动的一个质点进行跟踪. 如果该区域是闭的, 则在任何有限时刻t, 我们都能判断质点是否已经进入该区域, 于是, 质点首次进入该区域的时刻(称为首达时)就是关于该过程(质点运动轨迹)自然σ-域族的一个停时. 如果该区域是开的, 则严格意义下的首达时无法确定, 我们把质点在该区域逗留时刻的下确界定义为对该区域的首达时(或初遇). 这时, 一般说来, 首

1) 停时也称为可选时.

达时不是停时，而是宽停时．另一方面，在任何有限时刻 t，一般说来，我们不能根据对质点的跟踪，判断该质点是否一去不复返地离开了某指定区域，因此，最后离开指定区域的时刻(称为末离时)，一般不是停时或宽停时．

读者不难自行证明下一定理．

4.2 定理 1) 设 S, T 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时(宽停时)，则 $S\wedge T$, $S\vee T$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时(宽停时)．

2) 设 (S_n) 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时列，则 $\bigvee\limits_n S_n$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，$\bigwedge\limits_n S_n$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 宽停时．若序列 (S_n) 是"尾定的"，即对每个 $\omega\in\Omega$，存在自然数 n_ω 使得当 $n\geqslant n_\omega$ 时，有 $S_n(\omega)=S_{n_\omega}(\omega)$，则 $\bigwedge\limits_n S_n$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时．

3) 设 T 为一宽停时，则对任何 $a>0$, $T+a$ 为停时．

下面，我们对每个停时(或宽停时)定义一些有关的 σ-域．

4.3 定义 设 T 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，令

(3.1) $\quad \mathscr{F}_{T+}=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\forall t\in\mathbb{R}_+,\ A\cap[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_{t+}\}$,

(3.2) $\quad \mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\forall t\in\mathbb{R}_+,\ A\cap[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t\}$,

(3.3) $\quad \mathscr{F}_{T-}=\sigma\{\mathscr{F}_{0-};\ A\cap[t<T]:A\in\mathscr{F}_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$,

则 $\mathscr{F}_{T+}$, $\mathscr{F}_T$, $\mathscr{F}_{T-}$ 都为 σ-域．我们称 $\mathscr{F}_T$ 为 T 前事件 σ-域，$\mathscr{F}_{T-}$ 为严格 T 前事件 σ-域．我们不给予 $\mathscr{F}_{T+}$ 以特别名称．容易证明，我们有

(3.4) $\quad \mathscr{F}_{T+}=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\forall t\in\mathbb{R}_+,\ A\cap[T<t]\in\mathscr{F}_t\}$,

(3.5) $\quad \mathscr{F}_{T-}=\sigma\{A\cap[t\leqslant T]:A\in\mathscr{F}_{t-},\ t\in\mathbb{R}_+\}$,

(3.6) $\quad \mathscr{F}_{T-}=\sigma\{\mathscr{F}_{0-};\ A\cap[t<T]:A\in\mathscr{F}_{t+},\ t\in\mathbb{R}_+\}$.

设 T 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 宽停时，则仍可按(3.1)，(3.3)分别定义 $\mathscr{F}_{T+}$ 及 $\mathscr{F}_{T-}$，而(3.2)式定义的 $\mathscr{F}_T$ 不一定是 σ-域了(例如，若存在 $t\in\mathbb{R}_+$，使得 $[T\leqslant t]\notin\mathscr{F}_t$，则 $\Omega\notin\mathscr{F}_T$)．因此对宽停时 T，一般我们只能定义 $\mathscr{F}_{T+}$, $\mathscr{F}_{T-}$．这时(3.4)，(3.5)，(3.6)仍成立[1]．此

1) $\mathscr{F}_{T-}$ 对任何非负 $\mathscr{F}_\infty$ 可测函数 T 都可定义，而且(3.3)，(3.5)，(3.6)等价．

外，如果令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t+}(t\in\mathbb{R}_+)$，$\mathscr{G}_{0-}=\mathscr{F}_{0-}$，$\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_\infty$，则 T 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时，对一切 $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$，有 $\mathscr{G}_{t-}=\mathscr{F}_{t-}$；并且相应的 $\mathscr{G}_T$ 及 $\mathscr{G}_{T-}$，就分别是 $\mathscr{F}_{T+}$ 及 $\mathscr{F}_{T-}$. 此外，我们有 $\mathscr{G}_{T+}=\mathscr{G}_T$.

显然，对每个 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 T，我们有 $\mathscr{F}_{T-}\subset\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T+}$；对每个 $(\mathscr{F}_t)$ 宽停时 T，我们有 $\mathscr{F}_{T-}\subset\mathscr{F}_{T+}$.

最后，如果 $T=t$ 为常值停时 $(t\in\overline{\mathbb{R}}_+)$，则有 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$，$\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{t-}$；$\mathscr{F}_{T+}=\mathscr{F}_{t+}$.

下一定理罗列了有关σ-域 $\mathscr{F}_T$、$\mathscr{F}_{T-}$、$\mathscr{F}_{T+}$ 的一些主要性质.

4.4 定理 在下面的叙述中，S、T 表示停时，(S_n) 为停时列，R、U 表宽停时，(R_n) 为宽停时列.

1) R 为 $\mathscr{F}_{R-}$ 可测.

2) $S\leqslant T\Rightarrow\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$，$R\leqslant U\Rightarrow\mathscr{F}_{R-}\subset\mathscr{F}_{U-}$.

3) $\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{S\wedge T}$.

4) $A\in\mathscr{F}_{S\vee T}\Rightarrow A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_T$，$A\cap[S<T]\in\mathscr{F}_T$，$A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_{S\wedge T}$.

5) $\mathscr{F}_{S\vee T}=\mathscr{F}_S\vee\mathscr{F}_T=\{A\cup B:\ A\in\mathscr{F}_S,\ B\in\mathscr{F}_T,\ A\cap B=\emptyset\}$.

6) $A\in\mathscr{F}_{R+}\Rightarrow A\cap[R<U]\in\mathscr{F}_{U-}$，$R<U\Rightarrow\mathscr{F}_{R+}\subset\mathscr{F}_{U-}$.

7) $A\in\mathscr{F}_{\infty-}\Rightarrow A\cap[R=+\infty]\in\mathscr{F}_{R-}$.

8) 设 $\mathscr{F}_{\infty-}=\mathscr{F}_\infty$，$R\leqslant U$. 如果在 $[R<\infty]$ 上，有 $R<U$，则 $\mathscr{F}_{R+}\subset\mathscr{F}_{U-}$.

9) 设 $\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0$，$S\leqslant T$. 如果在 $[T>0]$ 上，有 $S<T$，则 $\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_{T-}$.

10) 设 $R=\bigvee\limits_n R_n$，$U=\bigwedge\limits_n R_n$，则有

$$\mathscr{F}_{R-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{R_n-},\quad \mathscr{F}_{U+}=\bigcap_n\mathscr{F}_{R_n+}.$$

11) 设 $\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0$，$S=\bigvee\limits_n S_n$. 若在 $[S>0]$ 上，对一切 n 有 $S_n<S$，则有

$$\mathscr{F}_{S-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n}.$$

证明 1) 由于对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，$[R>t]$ 为 $\mathscr{F}_{R-}$ 的生成元，$[R=0]=[R>0]^c$，故 R 为 $\mathscr{F}_{R-}$ 可测。

2) 设 $A\in\mathscr{F}_S$，则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，

$$A\cap[T\leqslant t]=(A\cap[S\leqslant t])\cap[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t.$$

从而 $A\in\mathscr{F}_T$. 于是 $\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$.

设 $A\in\mathscr{F}_{t+}$，则 $A\cap[t<R]\in\mathscr{F}_{t+}$. 故由(3.6)得

$$A\cap[t<R]=(A\cap[t<R])\cap[t<U]\in\mathscr{F}_{U-},$$

从而 $\mathscr{F}_{R-}\subset\mathscr{F}_{U-}$.

3) 只需证 $\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{S\wedge T}$. 设 $A\in\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$，则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，

$$A\cap[S\wedge T\leqslant t]=(A\cap[S\leqslant t])\cup(A\cap[T\leqslant t])\in\mathscr{F}_t.$$

这表明 $A\in\mathscr{F}_{S\wedge T}$.

4) 设 $A\in\mathscr{F}_{S\vee T}$. 由 1)、2)，$S$、$T$ 都为 $\mathscr{F}_{S\vee T}$ 可测，故

$$A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_{S\vee T}.$$

我们有

$$A\cap[S\leqslant T]\cap[T\leqslant t]=(A\cap[S\leqslant T])\cap[S\vee T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t.$$

这表明 $A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_T$. 同理可证 $A\cap[S<T]\in\mathscr{F}_T$. 于是 $A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_T$. 但 S、T 地位对称，故

$$A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{S\wedge T}.$$

5) 设 $C\in\mathscr{F}_{S\vee T}$. 令 $A=C\cap[T<S]$，$B=C\cap[S\leqslant T]$，则由 4)，$A\in\mathscr{F}_S$，$B\in\mathscr{F}_T$，并且有 $A\cap B=\emptyset$，$C=A\cup B$. 于是有

$$\mathscr{F}_{S\vee T}\subset\{A\cup B:A\in\mathscr{F}_S,\ B\in\mathscr{F}_T,\ A\cap B=\emptyset\}\subset\mathscr{F}_S\vee\mathscr{F}_T.$$

但显然有 $\mathscr{F}_S\vee\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{S\vee T}$. 故 5) 得证.

6) 设 $A\in\mathscr{F}_{R+}$. 令 Q_+ 表示非负有理数全体. 由于对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，$A\cap[R\leqslant t]\in\mathscr{F}_{t+}$，故由(3.6)，有

$$A\cap[R<U]=\bigcup_{r\in Q_+}A\cap[R\leqslant r]\cap[r<U]\in\mathscr{F}_{U-}.$$

7) 令 $\mathscr{G}=\{A\in\mathscr{F}_{\infty-}:A\cap[R=+\infty]\in\mathscr{F}_{R-}\}$. 则 $\mathscr{G}$ 为一 σ-域. 设 $A\in\mathscr{F}_n$，则

$$A\cap[R=\infty]=\bigcap_{k=n}^{\infty}(A\cap[k<R])\in\mathscr{F}_{R-},$$

即 $A\in\mathscr{G}$. 于是 $\mathscr{G}\supset\bigcup_n\mathscr{F}_n$, $\mathscr{G}\supset\sigma(\bigcup_n\mathscr{F}_n)=\mathscr{F}_{\infty-}$, 故有 $\mathscr{G}=\mathscr{F}_{\infty-}$.

8) 设 $A\in\mathscr{F}_{R+}$, 则 $A\in\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}_{\infty-}$. 我们有

$$A=(A\cap[R<U])\cup(A\cap[R=\infty]).$$

由6), $A\cap[R<U]\in\mathscr{F}_{U-}$, 由7), $A\cap[R=\infty]\in\mathscr{F}_{R-}\subset\mathscr{F}_{U-}$. 故有 $A\in\mathscr{F}_{U-}$.

9) 设 $A\in\mathscr{F}_S$, 则 $A\cap[S=0]\in\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{0-}\subset\mathscr{F}_{T-}$, 故有

$$A=(A\cap[S<T])\cup(A\cap[T=0])\in\mathscr{F}_{T-}.$$

10) 设 $t\in\mathbb{R}_+$, $A\in\mathscr{F}_t$, 则 $A\cap[t<R_n]\in\mathscr{F}_{R_n-}$, 故有

$$A\cap[t<R]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap[t<R_n])\in\bigvee_n\mathscr{F}_{R_n-}.$$

从而由(3.3), $\mathscr{F}_{R-}\subset\bigvee_n\mathscr{F}_{R_n-}$. 相反的包含关系恒成立.

设 $A\in\bigcap_n\mathscr{F}_{R_n+}$, 则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 由(3.4),

$$A\cap[U<t]=\bigcup_n(A\cap[R_n<t])\in\mathscr{F}_t,$$

故有 $A\in\mathscr{F}_{U+}$, 从而 $\bigcap_n\mathscr{F}_{R_n+}\subset\mathscr{F}_{U+}$. 相反的包含关系恒成立.

11) 由 9), 我们有 $\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n}\subset\mathscr{F}_{S-}$. 但由 10), 我们有

$$\mathscr{F}_{S-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n-}\subset\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n}.$$

故有 $\mathscr{F}_{S-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n}$.

4.5 系 设 S、T 为停时, R、U 为宽停时, 则

1) $[S\leqslant T]$, $[S<T]$, $[S=T]$ 都属于 $\mathscr{F}_{S\wedge T}$, $[S<T]\in\mathscr{F}_{T-}$.

2) 设 ξ 为 $\mathscr{F}_{S\vee T}$ 可测函数, 则 $\xi I_{[S\leqslant T]}$, $\xi I_{[S<T]}$ 为 $\mathscr{F}_T$ 可测, $\xi I_{[S=T]}$ 为 $\mathscr{F}_{S\wedge T}$ 可测.

3) 设 ξ 为 $\mathscr{F}_{R+}$ 可测函数, 则 $\xi I_{[R<U]}$ 为 $\mathscr{F}_{U-}$ 可测.

4) 我们有

$$[S\leqslant T]\cap\mathscr{F}_{S\vee T}=[S\leqslant T]\cap\mathscr{F}_T,$$

$$[S<T]\cap\mathscr{F}_{S\vee T}=[S<T]\cap\mathscr{F}_T,$$

$$[S=T]\cap\mathscr{F}_{S\vee T}=[S=T]\cap\mathscr{F}_{S\wedge T}=[S=T]\cap\mathscr{F}_S$$
$$=[S=T]\cap\mathscr{F}_T.$$

5) 我们有

$$[S\leqslant T]\cap\mathscr{F}_{S\wedge T}=[S\leqslant T]\cap\mathscr{F}_S,$$
$$[S<T]\cap\mathscr{F}_{S\wedge T}=[S<T]\cap\mathscr{F}_S.$$

6) 设(S_n)为尾定停时列，则有

$$\mathscr{F}_{\bigvee\limits_n S_n}=\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n}=\Big\{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n:\ A_n\in\mathscr{F}_{S_n},\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$
$$A_k\cap A_j=\emptyset,\ \ k\neq j\Big\},$$
$$\mathscr{F}_{\bigwedge\limits_n S_n}=\bigcap_n\mathscr{F}_{S_n}.$$

证明 我们只证6)．令$S=\bigvee\limits_n S_n$．由于(S_n)是尾定的，我们有$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[S=S_n]=\Omega$．设$A\in\mathscr{F}_S$，令$A_1=A\cap[S=S_1]$，

$$A_n=A\cap(\bigcap_{j<n}[S_j<S])\cap[S=S_n],\quad n\geqslant 2,$$

则由于$[S_j<S]\in\mathscr{F}_S$，故由定理4.4.4)，$A_n\in\mathscr{F}_{S_n}(n\geqslant 1)$．此外有$A_k\cap A_j=\emptyset(k\neq j)$，$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$．第一个等式得证．

令$T=\bigwedge\limits_n S_n$．设$A\in\bigcap\limits_n\mathscr{F}_{S_n}$，则由定理4.4.4)，对一切$n$，$A\cap[S_n=T]\in\mathscr{F}_T$．故$A=\bigcup\limits_n(A\cap[T=S_n])\in\mathscr{F}_T$．第二式得证．

注 在4)、5)中，将所有$\mathscr{F}_\Delta$换成$\mathscr{F}_{\Delta-}$，等式仍成立．

4.6 定理 假定$\mathscr{F}_{0+}=\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{0-}$．设$(T_n)$是停时的单调序列，且$T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$．

1) 若(T_n)单调降，且对一切n，在$[T_n>0]$上有$T<T_n$，则有

$$\mathscr{F}_{T+}=\bigcap_n\mathscr{F}_{T_n-}.\tag{6.1}$$

2) 若(T_n)单调增，且对一切n，在$[T>0]$上有$T_n<T$，则有

$$\mathscr{F}_{T-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n+}.\tag{6.2}$$

证明 1) 令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t+}$, $\mathscr{G}_{0-}=\mathscr{G}_0$, $\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_\infty$, 则 $\mathscr{G}_{0-}=\mathscr{F}_{0+}=\mathscr{F}_{0-}$. 故对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有 $\mathscr{G}_{t-}=\mathscr{F}_{t-}$. 由定理 4.4.9),

$$\mathscr{F}_{T+}=\mathscr{G}_T\subset\mathscr{G}_{T_n-}=\mathscr{F}_{T_n-},$$

故由定理 4.4.10),

$$\mathscr{F}_{T+}\subset\bigcap_n\mathscr{F}_{T_n}\subset\bigcap_n\mathscr{F}_{T_n+}=\mathscr{F}_{T+}.$$

(6.1)得证.

2) 根据同样推理,我们有 $\mathscr{F}_{T_n}\subset\mathscr{F}_{T-}$. 于是由定理 4.4.10),

$$\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n+}\subset\mathscr{F}_{T-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}\subset\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n+}.$$

(6.2)得证.

注 在 2) 中,若 (T_n) 为宽停时列,则下面将看到(定理 4.29), T 仍为停时,从而仍有(6.2).

4.7 定理 设 $T>0$ 为一停时. 若存在一单调增宽停时列 (T_n), 使得 $T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$, 且对一切 n, 有 $T_n<T$, 则

$$\mathscr{F}_{T-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n+}. \tag{7.1}$$

证明 由定理 4.4.6), 我们有 $\mathscr{F}_{T_n+}\subset\mathscr{F}_{T-}$. 令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t+}$, $\mathscr{G}_{0-}=\mathscr{F}_{0-}$, $\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_\infty$, 则 $\mathscr{G}_{T-}=\mathscr{F}_{T-}$. 由定理 4.4.10), 有

$$\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{G}_{T-}=\bigvee_n\mathscr{G}_{T_n-}\subset\bigvee_n\mathscr{G}_{T_n}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n+}.$$

但 $\bigvee\limits_n\mathscr{F}_{T_n+}\subset\mathscr{F}_{T-}$, 故有(7.1).

4.8 定理 1) 设 S 为一$(\mathscr{F}_t)$停时, T 为满足 $S\leqslant T$ 的一个 $\mathscr{F}_S$ 可测随机变量,则 T 本身也是$(\mathscr{F}_t)$停时. 如果 S 为一$(\mathscr{F}_t)$宽停时, T 为 $\mathscr{F}_{S+}$ 可测, $T\geqslant S$, 且在$[S<\infty]$上有 $S<T$, 则 T 也是$(\mathscr{F}_t)$停时.

2) 设 S 为一$(\mathscr{F}_t)$宽停时. 对每个自然数 n, 令

$$S^{(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}I_{\left[\frac{k-1}{2^n}\leqslant S<\frac{k}{2^n}\right]}+(+\infty)I_{[S=+\infty]}, \tag{8.1}$$

则 $S^{(n)}$ 为$(\mathscr{F}_t)$停时,且 $S^{(n)}\downarrow S$.

3) 设 S、T 为两个 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，则 $S+T$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时.

证明 1) 设 $t\in\mathbb{R}_+$. 对第一种情形，我们有 $[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_S$，故由定理 4.4.4)，

$$[T\leqslant t]=[T\leqslant t]\cap[S\leqslant t]\in\mathscr{F}_t.$$

从而 T 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时. 对第二种情形，我们有 $[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_{S+}$，故由定理 4.4.6)，

$$[T\leqslant t]=[T\leqslant t]\cap[S<t]\in\mathscr{F}_{t-}\subset\mathscr{F}_t.$$

从而 T 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时.

2) 由定理 4.4.1)，$S^{(n)}$ 为 $\mathscr{F}_{S-}$ 可测. 又 $S^{(n)}\geqslant S$，且在 $[S<\infty]$ 上有 $S^{(n)}>S$，故由 1)，$S^{(n)}$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时. 显然有 $S^{(n)}\downarrow S$.

3) 由于 $S+T\geqslant S\vee T$，且 $S+T$ 为 $\mathscr{F}_{S\vee T}$ 可测，故由 1)知，$S+T$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时[1].

4.9 定义 设 T 为 Ω 上的一非负函数，令

$$T_A=TI_A+(+\infty)I_{A^c},$$

称 T_A 为 T 到 A 上的局限.

4.10 定理 1) 设 T 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，$A\in\mathscr{F}_\infty$，则为要 T_A 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，必须且只需 $A\in\mathscr{F}_T$.

2) 设 T 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，$A\in\mathscr{F}_T$，则有

(10.1) $\quad A\cap\mathscr{F}_{T_A}=A\cap\mathscr{F}_T,\quad A^c\cap\mathscr{F}_{T_A}=A^c\cap\mathscr{F}_\infty,$

(10.2) $\quad A\cap\mathscr{F}_{T_A-}=A\cap\mathscr{F}_{T-},\quad A^c\cap\mathscr{F}_{T_A-}=A^c\cap\mathscr{F}_{\infty-}.$

特别，若 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$，$\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}_{\infty-}$，则对任何 $A\in\mathscr{F}_T$，有

$$\mathscr{F}_{T_A}=\mathscr{F}_{T_A-}.$$

证明 1) 显然.

2) 设 $B\in\mathscr{F}_{T_A}$，则 $A\cap B\in\mathscr{F}_{T_A}$，故对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有

$$A\cap B\cap[T\leqslant t]=A\cap B\cap[T_A\leqslant t]\in\mathscr{F}_t.$$

这表明 $A\cap B\in\mathscr{F}_T$，从而 $A\cap B=A\cap(A\cap B)\in A\cap\mathscr{F}_T$，故有 $A\cap\mathscr{F}_{T_A}\subset A\cap\mathscr{F}_T$. 但 $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T_A}$，于是 $A\cap\mathscr{F}_{T_A}=A\cap\mathscr{F}_T$. 注

1) 感谢赵林城同志给出这一简单证明.

意$(T_A)_{A^c}=+\infty$，故由上所证，$A^c\cap\mathscr{F}_{T_A}=A^c\cap\mathscr{F}_\infty$.

设$B\in\mathscr{F}_t$，则$B\cap[t<T_A]\in\mathscr{F}_{T_A-}$，$B\cap[t<T]\in\mathscr{F}_{T-}$. 由于

$$A\cap B\cap[t<T_A]=A\cap B\cap[t<T]\in A\cap\mathscr{F}_{T-},$$

故$A\cap\mathscr{F}_{T_A-}\subset A\cap\mathscr{F}_{T-}$. 但$\mathscr{F}_{T_A-}\supset\mathscr{F}_{T-}$，于是$A\cap\mathscr{F}_{T_A-}=A\cap\mathscr{F}_{T-}$. 注意$(T_A)_{A^c}=\infty$，故由上所证，$A^c\cap\mathscr{F}_{T_A-}=A^c\cap\mathscr{F}_{\infty-}$.

现设$\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$，$\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}_{\infty-}$，$A\in\mathscr{F}_T$. 令$B\in\mathscr{F}_{T_A}$，则由(10.1)，$A\cap B\in\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}\subset\mathscr{F}_{T_A-}$. 又由(10.2)，$A^c\cap B\in A^c\cap\mathscr{F}_{T_A-}\subset\mathscr{F}_{T_A-}$. 故有$B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\in\mathscr{F}_{T_A-}$. 于是

$$\mathscr{F}_{T_A}=\mathscr{F}_{T_A-}.$$

4.11 定理 每个$(\mathscr{F}_t)$宽停时可以表为形如

$$T=aI_A+(+\infty)I_{A^c},\quad a\in\mathbb{R}_+,\quad A\in\mathscr{F}_a$$

的停时序列的下确界.

证明 设S为$(\mathscr{F}_t)$宽停时，则由(8.1)，

$$S=\inf_{n\geq1}S^{(n)}=\inf_{n,k\geq1}\left\{\frac{k}{2^n}I_{\left[S^{(n)}=\frac{k}{2^n}\right]}+(+\infty)I_{\left[S^{(n)}\neq\frac{k}{2^n}\right]}\right\},$$

定理得证.

§2 适应过程与循序过程

4.12 定义 令$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$为一随机过程，称(X_t)为可测过程，如果作为(t,ω)的函数，$X_t(\omega)$为$\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$可测；称$(X_t)$为$(\mathscr{F}_t)$适应过程，如果对一切$t\in\mathbb{R}_+$，$X_t$为$\mathscr{F}_t$可测；称$(X_t)$为$(\mathscr{F}_t)$循序(可测)过程，如果对一切$t\in\mathbb{R}_+$，$X$限于$[0,t]\times\Omega$为$\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t$可测.

显然$(\mathscr{F}_t)$循序过程为可测且$(\mathscr{F}_t)$适应的. 但逆命题不成立.

在本书中，一过程$X=(X_t)$称为右连续(左连续)，如果对一切$\omega\in\Omega$，轨道$X_\cdot(\omega)$为$\mathbb{R}_+$上右连续(左连续)函数；称为右连左极过程，如果对一切$\omega\in\Omega$，轨道$X_\cdot(\omega)$在$\mathbb{R}_+$上右连续且对一切

$t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$，左极限 $X_{t-}(\omega)=\lim\limits_{\substack{s\to t\\ s<t}} X_s(\omega)$ 存在且有穷.

4.13 定理 右连续(或左连续)适应过程为循序过程.

证明 设 $X=(X_t)$ 右连续. 对给定 $t\in\mathbb{R}_+$，定义 $[0,t]\times\Omega$ 上一列过程 $X^{(n)}$ 如下：

$$X_s^{(n)}(\omega)=X_0(\omega)I_{[s=0]}+\sum_{k=1}^{2^n}X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega)I_{\left[\frac{(k-1)t}{2^n}<s\leqslant\frac{kt}{2^n}\right]},\ s\in[0,t],$$

则 $X^{(n)}$ 是 $\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t$ 可测函数. 由于在 $[0,t]\times\Omega$ 上，$\lim\limits_{n\to\infty}X_s^{(n)}(\omega)=X_s(\omega)$. 故限于 $[0,t]\times\Omega$，X 为 $\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t$ 可测. 这表明 X 为循序过程. X 为左连续情形证明类似.

4.14 定理 令 (X_t) 为一循序过程，则对一切停时 T，$X_TI_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_T$ 可测.

证明 由于对每个 $t\in\mathbb{R}_+$，$T\wedge t$ 为 $\mathscr{F}_t$ 可测，故 $X_{T\wedge t}$ 作为 $(\Omega,\mathscr{F}_t)$ 到 $([0,t]\times\Omega,\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t)$ 中的可测映射 $\omega\longmapsto(T(\omega)\wedge t,\omega)$ 以及 $([0,t]\times\Omega,\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t)$ 到 $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 中的可测映射 $(s,\omega)\longmapsto X_s(\omega)$ 的复合，为 $\mathscr{F}_t$ 可测的(注意，这一结论对于宽停时 T 也成立).

设 $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$，则对任何 $t\in\mathbb{R}_+$，

$$[X_TI_{[T<\infty]}\in A]\cap[T\leqslant t]=[X_{T\wedge t}\in A]\cap[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t,$$

又 $X_TI_{[T<\infty]}=\lim\limits_{n\to\infty}X_{T\wedge n}I_{[T<n]}$，从而 $X_TI_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_\infty$ 可测，故

$$[X_TI_{[T<\infty]}\in A]\in\mathscr{F}_T,$$

即 $X_TI_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_T$ 可测.

注 设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为一循序过程，X_∞ 为一 $\mathscr{F}_\infty$ 可测函数，则对任何停时 T，$X_T=X_TI_{[T<\infty]}+X_\infty I_{[T=\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_T$ 可测.

4.15 定义 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 的子集 F 称为循序集，如果 I_F 为循序过程，全体循序集构成 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 的一个子 σ-域，称为循序 σ-域，记为 $\mathscr{E}$.

容易证明：为要一过程(X_t)为循序过程，当且仅当 X 为 $\mathscr{E}$ 可测.

4.16 定义 设 U, V 为 Ω 上两个在 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 中取值的函数，且在 Ω 上有 $U\leqslant V$. 我们用 $[\![U, V]\!]$ 表示 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 的子集 $\{(t, \omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega: U(\omega)\leqslant t\leqslant V(\omega)\}$，称 $[\![U, V]\!]$为随机区间. 类似地，我们可以定义随机区间$[\![U, V[\![$, $]\!]U, V]\!]$, $]\!]U, V[\![$. 如果 $U=V$，令 $[\![U]\!]=[\![U, U]\!]$，称 $[\![U]\!]$为 U 的图. 注意，若 $V=+\infty$，则 $[\![U, +\infty]\!]$与$[\![U, +\infty[\![$ 是同一个集合.

设 U, V 为停时，则各类随机区间 $[\![U, V]\!]$ 及 $[\![U, V[\![$ 等都是循序集.

§3 可选过程与可料过程

4.17 定义 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上由全体右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程产生的 σ-域，叫做可选 σ-域，记为 $\mathscr{O}$. $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上由全体左连续$(\mathscr{F}_{t-})$适应[1]过程产生的 σ-域，叫做可料 σ-域，记为 $\mathscr{P}$.

$\mathscr{O}$ 可测过程叫可选过程，$\mathscr{P}$ 可测过程叫可料过程.

由定理 4.13 知，可选过程及可料过程都为循序过程. 特别，可选过程及可料过程为适应过程.

下一定理给出了一些基本的可选集和可选过程，可料集和可料过程.

4.18 定理 1) 令 S, T 为一对停时，且 $S\leqslant T$，则由 S, T 所构成的各类随机区间都是可选集.

2) 设 $S\leqslant T$ 为一对停时，ξ 为一 $\mathscr{F}_S$ 可测函数，则过程 $X=\xi I_{[\![S,T[\![}$ 为可选过程.

3) 设 $S\leqslant T$ 为一对宽停时，则 $]\!]S, T]\!]$ 是可料集. 设 ξ 为一 $\mathscr{F}_{S+}$ 可测函数，则过程 $X=\xi I_{]\!]S,T]\!]}$ 为可料过程.

4) 设 X 为一可料过程，T 为一宽停时，则 X^T 为可料过程.

1) 由左连续性，对 $t>0$，这等价于$(\mathscr{F}_t)$适应.

证明 1) 易见 $I_{[\![0,T[\![}$ 及 $I_{[\![S,\infty[\![}$ 是右连左极适应过程，从而 $[\![0, T[\![$, $[\![S, \infty[\![$ 是可选集，它们的交集 $[\![S, T[\![$ 是可选集. 令 $T_n = S+\frac{1}{n}$，则 $[\![S]\!]=\bigcap_n [\![S, T_n[\![$ 为可选集. 同理 $[\![T]\!]$ 为可选集，于是 $[\![S, T]\!]$, $]\!]S, T]\!]$, $]\!]S, T[\![$ 都是可选集.

2) 由系 4.5.2)，$X_t=\xi I_{[S\leqslant t]}I_{[t<T]}$ 为 $\mathscr{F}_t$ 可测，故 (X_t) 为右连左极 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程，从而为可选过程.

3) $I_{]\!]S,T]\!]}$ 是左连续 $(\mathscr{F}_{t-})$ 适应过程，故 $]\!]S, T]\!]$ 是可料集. 由系 4.5.3) 知，对 $t>0$，$X_t=\xi I_{[S<t]}I_{[t\leqslant T]}$ 为 $\mathscr{F}_{t-}$ 可测，又 $X_0=0$，故 (X_t) 为左连续 $(\mathscr{F}_{t-})$ 适应过程，从而为可料过程.

4) 由定理 4.14 知，$X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_{T+}$ 可测 (考虑 $(\mathscr{F}_{t+})$). 故由 3)，$X_T I_{]\!]T,\infty[\![}$ 为可料过程. 于是 $X^T = X_0 I_{[\![0]\!]} + X I_{]\!]0,T]\!]} + X_T I_{]\!]T,\infty[\![}$ 为可料过程.

4.19 定理 令 $\mathscr{T}$ 表示 $(\mathscr{F}_t)$ 停时全体，则可选 σ-域 $\mathscr{O}$ 由 $\{[\![S, \infty[\![: S\in\mathscr{T}\}$ 生成.

证明 令 $\mathscr{C}=\{[\![S, \infty[\![: S\in\mathscr{T}\}$. 由于 $\mathscr{C}\subset\mathscr{O}$，故有 $\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{O}$，只需证 $\mathscr{O}\subset\sigma(\mathscr{C})$.

设 (X_t) 为一右连左极适应过程，往证 (X_t) 为 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测. 给定 $\varepsilon>0$，令 $T_0^\varepsilon=0$，并归纳定义 $(T_n^\varepsilon)_{n\geqslant 1}$ 如下：

(19.1)
$$T_{n+1}^\varepsilon(\omega)=\inf\{t: t>T_n^\varepsilon(\omega),\ |X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega)-X_t(\omega)|\geqslant\varepsilon,$$
或
$$|X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega)-X_{t-}(\omega)|\geqslant\varepsilon\}.$$

我们用归纳法证明一切 T_n^ε 为停时. 注意(19.1)括号{ }中的集合是 $\mathbb{R}_+$ 中的对右极限封闭的集，从而对任何 $r<+\infty$，我们有

$$[T_{n+1}^\varepsilon=r]\subset[T_n^\varepsilon<r]\cap([|X_{T_n^\varepsilon}-X_r|\geqslant\varepsilon]$$
$$\cup[|X_{T_n^\varepsilon}-X_{r-}|\geqslant\varepsilon])\subset[T_{n+1}^\varepsilon\leqslant r].$$

由于
$$\bigcup_{r<t}[T_{n+1}^\varepsilon=r]=\bigcup_{r<t}[T_{n+1}^\varepsilon\leqslant r]=[T_{n+1}^\varepsilon<t],$$

故由上式得

$$[T^{\varepsilon}_{n+1}\leqslant t]=\bigcup_{r<t}\{[T^{\varepsilon}_{n}<r]\cap([|X_{T^{\varepsilon}_{n}}-X_{r}|\geqslant\varepsilon]$$

$$\cup[|X_{T^{\varepsilon}_{n}}-X_{r-}|\geqslant\varepsilon])\}$$

$$=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{r\in Q_{t}}\left([T^{\varepsilon}_{n}<r]\cap\left[|X_{T^{\varepsilon}_{n}}I_{[T^{\varepsilon}_{n}<\infty]}-X_{r}|>\varepsilon-\frac{\varepsilon}{m}\right]\right),$$

其中 $Q_t=(Q\cap[0,\ t])\cup\{t\}$，$Q$ 为 $\mathbb{R}$ 中有理数全体．假定 T^{ε}_{n} 为停时，由定理 4.4.4)，$[T^{\varepsilon}_{n+1}\leqslant t]\in\mathscr{F}_t$．从而 T^{ε}_{n+1} 亦为停时．

显然 (T^{ε}_{n}) 为单调增，且当 $T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)<\infty$ 时，有 $T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)>T^{\varepsilon}_{n}(\omega)$，此外 $|X_{T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)}(\omega)-X_{T^{\varepsilon}_{n}(\omega)}(\omega)|\geqslant\varepsilon$，或 $|X_{T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)-}(\omega)-X_{T^{\varepsilon}_{n}(\omega)}(\omega)|\geqslant\varepsilon$，由于 $X_{\cdot}(\omega)$ 在 $]0,\ \infty[$ 上左极限存在且有穷，故 $(T^{\varepsilon}_{n}(\omega))_{n\geqslant1}$ 没有有穷聚点，从而 $T^{\varepsilon}_{n}(\omega)\uparrow+\infty$．令

$$X^{\varepsilon}=\sum_{n=0}^{\infty}X_{T^{\varepsilon}_{n}}I_{[\![T^{\varepsilon}_{n},\ T^{\varepsilon}_{n+1}[\![}.$$

由于对一切 $t\in[T^{\varepsilon}_{n}(\omega),\ T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)[$，有 $|X_{T^{\varepsilon}_{n}(\omega)}(\omega)-X_t(\omega)|<\varepsilon$，故对一切 $(t,\ \omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega$，有 $|X^{\varepsilon}_t(\omega)-X_t(\omega)|<\varepsilon$．从而

$$\lim_{\varepsilon\downarrow0}X^{\varepsilon}_t(\omega)=X_t(\omega).$$

但易证 $X_{T^{\varepsilon}_{n}}I_{[\![T^{\varepsilon}_{n},T^{\varepsilon}_{n+1}[\![}$ 为 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测（用 $\mathscr{F}_{T^{\varepsilon}_{n}}$ 可测简单函数逼近 $X_{T^{\varepsilon}_{n}}$），故 X^{ε} 为 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测，从而 X 为 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测．定理得证．

4.20 定理 令 $(T^{(n)})_{n\geqslant1}$ 为一列停时，A 为一循序集，使得

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![T^{(n)}]\!],$$

则 A 为一列停时图的并，从而是可选集．

证明 令 $L_n=\{\omega:(T^{(n)}(\omega),\ \omega)\in A\}$，

则 $I_{L_n}=I_A(T^{(n)})I_{[T^{(n)}<\infty]}$．由定理 4.14，$L_n\in\mathscr{F}_{T^{(n)}}$．从而

$$T^{(n)}_{L_n}=T^{(n)}I_{L_n}+\infty I_{L_n^c}$$

为停时．我们有

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![T^{(n)}_{L_n}]\!].$$

4.21 定理 设 (X_t) 为一可选过程，则存在一可料过程 (Y_t)，

使得集合

$$A=\{(t,\ \omega):\ X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$$

为一列停时图的并.

证明 令 $\mathscr{H}$ 为使定理成立的可选过程全体. 显然 $\mathscr{H}$ 为一线性空间. 令 $\mathscr{C}=\{[\![S,\ T[\![:S\leqslant T,\ S,\ T\in\mathscr{T}\}$, 其中 $\mathscr{T}$ 为停时全体. 设 $S\leqslant T$, $U\leqslant V$, 则

$$[\![S,\ T[\![\cap[\![U,\ V[\![=[\![S\vee U,\ (S\vee U)\vee(T\wedge V)[\![.$$

故 $\mathscr{C}$ 为 π-系(定义 1.1). 设 $S,\ T\in\mathscr{T}$, $S\leqslant T$. 令 $X=I_{[\![S,T[\![}$, 则 $Y=I_{]\!]S,T]\!]}$ 为可料过程, 且 $[X\neq Y]\subset[\![S]\!]\cup[\![T]\!]$, 于是 $\mathscr{C}$ 中集合示性函数属于 $\mathscr{H}$. 设 $X^{(n)}\in\mathscr{H}$, $0\leqslant X^{(n)}$, $X^{(n)}\uparrow X$, 且 X 为有限. 取可料过程 $Y^{(n)}$, 使得 $[X^{(n)}\neq Y^{(n)}]$ 为一列停时图的并. 令

$$\overline{Y}=\limsup_{n\to\infty}Y^{(n)},\quad Y=\overline{Y}I_{[|\overline{Y}|<\infty]},$$

则 Y 为可料过程, 且

$$[X\neq Y]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[X^{(n)}\neq Y^{(n)}],$$

于是 $[X\neq Y]$ 含于一列停时图的并. 故由定理 4.20, $X\in\mathscr{H}$. 由于 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{O}$. 故由单调类定理(定理 1.4), $\mathscr{H}$ 为可选过程全体. 定理证毕.

4.22 定理 设 Q_+ 为 $\mathbb{R}_+$ 中有理数全体, $\mathscr{T}$ 为停时全体. 令

$$\mathscr{C}_1=\{\{0\}\times A:A\in\mathscr{F}_{0-}\}\cup\{]s,\ t]\times A:0<s<t,\ s,\ t\in Q_+,\ A\in\bigcup_{r<s}\mathscr{F}_r\},$$

$$\mathscr{C}_2=\{\{0\}\times A:A\in\mathscr{F}_{0-}\}\cup\{[s,\ t[\times A:0<s<t,\ s,\ t\in Q_+,\ A\in\bigcup_{r<s}\mathscr{F}_r\},$$

$$\mathscr{C}_3=\{\{0\}\times A:A\in\mathscr{F}_{0-}\}\cup\{]\!]S,\ \infty[\![:S\in\mathscr{T}\},$$

则 $\sigma(\mathscr{C}_1)=\sigma(\mathscr{C}_2)=\sigma(\mathscr{C}_3)=\mathscr{P}$. 特别, 我们有 $\mathscr{P}\subset\mathscr{O}$.

证明 往证 $\sigma(\mathscr{C}_1)=\mathscr{P}$. 首先 $\mathscr{C}_1\subset\mathscr{P}$. 故 $\sigma(\mathscr{C}_1)\subset\mathscr{P}$. 另一方面, 设 (X_t) 为 $(\mathscr{F}_{t-})$ 适应左连续过程, 令

$$X_t^{(n)}=X_0I_{[t=0]}+\sum_{k=0}^{\infty}X_{\frac{k}{2^n}}I_{\left[\frac{k}{2^n}<t\leq\frac{k+1}{2^n}\right]},$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_t^{(n)}=X_t$. 易见 $(X_t^{(n)})$ 为 $\sigma(\mathscr{C}_1)$ 可测, 故 (X_t) 为 $\sigma(\mathscr{C}_1)$ 可测, 从而 $\mathscr{P}\subset\sigma(\mathscr{C}_1)$, 故有 $\mathscr{P}=\sigma(\mathscr{C}_1)$.

往证 $\sigma(\mathscr{C}_2)=\mathscr{P}$. 设 $A\in\mathscr{F}_r$, $r<s$, 则有

$$]s,\ t]\times A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\left[s+\frac{t-s}{n},\ t+\frac{1}{m}\right[\times A,$$

$$[s,\ t[\times A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\left]r+\left(1-\frac{1}{n}\right)(s-r),\ t-\frac{t-s}{n}\right]\times A.$$

这表明 $\mathscr{C}_1\subset\sigma(\mathscr{C}_2)$, $\mathscr{C}_2\subset\sigma(\mathscr{C}_1)$, 故有 $\sigma(\mathscr{C}_2)=\sigma(\mathscr{C}_1)=\mathscr{P}$.

我们有 $\mathscr{C}_1\subset\sigma(\mathscr{C}_3)$, $\mathscr{C}_3\subset\mathscr{P}$, 故有 $\sigma(\mathscr{C}_3)=\mathscr{P}$. 最后, 由于 $\mathscr{C}_2$ 中元素为可选集, 故 $\mathscr{P}\subset\mathscr{O}$.

4.23 系 设 T 为一停时. 在 $[T<\infty]$ 上, 令 $f(\omega)=(T(\omega),\omega)$, 则 $f^{-1}(\mathscr{P})=[T<\infty]\cap\mathscr{F}_{T-}$.

证明 设 $A\in\mathscr{F}_{0-}$, 则 $f^{-1}(\{0\}\times A)=A\cap[T=0]\in[T<\infty]\cap\mathscr{F}_{T-}$(因 T 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测). 设 S 为停时, 则 $f^{-1}(]\!]S,\ \infty[\![)=[S<T<\infty]\in[T<\infty]\cap\mathscr{F}_{T-}$, 故由定理 4.22 知, $f^{-1}(\mathscr{P})\subset[T<\infty]\cap\mathscr{F}_{T-}$. 反之, 设 $A\in\mathscr{F}_{0-}$, 则 $[T<\infty]\cap A=f^{-1}(\mathbb{R}_+\times A)$. 设 $A\in\mathscr{F}_t$, $[T<\infty]\cap A\cap[t<T]=f^{-1}(]t,\ \infty[\times A)$. 由于 $\mathbb{R}_+\times A\in\mathscr{P}$, $]t,\ \infty[\times A\in\mathscr{P}$, 这表明对 $\mathscr{F}_{T-}$ 的生成元 C, 有 $[T<\infty]\cap C\in f^{-1}(\mathscr{P})$, 故 $[T<\infty]\cap\mathscr{F}_{T-}\subset f^{-1}(\mathscr{P})$, 系得证.

4.24 系 为了可料 σ-域 $\mathscr{P}$ 为可分, 必须且只需对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\mathscr{F}_{t-}$ 为可分.

证明 充分性由定理 4.22 得, 必要性由系 4.23 得.

4.25 系 连续 $(\mathscr{F}_{t-})$ 适应过程全体生成可料 σ-域 $\mathscr{P}$.

证明 设 $A\in\mathscr{F}_{0-}$, 过程 $X_t=tI_A+I_{A^c}$ 为连续 $(\mathscr{F}_{t-})$ 适应过程, 且 $\{0\}\times A=\{(t,\ \omega): X_t(\omega)=0\}$. 设 S 为一停时, 则过程 $X_t=(t-S)^+=(t-S)\vee 0$ 是连续 $(\mathscr{F}_{t-})$ 适应过程, 且 $]\!]S,\ \infty[\![$

$=\{(t,\ \omega):X_t(\omega)>0\}$，故由定理 4.22 推得本系.

下一定理揭示了可料过程与严格 T 前事件 σ-域 $\mathscr{F}_{T-}$ 之间的内在联系.

4.26 定理 设 T 为一停时，则对任何可料过程 (X_t)，$X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测. 反之，设 ξ 为一 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测实值函数，则存在一可料过程 (X_t)，使得 $X_T I_{[T<\infty]}=\xi I_{[T<\infty]}$.

证明 在 $[T<\infty]$ 上，令 $f(\omega)=(T(\omega),\ \omega)$，则由系 4.23 知，$f$ 为 $([T<\infty],\ [T<\infty]\cap\mathscr{F}_{T-})$ 到 $(\mathbb{R}_+\times\Omega,\ \mathscr{P})$ 中的可测映象.

设 X 为一可料过程，令

$$Y(\omega)=\begin{cases}X(f(\omega)), & \omega\in[T<\infty],\\ 0, & \omega\in[T=\infty].\end{cases}$$

则 $Y=X_T I_{[T<\infty]}$. 由于 X 为 $(\mathbb{R}_+\times\Omega,\ \mathscr{P})$ 到 $(\mathbb{R},\ \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 中的可测映象，故限于 $[T<\infty]$，Y 为 $[T<\infty]\cap\mathscr{F}_{T-}$ 可测. 从而在整个 Ω 上，$X_T I_{[T<\infty]}=Y$ 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测. 另一结论容易由系 4.23 及定理 1.7 推得.

注 在可选过程与 T 前事件 σ-域 $\mathscr{F}_T$ 之间存在类似关系：设 T 为一停时，则对任何可选过程 X，$X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_T$ 可测（定理 4.14）. 反之，设 ξ 为一 $\mathscr{F}_T$ 可测实值函数，令 $X=\xi I_{[\![T,\infty[\![}$，则 X 为可选过程，且 $X_T I_{[T<\infty]}=\xi I_{[T<\infty]}$.

§4 可 料 时

4.27 定义 Ω 上非负函数 T 叫做可料时，如果 $[\![T,\ \infty[\![$ 是可料集.

显然，可料时必为停时，常值停时为可料时. 此外，设 T 为一宽停时，由于 $]\!]T,\ \infty[\![$ 为可料集，因此，为要 T 是可料时，必须且只需 $[\![T]\!]$ 为可料集.

4.28 定义 设 T 为一宽停时，$(T_n)_{n\geq 1}$ 为一宽停时上升序列，且对一切 n，有 $T_n\leqslant T$. 令 $A\subset\Omega$. 我们说序列 (T_n) 在 A 上"预报"

T，如果在 $A\cap[T>0]$ 上，对一切 n，有 $T_n<T$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$．若 (T_n) 在整个 Ω 上预报 T，我们就简称 (T_n) 预报 T。

称宽停时 T 为可预报的，如果存在预报 T 的宽停时上升序列 (T_n)．

4.29 定理 设 T 为一可预报的宽停时．若 $[T=0]\in\mathscr{F}_{0-}$，则 T 是可料时．特别，若 $\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{0+}$，则一切可预报宽停时为可料时．

证明 设 (T_n) 是预报 T 的一宽停时上升列，则

$$[\![T,\ \infty[\![=(\{0\}\times[T=0])\cup(\bigcap_n]\!]T_n,\ \infty[\![)\in\mathscr{P}.$$

故 T 为可料时．

4.30 系 可料 σ-域由全体形如 $[\![S,\ T[\![$ 的随机区间生成，其中 S，T 是可料时（甚至是可预报的可料时），且 $S\leqslant T$．

证明 在定理 4.22 中，$\mathscr{C}_2$ 的元素有两类：第一类为 $\{0\}\times A$，其中 $A\in\mathscr{F}_{0-}$．我们有

$$\{0\}\times A=\bigcap_{n=1}^{\infty}[\![O_A,\ \left(\frac{1}{n}\right)_A[\![.$$

停时 O_A 及 $\left(\frac{1}{n}\right)_A$ 分别被序列 $(k\wedge O_A)_{k\geqslant1}$ 和 $\left(k\wedge\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)_A\right)_{k\geqslant1}$ 所预报；第二类为 $[s,\ t[\times A$，其中 $0<s<t$，$A\in\bigcup\limits_{r<s}\mathscr{F}_r$，我们有 $[s,\ t[\times A=[\![s_A,\ t_A[\![$，取 n 足够大，使得 $A\in\mathscr{F}_{s-\frac{1}{n}}$，则停时 s_A，t_A 分别被序列 $\left((n+k)\wedge\left(s-\frac{1}{n+k}\right)_A\right)_{k\geqslant1}$ 和

$$\left((n+k)\wedge\left(t-\frac{1}{n+k}\right)_A\right)_{k\geqslant1}$$

所预报．

下一定理罗列了有关可料时的一些主要性质．

4.31 定理 1) 设 (S_n) 为一可料时序列，则 $\bigvee\limits_n S_n$ 为可料时．如果 (S_n) 是尾定的，则 $\bigwedge\limits_n S_n$ 为可料时．

2) 设 S 为一可料时，T 为一停时，则

$$A\in\mathscr{F}_{S-}\Rightarrow A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_{T-},\quad A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_{T-}.$$

特别 $[S\leqslant T]$，$[S=T]$ 属于 $\mathscr{F}_{T-}$.

3) 设 S, T 为可料时，则有 $\mathscr{F}_{S-}\cap\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}$.

4) 设 S, T 为可料时，则有

$$A\in\mathscr{F}_{(S\vee T)-}\Rightarrow A\cap[S\leqslant T]\in\mathscr{F}_{T-},\quad A\cap[S<T]\in\mathscr{F}_{T-},$$

$$A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_{(S\wedge T)-},$$

$$\mathscr{F}_{(S\vee T)-}=\mathscr{F}_{S-}\vee\mathscr{F}_{T-}$$
$$=\{A\cup B:\ A\in\mathscr{F}_{S-},\ B\in\mathscr{F}_{T-},\ A\cap B=\emptyset\}.$$

5) 设 (S_n) 为尾定的可料时序列，则有

$$\mathscr{F}_{(\bigvee_n S_n)-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n-}$$
$$=\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n:\ A_n\in\mathscr{F}_{S_n-},\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ A_k\cap A_j=\emptyset,\ j\neq k\right\},$$

$$\mathscr{F}_{(\bigwedge_n S_n)-}=\bigcap_n\mathscr{F}_{S_n-}.$$

6) 设 S 为一停时，$A\in\mathscr{F}_{\infty-}$. 若 S_A 为可料时，则必有

$$A\in\mathscr{F}_{S-}.$$

7) 设 S 为一可料时，则对一切 $A\in\mathscr{F}_{S-}$, S_A 为可料时.

8) 设 S 为一可料时，ξ 为一 $\mathscr{F}_{S-}$ 可测函数，则 $\xi I_{[\![S,\infty[\![}$ 为可料过程.

证明 1) 我们有

$$[\![\bigvee_n S_n,\ \infty[\![=\bigcap_{n=1}^{\infty}[\![S_n,\ \infty[\![.$$

若 (S_n) 尾定，则有

$$[\![\bigwedge_n S_n,\ \infty[\![=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![S_n,\ \infty[\![.$$

2) 由定理 4.4, $A\cap[S<T]\in\mathscr{F}_{T-}$, $A\cap[T=\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$, 只需证 $A\cap[S=T]\cap[T<\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$. 令 (X_t) 为一可料过程，使得 $I_AI_{[S<\infty]}=X_SI_{[S<\infty]}$ (定理 4.26). 令 $Y=XI_{[\![S]\!]}$, 则 Y 为可料过程，且

$$Y_T I_{[T<\infty]} = X_T I_{[S=T]} I_{[T<\infty]} = X_S I_{[S=T<\infty]} = I_A I_{[S=T<\infty]},$$

故 $A\cap[S=T<\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$(定理 4.26).

3) 只需证 $\mathscr{F}_{S-}\cap\mathscr{F}_{T-}\subset\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}$. 设 $A\in\mathscr{F}_{S-}\cap\mathscr{F}_{T-}$, 则有

$$A\cap[S\leqslant T]=A\cap[S=S\wedge T]\in\mathscr{F}_{(S\wedge T)-},$$
$$A\cap[T\leqslant S]=A\cap[T=S\wedge T]\in\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}.$$

故 $A=(A\cap[S\leqslant T])\cup(A\cap[T\leqslant S])\in\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}$.

4) 我们有

$$A\cap[S\leqslant T]=A\cap[S\vee T=T]\in\mathscr{F}_{T-},$$
$$A\cap[S<T]=(A\cap[S\leqslant T])\cap[S<T]\in\mathscr{F}_{T-}.$$

故有 $A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_{T-}$. 但 S, T 地位对称, 故得

$$A\cap[S=T]\in\mathscr{F}_{S-}\cap\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}.$$

设 $C\in\mathscr{F}_{(S\vee T)-}$, 令 $A=C\cap[T<S]$, $B=C\cap[S\leqslant T]$, 则

$$A\cap B=\emptyset,\quad A\in\mathscr{F}_{S-},\quad B\in\mathscr{F}_{T-},$$

且 $C=A\cup B$.

5) 其证明与系 4.5.6)完全类似.

6) 令 $X=I_{[\![S_A,\infty[\![}$, 则 X 为可料过程. 故由定理 4.26,

$$I_{A\cap[S<\infty]}=X_S I_{[S<\infty]}$$

为 $\mathscr{F}_{S-}$ 可测, 即 $A\cap[S<\infty]\in\mathscr{F}_{S-}$. 但由定理 4.4.7),

$$A\cap[S=\infty]\in\mathscr{F}_{S-},$$

故 $A\in\mathscr{F}_{S-}$.

7) 设 $A\in\mathscr{F}_{S-}$, 由定理 4.26, 存在一可料过程 X, 使得

$$I_A I_{[S<\infty]}=X_S I_{[S<\infty]}.$$

于是 $[\![S_A]\!]=[X=1]\cap[\![S]\!]$ 为可料集. 但 S_A 为停时, 故 S_A 为可料时.

8) 容易由 7)推得.

4.32 定理 令 A 为一可料集, 若 A 含于一列可料时图的并中, 则 A 为一列可料时图的并.

证明 与定理 4.20 的证明完全类似.

4.33 定理 设 A 为一列停时(相应地，可料时)图的并，则存在一列停时(相应地，可料时)(T_n)，使得当 $n\neq m$，$[\![T_n]\!]\cap[\![T_m]\!]=\emptyset$，且 $A=\bigcup_n[\![T_n]\!]$.

证明 只证可料时情形. 设 (S_n) 为一列可料时，使得

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![S_n]\!].$$

令 $T_1=S_1$，对 $n\geqslant 2$，令

$$B_n=\bigcap_{k=1}^{n-1}[S_k\neq S_n],\quad T_n=(S_n)_{B_n},$$

则 $B_n\in\mathscr{F}_{S_n-}$，T_n 为可料时，且当 $n\neq m$ 时，$[\![T_n]\!]\cap[\![T_m]\!]=\emptyset$. 此外，有 $A=\bigcup_n[\![T_n]\!]$.

§5 可及时和可及过程，拟左连续 σ-域族

4.34 定义 令 T 为一$(\mathscr{F}_t)$停时，称 T 为可及时，如果存在一列$(\mathscr{F}_t)$可料时(T_n)，使得 $[\![T]\!]\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]$.

显然，可料时为可及时.

4.35 定理 设 T 为一停时，(S_n)为一被 T 控制的宽停时上升列. 令

(35.1) $A[(S_n)]=\{(\bigcap_n[S_n<T])\cap[\lim_{n\to\infty}S_n=T]\}\cup[T=0]$

(即(S_n)在 $A[(S_n)]$上预报 T)，则 $A[(S_n)]\in\mathscr{F}_{T-}$，并且 $T_{A[(S_n)]}$ 为可及时.

证明 注意有 $\lim_n S_n\leqslant T$，故 $[\lim_n S_n=T]=[\lim_n S_n<T]^c\in\mathscr{F}_{T-}$. 从而 $A[(S_n)]\in\mathscr{F}_{T-}$. 令 $R_n=S_{n[S_n<\lim_k S_k]}\wedge n$，则$(R_n)$处处预报其极限 R，且 $R>0$. 故由定理 4.29，R 为可料时. 但我们有 $[\![T_{A[(S_n)]}]\!]\subset[\![R]\!]\cup[\![0]\!]$. 故 $T_{A[(S_n)]}$ 为可及时.

4.36 定理 1) 设 S, T 是可及时，则 $S\wedge T$, $S\vee T$ 是可及时.

2) 设 T 为可及时，则对一切 $A\in\mathscr{F}_T$，T_A 为可及时.

3) 设(T_n)是可及时的单调序列，$T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$. 若$(T_n)$为增序列，则 T 为可及时；若(T_n)为尾定降序列，则 T 亦为可及时.

证明 1)，2)显然. 往证 3). 在增序列情形，由定理 4.35，$T_{A[(T_n)]}$ 为可及时，又由(35.1)，

$$A[(T_n)]^c=(\bigcup[T_n=T])\cap[T>0],$$

故 $[T_{A[(T_n)]^c}]\subset\bigcup\limits_n[\![T_n]\!]$，从而 $T_{A[(T_n)]^c}$ 为可及时. 最终，$T=T_{A[(T_n)]}\wedge T_{A[(T_n)]^c}$ 为可及时. 在尾定降序列情形，我们有 $[\![T]\!]\subset\bigcup\limits_n[\![T_n]\!]$，故 T 为可及时.

有了可及时概念，我们可以仿照定理 4.19，定义可及 σ-域.

4.37 定义 令 $\mathscr{A}$ 为可及时全体. 由 $\{[\![S,\infty[\![:S\in\mathscr{A}\}$ 在 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上生成的 σ-域，叫做可及 σ-域. 关于可及 σ-域可测的过程，叫可及过程.

设 S 为可及时，则$[\![S]\!]=[\![S,\infty[\![\setminus]\!]S,\infty[\![$ 为可及集.

注 如果在定理 4.20, 4.21, 4.33 中，用可及时代替那里的停时，用可及过程代替那里的可选过程，定理的结论仍成立. 其证明完全类似.

下一定理建立了可及时与可料时，可及过程与可料过程之间的联系.

4.38 定理 1) 设 X 为一可及过程，则为要 X 为可料过程，必须且只需对一切可料时 T，$X_TI_{[T<\infty]}$ 为$\mathscr{F}_{T-}$ 可测.

2) 设 S 为一可及时，则为要 S 为可料时，必须且只需对一切可料时 T，$[S=T]\in\mathscr{F}_{T-}$.

证明 1) 必要性由定理 4.26 得到. 往证充分性. 根据定义 4.37 下面的注，存在一可料过程 Y，使得集合$[X\neq Y]$为一列可及时图的并. 于是由定义 4.34 及定理 4.33，存在一列可料时(S_n)，使得当 $n\neq m$ 时，有 $[\![S_n]\!]\cap[\![S_m]\!]=\emptyset$，并且$[X\neq Y]\subset\bigcup\limits_n[\![S_n]\!]$. 于是我们有

$$X=I_A\cdot Y+\sum_n X_{S_n}I_{[S_n<\infty]}\cdot I_{[\![S_n]\!]},$$

其中 $A=\bigcap_n [\![S_n]\!]^c$. 由于 A 为可料集，故 $I_A\cdot Y$ 为可料过程. 另一方面，每个 S_n 为可料时，故依假设，$X_{S_n}I_{[S_n<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_{S_n-}$ 可测，从而 $X_{S_n}I_{[S_n<\infty]}\cdot I_{[\![S_n]\!]}$ 为可料过程. 于是 X 为可料过程.

2) 必要性由定理 4.31.2)得到. 往证充分性. 令 $X=I_{[\![S]\!]}$. 则 X 为可及过程，并且由假设，对一切可料时 T,

$$[S=T<\infty]=[S=T]\cap[T<\infty]\in\mathscr{F}_{T-}$$

(注意: T 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测)，即 $X_TI_{[T<\infty]}=I_{[S=T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测. 由 1)，X 为可料过程，即 S 为可料时.

4.39 定义 σ-域族 $(\mathscr{F}_t)_{t\in\{0-\}\cup\overline{\mathbf{R}}_+}$ 称为拟左连续的，如果对一切可料时 T，有 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$.

4.40 定理 1) 为要 $(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续，必须且只需 $\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}_{\infty-}$，且一切可及时为可料时.

2) 设 $(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续，则对一切停时序列 (T_n)，有

$$\mathscr{F}_{\bigvee_n T_n}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}. \tag{40.1}$$

证明 1) 必要性. 设 $(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续. 则有 $\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}_{\infty-}$. 令 S 为一可及时，T 为一可料时，则我们有 $[S=T]\in\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$. 由定理 4.38.2)知，$S$ 为可料时.

充分性. 设 $\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}_{\infty-}$，且一切可及时为可料时. 令 T 为可料时，$A\in\mathscr{F}_T$，则 T_A 为可及时. 由假设，T_A 为可料时，故 $A\in\mathscr{F}_{T-}$ (定理 4.31.6)). 这表明 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$，即 $(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续.

2) 由系 4.5.6)，我们有 $\mathscr{F}_{\bigvee_{n=1}^k T_n}=\bigvee_{n=1}^k\mathscr{F}_{T_n}$. 为证(40.1)，不妨假定 (T_n) 为增序列. 令 $T=\bigvee_{n=1}^\infty T_n$. 设 $H=\bigcap_n[T_n<T]$，则 $H\in\mathscr{F}_{T-}$. 令 $A\in\mathscr{F}_T$，往证 $A\cap H\in\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}$，$A\cap H^c\in\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}$. 我们有

$$A\cap H^c=\bigcup_{n=1}^\infty(A\cap[T=T_n])\in\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}.$$

由于$T_H>0$，且在整个Ω上，T_H被序列$(T_{n[T_H<T]}\wedge n)$所预报，故T_H为可料时．于是依假设有$\mathscr{F}_{T_H}=\mathscr{F}_{T_H-}$．从而$A\cap H\in\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T_H}=\mathscr{F}_{T_H-}$．但在$H$上，$T=T_H$，故$H=H\cap[T_H=T]$，从而有（定理4.31.2））

$$A\cap H=A\cap H\cap[T_H=T]\in\mathscr{F}_{T-}.$$

但恒有$\mathscr{F}_{T-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n-}\subset\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}$（定理4.4.10）），故

$$A\cap H\in\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}.$$

于是$A\in\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}$．定理证毕．

§6 右连左极适应过程

4.41 定理 设$(X_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$为一右连左极适应过程，则存在一列严格正停时(T_n)，使得

(41.1) $\{(t,\omega):0<t<+\infty,\ X_t(\omega)\neq X_{t-}(\omega)\}\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]$.

证明 在定理4.19的证明中，令$\varepsilon_k=\dfrac{1}{k}$，往证

(41.2) $\{(t,\omega):0<t<+\infty,\ X_t(\omega)\neq X_{t-}(\omega)\}\subset\bigcup_{n,k\geq1}[\![T_n^{\frac{1}{k}}]\!]$.

设$0<t<+\infty$，$|X_t(\omega)-X_{t-}(\omega)|\geq\dfrac{2}{k}$．则存在$n\geq0$，使得

$$T_n^{\frac{1}{k}}(\omega)\leq t<T_{n+1}^{\frac{1}{k}}(\omega).$$

对一切$s\in]T_n^{\frac{1}{k}}(\omega),T_{n+1}^{\frac{1}{k}}(\omega)[$，由(19.1)式我们有

$$|X_s(\omega)-X_{T_n^{\frac{1}{k}}}(\omega)|<\frac{1}{k},\quad |X_{s-}(\omega)-X_{T_n^{\frac{1}{k}}}(\omega)|<\frac{1}{k}.$$

于是$|X_s(\omega)-X_{s-}(\omega)|<\dfrac{2}{k}$．这表明，必须有$t=T_n^{\frac{1}{k}}(\omega)$．定理得证．

注 由定理4.20，我们可以进一步做到使(41.1)中等号成立．

4.42 定理 设(X_t)为一右连左极适应过程，则为要(X_t)可料，必须且只需(X_t)满足下列条件：

i) 存在一列严格正可料时(T_n)，使得

$$\{(t,\omega):0<t<+\infty,\ X_t(\omega)\neq X_{t-}(\omega)\}\subset\bigcup_n[\![T_n]\!].$$

ii) 对每个可料时T，$X_T I_{[T<\infty]}$为$\mathscr{F}_{T-}$可测.

证明 必要性. 设(X_t)可料，则在定理4.19的证明中，可归纳证明T_n^ε为可料时. 事实上，设T_n^ε为可料时，令$Y_t=X_{t-}$，$Y_0=X_0$，则

$$A=]\!]T_n^\varepsilon,\infty[\![\cap([|X_{T_n^\varepsilon}I_{]\!]T_n^\varepsilon,\infty[\![}-Y|\geqslant\varepsilon]\\ \cup[|X_{T_n^\varepsilon}I_{]\!]T_n^\varepsilon,\infty[\![}-X|\geqslant\varepsilon])$$

为可料集，其初遇T_{n+1}^ε为停时，且$[\![T_{n+1}^\varepsilon]\!]\subset A$. 于是$[\![T_{n+1}^\varepsilon]\!]=A\cap[\![0,T_{n+1}^\varepsilon]\!]$为可料集，从而$T_{n+1}^\varepsilon$为可料时. 故由(41.2)得条件i). 条件ii)由定理4.26推得.

充分性. 设条件i), ii)满足. 令$Y_t=X_{t-}$，$Y_0=X_0$，则(Y_t)为可料过程，由定理4.33，不妨假定条件i)中的可料时列(T_n)的图两两不相交. 我们有

$$X=YI_{\bigcap_n[\![T_n]\!]^c}+\sum_n X_{T_n}I_{[\![T_n]\!]}.$$

由于$X_{T_n}I_{[T_n<\infty]}$为$\mathscr{F}_{T_n-}$可测，故$X_{T_n}I_{[\![T_n]\!]}=X_{T_n}I_{[T_n<\infty]}I_{[\![T_n,\infty[\![}-X_{T_n}I_{[T_n<\infty]}I_{]\!]T_n,\infty[\![}$为可料过程，从而$X$为可料过程.

注 读者容易看出：如果条件i)成立，则(X_t)为可及过程.

§7 有限变差过程及随机 Stieltjes 积分

4.43 定义 一过程$(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$称为增过程，如果它的所有轨道为$\mathbb{R}_+$上的非负有限值、右连续增函数. 两个增过程之差称为有限变差过程.

显然，有限变差过程为右连左极过程，从而适应有限变差过程为可选过程. 此外，如果令$\mathscr{G}_t=\mathscr{F}(t\in\mathbb{R}_+)$，则一切有限变差过程

都是关于$(\mathscr{G}_t)$适应的.

设 A 为一有限变差过程，今后我们约定 $A_{0-}=0$. 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，令 $\Delta A_t=A_t-A_{t-}$. 对 $t=+\infty$，我们约定 $\Delta A_\infty=0$.

对每个 $\omega\in\Omega$，$\mathbb{R}_+$ 上的有限变差函数 $A_\cdot(\omega)$可以唯一地分解为：$A_\cdot(\omega)=A^c_\cdot(\omega)+A^d_\cdot(\omega)$，其中 $A^c_\cdot(\omega)$为连续有限变差函数，$A^d_\cdot(\omega)$为纯断有限变差函数. 我们有

(43.1)
$$A^d_t(\omega)=\sum_{0<s\leq t}\Delta A_s(\omega).$$

我们称过程 A^c 为 A 的连续部分，称 A^d 为 A 的纯断部分(或跳部分).

设 A 为一有限变差过程，称 A 为纯断的，如果 $A^c=0$.

下一定理描绘了适应及可料有限变差过程的结构.

4.44 定理 设 A 为一适应(相应地，可料)有限变差过程，则 A^d 亦然(从而 A^c 为可料). 此外，存在一列其图两两不相交的严格正停时(相应地，可料时)(S_n)，使得

(44.1)
$$A^d_t=\sum_n\Delta A_{S_n}I_{[S_n\leq t]}.$$

证明 只证 A 为可料情形. 由定理 4.42, 4.33 知，存在一列其图两两不相交的严格正可料时(S_n)，使得

$$\{(t,\omega):0<t<+\infty,\ \Delta A_t(\omega)\neq0\}\subset\bigcup_n[\![S_n]\!].$$

(由定理 4.32 知，我们可以做到使等号成立，但这里没有必要.)由于(43.1)中级数绝对收敛，从而与被求和各项的次序无关，于是有(44.1). 由于 ΔA 可料，故 ΔA_{S_n} 为 $\mathscr{F}_{S_n-}$ 可测，从而由定理 4.31.8)知，A^d 为可料过程.

注 由(43.1)及(44.1)，我们有

$$\sum_{0<s\leq t}|\Delta A_s|=\sum_n|\Delta A_{S_n}|I_{[S_n\leq t]}.$$

下一定理是前一定理的推论，有时是有用的.

4.45 定理 设 A 为一纯断适应(相应地，可料)有限变差过

程. 则存在一列严格正停时(相应地, 可料时)(T_n)(这里, T_n 的图一般并非两两不相交), 及一列实数(λ_n), 使得对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$\sum_n|\lambda_n|I_{[T_n<t]}<\infty, \tag{45.1}$$

$$A_t=\sum_n\lambda_nI_{[T_n\leq t]}. \tag{45.2}$$

如果 A 为增过程, 每个 λ_n 可取为正实数.

证明 由(44.1), 只需对形如 $A=\xi I_{[S,\infty[}$ 的增过程证明定理. 我们只讨论 A 为可料情形, 即 S 为严格正可料时, ξ 为非负 $\mathscr{F}_{S-}$ 可测实值函数. 令(ξ_n)为非负 $\mathscr{F}_{S-}$ 可测简单函数的增序列, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$, 则 $\xi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi_{n-1})$, $\xi_0=0$. 于是, 存在一列正实数(λ_n), 及一列 $\mathscr{F}_{S-}$ 可测集 H_n, 使得 $\xi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nI_{H_n}$. 令

$$T_n=S_{H_n},$$

则 T_n 为可料时, 且

$$A=\sum_n\lambda_nI_{[T_n,\infty[}.$$

4.46 定理 设 $A=(A_t)$ 为一适应(相应地, 可料)有限变差过程, 则 A 的变差过程 $B_t=\int_{[0,t]}|dA_s|$ 为适应(相应地, 可料)增过程, 且 A 可表为两个适应(相应地, 可料)增过程之差.

证明 由定理 4.44,

$$\int_{[0,t]}|dA_s^d|=\sum_n|\Delta A_{S_n}|I_{[S_n<t]},$$

$$\int_{[0,t]}|dA_s^c|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k<2^n}\left|A^c_{\frac{k+1}{2^n}t}-A^c_{\frac{k}{2^n}t}\right|.$$

于是左边第一个过程为适应(相应地, 可料)增过程, 第二个过程为适应连续增过程(从而可料), 它们的和 $B_t=\int_{[0,t]}|dA_s|$ 为适应(相应地, 可料)增过程. 令

$$\overset{+}{A}=\frac{B+A}{2},\quad \overset{-}{A}=\frac{B-A}{2}.$$

则 $\overset{+}{A}$, $\overset{-}{A}$ 为适应(相应地,可料)增过程,且 $A=\overset{+}{A}-\overset{-}{A}$.

下面我们研究可测过程对有限变差过程按轨道的 Stieltjes 积分(这里应理解为 Lebesgue-Stieltjes 积分).

4.47 定义 设 (H_t) 为一可测过程, (A_t) 为一有限变差过程. 如果对一切 $\omega\in\Omega$, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, Lebesgue-Stieltjes 积分

$$\int_{[0,t]} H_s(\omega)dA_s(\omega)$$

存在且有穷(即 $\int_{[0,t]}|H_s(\omega)||dA_s(\omega)|<+\infty$), 我们称 H 关于 A 可积. 这时,令

$$B_t(\omega)=\int_{[0,t]} H_s(\omega)dA_s(\omega),\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

则 (B_t) 为有限变差过程,称 (B_t) 为 H 关于 A 的随机 Stieltjes 积分(或按轨道的 Stieltjes 积分,记为 $H.A$).

4.48 定理 设 (H_t) 为一可测过程, (A_t) 为一有限变差过程, 且 H 关于 A 可积.

1) 如果 (H_t) 为循序的,且 A_t 为适应的,则 $H.A$ 为适应的.

2) 如果 (H_t) 为可料的,且 (A_t) 为可料的,则 $H.A$ 为可料的.

证明 首先,不妨假定 (A_t) 为增过程. 于是,容易由单调类定理证明:对任何使得 $\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s|<\infty$ 的可测过程 H,

$$\int_{[0,\infty[} H_s dA_s$$

为 $\mathscr{F}$ 可测. 由此,在 $(\Omega,\mathscr{F}_t)$ 上考虑 $HI_{[0,t]}$ 及 A^t, 立刻推得 1). 为证 2), 考虑 A 的如下分解:

$$A_t=A_t^c+\sum_n \Delta A_{S_n}I_{[S_n\leq t]},$$

其中 (S_n) 为一列其图两两不相交的可料时(定理 4.44). 我们有

$$\int_{[0,t]} H_s dA_s=\int_{[0,t]} H_s dA_s^c+\sum_n H_{S_n}\Delta A_{S_n}I_{[S_n\leq t]}.$$

由1)，右边第一个过程为适应连续过程，从而为可料过程，右边第二个过程显然为可料过程(因 H 可料，$H_{S_n}I_{[S_n<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_{S_n-}$ 可测，故由定理 4.31.8)，$H_{S_n}\Delta A_{S_n}I_{[S_n,\infty[}$ 为可料过程)．2)得证．

§8 与增过程联系的时变

4.49 定义 设(A_t)为一适应增过程(这里允许过程取 $+\infty$ 值)．令

$$C_t=\inf\{s:\ A_s>t\},$$

称过程(C_t)为与适应增过程(A_t)联系的时变．

4.50 定理 设(C_t)为与适应增过程(A_t)联系的时变，则对一切 $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$，$C_t$ 为$(\mathscr{F}_t)$宽停时．如果(A_t)为可料，则对一切 $t>0$，C_{t-} 为$(\mathscr{F}_t)$可料时．

证明 设 $s>0$，我们有

$$[C_t<s]\subset[A_s>t]\subset[C_t\leqslant s],$$

于是有

$$[C_t<s]=\bigcup_n\left[C_t<s-\frac{1}{n}\right]\subset\bigcup_n[A_{s-\frac{1}{n}}>t]$$
$$\subset\bigcup_n\left[C_t\leqslant s-\frac{1}{n}\right]=[C_t<s].$$

从而

$$[C_t<s]=\bigcup_n[A_{s-\frac{1}{n}}>t]\in\mathscr{F}_s.$$

这表明 C_t 为$(\mathscr{F}_t)$宽停时．

现假定(A_t)可料．设 $t>0$，则 $C_{t-}=\inf[s:\ A_s\geqslant t]$．令

$$H=\{(s,\ \omega):A_s(\omega)\geqslant t\}.$$

由于 $[\![C_{t-}]\!]\subset H$，故 $[\![C_{t-}]\!]=H\cap[\![0,\ C_{t-}]\!]$．但 $C_{t-}=\lim\limits_{n\to\infty}C_{t-\frac{1}{n}}$ 为$(\mathscr{F}_t)$宽停时，故$[\![0,\ C_{t-}]\!]$为可料集，从而$[\![C_{t-}]\!]$为可料集，于是 C_{t-} 为可料时．

4.51 定理 假定$(\mathscr{F}_t)$右连续．设(C_t)为与适应增过程(A_t)联系的时变，对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，令

$$\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{C_t},\quad \overline{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{C_{A_t}},$$

此外令 $\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_\infty$, $\overline{\mathscr{F}}_\infty=\mathscr{F}_\infty$. 设 S 为一$(\mathscr{G}_t)$停时, 则C_S 为$(\mathscr{F}_t)$停时, 且 $\mathscr{F}_{C_S}=\mathscr{G}_S$. 此外, C_{S-} 为$(\overline{\mathscr{F}}_t)$停时. 对一切 $u\in\mathbb{R}_+$, A_u 为$(\mathscr{G}_t)$停时.

证明 对每个 $n\geqslant1$, 令

$$S^{(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}I_{\left[\frac{k-1}{2^n}\leqslant S<\frac{k}{2^n}\right]}+(+\infty)I_{[S=+\infty]},$$

则 $S^{(n)}$ 为$(\mathscr{G}_t)$停时, 且 $S^{(n)}\downarrow S$. 由于

$$\left[\frac{k-1}{2^n}\leqslant S<\frac{k}{2^n}\right]\in\mathscr{G}_{\frac{k}{2^n}}=\mathscr{F}_{C_{\frac{k}{2^n}}},$$

$$[S=+\infty]\in\mathscr{G}_{\infty-}=\mathscr{F}_{C_\infty},$$

故对一切 $u\in\mathbb{R}_+$,

$$[C_{S^{(n)}}<u]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}\leqslant S<\frac{k}{2^n}\right]\cap[C_{\frac{k}{2^n}}<u]\right)$$

$$\cup([S=+\infty]\cap[C_\infty<u])\in\mathscr{F}_u,$$

这表明 $C_{S^{(n)}}$ 为$(\mathscr{F}_t)$停时. 由于 $C_{S^{(n)}}\downarrow C_S$, 故 C_S 为$(\mathscr{F}_t)$停时. 此外, 由系 4.5.4), 对一切 k, 有

$$\left[S^{(n)}=\frac{k}{2^n}\right]\cap\mathscr{G}_{S^{(n)}}=\left[S^{(n)}=\frac{k}{2^n}\right]\cap\mathscr{G}_{\frac{k}{2^n}}$$

$$=\left[S^{(n)}=\frac{k}{2^n}\right]\cap[C_{S^{(n)}}=C_{\frac{k}{2^n}}]\cap\mathscr{F}_{C_{\frac{k}{2^n}}}$$

$$=\left[S^{(n)}=\frac{k}{2^n}\right]\cap[C_{S^{(n)}}=C_{\frac{k}{2^n}}]\cap\mathscr{F}_{C_{S^{(n)}}}$$

$$=\left[S^{(n)}=\frac{k}{2^n}\right]\cap\mathscr{F}_{C_{S^{(n)}}},$$

从而有 $\mathscr{G}_{S^{(n)}}=\mathscr{F}_{C_{S^{(n)}}}$, 故有

$$\mathscr{G}_S=\bigcap_n\mathscr{G}_{S^{(n)}}=\bigcap_n\mathscr{F}_{C_{S^{(n)}}}=\mathscr{F}_{C_S}.$$

另一方面, 对一切 $u\in\mathbb{R}_+$, $t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$[A_u>t]\subset[C_t\leqslant u]\subset[A_u\geqslant t].$$

于是有(当 $t>0$ 时)

$$[A_u \geqslant t] = \bigcap_n \left[A_u > t - \frac{1}{n}\right] \subset \bigcap_n [C_{t-\frac{1}{n}} \leqslant u]$$

$$\subset \bigcap_n \left[A_u \geqslant t - \frac{1}{n}\right] = [A_u \geqslant t].$$

从而

$$[A_u \geqslant t] = \bigcup_n [C_{t-\frac{1}{n}} \leqslant u] \in \mathscr{F}_{C_t} = \mathscr{G}_t.$$

这表明 A_u 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时. 于是我们有

$$[C_{S-} \leqslant u] = [S \leqslant A_u] \in \mathscr{G}_{A_u} = \mathscr{F}_{C_{A_u}} = \mathscr{F}_u.$$

这表明 C_{S-} 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时.

§9 σ-域族的停止

4.52 定理 设 T 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 停时, 令

$$\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{t\wedge T} \ (t \in \overline{\mathbb{R}}_+), \quad \mathscr{G}_{0-} = \mathscr{F}_{0-}.$$

1) 设 S 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时, 则 $S\wedge T$ 及 $S_{[S<T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时;

2) 设 S 为 $(\mathscr{F}_t)$ 宽停时, 则 $S_{[S<T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 宽停时;

3) 设 S 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时, 则有 $\mathscr{G}_S = \mathscr{G}_{S\wedge T} = \mathscr{F}_{S\wedge T}$;

4) 设 X 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 可选(相应地, 可料)过程, 则 X^T 及 $XI_{[0,T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可选(相应地, 可料)过程;

5) 设 S 为 $(\mathscr{F}_t)$ 可料时, 则 $S_{[S<T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可料时.

证明 1) 设 S 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时, 则对任何 $t \in \mathbb{R}_+$,

$$[S\wedge T \leqslant t] \in \mathscr{F}_{S\wedge T\wedge t} \subset \mathscr{G}_t,$$

$$[S_{[S<T]} \leqslant t] = [S < T] \cap [S \leqslant t] = [S \leqslant t\wedge T] \in \mathscr{F}_{t\wedge T} = \mathscr{G}_t.$$

故 $S\wedge T$ 及 $S_{[S<T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时.

2) 设 S 为 $(\mathscr{F}_t)$ 宽停时, 则对任何 $t \in \mathbb{R}_+$,

$$[S_{[S<T]} < t] = [S < T] \cap [S < t] = [S < t\wedge T] \in \mathscr{F}_{t\wedge T} = \mathscr{G}_t.$$

故 $S_{[S<T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 宽停时.

3) 设 S 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时, 则 $\mathscr{G}_S \subset \mathscr{G}_\infty = \mathscr{F}_T$, $\mathscr{G}_S \subset \mathscr{F}_S$, 故有

$$\mathscr{G}_S \subset \mathscr{F}_T \cap \mathscr{F}_S = \mathscr{F}_{T\wedge S}.$$

另一方面, 设 $A \in \mathscr{F}_{S\wedge T}$, 则对一切 $t \in \mathbb{R}_+$,

$$A\cap[S\wedge T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t\cap\mathscr{F}_{S\wedge T}\subset\mathscr{G}_t.$$

故 $A\in\mathscr{G}_{S\wedge T}$，从而有

$$\mathscr{G}_S\subset\mathscr{F}_{S\wedge T}\subset\mathscr{G}_{S\wedge T}\subset\mathscr{G}_S.$$

于是 $\mathscr{G}_S=\mathscr{F}_{S\wedge T}=\mathscr{G}_{S\wedge T}$.

4) 设 $X=I_{[S,V[}$，其中 S, V 为两个 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，且 $S\leqslant V$. 则

$$\begin{aligned}X_{t\wedge T}&=I_{[S\leqslant t\wedge T<V]}=I_{[S\leqslant t]\cap[S\leqslant T]}I_{[t<V]\cup[T<V]}\\&=I_{[S_{[S\leqslant T]}\leqslant t<V_{[V\leqslant T]}]}.\end{aligned}$$

这表明 $X^T=I_{[S_{[S\leqslant T]},V_{[V\leqslant T]}[}$. 由 1)，$S_{[S\leqslant T]}$ 及 $V_{[V\leqslant T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时，故 X^T 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可选过程. 于是由单调类定理(定理 1.4)推得，对任何 $(\mathscr{F}_t)$ 可选过程 X，X^T 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可选过程. 此外，由于

$$XI_{[0,T]}=X^T-X_TI_{]T,\infty[},$$

且 T 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时，$X_TI_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{G}_T$ 可测，故 $X_TI_{]T,\infty[}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可料过程，从而 $XI_{[0,T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可选过程[1].

现证可料情形. 令 $X=I_{]S,V]}$，其中 S, V 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，且 $S\leqslant V$. 我们有

$$X^T=I_{]S_{[S\leqslant T]},V_{[V\leqslant T]}]}.$$

故 X^T 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可料过程. 此外，设 $Y=I_{[0_A]}$，其中

$$A\in\mathscr{F}_{0-}(=\mathscr{G}_{0-}),$$

则

$$Y^T=I_{[0_A]}+I_{]0_{A\cap(T=0)},\infty[}.$$

故 Y^T 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可料过程. 于是由单调类定理推知，对任何 $(\mathscr{F}_t)$ 可料过程 X，X^T 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可料过程. 从而 $XI_{[0,T]}=X^T-X_TI_{]T,\infty[}$ 亦为 $(\mathscr{G}_t)$ 可料过程.

5) 设 S 为 $(\mathscr{F}_t)$ 可料时. 令 $X=I_{[S]}$，则 $X^T=I_{[S_{[S\leqslant T]}]}$，由 4)，$X^T$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可料过程. 由于 $S_{[S\leqslant T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时，故 $S_{[S\leqslant T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可料时.

---

1) $XI_{[0,T[}$ 亦为 $(\mathscr{G}_t)$ 可选过程.

第 五 章

截口定理及应用

在本章，前四节的讨论出发点是一个基本概率空间$(\Omega, \mathscr{F}^0, \mathbb{P})$，及一族上升的$\mathscr{F}^0$的子$\sigma$-域$(\mathscr{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}_+}$（当然还包括给定的$\mathscr{F}_{0-}^0$及$\mathscr{F}_{\infty}^0$）。这就是说，与第四章的唯一区别，是在可测空间$(\Omega, \mathscr{F}^0)$上引入了一个概率测度$\mathbb{P}$。但在其余各节，一般我们都假定基本概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$是完备的，并且要求$\sigma$-域族$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$满足一定条件。例如，要求$\mathscr{F}_{0-}$包含$\mathscr{F}$中一切$\mathbb{P}$-零概集。有时还进一步要求$(\mathscr{F}_t)$右连续，这时，我们称$(\mathscr{F}_t)$满足通常条件。

§1 截口定理

在本节及下三节中，我们令$(\Omega, \mathscr{F}^0, \mathbb{P})$为一概率空间，$(\mathscr{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}_+}$为一族上升的$\mathscr{F}^0$的子$\sigma$-域。$\mathscr{F}_{0-}^0$及$\mathscr{F}_{\infty}^0$是给定的。我们沿用第四章的概念及记号。

5.1 引理 令$\mathscr{V}$为一族宽停时，满足下列条件：

i) $0\in\mathscr{V}$，$+\infty\in\mathscr{V}$；

ii) $S, T\in\mathscr{V}\Rightarrow S\wedge T\in\mathscr{V}$，$S\vee T\in\mathscr{V}$；

iii) $S, T\in\mathscr{V}\Rightarrow S_{\{S<T\}}\in\mathscr{V}$；

iv) 设(S_n)为$\mathscr{V}$中元素的单调增序列，令$S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$，则

$$S\in\mathscr{V}.$$

令$\mathscr{C}_0=\{[\![S, T[\![: S\leqslant T,\ S, T\in\mathscr{V}\}$，$\mathscr{C}$为用有限并运算封闭$\mathscr{C}_0$所得的集合族，则$\mathscr{C}$为$\mathbb{R}_+\times\Omega$上的一个域。此外，对任何

$B\in\mathscr{C}_\delta$, 令 D_B 为集合 B 的初遇(见定义 1.37), 则我们有 $[\![D_B]\!]\subset B$, 并且存在一宽停时 $T\in\mathscr{V}$, 使得 $T=D_B$ a.s..

证明 由条件 i), ii), $\mathscr{C}$ 是一个域.

对每个 $\omega\in\Omega$, $B(\omega)=\{t\in\mathbb{R}_+:(t,\omega)\in B\}$ 是 $\mathbb{R}_+$ 中对右极限封闭的集, 故有 $[\![D_B]\!]\subset B$. 令

$$\mathscr{H}=\{S\in\mathscr{V}:S\leqslant D_B\}.$$

则 $\mathscr{H}$ 对可列上端运算封闭, 故由定理 1.2.3, 存在 $\mathscr{H}$ 中元素 T, 使得

$$T=\text{ess. sup}\,\mathscr{H}.$$

往证 $T=D_B$ a.s.. 设 (B_n) 为 $\mathscr{C}$ 中元素下降列, 使得 $B=\bigcap\limits_n B_n$. 令

$$C_n=B_n\cap[\![T,\infty[\![,$$

则 (C_n) 为 $\mathscr{C}$ 中元素下降列, 且有

$$\bigcap_n C_n=B\cap[\![T,\infty[\![=B.$$

设 $G=[\![S,T[\![\in\mathscr{C}_0$, 则由条件 iii), $D_G=S_{[S<T]}\in\mathscr{V}$. 这里 D_G 为 G 的初遇. 于是, 设 $C_n=C_{n1}\cup C_{n2}\cdots\cup C_{nm}$, 其中 $C_{nk}\in\mathscr{C}_0(k=1,2,\cdots,m)$, 则 $D_{C_n}=\bigwedge\limits_{k=1}^{m}D_{C_{nk}}\in\mathscr{V}$(条件 ii)), 且 $D_{C_n}\geqslant T$. 但由于 $C_n\supset B$, 故 $D_{C_n}\leqslant D_B$, 即 $D_{C_n}\in\mathscr{H}$. 又因 T 是 $\mathscr{H}$ 的本质上确界, 故对一切 n, 必须有 $D_{C_n}=T$ a.s.. 最后, 由于$[\![D_{C_n}]\!]\subset C_n$, 故$[\![T]\!]$a.s. 含于 $\bigcap\limits_n C_n=B$ 中[1], 从而 $T\geqslant D_B$ a.s.. 但已证 $T\leqslant D_B$, 故有

$$T=D_B\,\text{a.s.}.$$

下面两个定理统称为截口定理, 它们是随机过程一般理论中的最重要的结果.

5.2 定理 设 A 是可选集(相应地, 可及集), 则对任给 $\varepsilon>0$,

1) 这里 a.s. 的含义是: 对几乎所有 $\omega\in[T<\infty]$, 有 $(T(\omega),\omega)\in B$.

存在停时(相应地,可及时)T,使得

i) $[\![T]\!]\subset A$;

ii) $\mathbb{P}(T<\infty)\geqslant\mathbb{P}(\pi(A))-\varepsilon$.

这里$\pi(A)$为A在Ω上的投影.

证明 只对可选集情形证明,可及集情形证明完全相同. 令$\mathscr{V}$为停时全体,则$\mathscr{V}$满足引理5.1的四个条件. 采用引理5.1的记号,由定理4.19知$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{O}$. 依假定,$A\in\sigma(\mathscr{C})$,故由定理1.41,存在一$B\in\mathscr{C}_\delta$,使得$B\subset A$,且$\mathbb{P}(\pi(B))\geqslant\mathbb{P}(\pi(A))-\varepsilon$. 又由引理5.1,存在停时$S\in\mathscr{V}$,使得$S=D_B$ a.s.. 令

$$L=\{\omega:(S(\omega),\ \omega)\in B\},$$

则$I_B(S)I_{[S<\infty]}=I_L$. 故$L\in\mathscr{F}^0_S$(定理4.14). 由于$[\![D_B]\!]\subset B$,故$\mathbb{P}(L\cup[S=+\infty])=1$. 令$T=S_L$,则$T$为停时,$[\![T]\!]\subset B\subset A$,且$T=S=D_B$ a.s.,故有

$$\mathbb{P}(T<\infty)=\mathbb{P}(D_B<\infty)=\mathbb{P}(\pi(B))\geqslant\mathbb{P}(\pi(A))-\varepsilon.$$

定理证毕.

5.3 定理 设A是可料集,则对任给$\varepsilon>0$,存在可料时T,使得

i) $[\![T]\!]\subset A$,

ii) $\mathbb{P}(T<\infty)\geqslant\mathbb{P}(\pi(A))-\varepsilon$.

证明 令$\mathscr{V}$为可料时全体. 证明与定理5.2完全相同,只是要注意,这里$L\in\mathscr{F}^0_{S-}$(定理4.26),故S_L为可料时(定理4.31.7)).

5.4 定义 $\mathbb{R}_+\times\Omega$的一子集A叫做不足道集(关于概率测度$\mathbb{P}$),如果A在Ω上的投影$\pi(A)$是$\mathbb{P}$-零概集(不要求$\pi(A)\in\mathscr{F}^0$,但要求$\pi(A)\in\mathscr{F}$,这里$\mathscr{F}$为$\mathscr{F}^0$关于$\mathbb{P}$的完备化). 一过程X叫做不足道过程,如果集合$\{(t,\ \omega):X_t(\omega)\neq0\}$为不足道集.

令(X_t),(Y_t)为两个过程. 称X与Y $\mathbb{P}$-无区别(记为$X=Y$),如果$\{(t,\ \omega):X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$为$\mathbb{P}$-不足道集(参看定义3.6).称$X$不大于$Y$(记为$X\leqslant Y$),如果$\{(t,\ \omega):X_t(\omega)>Y_t(\omega)\}$

为$\mathbb{P}$-不足道集. 今后, 在确定的过程类中, 如在可选过程或可料过程类中, 我们将两个无区别过程视为同一个过程, 谈及"唯一性"时, 是不计无区别过程之间的差别的.

下面我们给出截口定理在过程理论中的一些初步应用. 为叙述方便, 我们省略可及过程情形.

5.5 定理 设 $X=(X_t)$, $Y=(Y_t)$为两个可选 (相应地, 可料) 过程, 如果对每个有界停时(相应地, 可料时)T, 我们有 $X_T\leqslant Y_T$ a.s. , 则过程 X 不大于 Y.

证明 只讨论可选过程情形. 我们采用反证法. 设 $A=\{(t,\omega): X_t(\omega)>Y_t(\omega)\}$是非不足道集. 由于 A 是可选集, 故由定理 5.2, 存在停时 S, 使得$[\![S]\!]\subset A$, 且 $\mathbb{P}(S<\infty)>0$. 取常数 $C>0$, 使得 $\mathbb{P}(S\leqslant C)>0$. 令 $T=S\wedge C$, 则 T 为有界停时, 且在$[S\leqslant C]$上, 有 $X_T>Y_T$, 这与假定矛盾, 于是 A 必须为不足道集. 依定义, $X\leqslant Y$.

5.6 系 设 $X=(X_t)$, $Y=(Y_t)$ 为两个可选(相应地, 可料)过程. 如果对每个有界停时 (相应地, 可料时) T, 我们有 $X_T=Y_T$ a.s., 则 X 与 Y 无区别.

注 该系表明: 可选(相应地, 可料)过程的几乎所有轨道, 被过程在全体有界停时(相应地, 可料时) 处 a. s. 确定的取值唯一决定.

下一定理在实际应用中, 有时比定理 5.5 更有效.

5.7 定理 设 $X=(X_t)$, $Y=(Y_t)$为两个可选(相应地, 可料)过程, 使得对一切停时(相应地, 可料时)T, $X_TI_{[T<\infty]}$ 及 $Y_TI_{[T<\infty]}$ 可积, 且 $\mathbb{E}(X_TI_{[T<\infty]})\leqslant\mathbb{E}(Y_TI_{[T<\infty]})$, 则 X 不大于 Y.

证明 只讨论可选过程情形. 假定集合 $A=\{(t,\omega): X_t(\omega)>Y_t(\omega)\}$是非不足道集, 由定理 5.2, 存在停时 T, 使得 $[\![T]\!]\subset A$, 且 $\mathbb{P}(T<\infty)>0$. 这时有 $\mathbb{E}(X_TI_{[T<\infty]})>\mathbb{E}(Y_TI_{[T<\infty]})$, 这与定理假定矛盾, 故 A 为不足道集, 即 X 不大于 Y.

5.8 系 若在定理叙述中，$\mathbb{E}(X_T I_{[T<\infty]})=\mathbb{E}(Y_T I_{[T<\infty]})$，则 X 与 Y 无区别.

注 在定理 5.7 及系 5.8 中，如果只考虑有界甚至有限停时(相应地，可料时)是不够的.

下面，我们应用截口定理，证明一个有趣的结果.

5.9 定理 设 S 为一宽停时，令 $A\subset]\!]S,\infty[\![$ 为一可选集(相应地，可料集)，使得对一切 $\omega\in[S<\infty]$，$S(\omega)$ 是集合 $A(\omega)=\{t\in\mathbb{R}_+:(t,\omega)\in A\}$的极限点，则存在停时(相应地，可料时)的降序列$(S_n)$，使得每个 S_n 的图含于 A 中，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$ a.s..

证明 只证 A 为可料情形，可选情形的证明完全类似. 可料集 $A_n^s=A\cap\left]\!\!\right]S,S+\frac{1}{n}\left]\!\!\right]$在 Ω 上的投影为$[S<\infty]$. 故由定理 5.3，对每个 n，存在可料时 U_n，使得$[\![U_n]\!]\subset A_n^s$，且

$$\mathbb{P}(S<\infty)=\mathbb{P}(\pi(A_n^s))\leqslant\mathbb{P}(U_n<\infty)+\frac{1}{2^n}.$$

显然，在$[U_n<\infty]$上，有 $S<U_n\leqslant S+\frac{1}{n}$. 此外有

$$\left[\!\!\left[\bigwedge_{k=1}^n U_k\right]\!\!\right]\subset\bigcup_{k=1}^n[\![U_k]\!]\subset A.$$

令 $S_n=\bigwedge\limits_{k=1}^n U_k$，于是$(S_n)$为降序列，每个 S_n 的图含于 A 中，且

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\text{ a.s.}.$$

§2 可料时的 a.s. 可预报性

5.10 定义 设 T 为一$(\mathscr{F}_t^0)$宽停时，(T_n)为一$(\mathscr{F}_t^0)$宽停时的上升列，且对一切 n，有 $T_n\leqslant T$. 令 A 为 Ω 的一子集，我们说序列(T_n) 在 A 上 a.s. 预报了 T，如果在 $A\cap[T>0]$上，对每个 n，有 $T_n<T$ a.s.，且 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$ a.s.. 在 Ω 上 a.s. 预报 T 简称 a.s. 预报 T.

一$(\mathscr{F}_t^0)$宽停时T叫做 a.s. 可预报的，如果存在一$(\mathscr{F}_t^0)$宽停时的上升列(T_n)，使得(T_n) a.s. 预报T.

我们将证明：一切可料时是 a.s. 可预报的，为此首先证明一个引理.

5.11 引理 令$\mathscr{V}$为 a.s. 可预报宽停时全体，则$\mathscr{V}$具有如下几个性质：

i) $0\in\mathscr{V}$, $+\infty\in\mathscr{V}$.

ii) $S,\ T\in\mathscr{V}\Rightarrow S\wedge T,\ S\vee T\in\mathscr{V}$.

iii) $\mathscr{V}$中元素上升列的极限属于$\mathscr{V}$.

iv) $\mathscr{V}$中元素尾定下降列的极限属于$\mathscr{V}$.

v) 设$S\in\mathscr{V}$, T为一宽停时，且$T=S$ a.s.，则$T\in\mathscr{V}$.

vi) $S,\ T\in\mathscr{V}\Rightarrow S_{[S<T]}\in\mathscr{V}$.

证明 i) 显然.

ii) 设序列(S_n)和(T_n)分别 a.s. 预报S和T，则$(S_n\wedge T_n)$和$(S_n\vee T_n)$分别 a.s. 预报$S\wedge T$和$S\vee T$.

iii) 设(T_n)为$\mathscr{V}$中元素上升列，且$T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$. 设$(S_{n,k})_{k\geq 1}$ a.s. 预报T_n. 令

$$S_k=S_{1,k}\vee S_{2,k}\cdots\vee S_{k,k}.$$

则$(S_k)_{k\geq 1}$ a. s. 预报T.

iv) 设(T_n)为$\mathscr{V}$中元素尾定下降列，且$T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$. 设$(S_{n,k})_{k\geq 1}$ a.s. 预报T_n. 令$d(x,\ y)=|e^{-x}-e^{-y}|\ (x,\ y\in\overline{\mathbb{R}}_+)$，$d$是$\overline{\mathbb{R}}_+$上与通常拓扑相容的有界距离. 必要时对足标$k$取子序列，不妨设对一切$n$及$k$有

$$\mathbb{P}([d(S_{n,k},\ T_n)>2^{-k}])\leqslant 2^{-(n+k)}.$$

令$S_k=\inf\limits_n S_{n,k}$，则$(S_k)$为一宽停时的上升列，且对一切$k$, $S_k\leqslant T$. 在$[T>0]$上，对一切n有$T_n>0$，从而对一切k，有$S_{n,k}<T_n$ a. s.. 但由于(T_n)为尾定的，故在$[T>0]$上，对一切k有$S_k<T$ a. s.，令

$S=\lim\limits_{k\to\infty}S_k$，则我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([d(S,T)>2^{-k}])&\leqslant\mathbb{P}([d(S_k,T)>2^{-k}])\\&\leqslant\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[d(S_{n,k},T_n)>2^{-k}]\right)\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}([d(S_{n,k},T_n)>2^{-k}])\leqslant 2^{-k}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([d(S,T)>0])&=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty}[d(S,T)>2^{-k}]\right)\\&\leqslant\sum_{k=m}^{\infty}2^{-k}\xrightarrow[m\to\infty]{}0.\end{aligned}$$

这表明 $S=T$ a.s.，故(S_k)a.s. 预报 T，即 $T\in\mathscr{V}$.

v) 设宽停时序列(S_n)a.s. 预报 S，则序列 $(S_n\wedge T)$ a.s. 预报 T，故 $T\in\mathscr{V}$.

vi) 设宽停时序列(S^n)和(T^n)分别 a.s. 预报 S 和 T. 令

$$U_n^m=n\wedge S^n_{[S^n<T^m]},$$

则对固定的 m，$(U_n^m)_{n\geqslant 1}$ 为一宽停时的上升列，且 a.s. 预报宽停时 $U^m=S_{[S<T^m]\cap[T^m>0]}$[1)]，故 $U^m\in\mathscr{V}$. 显然，(U^m)是尾定下降列，故由 iv)，其极限 U 属于 $\mathscr{V}$. 但是 $S_{[S<T]}=U$ a.s.，故由 v)，

$$S_{[S<T]}\in\mathscr{V}.$$

5.12 定理　一切$(\mathscr{F}_t^0)$可料时为 a.s. 可预报的.

证明　在引理 5.1 中，令 $\mathscr{V}$ 为 a.s. 可预报的$(\mathscr{F}_t^0)$宽停时全体，并沿用引理 5.1 记号. 由系 4.30 知，$\mathscr{P}\subset\sigma(\mathscr{C})$.

设 T 为一可料时，则$[\![T]\!]\in\mathscr{P}$，故$[\![T]\!]\in\sigma(\mathscr{C})$. 读者容易由定理 5.2 的证明看出：$\sigma(\mathscr{C})$中的集合的截口定理也成立(因这时 $S_L=S$ a.s.，故由 $\mathscr{V}$ 的性质 v)，$S_L\in\mathscr{V}$). 于是，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $S^\varepsilon\in\mathscr{V}$，使得$[\![S^\varepsilon]\!]\subset[\![T]\!]$，且 $\mathbb{P}(S^\varepsilon<\infty)\geqslant\mathbb{P}(T<\infty)-\varepsilon$. 令

$$T_n=S^{\frac{1}{2}}\wedge\cdots\wedge S^{\frac{1}{n}},\quad n\geqslant 2.$$

1) 由于$[S\leqslant T^m]\cap[T^m>0]$属于 $\mathscr{F}_{S+}$，但不一定属于 $\mathscr{F}_S$，因此，即使 S 是停时，也只能保证 U^m 是宽停时.

我们有$T_n\in\mathscr{V}$，$(T_n)_{n\geq 2}$是尾定的降序列，且$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$ a.s.. 故由$\mathscr{V}$的性质iv)及v)知$T\in\mathscr{V}$. 即T是a.s.可预报的.

5.13 定理 设$T>0$为一可料时. 令$A\subset[\![0, T[\![$为一可选集(相应地，可料集)，使得对几乎所有$\omega\in[T<\infty]$，$T(\omega)$为集合$A(\omega)=\{t\in\mathbb{R}_+:(t, \omega)\in A\}$的极限点，则存在被$T$控制的停时(相应地，可料时)的增序列$(T_n)$，使得每个$T_n$的图a.s.含于$A$中，且$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$ a.s..

证明 只证A为可料集情形. 设(V_n)为a.s.预报T的宽停时列. 对每个n，可料集$A_n^T=A\cap]\!]V_n, T[\![$在$\Omega$上的投影a.s.包含$[T<\infty]$. 由定理5.3，对每个$n$，存在可料时$U_n$，使得$[\![U_n]\!]\subset A_n^T$，且

$$\mathbb{P}(T<\infty)\leqslant\mathbb{P}(\pi(A_n^T))\leqslant\mathbb{P}(U_n<\infty)+\frac{1}{2^n}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}V_n=T$ a.s.，故$\liminf\limits_{n\to\infty}U_n=T$ a.s..

对每个n，及一切$k\geqslant 1$，令

$$S_{n,k}=\inf_{n\leqslant m\leqslant k+n}U_m,\quad S_n=\inf_k S_{n,k}=\lim_{k\to\infty}S_{n,k}.$$

则$(S_{n,k})_{k\geqslant 1}$为可料时的下降列，往证$(S_{n,k})_{k\geqslant 1}$是a.s.尾定的. 设$\omega\in\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}[U_m=\infty]$，则对一切$k\geqslant 1$，$S_{n,k}(\omega)=\infty$. 设

$$\omega\in\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}[U_m<\infty]\right)\cap\left(\bigcap_{l=1}^{\infty}[V_l<T]\right)\cap[\lim_{l\to\infty}V_l=T],$$

则存在$m_0\geqslant n$，使$\omega\in[U_{m_0}<\infty]$，且对一切$l\geqslant 1$，有$V_l(\omega)<T(\omega)$，此外有$\lim\limits_{l\to\infty}V_l(\omega)=T(\omega)$. 由于$U_{m_0}(\omega)<T(\omega)$，故存在$k_0\geqslant m_0-n$，使当$k\geqslant k_0$时，有$U_{n+k}(\omega)>V_{n+k}(\omega)>U_{m_0}(\omega)$. 这表明，当$k\geqslant k_0$时，恒有$S_{n,k}(\omega)=S_{n,k_0}(\omega)$. 即$(S_{n,k}(\omega))_{k\geqslant 1}$是尾定的. 注意到$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{l=1}^{\infty}[V_l<T]\right)\cap[\lim\limits_{l\to\infty}V_l=T]\right)=1$. 上述论证表明$(S_{n,k})_{k\geqslant 1}$是a.s.尾定的. 令

$$A_{n,k}=\bigcap_{i=1}^{\infty}[S_{n,k}=S_{n,k+i}],$$

$$R_{n,k}=(S_{n,k})_{A_{n,k}}\wedge T.$$

则 $A_{n,k}\in\mathscr{F}^0_{S_{n,k}-}$(定理 4.31, 2)), $R_{n,k}$ 为可料时, $(R_{n,k})_{k\geq 1}$ 为尾定下降列(注意 $A_{n,k}\subset A_{n,k+1}$), 故其极限 $R_n=\lim\limits_{k\to\infty}R_{n,k}$ 为可料时(定理 4.31.1)), 且 $R_n=S_n$ a.s.. 令

$$T_n=R_1\vee R_2\vee\cdots\vee R_n,$$

由于(S_n)为上升列, 故 $T_n=R_n=S_n$ a.s., 从而

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{m\to\infty}\inf U_m=T\text{ a.s.}.$$

最后, 由于每个 $S_{n,k}$ 的图含于 A 中, 且$(S_{n,k})_{k\geq 1}$是 a.s. 尾定的, 故其极限 S_n 的图 a. s. 含于 A 中, 从而每个 T_n 的图 a. s. 含于 A 中.

5.14 系 设 U 为一可料时, 则存在可料时的上升列(U_n), 使得 (U_n) a.s. 预报 U. 此外我们可以进一步要求每个 U_n a.s. 取二进位有理数值.

证明 在定理 5.13 中, 令 $T=U_{[U>0]}$, $A=[\![0,T[\![\cap(\bigcup_{r\in K}[\![r]\!])$, 其中$K$为 $\mathbb{R}_+$ 中二进位有理数全体. 则存在被 T 控制的, a.s. 在 K 中取值的可料时的增序列(T_n), 使得 $T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ a.s., 且在$[T<\infty]$上, 对一切 n, 有 $T_n<T$ a.s.. 令

$$U_n=T_n\wedge U_{[U=0]}\wedge 2^n.$$

则 (U_n) 为 a.s. 在 k 中取值的可料时的增序列, 且 (U_n) a.s. 预报 U.

§3 a.s. 可及时与绝不可及时

5.15 定义 令 T 为一$(\mathscr{F}^0_t)$停时, 称 T 为 a.s. 可及时(以示区别于可及时)[1], 如果存在一列可料时(T_n), 使得 $[\![T]\!]$ a.s. 含于

1) 若$(\mathscr{F}^0_t)$完备, 则一切 a.s. 可及时为可及时(见下一节定理 5.27.3)).

$\bigcup_n [\![T_n]\!]$ 中，或者等价地，

$$\mathbb{P}(\bigcup_n [T_n = T < +\infty]) = \mathbb{P}([T < +\infty]).$$

称 T 为绝不可及时，如果对一切可料时 S，$[\![T]\!] \cap [\![S]\!]$ 为不足道集，或者等价地，

$$\mathbb{P}([T = S < +\infty]) = 0.$$

显然，可及时为 a.s. 可及时；既 a.s. 可及又绝不可及的停时 a.s. 等于 $+\infty$；绝不可及时总是 a.s. 严格正的. 此外，与 a.s. 可及时（相应地，绝不可及时）a.s. 相等的停时为 a.s. 可及时（相应地，绝不可及时）.

5.16 定理 设 T 为一停时，则存在 $A \subset [T < \infty]$，$A \in \mathscr{F}^0_{T-}$，使得 T_A 为可及时，T_{A^c} 为绝不可及时. 这样的集合 A 本质上是唯一确定的.

证明 令 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{F}^0_{T-}$ 中形如 $\bigcup_n [S_n = T < \infty]$ 的集合全体，其中 (S_n) 为一列可料时. $\mathscr{H}$ 显然对集合可列并运算封闭，故由定理 1.23 的注，存在 $A \in \mathscr{H}$，使得，$A = \text{ess.}\sup \mathscr{H}$. 容易看出 T_A 为可及时，T_{A^c} 为绝不可及时. A 的唯一性不难验证.

5.17 定理 一停时 T 为 a.s. 可及时，当且仅当对一切绝不可及时 S，有 $\mathbb{P}([S = T < +\infty]) = 0$.

证明 必要性显然. 往证充分性. 设 T_A 为可及时，T_{A^c} 为绝不可及时，依假设 $\mathbb{P}([T_{A^c} = T < \infty]) = 0$. 故 $T_{A^c} = +\infty$ a.s.. 于是 $T = T_A \wedge T_{A^c} = T_A$ a.s.，T 为 a.s. 可及时.

下一定理给出了 a.s. 可及时和绝不可及时的直观解释.

5.18 定理 令 T 为一停时，我们用 $\mathscr{S}(T)$ 表示被 T 控制的停时上升列 (S_n) 的全体. 设 $(S_n) \in \mathscr{S}(T)$，我们令

$$A[(S_n)] = \{(\bigcap_n [S_n < T]) \cap [\lim_{n\to\infty} S_n = T]\} \cup [T = 0].$$

1) 为了 T 为 a.s. 可及时，必须且只需存在 $\mathscr{S}(T)$ 中一列元素 (S^k_n)，$k = 1, 2, \cdots$，使得 $\bigcup_k A[(S^k_n)] = \Omega$ a.s..

2) 为了 T 为绝不可及时，必须且只需对一切$(S_n)\in\mathscr{S}(T)$，有 $A[(S_n)]\subset[T=+\infty]$ a.s.，

证明 1) 充分性. 由定理 4.35 及定理 4.36.3) 知，$T_{\bigcup_k A[(S_n^k)]}$ 为可及时. 依假设，$T=T_{\bigcup_k A[(S_n^k)]}$ a.s.，故 T 为 a.s. 可及时.

必要性. 设 $[\![T]\!]$ a.s. 含于可料时列$(T^k)_{k\geq 2}$的图之并中. 对每个 $k\geqslant 2$，设(T_n^k)是 a.s. 预报 T^k 的停时上升列(系 5.14)，令 $S_n^k=T_n^k\wedge T$，则$(S_n^k)\in\mathscr{S}(T)$. 并且有$[T=T^k<+\infty]\subset A[(S_n^k)]$ a.s.，于是

$$[T<+\infty]=\bigcup_{k=2}^{\infty}[T=T^k<+\infty]\subset\bigcup_{k=2}^{\infty}A[(S_n^k)] \text{ a.s.},$$

令 $S_n^1=n_{[T>n]}\wedge T$，则$(S_n^1)\in\mathscr{S}(T)$，且$[T=+\infty]=A[(S_n^1)]$. 故有 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A[(S_n^k)]=\Omega$ a.s.，

2) 充分性. 设 S 是一可料时，$(\bar{S}_n)$是 a.s. 预报 S 的停时上升列. 令 $S_n=\bar{S}_n\wedge T$，则$(S_n)\in\mathscr{S}(T)$，且有

$$[T=S<+\infty]\subset A[(S_n)] \text{ a.s.},$$

但依假设，$A[(S_n)]\subset[T=+\infty]$ a.s.，故必须有$\mathbb{P}([T=S<+\infty])=0$，这表明 T 为绝不可及时.

必要性. 设$(S_n)\in\mathscr{S}(T)$. 则 $T_{A[(S_n)]}$ 为可及时，故由定理 5.17，$\mathbb{P}([T=T_{A[(S_n)]}<+\infty])=0$，从而有

$$A[(S_n)]\subset[T=+\infty] \text{ a.s.}.$$

注 定理表明：绝不可及时 T 在$[T<\infty]$上是几乎不可预报的，而 a.s. 可及时是 a.s σ-可预报的.

5.19 定理 为要一停时 T 为 a.s. 可及时，必须且只需存在一集合 $A\in\mathscr{F}_{T-}^{0}$，使得 $A=\Omega$ a.s.，且 T_A 为可及时.

证明 充分性显然. 必要性由定理 5.18.1)得到.

§4 右连左极适应过程的跳

5.20 定理 设(X_t)为一右连左极适应过程，则存在一列严格

正停时(T_n)满足下列条件:

i) $\{(t,\omega):0<t<\infty,\ X_t(\omega)\neq X_{t-}(\omega)\}\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]$.

ii) T_n 或为可料时,或为绝不可及时.

iii) 当 $n\neq m$ 时, $[\![T_n]\!]\cap[\![T_m]\!]=\emptyset$.

我们今后称这样的停时列(T_n)为穷举(X_t)跳的标准停时列.

证明 由定理 4.41, 存在一列严格正停时(U_n), 使得条件 i)满足. 对每个 n, 由定理 5.16, 存在可及时 U_n^a 及绝不可及时 U_n^i, 使得

$$[\![U_n]\!]=[\![U_n^a]\!]\cup[\![U_n^i]\!].$$

于是,由可及时定义(4.37)看出,存在一列严格正停时(S_n)满足条件 i)及 ii). 令 $\mathbb{N}_1=\{n:S_n$ 为可料时$\}$, $\mathbb{N}_2=\{n:S_n$ 为绝不可及时$\}$. 令 $T_1=S_1$, 对 $n\geqslant 2$, 令

$$B_n=\bigcap_{\substack{k\leqslant n-1\\ k\in\mathbb{N}_1}}[S_k\neq S_n],\quad (n\in\mathbb{N}_1)$$

$$B_n=\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}_1}[S_k\neq S_n]\Big)\cap\Big(\bigcap_{\substack{k\leqslant n-1\\ k\in\mathbb{N}_2}}[S_k\neq S_n]\Big),\quad (n\in\mathbb{N}_2)$$

$$T_n=(S_n)_{B_n},$$

如果 S_n 为可料时,则 $B_n\in\mathscr{F}^0_{S_n-}$, 从而 T_n 为可料时; 如果 S_n 为绝不可及时,则 $B_n\in\mathscr{F}^0_{S_n}$, T_n 为绝不可及时. 显然(T_n)满足条件 i), ii), iii).

注 若在条件 ii)中将可料时改成可及时,则可要求条件 i)中的等号成立.

5.21 定义 设(X_t)为一右连左极适应过程. 令$T>0$为一停时. 称 T 为(X_t)的一个跳跃时,如果在$[T<\infty]$上,有 $X_T\neq X_{T-}$ a.s., 即 $\mathbb{P}(T<\infty,\ X_T\neq X_{T-})=\mathbb{P}(T<\infty)$. 称$(X_t)$只有可及跳,如果$(X_t)$的一切跳跃时为 a.s. 可及时; 称$(X_t)$只有绝不可及跳,如果$(X_t)$的一切跳跃时为绝不可及时.

称只有绝不可及跳的右连左极适应过程为拟左连续过程.

5.22 定理 设(X_t)为一右连左极适应过程，则下列三断言等价：

1) (X_t)拟左连续.

2) 对任一可料时$T>0$，在$[T<\infty]$上，有$X_T=X_{T-}$ a.s..

3) 设(T_n)为任一停时的增序列，且$T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$. 则在$[T<\infty]$上有$\lim\limits_{n\to\infty}X_{T_n}=X_T$ a.s..

证明 3)⇒2)由系5.14看出. 2)⇒1)由定理5.16看出. 往证1)⇒2)⇒3).

设(X_t)拟左连续. 设$T>0$为一可料时，令

$$B=[T<\infty]\cap[X_T\neq X_{T-}].$$

则T_B为(X_t)的一个跳跃时. 依假定，T_B为绝不可及时. 于是有

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}([T_B=T<\infty])=0$$

这表明在$[T<\infty]$上，有$X_T=X_{T-}$ a.s.，1)⇒2)得证.

设2)成立. 令(T_n)为停时的增序列，且$T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$. 令

$$A=\bigcap_n[T_n<T],$$

则$T_A>0$，且$(T_n)_{[T_n<T]}\wedge n$预报T_A，故由定理4.29，T_A为可料时. 由2)，在$[T_A<\infty]$上有$X_{T_A}=X_{T_A-}$ a.s.，即在$A\cap[T<\infty]$上有$X_T=X_{T-}$ a.s.. 于是在$A\cap[T<\infty]$上，有$\lim\limits_{n\to\infty}X_{T_n}=X_T$ a.s.. 但在$A^c\cap[T<\infty]$上，恒有$\lim\limits_{n\to\infty}X_{T_n}=X_T$，故在$[T<\infty]$上，有

$$\lim_{n\to\infty}X_{T_n}=X_T\ \text{a.s.},$$

于是2)⇒3).

5.23 定理 设(X_t)为一右连左极适应过程，则为要(X_t)只有可及跳，必须且只需对任一绝不可及时T，在$[T<\infty]$上有

$$X_T=X_{T-}\ \text{a.s.}.$$

证明 与定理5.22中1)⇔2)的证明类似.

下一定理给出了适应有限变差过程的一个有用的分解.

5.24 定理 设(A_t)为一适应有限变差过程. 则A有唯一分解:

$$A=A^c+A^{da}+A^{di}.$$

其中A^c为连续适应有限变差过程, A^{da}为只有可及跳的纯断适应有限变差过程, A^{di}为拟左连续纯断适应有限变差过程.

证明 令(T_n)为一穷举(A_t)跳的标准停时列. 设$\mathbb{N}_1=\{n: T_n$为可料时$\}$, $\mathbb{N}_2=\{n: T_n$为绝不可及时$\}$. 令

$$A_t^{da}=\sum_{n\in\mathbb{N}_1}\Delta A_{T_n}I_{[T_n\le t]},$$

$$A_t^{di}=\sum_{n\in\mathbb{N}_2}\Delta A_{T_n}I_{[T_n\le t]},$$

则由定理4.44, $A=A^c+A^{da}+A^{di}$为满足定理要求的一个分解. 设A有另一个满足要求的分解: $A=A^c+\overline{A}^{da}+\overline{A}^{di}$. 令$B=A^{da}-\overline{A}^{da}=\overline{A}^{di}-A^{di}$. 则$B$为纯断适应有限变差过程. 设$T>0$为一停时, 由定理5.16, 存在可及时$T^a$及绝不可及时$T^i$, 使得$[\![T]\!]=[\![T^a]\!]\cup[\![T^i]\!]$. 在$[T^a<\infty]$上, 有$\Delta B_{T^a}=\Delta\overline{A}_{T^a}^{di}-\Delta A_{T^a}^{di}=0$ a.s.; 在$[T^i<\infty]$上, 有$\Delta B_{T^i}=\Delta A_{T^i}^{da}-\Delta\overline{A}_{T^i}^{da}=0$ a.s., 故在$[T<\infty]$上有$\Delta B_T=0$ a.s.. 由于(ΔB_t)为可选过程(这里约定$\Delta B_0=0$), 故由系5.6, (ΔB_t)与0过程无区别, 即(B_t)与一连续过程无区别. 但(B_t)为纯断有限变差过程, 故(B_t)与0过程无区别, 即A^{da}与$\overline{A}^{da}$无区别, A^{di}与$\overline{A}^{di}$无区别. 分解的唯一性得证.

§5 完备σ-域族及通常条件

5.25 定义 令$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为一完备概率空间, $(\mathscr{F}_t)_{t\in\{0-\}\cup\overline{\mathbb{R}}_+}$为一族上升的$\mathscr{F}$的子σ-域. 称$(\mathscr{F}_t)$为完备的, 如果$\mathscr{F}_{0-}$(从而一切$\mathscr{F}_t$)包含$\mathscr{F}$中一切$\mathbb{P}$-零概集. 称$(\mathscr{F}_t)$满足通常条件, 如果$(\mathscr{F}_t)$为完备的, 且为右连续的.

5.26 定理 设$(\mathscr{F}_t)$为完备的, 则一切右连续不足道过程为可料过程[1].

---

1) E. Lenglart 新近证明: 若$(\mathscr{F}_t)$完备, 则一切可测不足道过程为可料过程(见Sém. Prob. XIV).

证明 设 $X=(X_t)$ 为一右连续不足道过程. 令

$$X^n=X_0 I_{[0]}+\sum_{k=0}^{\infty} X_{\frac{k+1}{n}} I_{]\!]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\!]},\quad n\geqslant 1.$$

由于 $X_0=0$ a.s., $X_{\frac{k+1}{n}}=0$ a.s., 从而 X_0 及 $X_{\frac{k+1}{n}}$ 为 $\mathscr{F}_{0-}$ 可测, 故 X^n 为可料过程. 令 $n\to+\infty$, 其极限 X 亦为可料过程.

5.27 定理 设 $(\mathscr{F}_t)$ 为完备的.

1) 设 S, T 为两个 $(\mathscr{F}_t)$ 停时, 且 $T=S$ a.s., 则 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_S$, $\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{S-}$.

2) 设 T 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时(相应地: 可及时, 可料时), S 为一非负随机变量, 且 $S=T$ a.s., 则 S 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时(相应地: 可及时, 可料时).

3) 一切 $(\mathscr{F}_t)$a.s. 可及时为可及时.

4) 设 S 为一非负随机变量, 则为要 S 是一停时(相应地: 可及时, 可料时), 必须且只需 $[\![S]\!]$ 是可选集(相应地: 可及集, 可料集).

证明 1) 显然.

2) 停时情形显然. 现设 T 为可料时. 由于 $S=T$ a.s., 故 $[S=T]\in\mathscr{F}_{0-}$. 从而 $S_{[S=T]}=T_{[S=T]}$ 为可料时. 又 $S_{[S\neq T]}=+\infty$ a. s., 于是 $I_{[\![S_{[S\neq T]},\infty[\![}$ 为右连续不足道过程, 故由定理 5.26, $S_{[S\neq T]}$ 为可料时, 从而 $S=S_{[S=T]}\wedge S_{[S\neq T]}$ 为可料时.

最后, 设 T 为可及时. 由于 S 为停时, 且 $S=T$ a.s., 故 S 为 a.s. 可及时. 由定理 5.19, 存在 $A\in\mathscr{F}_{S-}$, 使得 $A=\Omega$ a.s., 且 S_A 为可及时; 但 $S_{A^c}=+\infty$ a.s., S_{A^c} 为可料时; 故 $S=S_A\wedge S_{A^c}$ 为可及时.

3) 证明已包含在 2) 的证明之中.

4) 只需证充分性. 只证可料情形, 其余情形类似. 设 $[\![S]\!]$ 是可料集. 由截口定理, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在可料时 T^ε, 使得 $[\![T^\varepsilon]\!]\subset[\![S]\!]$, 且 $\mathbb{P}([T^\varepsilon<\infty])\geqslant\mathbb{P}([S<\infty])-\varepsilon$. 令

$$S_n = T^{\frac{1}{2}} \wedge \cdots \wedge T^{\frac{1}{n}}.$$

则$(S_n)_{n\geq 2}$为可料时的尾定降序列，且$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ a.s.，故由本定理2)，S为可料时.

下一定理表明：在$(\mathscr{F}_t)$为完备条件下，可料时可用停时（甚至可料时）的上升列完全预报.

5.28 定理 设$(\mathscr{F}_t)$为完备的. 令U为一可料时，则存在只取二进位有理数值的可料时上升列(T_n)，使得(T_n)预报U（见定义4.28）.

证明 令K表示$\mathbb{R}_+$中二进位有理数全体. 在系5.14的证明基础上，令

$$A = [U>0] \cap \left\{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [U_n = U]\right) \cup [\lim_{n\to\infty} U_n < U] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [U_n \notin K]\right)\right\},$$

则$\mathbb{P}(A)=0$. 令

$$T_n(\omega) = \begin{cases} U_n(\omega), & \omega \in A^c, \\ 2^n, & \omega \in A \cap [U = +\infty], \\ \dfrac{k}{2^n}, & \omega \in A \cap \left[\dfrac{k}{2^n} < U \leqslant \dfrac{k+1}{2^n}\right], \ k = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

则T_n只取K中值，$T_n = U_n$ a.s. 且(T_n)预报U. 由定理5.27.2)，每个T_n为可料时.

注 1) 设$(\mathscr{F}_t)$完备，同理可证：一切a.s.可预报的宽停时是可预报宽停时. 因此，若$\mathscr{F}_{0-} = \mathscr{F}_{0+}$，则由定理4.29知，一切a.s.可预报的宽停时为可料时.

2) 在定理5.13中，若$(\mathscr{F}_t)$完备，且若条件加强为：对一切$\omega \in [T<\infty]$，$T(\omega)$为$A(\omega)$的极限点，则定理的结论加强为：每个T_n的图含于A中，且在整个Ω上有$\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$.

作为定理5.28的一个应用，我们得到完备σ-域族的拟左连

续性的一个等价条件.

5.29 定理 设$(\mathscr{F}_t)$为完备的,则下列三断言等价:

1) $(\mathscr{F}_t)$拟左连续,即对一切可料时T, $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$.

2) $\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}_{\infty-}$, 并且一切可及时为可料时.

3) $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{0-}$, 并且对任一停时上升列$(T_n)$, 有

$$\mathscr{F}_T=\bigvee_n \mathscr{F}_{T_n},$$

这里$T=\lim\limits_{n\to\infty} T_n$.

证明 在定理4.40中已证1)⇔2)及1)⇒3), 故只需证3)⇒1). 设T为一可料时, 取停时上升列(T_n), 使得(T_n)预报T. 则由定理4.4.11), 我们有

$$\mathscr{F}_{T-}=\bigvee_n \mathscr{F}_{T_n}.$$

故由3), $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$. 即$(\mathscr{F}_t)$拟左连续.

5.30 定理 1) 设$(\mathscr{F}_t)$满足通常条件, 则一切循序集的初遇为$(\mathscr{F}_t)$停时.

2) 设$(\mathscr{F}_t)$为完备的, 则一切对右极限封闭的循序集的初遇为$(\mathscr{F}_t)$停时.

证明 1) 设A为一循序集, D_A为其初遇. 令

$$A_t=\{(s,\omega): s<t,\ (s,\omega)\in A\},$$

则$A_t=A\cap([0,t[\times\Omega)$, $A_t\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}_t$, 且$[D_A<t]=\pi(A_t)$, 其中$\pi(A_t)$为$A_t$在$\Omega$上的投影. 由于$\mathscr{F}_t$关于$\mathbb{P}$完备, 故由定理1.32及定理1.36知, $[D_A<t]=\pi(A_t)\in\mathscr{A}(\mathscr{F}_t)=\mathscr{F}_t$, 故

$$[D_A\leqslant t]\in\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t.$$

从而D_A为停时.

2) 我们有$[D_A\leqslant t]=\pi(\overline{A}_t)$, 其中

$$\overline{A}_t=\{(s,\omega): s\leqslant t,\ (s,\omega)\in A\}.$$

注 设B与一循序集A无区别, 则$D_B=D_A$ a. s., 故D_B为一停时.

5.31 定理 设$(\mathscr{F}_t)$为完备的. 令H为一可料集, 如果初遇D_H的图含于H中, 则D_H为可料时.

证明 首先由定理5.30知, D_H为$(\mathscr{F}_t)$宽停时. 故由定理4.18.3)知, $]\!]D_H, \infty[\![$为可料集, 于是$[\![D_H]\!]=H\cap[\![0, D_H]\!]$为可料集. 故$D_H$为可料时.

5.32 定理 设$(\mathscr{F}_t)$完备, 则一切右连续适应过程(X_t)为$(\mathscr{F}_t)$可选过程.

证明 由定理5.26知, 只需证明X与一右连续可选过程无区别. 为此, 只需证明X与一可选过程无区别. 事实上, 设Y为一与X无区别的可选过程, 令

$$\Omega_0=\{\omega: Y_\cdot(\omega)\text{为}\mathbb{R}_+\text{上右连续函数}\},$$

则$\mathbb{P}(\Omega_0)=1$. 故O_{Ω_0}为停时. 令$Z=YI_{[\![O_{\Omega_0}, \infty[\![}$, 则$Z$为右连续可选过程, 且$Z$与$X$无区别.

给定$\varepsilon>0$, 令$\mathscr{A}$为满足如下条件的停时S的集合: 存在一可选过程$Y^{(S)}$, 使得集合

$$\{(t, \omega): t\in[0, S(\omega)[, |X_t(\omega)-Y_t^{(S)}(\omega)|\geqslant\varepsilon\}$$

为不足道集. 则$\mathscr{A}$非空(因$0\in\mathscr{A}$), 并且容易看出, $\mathscr{A}$具有如下性质:

i) $S, T\in\mathscr{A}\Rightarrow S\vee T\in\mathscr{A}$.

ii) 设(S_n)为$\mathscr{A}$中元素上升列, 则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n\in\mathscr{A}$.

iii) 设$S\in\mathscr{A}$, T为一停时, 且$T=S$ a.s., 则$T\in\mathscr{A}$.

于是由定理1.23, 存在$T\in\mathscr{A}$, 使得$T=\text{ess. sup}\,\mathscr{A}$. 往证$T=+\infty$ a.s.. 设U为循序集

$$A=\{(t, \omega): t>T(\omega), |X_t(\omega)-X_{T(\omega)}(\omega)|\geqslant\varepsilon\}$$

的初遇, 则由于A对右极限封闭, 故U为停时. 令

$$Y^{(U)}=Y^{(T)}I_{[\![0,T[\![}+X_TI_{[\![T,U[\![},$$

则$U\in\mathscr{A}$, $U\geqslant T$, 故$U=T$ a.s.. 另一方面, 因X为右连续, 故

在$[U<\infty]$上有$T<U$. 这表明$T=U=\infty$ a.s., 由$\mathscr{A}$的性质 iii), $+\infty\in\mathscr{A}$. 令$X^\varepsilon=Y^{(\infty)}$. 则$X^\varepsilon$为可选过程, 且集合

$$\{(t,\ \omega):|X_t(\omega)-X_t^\varepsilon(\omega)|\geqslant\varepsilon\}$$

为不足道集. 取$\varepsilon_n=\frac{1}{n}$. 令

$$\bar{Y}=\liminf_{n\to\infty}X^{\frac{1}{n}},\quad Y=\bar{Y}I_{[|\bar{Y}|<\infty]},$$

则Y为可选过程, 且Y与X无区别. 定理证毕.

§6 σ-域族的完备化与通常化

5.33 定义 设$(\Omega,\ \mathscr{F}^0,\ \mathbb{P})$为一概率空间, $(\mathscr{F}_t^0)_{t\in\{0-\}\cup\overline{\mathbb{R}}_+}$为一族上升的$\mathscr{F}^0$的子σ-域. 令$\mathscr{F}$为$\mathscr{F}^0$关于$\mathbb{P}$的完备化, $\overline{\mathscr{F}}_t=\sigma(\mathscr{F}_t^0\cup\mathscr{N})\,(t\in\{0-\}\cup\overline{\mathbb{R}}_+)$, 其中$\mathscr{N}$为$\mathscr{F}$中$\mathbb{P}$-零概集全体. 则$(\overline{\mathscr{F}}_t)$为完备σ-域族, 我们称$(\overline{\mathscr{F}}_t)$为$(\mathscr{F}_t^0)$的完备化. 进一步, 我们令$\mathscr{F}_t=\overline{\mathscr{F}}_{t+}\,(t\in\mathbb{R}_+)$, $\mathscr{F}_{0-}=\overline{\mathscr{F}}_{0-}$, $\mathscr{F}_\infty=\overline{\mathscr{F}}_\infty$, 则$(\mathscr{F}_t)$满足通常条件. 我们称$(\mathscr{F}_t)$为$(\mathscr{F}_t^0)$的通常化.

容易证明: $(\mathscr{F}_t^0)$的通常化与$(\mathscr{G}_t^0)$的完备化是一致的, 这里$\mathscr{G}_{0-}^0=\mathscr{F}_{0-}^0$, $\mathscr{G}_t^0=\mathscr{F}_{t+}^0$, $(t\in\mathbb{R}_+)$, $\mathscr{G}_\infty^0=\mathscr{F}_\infty^0$.

在下面几个定理中, 我们将采用定义5.33中的记号.

5.34 定理 1) 设T为$(\mathscr{F}_t)$停时, 则存在$(\mathscr{F}_t^0)$宽停时U, 使得$T=U$ a.s.. 此外, 我们有

$$\mathscr{F}_T=\sigma(\mathscr{F}_{U+}^0\cup\mathscr{N}),\qquad \mathscr{F}_{T-}=\sigma(\mathscr{F}_{U-}^0\cup\mathscr{N}).$$

2) 设$X=(X_t)$为一$(\mathscr{F}_t)$可选过程, 则存在一$(\mathscr{F}_{t+}^0)$可选过程Y, 使得X与Y无区别.

证明 1) 由定理4.11, 为证第一个结论, 我们只需考虑形如

$$T=aI_A+(+\infty)I_{A^c}\quad a\in\mathbb{R}_+,\quad A\in\mathscr{F}_a$$

的停时T. 对这种停时, 令$B\in\mathscr{F}_{a+}^0$, 使得$B\Delta A\in\mathscr{N}$. 则$U=aI_B+(+\infty)I_{B^c}$为$(\mathscr{F}_t^0)$宽停时, 且$T=U$ a.s..

第二个结论是第一个结论的推论. 事实上, 由定理 5.27.1), $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_U\supset\sigma(\mathscr{F}^0_{U+}\cup\mathscr{N})$. 另一方面, 设 $L\in\mathscr{F}_T$. 由于 $L\in\mathscr{F}_\infty$, 可取 $L'\in\mathscr{F}^0_\infty$, 使 $L\Delta L'\in\mathscr{N}$. 然后取一$(\mathscr{F}^0_t)$宽停时 V, 使得 $V=T_L$ a.s., 令

$$M=(L'\cap[U=\infty])\cup[V=U<\infty],$$

则 $M\in\mathscr{F}^0_{U+}$, 且 $M\Delta L\in\mathscr{N}$. 这表明 $L\in\sigma(\mathscr{F}^0_{U+}\cup\mathscr{N})$.

$\mathscr{F}_{T-}$ 情形显然.

2) 设 X 为形如 $I_{[\![T,\infty[\![}$ 的可选过程, 其中 T 为$(\mathscr{F}_t)$停时. 由 1), 令 U 为$(\mathscr{F}^0_{t+})$停时, 使 $U=T$ a.s., 则 $Y=I_{[\![U,\infty[\![}$ 为$(\mathscr{F}^0_{t+})$可选过程, 且 Y 与 X 无区别. 然后用单调类定理得到一般情形的结论. 我们将证明细节留给读者.

5.35 定理　1) 设 T 为$(\mathscr{F}^0_t)$停时, 则有

$$\overline{\mathscr{F}}_{T-}=\sigma(\mathscr{F}^0_{T-}\cup\mathscr{N})=\mathscr{F}_{T-}.$$

2) 设 T 为$(\overline{\mathscr{F}}_t)$可料时(亦即$(\mathscr{F}_t)$可料时), 则存在$(\mathscr{F}^0_t)$可料时 S, 使得 $T=S$ a.s., 且 $\overline{\mathscr{F}}_{T-}=\sigma(\mathscr{F}^0_{S-}\cup\mathscr{N})=\mathscr{F}_{T-}$.

3) 设 X 为$(\overline{\mathscr{F}}_t)$可料过程(亦即$(\mathscr{F}_t)$可料过程), 则存在$(\mathscr{F}^0_t)$可料过程 Y, 使得 X 与 Y 无区别.

证明　1) 显然.

2) 设(T^n)为预报可料时 $T_{[T>0]}$ 的$(\mathscr{F}_t)$停时列(定理 5.28). 对每个 n, 令 R^n 为$(\mathscr{F}^0_{t+})$停时, 使得 $R^n=T^n$ a.s.(定理 5.34). 必要时, 用 $R^1\vee\cdots\vee R^n$ 代替 R^n, 我们可假定(R^n)是上升的, 并用 R 表示其极限. 令 $A_n=[R^n<R]$, 则(A_n)下降, 故$(\mathscr{F}^0_{t+})$停时列 $U_n=R^n_{A_n}\wedge n$ 是上升的, (U_n)处处预报了它的极限 U, 且 $U>0$, 由定理 4.29, U 为$(\mathscr{F}^0_t)$可料时. 由于 $\mathbb{P}(A_n)=1$, 故有 $U_n=R^n\wedge n$ a.s., $U=R=T_{[T>0]}$ a.s.. 此外, 令 $H\in\mathscr{F}^0_{0-}$, 使得 $H\Delta[T=0]$ 为 $\mathbb{P}$-零概集(因 $[T=0]\in\mathscr{F}_{0-}$), 令

$$S=U\wedge 0_H,$$

则 S 为$(\mathscr{F}^0_t)$可料时, 且 $T=S$ a.s..

由定理 5.27.1) 及本定理 1)得 $\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{S-}=\sigma(\mathscr{F}^0_{S-}\cup\mathscr{N})$.

3) 与定理 5.34.2)的证明类似.

5.36 定理 1) 设 T 为$(\mathscr{F}_t)$可及时，则存在$(\mathscr{F}^0_{t+})$可及时 U，使得 $T=U$ a.s..

2) 设 X 为$(\mathscr{F}_t)$可及过程，则存在$(\mathscr{F}^0_{t+})$可及过程 Y，使得 X 与 Y 无区别.

证明 1) 令 $\bar{U}$ 为$(\mathscr{F}^0_{t+})$停时，使得 $\bar{U}=T$ a.s.. 设$[\![T]\!]$含于一列$(\mathscr{F}_t)$可料时(T_n)的图的并中. 对每个 n，令 U_n 为$(\mathscr{F}^0_t)$可料时(即$(\mathscr{F}^0_{t+})$可料时)，使得 $U_n=T_n$ a.s.，则有$[\![\bar{U}]\!]\subset\bigcup_n[\![U_n]\!]$ a.s.，即 $\bar{U}$ 为 a.s. $(\mathscr{F}^0_{t+})$可及时. 于是由定理 5.19，存在$(\mathscr{F}^0_{t+})$可及时 U，使得 $U=\bar{U}$ a.s.. 从而 $U=T$ a.s..

2) 由 1)及单调类定理推得.

5.37 定理 设$(\mathscr{F}^0_t)$右连续. 若$(\mathscr{F}^0_t)$拟左连续，则$(\mathscr{F}_t)$拟左连续.

证明 设 T 为$(\mathscr{F}_t)$可料时，则存在$(\mathscr{F}^0_t)$可料时 S，使得 $T=S$ a.s.，依假定，$\mathscr{F}^0_{S-}=\mathscr{F}^0_S$，故由定理 5.35.1)及定理 5.34.1)，有

$$\mathscr{F}_{S-}=\sigma(\mathscr{F}^0_{S-}\cup\mathscr{N})=\sigma(\mathscr{F}^0_S\cup\mathscr{N})=\sigma(\mathscr{F}^0_{S+}\cup\mathscr{N})=\mathscr{F}_S.$$

再由定理 5.27.1)知 $\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_{S-}=\mathscr{F}_S=\mathscr{F}_T$. 从而$(\mathscr{F}_t)$拟左连续.

下一定理是定理 3.7 的直接推论.

5.38 定理 设(X_t)为一$(\mathscr{F}^0_t)$上鞅(鞅)，其几乎所有轨道右连续，则(X_t)为$(\mathscr{F}_t)$上鞅(鞅).

§7 应用于鞅论

在本节中，我们假定$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$为一完备概率空间，$(\mathscr{F}_t)$满足通常条件.

5.39 定理 设(X_t)为一$(\mathscr{F}_t)$上鞅(鞅)，其几乎所有轨道右连续. 令T为一停时，则过程$X^T=(X_{t\wedge T})$为$(\mathscr{F}_t)$上鞅(鞅).

证明 无妨假定(X_t)的一切轨道右连续，于是(X_t)为可选过程(定理5.32)，$X_{t\wedge T}$为$\mathscr{F}_{t\wedge T}$可测(定理4.14)，从而$X_{t\wedge T}$为$\mathscr{F}_t$可测. 令$a\in\mathbb{R}_+$，$0\leqslant s\leqslant a$，对$X^a=(X_{t\wedge a})$应用定理3.22，我们有

$$\mathbb{E}[X_{a\wedge T}|\mathscr{F}_s]\leqslant X_{s\wedge T}\ \text{a.s.}(\text{相应地}, =X_{s\wedge T}).$$

于是X^T为$(\mathscr{F}_t)$上鞅(鞅).

注 令$\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t\wedge T}$，则$(\mathscr{G}_t)$满足通常条件，并且在定理中，$X^T$为$(\mathscr{G}_t)$上鞅(鞅).

下一定理虽然简单，但有时是很有用的.

5.40 定理 令(X_t)为一$(\mathscr{F}_t)$适应可测过程，X_∞为一$\mathscr{F}_\infty$可测可积随机变量. 若对一切停时T，随机变量X_T可积，且$\mathbb{E}[X_T]$不依赖于T，则(X_t)为一致可积鞅. 如果进一步，(X_t)为$(\mathscr{F}_t)$可选过程，则(X_t)的几乎所有轨道右连续.

证明 设T为一停时，$A\in\mathscr{F}_T$，我们有

$$(40.1)\quad \int_A X_T\,d\mathbb{P}=\mathbb{E}[X_{T_A}]-\int_{A^c}X_\infty\,d\mathbb{P}$$
$$=\mathbb{E}[X_\infty]-\int_{A^c}X_\infty\,d\mathbb{P}=\int_A X_\infty\,d\mathbb{P}.$$

若$T=t\in\mathbb{R}_+$，则因X_t为$\mathscr{F}_t$可测，故由(40.1)得

$$\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t]=X_t\ \text{a.s.},$$

从而(X_t)为一致可积鞅. 如果进一步，(X_t)为可选，则对一切停时T，X_T为$\mathscr{F}_T$可测，故由(40.1)得

$$X_T=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_T]\ \text{a.s.},$$

令(Y_t)为鞅$\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t]$的右连续修正，则对一切停时$T$，由定理3.21，有(约定$Y_\infty=X_\infty$)

$$Y_T=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_T]\ \text{a. s.},$$

由于(Y_t)为可选过程(定理5.32)，故由系5.6，X与Y无区别，

从而(X_t)几乎所有轨道右连续.

注 令(X_t)为一$(\mathscr{F}_t)$可选过程，若对一切有界停时T，X_T可积且$\mathbb{E}[X_T]$不依赖于T，则对每个$X^n=(X_{t\wedge n})(n\geqslant 1)$应用定理知，$(X_t)$为鞅，其几乎所有轨道右连续.

下一定理是停止定理的可料形式，这一定理是下一章中定义过程的可料投影的基础.

5.41 定理 设$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$为一$(\mathscr{F}_t)$上鞅(相应地，鞅)，其几乎所有轨道右连续. 令$X_{0-}=\mathbb{E}[X_0|\mathscr{F}_{0-}]$，则对一切可料时$T$及停时$U\geqslant T$，有

(41.1) $\mathbb{E}[X_U|\mathscr{F}_{T-}]\leqslant X_T$ a.s.(相应地，$=X_{T-}$).

这里$X_{T-}(\omega)=X_{T(\omega)-}(\omega)$在$\Omega$上a.s.有定义(定理3.4及3.10). 此外$X_{T-}$为可积的.

证明 令$S=T_{[T>0]}$，则$S>0$，S为可料时. 设(S_n)为预报S的停时列(定理5.28)，则由于对一切n，$S_n<S$，故由定理4.4.11)知$\mathscr{F}_{S-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{S_n}$. 下面为叙述方便起见，我们只讨论上鞅情形. 由定理3.21，我们有

$$\mathbb{E}[X_S|\mathscr{F}_{S_n}]\leqslant X_{S_n}\ \text{a.s.},$$

于是由系2.18，得

$$\mathbb{E}[X_S|\mathscr{F}_{S-}]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_S|\mathscr{F}_{S_n}]\leqslant\lim_{n\to\infty}X_{S_n}=X_{S-}\ \text{a.s.},$$

故由定理4.10.2)及定理1.21，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_{T-}]I_{[T>0]}&=\mathbb{E}[X_S|\mathscr{F}_{S-}]I_{[T>0]}\\&\leqslant X_{S-}I_{[T>0]}=X_{T-}I_{[T>0]}\ \text{a.s.},\end{aligned}$$

同理有(注意$T_{[T=0]}=O_{[T=0]}$)

$$\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_{T-}]I_{[T=0]}=\mathbb{E}[X_0|\mathscr{F}_{0-}]I_{[T=0]}=X_{0-}I_{[T=0]}\ \text{a.s.},$$

于是 $$\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_{T-}]\leqslant X_{T-}\ \text{a.s.},$$

但$X_T\geqslant\mathbb{E}[X_U|\mathscr{F}_T]$，故最终有(41.1). 此外，由定理2.29及定理2.16容易看出，X_{S-}可积，故X_{T-}亦可积.

注 由定理5.38及定理5.35.1)知，对一般的σ-域族$(\mathscr{F}_t^0)$，定理仍成立．下一定理亦如此．

5.42 定理 设ξ为一可积随机变量，S、T为两个可料时，则有

(42.1) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{S-}]|\mathscr{F}_{T-}]=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}]$ a.s..

证明 令(X_t)为鞅$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t]$的右连续修正，则我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{S-}]|\mathscr{F}_{T-}]&=\mathbb{E}[X_{S-}|\mathscr{F}_{T-}]\\&=\mathbb{E}[I_{[S\geqslant T]}X_{(S\vee T)-}+I_{[S<T]}X_{S-}|\mathscr{F}_{T-}]\\&=I_{[S\geqslant T]}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{S\vee T}|\mathscr{F}_{(S\vee T)-}]|\mathscr{F}_{T-}]+I_{[S<T]}X_{S-}\\&=I_{[S\geqslant T]}\mathbb{E}[X_{S\vee T}|\mathscr{F}_{T-}]+I_{[S<T]}X_{S-}\\&=I_{[S\geqslant T]}X_{T-}+I_{[S<T]}X_{S-}=X_{(S\wedge T)-}\\&=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{(S\wedge T)-}]\ \text{a.s.}.\end{aligned}$$

§8 应用于过程轨道正则性研究

在本节，我们继续假定$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$为一完备概率空间，$(\mathscr{F}_t)$满足通常条件．

在下一引理中，只要求$(\mathscr{F}_t)$右连续．

5.43 引理 设(X_t)为一过程，如果对任给$\varepsilon>0$，(X_t)为$(\mathscr{F}_{t+\varepsilon})$循序可测，则$(X_t)$为$(\mathscr{F}_t)$循序可测．

证明 令$t\in\mathbb{R}_+$，对任给$\varepsilon>0$，X_t为$\mathscr{F}_{t+\varepsilon}$可测，故$X_t$为$\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t$可测．对$s\leqslant t$，我们有

$$X_s=\lim_{n\to\infty}X_sI_{[0,t-\frac{1}{n}[}(s)+X_tI_{\{t\}}(s),$$

故X限于$[0,t]\times\Omega$为$\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t$可测，即$X$关于$(\mathscr{F}_t)$为循序可测．

5.44 定理 1) 设L为一循序集，则L的左极限点所成集合为可料集；L的右极限点所成集合为循序集．

2) 设(X_t)为一循序过程，令

$$U_t=\begin{cases}0, & t=0,\\ \limsup\limits_{\substack{s\to t\\ s<t}} X_s, & t>0,\end{cases}$$

$$W_t=\limsup_{\substack{s\to t\\ s>t}} X_s,\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

则(U_t)为可料过程，(W_t)为循序过程．这里允许过程取 $\pm\infty$ 值．

证明 1) 令

$$A_t(\omega)=\sup\{s:s<t,\ (s,\ \omega)\in L\}\quad(\sup\emptyset=0),$$

则(A_t)为左连续增过程，且 $A_0=0$．对任何 $a\in\mathbb{R}_+$，$[A_t>a]$为 $\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t$ 可测集$(]a,\ t[\times\Omega)\cap L$ 在 Ω 上的投影，故为 $\mathscr{F}_t$ 解析集，从而为 $\mathscr{F}_t$ 可测(因为 $\mathscr{F}_t$ 完备)，于是(A_t)为$(\mathscr{F}_t)$适应，从而为可料过程．令 L' 为 L 的左极限点所成集合，我们有

$$L'=\{(t,\ \omega):0<t<+\infty,\ A_t(\omega)=t\}.$$

故 L' 为可料集．

现证 1)的第二部分．令

$$D_t(\omega)=\inf\{s:s>t,\ (s,\ \omega)\in L\},$$

则(D_t)为右连续增过程．由于 D_t 为循序集$(]t,\ \infty[\times\Omega)\cap L$的初遇，故 D_t 为$(\mathscr{F}_t)$停时，于是对任给 $\varepsilon>0$，$D_t\wedge(t+\varepsilon)$为 $\mathscr{F}_{t+\varepsilon}$ 可测．令

$$Y_t^\varepsilon=D_t\wedge(t+\varepsilon),$$

则(Y_t^ε)为$(\mathscr{F}_{t+\varepsilon})$循序过程(甚至是 $\mathscr{F}_{t+\varepsilon}$ 可选过程)．令 L_1 为 L 的右极限点所成集合，则

$$L_1=\{(t,\ \omega):D_t(\omega)=t\}=\{(t,\ \omega):Y_t^\varepsilon(\omega)=t\}.$$

故 L_1 为$(\mathscr{F}_{t+\varepsilon})$循序集．由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故由引理 5.43，L_1 为$(\mathscr{F}_t)$循序集．

2) 设 $a\in\overline{\mathbb{R}}$，$0<t<+\infty$，$\omega\in\Omega$．为要 $U_t(\omega)\geqslant a$，必须且只需对每个 $\varepsilon>0$，t 是集合 $L_\varepsilon(\omega)=\{s:\ X_s(\omega)>a-\varepsilon\}$的左极限点，于是 $\{(t,\ \omega):0<t<+\infty,\ U_t(\omega)\geqslant a\}=\bigcap\limits_n L'_{\frac{1}{n}}$ 为可料集，这里 $L'_{\frac{1}{n}}$ 为 $L_{\frac{1}{n}}$ 的左极限点所成集合．又由于 $U_0=0$，故对一切 $a\in\overline{\mathbb{R}}$，

$\{(t,\ \omega): U_t(\omega) \geqslant a\}$为可料集，即$(U_t)$为可料过程. 同理可证$(W_t)$为循序过程.

下面，我们将应用截口定理证明几个非常有用的过程轨道正则性准则.

5.45 定理 令(X_t)为一可选过程(相应地，可料过程)，使得对一切有界停时(相应地，可料时)T，X_T可积.

1) 如果对一切有界停时(相应地，可料时)的降序列(T_n)，$\lim_n \mathbb{E}[X_{T_n}]$存在(允许为$\pm\infty$，下同)，则$X$的几乎所有轨道在$\mathbb{R}_+$上右极限存在(允许为$\pm\infty$，下同).

2) 如果对一切一致有界的停时(相应地，可料时)的增序列(T_n)，$\lim_n \mathbb{E}[X_{T_n}]$存在，则$X$的几乎所有轨道在$]0,\ \infty[$上左极限存在.

证明 1) 令

$$U_t = \liminf_{\substack{s\to t\\ s>t}} X_s, \quad V_t = \limsup_{\substack{s\to t\\ s>t}} X_s.$$

由定理5.44，(U_t)；(V_t)为循序过程($U_t = -\limsup_{\substack{s\to t\\ s>t}}(-X_s)$). 为证1)的结论，只需证集合$\{(t,\ \omega): V_t(\omega) > U_t(\omega)\}$为不足道集. 我们采用反证法. 假定该集合非不足道，则存在满足$a<b$的一对实数$(a,\ b)$，使得集合$\{(t,\ \omega): U_t(\omega)<a,\ V_t(\omega)>b\}$为非不足道集. 令$S$为该循序集初遇，则$S$为停时，且$\mathbb{P}[S<+\infty]>0$.

令

$$A_0 = \{(t,\ \omega): S(\omega)<t<S(\omega)+1,\ X_t(\omega)<a\}.$$

则A_0为可选集(相应地，可料集，注意$S+1$为可料时). 显然有$\pi(A_0)=[S<\infty]$，这里$\pi(A_0)$为A_0在Ω上的投影. 由截口定理，存在停时(相应地，可料时)S_0，使得$[\![S_0]\!]\subset A_0$，且

$$\mathbb{P}[S_0<\infty] > \left(1-\frac{1}{2}\right)\mathbb{P}[S<\infty].$$

令

$$A_1=\Big\{(t,\ \omega):S(\omega)<t<\Big(S(\omega)+\frac{1}{2}\Big)\wedge S_0(\omega),$$

$$X_t(\omega)>b\Big\},$$

则 A_1 为可选集(相应地,可料集),且 $\pi(A_1)=[S<\infty]$. 由截口定理,存在停时(相应地,可料时) S_1, 使得 $[\![S_1]\!]\subset A_1$, 且

$$\mathbb{P}[S_1<\infty]>\Big(1-\frac{1}{4}\Big)\mathbb{P}[S<\infty].$$

令

$$A_2=\Big\{(t,\ \omega):S(\omega)<t<\Big(S(\omega)+\frac{1}{4}\Big)\wedge S_1(\omega),$$

$$X_t(\omega)<a\Big\}.$$

则存在停时(相应地,可料时) S_2, 使得 $[\![S_2]\!]\subset A_2$, 且

$$\mathbb{P}[S_2<\infty]>\Big(1-\frac{1}{8}\Big)\mathbb{P}[S<\infty].$$

依此类推,我们求得一列停时(相应地,可料时) (S_i), 使得

$$\mathbb{P}[S_i<\infty]>\Big(1-\frac{1}{2^{i+1}}\Big)\mathbb{P}[S<\infty].$$

此外,在 $[S=\infty]$ 上, $S_i=+\infty$; 在 $[S_i<\infty]$ 上, $S_i<S_{i-1}\wedge(S+2^{-i})$; 在 $[S_i<\infty]$ 上,当 i 为偶数,有 $X_{S_i}<a$, 当 i 为奇数,有 $X_{S_i}>b$.

现在令 $R_i=\sup\limits_{j>i}S_j$, 则 (R_i) 单调降. 置

$$B_i=\bigcap_{j=i}^{\infty}[S_j<+\infty].$$

通过简单计算得

$$\mathbb{P}(B_i)>\Big(1-\frac{1}{2^i}\Big)\mathbb{P}[S<\infty].$$

由于在 B_i 上,有 $R_i=S_i$; 在 $[S=+\infty]$ 上,对一切 i 有 $R_i=+\infty$. 故有 $\lim\limits_{i\to\infty}R_i=R=S$ a.s.. 取 N 足够大, 使得 $\mathbb{P}[S<N]>0$, 则 $\mathbb{P}[R<N]>0$. 令 $T_i=R_i\wedge N$, 注意有 $[R_i<N]\subset B_i$, 我们得到

$$\begin{aligned}X_{T_i}&=X_{R_i}I_{[R_i<N]}+X_NI_{[R_i\geqslant N]}\\&=X_{S_i}I_{[R_i<N]}+X_NI_{[R_i\geqslant N]}.\end{aligned}$$

由于 $[R<N]=\bigcup_i[R_i<N]$，$[R\geqslant N]=\bigcap_i[R_i\geqslant N]$，我们有

$$\liminf_{k\to\infty}\mathbb{E}[X_{T_{2k+1}}]\geqslant b\,\mathbb{P}[R<N]+\mathbb{E}[X_N I_{[R\geqslant N]}],$$

$$\limsup_{k\to\infty}\mathbb{E}[X_{T_{2k}}]\leqslant a\,\mathbb{P}[R<N]+\mathbb{E}[X_N I_{[R\geqslant N]}].$$

这表明 $\lim_n\mathbb{E}[X_{T_n}]$ 不存在，这与定理假设矛盾．1)得证．

2) 令

$$U_t=\liminf_{\substack{s\to t\\ s<t}}X_s,\quad V_t=\limsup_{\substack{s\to t\\ s<t}}X_s\quad t>0,$$

并约定 $U_0=V_0=0$．则由定理5.44，(U_t)，(V_t) 为可料过程．与1)的证明类似，我们采用反证法．假定存在满足 $a<b$ 的一对实数 $(a,\ b)$，使得集合 $K=\{(t,\ \omega):U_t(\omega)<a,\ V_t(\omega)>b\}$ 为非不足道集．设 $\mathbb{P}(\pi(K))>\varepsilon>0$．由截口定理，存在可料时 $T>0$，使得在 $[T<\infty]$ 上，有 $U_T<a<b<V_T$，且 $\mathbb{P}[T<\infty]>\varepsilon$．

令 $\qquad A_0=\{(t,\ \omega):t<T(\omega),\ X_t(\omega)<a\}$，

则 A_0 为可选集(相应地，可料集)，且 $\pi(A_0)\supset[T<\infty]$．于是由截口定理，存在停时(相应地，可料时)$R_0$，使得 $[\![R_0]\!]\subset A_0$，且 $\mathbb{P}[R_0<\infty,\ T<\infty]>\varepsilon$．

令 $\quad A_1=\{(t,\ \omega):R_0(\omega)<t<T(\omega),\ X_t(\omega)>b\}$，

则 $\pi(A_1)\supset[R_0<\infty,\ T<\infty]=[R_0<T<\infty]$．于是由截口定理，存在停时(相应地，可料时)$R_1$，使得 $[\![R_1]\!]\subset A_1$，且

$$\mathbb{P}[R_1<T<\infty]>\varepsilon.$$

令 $\quad A_2=\{(t,\ \omega):R_1(\omega)<t<T(\omega),\ X_t(\omega)<a\}$．

则存在停时(相应地，可料时)R_2，使得 $[\![R_2]\!]\subset A_2$，且

$$\mathbb{P}[R_2<T<\infty]>\varepsilon.$$

依此类推，我们得到一列上升停时(相应地，可料时)(R_n)，令其极限为 R，则 $\mathbb{P}[R<\infty]\geqslant\varepsilon$．故存在足够大的 N，使得 $\mathbb{P}[R<N]>0$．令 $T_n=R_n\wedge N$．则与1)的证明类似，可证 $\lim_n\mathbb{E}[X_{T_n}]$ 不存在．这与定理假设矛盾．2)得证．

5.46 定理 若在定理 5.45 中，进一步假定存在 $K>0$，使得对一切有界停时(相应地，可料时)T，$\mathbb{E}|X_T|\leqslant K$。则 1)的结论加强为：$X$ 的几乎所有轨道在 $\mathbb{R}_+$ 上右极限存在且有穷；2) 的结论加强为：X 的几乎所有轨道在 $]0, \infty[$ 上左极限存在且有穷.

证明 我们采用反证法. 在 1)中，例如说，假定集合

$$\{(t, \omega): \limsup_{\substack{s\to t \\ s>t}} X_s(\omega) = +\infty\}$$

为非不足道集，令 S 为其初遇，则 S 为停时，且 $\mathbb{P}[S<\infty]>0$. 取 $\varepsilon>0$，使得 $\mathbb{P}[S<\infty]>\varepsilon$. 再取 c 足够大，使得 $c\varepsilon>2K$. 令 $A=\{(t, \omega): X_t(\omega)>c\}$，则 $\pi(A)\supset[S<\infty]$. 故由截口定理，存在停时(相应地，可料时)R，使得 $\mathbb{P}[R<\infty]>\varepsilon$，且在$[R<\infty]$上有 $X_R>c$. 取 N 足够大，使得 $\mathbb{P}[R<N]>\varepsilon$. 令 $T=R\wedge N$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_T|]+\mathbb{E}[|X_N|]&\geqslant\mathbb{E}[X_T]-\mathbb{E}[X_N I_{[R\geqslant N]}]\\&=\mathbb{E}[X_R I_{[R<N]}]>c\varepsilon>2K.\end{aligned}$$

这与定理假设矛盾.

在 2)中，假定集合$\{(t, \omega): \infty>t>0, \limsup\limits_{\substack{s\to t \\ s<t}} X_s(\omega) = +\infty\}$ 为非不足道集. 由截口定理，存在可料时 $S>0$，使得$\mathbb{P}[S<\infty]>0$，且在$[S<\infty]$上，$\limsup\limits_{\substack{s\to S(\omega) \\ s<S(\omega)}} X_s(\omega) = +\infty$. 类似于上面的证明，可导致矛盾.

5.47 定理 设(X_t)为一可选过程，使得 $\sup\limits_T \mathbb{E}|X_T|<+\infty$，其中 T 取遍有界停时[1]. 如果对一切有界停时的降序列(T_n)，(X_{T_n})为一致可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{T_n}]=\mathbb{E}[X_{\lim\limits_{n\to\infty} T_n}]$，则 (X_t) 的几乎所有轨道为右连续.

证明 由定理 5.46，存在 Ω_0，使得 $\mathbb{P}(\Omega_0)=1$，且对一切 $\omega\in\Omega_0$，$X_\cdot(\omega)$在 $\mathbb{R}_+$ 上右极限存在且有穷. 令

1) 换言之，(X_t)在 L^1 中有界(见定义 3.27 及其注).

$$Y_t(\omega)=\begin{cases}X_{t+}(\omega), & \omega\in\Omega_0,\\ 0, & \omega\notin\Omega_0,\end{cases}$$

则(Y_t)为右连续适应过程，从而为可选过程．为证 X 的几乎所有轨道右连续，只需证对一切 $\varepsilon>0$，集合$\{(t,\omega):X_t(\omega)\geqslant Y_t(\omega)+\varepsilon\}$及$\{(t,\omega):X_t(\omega)\leqslant Y_t(\omega)-\varepsilon\}$为不足道集．我们采用反证法．假定其中之一(例如第一个集合)为非不足道集，由截口定理，存在停时 S，使得 $\mathbb{P}[S<\infty]>0$，且在$[S<\infty]$上，有 $X_S\geqslant Y_S+\varepsilon$．令 $S_n=S+\frac{1}{n}$，$T_n=S_n\wedge N$，$T=S\wedge N$，其中 N 足够大，使得 $\mathbb{P}[S<N]>0$．则我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{T_n}]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_N I_{[S_n\geqslant N]}]+\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{S_n}I_{[S_n<N]}],$$

由于假定(X_{T_n})为一致可积，并且

$$X_{T_n}I_{[S_n<N]}=X_{S_n}I_{[S_n<N]}\xrightarrow{\text{a.s.}}Y_S I_{[S<N]},$$

故有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{T_n}]&=\mathbb{E}[X_N I_{[S\geqslant N]}]+\mathbb{E}[Y_S I_{[S<N]}]\\ &\neq\mathbb{E}[X_N I_{[S\geqslant N]}]+\mathbb{E}[X_S I_{[S<N]}]=\mathbb{E}[X_T].\end{aligned}$$

这与定理的假定矛盾．

注　设(X_t)为一满足有界停时的 Doob 停止定理的可选上鞅(文献中通常称这种上鞅为强上鞅)．如果(X_t)在 L^1 中有界，则由定理 2.21 及定理 5.47 知：为要(X_t)的几乎所有轨道右连续，必须且只需对一切有界停时的降序列(T_n)，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{T_n}]=\mathbb{E}[X_{\lim_n T_n}].$$

应用上面的注，我们得到一个关于上鞅及下鞅增序列的非常有用的结果．

5.48 定理　1) 设$(X^{(n)})_{n\geqslant 1}$为一列右连续上鞅，使得对一切 n 及一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $X_t^{(n)}\leqslant X_t^{(n+1)}$ a.s.．令

$$X_t(\omega)=\sup_n X_t^{(n)}(\omega).$$

若 X_0 可积，则(X_t)为上鞅，其几乎所有轨道右连续．

2) 设 $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ 为一列右连续下鞅，使得对一切 n 及一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $X_t^{(n)}\leqslant X_t^{(n+1)}$ a.s.，且对一切 n，$X^{(n+1)}-X^{(n)}$ 为下鞅. 令

$$X_t(\omega)=\sup_n X_t^{(n)}(\omega).$$

若对每个 $t\in\mathbb{R}_+$，X_t 可积，则 (X_t) 为下鞅，其几乎所有轨道右连续.

证明 1) 由于每个 $X^{(n)}$ 的轨道右连续性，对一切有界停时 S，我们有 $X_S^{(n)}\leqslant X_S^{(n+1)}$ a.s.. 固定 $a>0$. 令 (M_t) 为鞅 $(\mathbb{E}[X_a^{(1)}|\mathscr{F}_t])$ 的右连续修正. 则对任何有界停时 S，我们有 $M_S\leqslant X_{a\wedge S}^{(1)}$ a.s.. 于是由单调收敛定理，我们有（注意 $(X_{a\wedge t}^{(n)}-M_t)$ 为非负上鞅）

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{a\wedge S}-M_S]&=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{a\wedge S}^{(n)}-M_S]\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_0^{(n)}-M_0]=\mathbb{E}[X_0-M_0]<+\infty.\end{aligned}$$

这表明 $X_{a\wedge S}-M_S$ 可积，故 $X_{a\wedge S}$ 可积. 由于

$$0\leqslant X_{a\wedge S}-X_{a\wedge S}^{(n)}\leqslant X_{a\wedge S}-X_{a\wedge S}^{(1)},$$

故由控制收敛定理，$X_{a\wedge S}^{(n)}\xrightarrow{L^1}X_{a\wedge S}$. 设 T 为一停时，且 $T\leqslant S$，则有 $\mathbb{E}[X_{a\wedge S}^{(n)}|\mathscr{F}_T]\xrightarrow{L^1}\mathbb{E}[X_{a\wedge S}|\mathscr{F}_T]$. 但对一切 n，我们有

$$X_{a\wedge T}^{(n)}\geqslant\mathbb{E}[X_{a\wedge S}^{(n)}|\mathscr{F}_T]\quad\text{a.s.},$$

故有

$$X_{a\wedge T}\geqslant\mathbb{E}[X_{a\wedge S}|\mathscr{F}_T].$$

这表明 X^a 为强上鞅（见前面的注）. 由于 X^a-M 为非负强上鞅，故 X^a-M 在 L^1 中有界，从而 X^a 也在 L^1 中有界. 设 (S_n) 为一列单调下降的一致有界停时，其极限为 S，由定理 3.21 及定理 2.21 知，对每个 n，有 $X_{S_m\wedge a}^{(n)}\xrightarrow[m\to\infty]{L^1}X_{S\wedge a}^{(n)}$. 由于 $\mathbb{E}[X_{S_m\wedge a}^{(n)}]$ 对 n 及 m 都单调非降，故有

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}[X_{S_m\wedge a}]&=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{S_m\wedge a}^{(n)}]\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}[X_{S_m\wedge a}^{(n)}]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{S\wedge a}^{(n)}]=\mathbb{E}[X_{S\wedge a}].\end{aligned}$$

于是由上面的注知，X^a 的几乎所有轨道右连续. 但 a 是任意的，

故 X 为上鞅，其几乎所有轨道右连续.

2) 与 1)类似可证，对固定 $a>0$, X^a 为强下鞅，且在 L^1 中有界. 设(S_n)为一列单调下降的一致有界停时，其极限为 S，则对每个 n，同样有 $X^{(n)}_{S_m\wedge a}\xrightarrow[m\to\infty]{L^1}X^{(n)}_{S\wedge a}$. 依假定，$X^{(n+1)}-X^{(n)}$ 为非负下鞅，故有$\mathbb{E}[X^{(n+1)}_{S_1\wedge a}-X^{(n)}_{S_1\wedge a}]\geqslant\mathbb{E}[X^{(n+1)}_{S_m\wedge a}-X^{(n)}_{S_m\wedge a}]$. 这表明$\mathbb{E}[X^{(n)}_{S_1\wedge a}-X^{(n)}_{S_m\wedge a}]$对 n 及 m 都单调非降，故与 1)的证明类似可得

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}[X_{S_1\wedge a}-X_{S_m\wedge a}]=\mathbb{E}[X_{S_1\wedge a}-X_{S\wedge a}],$$

即有
$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}[X_{S_m\wedge a}]=\mathbb{E}[X_{S\wedge a}].$$

由此与 1)类似推得定理 2)的结论.

注 由 2)的证明看出，关于 $X^{(n+1)}-X^{(n)}$ 为下鞅的假定可以减弱为如下假定：设 S, T 为两个有界停时，且 $S\leqslant T$，则有

$$\mathbb{E}[X^{(n)}_T-X^{(n)}_S]\leqslant\mathbb{E}[X^{(n+1)}_T-X^{(n+1)}_S].$$

5.49 定理 设(X_t)为一可料过程，使得 $\sup\limits_T\mathbb{E}|X_T|<\infty$，其中 T 取遍有界可料时. 如果对一切一致有界可料时的增序列(T_n)，(X_{T_n})为一致可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{T_n}]=\mathbb{E}[X_{\lim\limits_n T_n}]$，则 (X_t) 的几乎所有轨道左连续.

该定理的证明与定理 5.47 完全类似，留给读者作为练习(提示：用到定理 5.28). 如果不从定理 5.46 出发，直接应用定理 5.13 及定理 5.28 的注 2)，亦可证明本定理.

下一定理是定理 5.47 及定理 5.49 的简单推论.

5.50 定理 1) 设(X_t)为一可选过程，则为要(X_t)的几乎所有轨道右连续，必须且只需对一切有界停时的降序列(T_n)，有

$$X_{T_n}\xrightarrow{\mathbb{P}}X_{\lim\limits_n T_n}.$$

2) 设(X_t)为一可料过程，则为要(X_t)的几乎所有轨道左连续，必须且只需对一切一致有界可料时的增序列(T_n)，有

$$X_{T_n}\xrightarrow{\mathbb{P}}X_{\lim\limits_n T_n}.$$

证明 两个结论的必要性显然，充分性容易由定理 1.47 及定理 5.47，5.49 推得$\left(令 Y=\frac{X}{1+|X|}\right)$.

§9 右连左极可料过程的刻划

在第四章，我们在定理 4.42 中，曾经给出判别右连左极适应过程是否可料的一个准则．那里是不涉及概率测度的．现在我们假定$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为一完备概率空间，$(\mathscr{F}_t)$为完备$\sigma$-域族．基于这个假定，我们将给出右连左极可料过程的另一个便于应用的刻划.

5.61 定理 设$(\mathscr{F}_t)$完备．令 X 为一右连左极适应过程，则为要 X 可料，必须且只需 X 满足下列条件：

i) 对每个绝不可及时 S，在$[S<\infty]$上，有 $X_S=X_{S-}$ a.s.．

ii) 对每个可料时 T，$X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测.

证明 必要性由定理 4.42 看出．往证充分性．设条件 i)、ii) 成立．由定理 4.41，存在严格正停时列(U_n)使得

$$\{(t, \omega): 0<t<+\infty, \ X_t(\omega)\neq X_{t-}(\omega)\}=\bigcup_n [\![U_n]\!].$$

对每个 n，由定理 5.16，存在可及时 U_n^a 及绝不可及时 U_n^i，使得

$$[\![U_n]\!]=[\![U_n^a]\!]\cup[\![U_n^i]\!].$$

由条件 i)，$U_n^i=+\infty$ a.s.，故 U_n^i 为可料时（定理 5.27.2)），从而 $U_n=U_n^a\wedge U_n^i$ 为可及时，于是存在严格正可料时序列(T_n)，使得

$$\{(t, \omega): 0<t<+\infty, \ X_t(\omega)\neq X_{t-}(\omega)\}\subset\bigcup_n [\![T_n]\!].$$

于是结合条件 ii)，由定理 4.42 知 X 为可料过程.

注 由证明看出，条件 i)成立是使 X 为可及过程的充要条件（参看定理 4.42 的注）.

第 六 章

过程的投影理论

本章主要介绍可测过程的可选和可料投影，及有限变差过程的可选和可料对偶投影. 作为这一理论的应用，我们将研究可积变差鞅，并证明极其重要的上鞅 Doob-Meyer 分解定理.

在本章，我们假定 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为一完备概率空间，$(\mathscr{F}_t)$ 满足通常条件.

§1 可测过程的投影

6.1 定理 设 (X_t) 为一可测过程，使得对一切停时 T，$X_T I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ 为 σ- 可积[1]，则存在唯一的可选过程，记为 ${}^oX$，使得对一切停时 T，有

(1.1) $$\mathbb{E}[X_T I_{[T<\infty]} \mid \mathscr{F}_T] = {}^oX_T I_{[T<\infty]} \quad \text{a.s.}.$$

这时，我们说 X 的可选投影存在[2]，并称 ${}^oX$ 为 X 的可选投影.

证明 唯一性由系 5.6 得到，往证存在性. 我们将证明分为以下四个步骤.

a) 设 $X = \xi I_{[r,s[}$，其中 ξ 为一有界(或可积)随机变量，$0 \leqslant r < s \leqslant +\infty$. 令 ${}^oX = Y I_{[r,s[}$，其中 (Y_t) 是鞅 $\mathbb{E}[\xi \mid \mathscr{F}_t]$ 的右连续修正(系 3.9). 由定理 5.32，Y 为可选过程，故 ${}^oX$ 为可选过程. 由定理 3.21 容易看出，${}^oX$ 满足(1.1)，即 ${}^oX$ 为 X 的可选投影.

1) 容易由定理 1.17 看出，这一条件等价于表面上较弱的条件：对一切有界停时 T，X_T 关于 $\mathscr{F}_T$ 为 σ- 可积.

2) 严格地说，应说 X 的可选投影存在且有穷，因为由定理证明看出，如果允许 ${}^oX$ 取 $+\infty$，则一切非负可测过程的可选投影都"存在"，但我们只考虑有限值过程，于是说 ${}^oX$ 存在，本身就意味着 ${}^oX$ 是有限值的.

b) 设 X, Y 为可测过程. 若 X, Y 的可选投影 ${}^0X$, ${}^0Y$ 存在,则对任何实数 λ, β, $\lambda X+\beta Y$ 的可选投影存在,且 ${}^0(\lambda X+\beta Y)=\lambda{}^0X+\beta{}^0Y$. 此外, 由定理5.5知, 若 $X\leqslant Y$ 为两个可选投影存在的可测过程, 则 ${}^0X\leqslant{}^0Y$, 于是由 a) 及单调类定理推知: 一切有界可测过程的可选投影存在.

c) 设 X 为满足定理条件的非负可测过程. 令 $X^{(n)}=X\wedge n$, 则由 b), $X^{(n)}$ 的可选投影存在, 且 ${}^0X^{(n)}$ 单调增(在一不足道集之外). 设 T 为一停时, 则 ${}^0X_T^{(n)}I_{[T<\infty]}$ 单调增(在一零概集外). 取 $\mathscr{F}_T$ 的元素的增序列 (F_k), 使得 $\bigcup_k F_k=\Omega$, 且使得对一切 k, $I_{F_k}I_{[T<\infty]}X_T$ 可积, 则有(定理1.19)

$$
\begin{aligned}
I_{F_k}\mathbb{E}[I_{[T<\infty]}X_T\mid\mathscr{F}_T]&=\mathbb{E}[I_{F_k}I_{[T<\infty]}X_T\mid\mathscr{F}_T]\\
&=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[I_{F_k}I_{[T<\infty]}X_T^{(n)}\mid\mathscr{F}_T]\\
&=\lim_{n\to\infty}I_{F_k}I_{[T<\infty]}{}^0X_T^{(n)}\quad\text{a.s.}.
\end{aligned}
$$

由于 k 是任意的, 这表明

$$
\lim_{n\to\infty}I_{[T<\infty]}{}^0X_T^{(n)}=\mathbb{E}[I_{[T<\infty]}X_T\mid\mathscr{F}_T]\quad\text{a.s.}.
$$

令 $Y=\limsup\limits_{n\to\infty}{}^0X^{(n)}$, 则由上式知 $[Y=+\infty]$ 为一不足道集. 令 ${}^0X=YI_{[Y<\infty]}$, 则 ${}^0X$ 为可选过程, 且对一切停时 T, ${}^0X_TI_{[T<\infty]}=Y_TI_{[T<\infty]}=\lim\limits_{n\to\infty}{}^0X_T^{(n)}I_{[T<\infty]}$ a.s.. 于是 ${}^0X$ 满足(1.1), 即 ${}^0X$ 为 X 的可选投影.

d) 设 X 为一满足定理条件的可测过程, 则 $X^+=X\vee 0$ 和 $X^-=-(X\wedge 0)$ 也满足定理条件. 于是由 c), ${}^0(X^+)$ 和 ${}^0(X^-)$ 存在. 令 ${}^0X={}^0(X^+)-{}^0(X^-)$, 则 ${}^0X$ 为 X 的可选投影.

注 由定理知, 若 X 为循序可测过程, 则 X 的可选投影存在, 且对一切有限停时 T, 有 $X_T={}^0X_T$. 特别, ${}^0X$ 为 X 的可选修正.

6.2 定理 设 $X=(X_t)$ 为一可测过程, 使得对一切可料时

T, $X_T I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{T-}$ σ-可积[1]，则存在唯一的可料过程，记为 ${}^pX$，使得对一切可料时 T，有

$$(2.1)\qquad \mathbb{E}[X_T I_{[T<\infty]} | \mathscr{F}_{T-}] = {}^pX_T I_{[T<\infty]} \text{ a.s.}.$$

这时，我们说 X 的可料投影存在[2]，并称 ${}^pX$ 为 X 的可料投影.

证明 设 $X=\xi I_{]r,s]}$，其中 ξ 为一有界(或可积)随机变量，$0\leqslant r<s\leqslant+\infty$. 令 (Y_t) 为鞅 $\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t]$ 的右连左极修正，$Y_{t-}=\lim\limits_{\substack{s\to t\\ s<t}} Y_s(t>0)$，$Y_{0-}=\mathbb{E}[Y_0|\mathscr{F}_{0-}]$，则 ${}^pX=Y_- I_{]r,s]}$ 为可料过程，且由定理 5.41 知，${}^pX$ 满足 (2.1). 即 ${}^pX$ 为 X 的可料投影. 其余证明与定理 6.1 完全类似.

6.3 注 1) 令 $(\Omega, \mathscr{F}^0, \mathbb{P})$ 为一概率空间，$(\mathscr{F}_t^0)$ 为一族上升子 σ-域. 设 X 为一 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}^0$ 可测过程，使得对一切 $(\mathscr{F}_t^0)$ 可料时 T，$X_T I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{T-}^0$ σ-可积. 令 $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{F}^0$ 关于 $\mathbb{P}$ 的完备化，$(\mathscr{F}_t)$ 为 $(\mathscr{F}_t^0)$ 的通常化(定义 5.33)，则由定理 5.35.2)，关于 $(\mathscr{F}_t)$，X 满足定理 6.2 的条件，于是，存在 X 的可料投影 Y. 再由定理 5.35.3)，存在 $(\mathscr{F}_t^0)$ 可料过程 ${}^pX$，使得 ${}^pX$ 与 Y 无区别. 于是对一切 $(\mathscr{F}_t^0)$ 可料时 T，我们有

$$\mathbb{E}[X_T I_{[T<\infty]} | \mathscr{F}_{T-}^0] = {}^pX_T I_{[T<\infty]} \text{ a.s.}.$$

这表明 ${}^pX$ 为 X 的可料投影.

2) 若进一步假定 $(\mathscr{F}_t^0)$ 右连续. 设 X 为一 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}^0$ 可测过程，使得对一切停时 T，$X_T I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T^0$ σ-可积，则我们与 1) 类似地可定义 X 的 $(\mathscr{F}_t^0)$ 可选投影. 然而，如果不假定 $(\mathscr{F}_t^0)$ 右连续，则从 Föllmer 引理(定理 3.5)出发，通过比较复杂的手续，才能构造出可选投影来. 关于这一结果，读者可参考 Dellacherie, Meyer [2] 或 [3].

3) 设 (X_t) 为一致可积右连左极鞅，则由定理 5.41 知，(X_{t-})

---

1) 我们有与定理 6.1 类似的脚注 1).

2) 我们有与定理 6.1 类似的脚注 2).

为 X 的可料投影，这里 $X_{0-}=\mathbb{E}[X_0|\mathscr{F}_{0-}]$.

4) 设 X 为一满足定理 6.1 条件(即可选投影存在)的可测过程. 由系 5.6 知，为了证明一可选过程 Y 是 X 的可选投影，只需对一切有界停时 T，验证如下等式：

$$\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_T]=Y_T \text{ a.s.}.$$

如果进一步假定对一切停时 T, $X_T I_{[T<\infty]}$ 可积，则由系 5.8 知，只需对一切停时 T，验证如下等式：

$$\mathbb{E}[X_T I_{[T<\infty]}]=\mathbb{E}[Y_T I_{[T<\infty]}].$$

对可料投影情形，有类似结论.

下一定理表明：投影与条件期望在性质上有某些相似之处.

6.4 定理 设 X 为一可测过程，Y 为一可选(相应地，可料)过程. 如果 X 的可选(相应地，可料)投影存在，则 XY 的可选(相应地，可料)投影也存在，并且有 ${}^o(XY)=({}^oX)Y$ (相应地，${}^p(XY)=({}^pX)Y$).

本定理的证明容易由定理 1.19 看出.

6.5 定理 设 X 为一可测过程. 如果 X 的可选、可料投影都存在，则 ${}^oX$ 的可料投影也存在，且与 X 的可料投影 ${}^pX$ 相等. 此外，除了一个不足道集以外，$\{(t,\omega):{}^oX_t(\omega)\neq{}^pX_t(\omega)\}$ 为停时图的可列并.

证明 第一个结论容易由定理 1.20 看出. 往证第二个结论. 设 $X=\xi I_{[\![r,s]\!]}$，其中 ξ 为一可积随机变量，$0\leqslant r<s\leqslant+\infty$. 令 Y 为鞅 $\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t]$ 的右连左极修正，则除一不足道集外，有

$$\{(t,\omega):{}^oX_t(\omega)\neq{}^pX_t(\omega)\}=\{(t,\omega):r\leqslant t<s,\ Y_t(\omega)\neq Y_{t-}(\omega)\},$$

其中 $Y_{0-}=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{0-}]$. 由定理 4.41，这一集合为停时图的可列并. 再由单调类定理(参看定理 4.21 的证明)推得定理结论.

下一定理表明：投影保持过程轨道的某些正则性.

6.6 定理 设 X 为一类(D)可测过程(见定义 3.27).

1) 若 X 的几乎所有轨道左(右)极限存在,则 ${}^oX$, ${}^pX$ 亦然.

2) 若 X 的几乎所有轨道右连续,则 ${}^oX$ 亦然.

3) 若 X 的几乎所有轨道左连续,则 ${}^pX$ 亦然.

证明 直接由定理 5.45 及定理 5.47 推得.

§2 投影的进一步性质及例子

6.7 定理 设 T 为一停时, ξ 为一实值随机变量. 令 $X=\xi I_{[\![T,\infty[\![}$, $Y=\xi I_{]\!]T,\infty[\![}$, $Z=\xi I_{[\![T]\!]}$.

1) 为要 X 可选投影存在,必须且只需 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T\sigma$-可积. 这时, ${}^oZ=\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_T]I_{[\![T]\!]}$.

2) 设 T 为可料时. 为要 X 的可料投影存在, 必须且只需 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{T-}\sigma$-可积. 这时, ${}^pZ=\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]I_{[\![T]\!]}$.

3) 设 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T\sigma$-可积,则 Y 的可料投影存在.

证明 我们只证 1), 2) 及 3) 的证明完全类似. 设 S 为一停时,则

$$X_S I_{[S<\infty]}=\xi I_{[T\leqslant S<\infty]}.$$

若 X 的可选投影存在,则 $X_T I_{[T<\infty]}=\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T\sigma$-可积. 反之, 设 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T\sigma$-可积, 令 $A_n\in\mathscr{F}_T$, $A_n\uparrow\Omega$, 使得每个 $\xi I_{[T<\infty]}I_{A_n}$ 可积. 置

$$\Omega_n=(A_n\cap[T\leqslant S])\cup[S<T].$$

则 $\Omega_n\in\mathscr{F}_S$, $\Omega_n\uparrow\Omega$, 且 $X_S I_{[S<\infty]}I_{\Omega_n}=\xi I_{A_n}I_{[T\leqslant S<\infty]}$ 可积, 故 $X_S I_{[S<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_S\sigma$-可积,即 X 的可选投影存在. 另一结论留给读者验证.

6.8 定理 设 X 为一可测过程. 如果 X 的可选(相应地, 可料)投影存在, 则对任何停时(相应地, 可料时) T, X^T 的可选(相应地, 可料)投影存在,并且我们有

$$({}^oX)I_{[\![0,T]\!]}={}^o(X^T)I_{[\![0,T]\!]} \tag{8.1}$$

(相应地, $({}^pX)I_{[\![0,T]\!]}={}^p(X^T)I_{[\![0,T]\!]}$).

证明 我们有

$$X^T = XI_{[\![0,T]\!]} + X_T I_{[T<\infty]} I_{]\!]T,\infty[\![},$$

故由定理 6.4 及 6.7 立即推知 X^T 的可选(相应地, 可料)投影存在. (8.1)容易由定理 6.4 推得(因为 $X^T I_{[\![0,T]\!]} = XI_{[\![0,T]\!]}$).

注 若 X 的可选和可料投影都存在, 则对任何停时 T, X^T 的可料投影也存在. 事实上,

$$X^T = XI_{[\![0,T]\!]} + X_T I_{[T<\infty]} I_{]\!]T,\infty[\![}.$$

故由定理 6.4 及 6.7 推知 X^T 的可料投影存在.

6.9 定理 1) 设 X 为一可测过程, (T_n) 为一列停时(相应地, 可料时), 使得 $\sup\limits_n T_n = +\infty$ a.s., 且对每个 n, $XI_{[\![0,T_n]\!]}$ 的可选(相应地,可料)投影存在,则 X 的可选(相应地,可料)投影存在.

2) 设 X 为一可测过程,(T_n)为一列停时,使得 $\sup\limits_n T_n = +\infty$ a.s., 且对每个 n, $XI_{[\![0,T_n]\!]}$ 的可料投影存在, 则 X 的可料投影存在.

证明 我们只证 2), 1) 的证明类似. 设 S 为一可料时, 令 $\Omega_n = [S \leqslant T_n] \cup [S = \infty]$, 则 $\Omega_n \in \mathscr{F}_{S-}$, $\bigcup\limits_n \Omega_n = \Omega$ a.s., 且

$$X_S I_{[S<\infty]} I_{\Omega_n} = X_S I_{[S\leqslant T_n]} I_{[S<\infty]}.$$

依假定, $X_S I_{[S\leqslant T_n]} I_{[S<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{S-}$ σ-可积, 故由定理 1.17 知, $X_S I_{[S<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{S-}$ σ-可积, 即 X 的可料投影存在.

6.10 定理 设 T 为一停时, ξ 为一可积随机变量.

1) 令 $X = \xi I_{[\![0,T]\!]}$, $Y = \mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T}]I_{[\![0,T]\!]}$, 则 X 和 Y 有相同的可选投影.

2) 令 $\overline{X} = \xi I_{[\![0,T[\![}$, $\overline{Y} = \mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]I_{[\![0,T]\!]}$, 则 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 有相同的可料投影.

证明 1) 设 S 为一停时, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_S I_{[S<\infty]}] &= \mathbb{E}[\xi I_{[S\leqslant T]}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T}]I_{[S\leqslant T]}] \\ &= \mathbb{E}[Y_S I_{[S<\infty]}].\end{aligned}$$

故由注 6.3.4)，X 和 Y 有相同可选投影.

2) 设 S 为一可料时，我们有

$$\mathbb{E}[\overline{X}_S I_{[S<\infty]}]=\mathbb{E}[\xi I_{[S\leqslant T]} I_{[S<\infty]}]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}] I_{[S\leqslant T]} I_{[S<\infty]}]$$
$$=\mathbb{E}[\overline{Y}_S I_{[S<\infty]}].$$

故 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 有相同可料投影.

注 显然 $\xi I_{[0,T]}$ 与 $\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_T] I_{[0,T]}$ 有相同的可选投影.

6.11 定理 设 T 为一停时，ξ 为一可积随机变量.

1) 为了过程 $X=\xi I_{[0,T]}$ 的可选投影为 0，必须且只需

$$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}] I_{[T>0]}=0 \text{ a.s.}.$$

2) 为了过程 $Y=\xi I_{[0,T]}$ 的可料投影为 0，必须且只需

$$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]=0 \text{ a.s.}.$$

证明 1) 充分性由定理 6.10.1) 推得(注意：$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}] I_{[0,T]}=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}] I_{[T>0]} I_{[0,T]}$)，往证必要性. 设 $X=\xi I_{[0,T]}$ 的可选投影为 0，则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_t]=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t] I_{[t<T]}=0 \quad \text{a.s.}.$$

特别，令 $t=0$，我们有 $\mathbb{E}(\xi I_{[T>0]})=0$. 令 $\mathscr{C}=\{B\cap[t<T]: B\in\mathscr{F}_t, t\in\mathbb{R}_+\}$. 则 $\mathscr{C}$ 为 π-系，$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}_{T-}$，且 $[T>0]\cap\sigma(\mathscr{C})=[T>0]\cap\mathscr{F}_{T-}$. 对一切 $A\in\mathscr{C}$，我们有 $\mathbb{E}[\xi I_{[T>0]} I_A]=0$. 故由系 1.3.1)，$\mathbb{E}[\xi I_{[T>0]}|\sigma(\mathscr{C})]=0$. 再由定理 1.21 知，

$$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}] I_{[T>0]}=\mathbb{E}[\xi I_{[T>0]}|\mathscr{F}_{T-}]=\mathbb{E}[\xi I_{[T>0]}|\sigma(\mathscr{C})]$$
$$=0 \text{ a.s.}.$$

2) 充分性由定理 6.10.2) 推得. 往证必要性. 设 $Y=\xi I_{[0,T]}$ 的可料投影为 0，则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，

$$\mathbb{E}[Y_t|\mathscr{F}_{t-}]=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{t-}] I_{[t\leqslant T]}=0.$$

令 $\mathscr{C}=\{B\cap[t\leqslant T]: B\in\mathscr{F}_{t-}, t\in\mathbb{R}_+\}$，则 $\mathscr{C}$ 为 π-系，$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}_{T-}$，且对一切 $A\in\mathscr{C}$，我们有 $\mathbb{E}[\xi I_A]=0$. 故由系 1.3.1) 知，$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]=0$ a.s..

6.12 定理 设 T 为一停时，ξ 为一 $\mathscr{F}_T$ 可测的可积随机变

量，则为了过程 $X=\xi I_{[T,\infty[}$ 为一鞅，必须且只需

$$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]I_{[0<T<\infty]}=0.$$

证明 令 $X_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}X_t$，我们有 $X_\infty=\xi I_{[T<\infty]}$. 对任何有穷停时 S,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_S]&=\mathbb{E}[\xi I_{[S\geqslant T]}+\xi I_{[T<\infty]}I_{[S<T]}|\mathscr{F}_S]\\&=X_S+\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}I_{[S<T]}|\mathscr{F}_S].\end{aligned}$$

因此，为了 (X_t) 为鞅（从而为一致可积鞅），必须且只需对一切有穷停时 S，$\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}I_{[S<T]}|\mathscr{F}_S]=0$，即过程 $\xi I_{[T<\infty]}I_{[0,T[}$ 的可选投影为 0，由定理 6.11.1)，这等价于 $\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]I_{[0<T<\infty]}=0$.

6.13 系 设 (X_t) 为一右连续一致可积鞅，令

$$X_{0-}=\mathbb{E}[X_0|\mathscr{F}_{0-}],$$

则对任何可料时 T，$\Delta X_T I_{[T,\infty[}$ 为一致可积鞅.

证明 由定理 5.41，$\mathbb{E}[\Delta X_T|\mathscr{F}_{T-}]=0$. 故由定理 6.12 知，$\Delta X_T I_{[T,\infty[}$ 为一致可积鞅.

注 设 X 为一右连续一致可积鞅，T 为一可料时，令 $X^{T-}=X^T-\Delta X_T I_{[T,\infty[}$，则 X^{T-} 为一致可积鞅.

§3 增过程在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的测度

6.14 定义 设 A 为一增过程，约定 $A_{0-}=0$. 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上定义一集函数 μ_A 如下：

$$(14.1)\qquad \mu_A(H)=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}I_H(s,\cdot)\,dA_s\right],\ H\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F},$$

则 μ_A 为一测度. 令

$$T_n=\inf\{t:A_t\geqslant n\},$$

则 T_n 为随机变量，$[0,T_n[\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$，$\bigcup\limits_n[0,T_n[=\mathbb{R}_+\times\Omega$，且 $\mu_A([0,T_n[)=\mathbb{E}[A_{T_n-}]\leqslant n$. 于是 μ_A 为 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上的 σ-有限测度[1)]，称为由 A 产生的测度.

---

1) 今后“测度”是指非负测度.

若 A 为可选(相应地, 可料), 则 T_n 为停时(相应地, 可料时), 从而 $[\![0, T_n[\![$ 为可选集(相应地, 可料集), 于是 μ_A 限于可选 σ-域(相应地, 可料 σ-域)也是 σ-有限的.

由(14.1)看出, 增过程 A 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的测度在不足道集上无负荷. 下一定理表明, 这一性质是由增过程产生的测度的主要特征之一.

6.15 定理 为要 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上的一 σ-有限测度 μ 是由某个增过程产生的, 必须且只需对每个 $t\in\mathbb{R}_+$, 如下定义的 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的集函数 Q_t,

(15.1) $$Q_t(F)=\mu([0, t]\times F)\quad F\in\mathscr{F}$$

为关于 $\mathbb{P}$ 绝对连续的 σ-有限测度. 这时, 产生 μ 的增过程是唯一确定的.

证明 必要性显然, 往证充分性. 令 A_t^1 为 Radon-Nikodym 导数 $\frac{dQ_t}{d\mathbb{P}}$, 则当 $s<t$ 时, 有 $A_s^1\leqslant A_t^1$ a.s.. 设 $t_k\downarrow t$. 则对一切 n, 令 $F_n=[A_{t_1}^1\leqslant n]$, 我们有

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}[I_{F_n}(A_{t_k}^1-A_t^1)]=\lim_{k\to\infty}\mu(]t, t_k]\times F_n)=0.$$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty}A_{t_k}^1=A_t^1$ a.s. (因 $\bigcup\limits_n F_n=\Omega$ a.s.). 令 $A_t=\inf\limits_{r>t}A_r^1$, 其中 r 为有理数, 则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有 $A_{t+}=A_t$, $A_t=A_t^1$ a.s.. 此外 (A_t) 为增过程[1], 且对一切 $F\in\mathscr{F}$ 有

$$\mu([0, t]\times F)=Q_t(F)=\int_F A_t\,d\mathbb{P}=\mathbb{E}[I_FA_t]$$

$$=\mathbb{E}\Big[\int_{[0,\infty[}I_{[0,t]\times F}(s, \cdot)\,dA_s\Big],$$

这表明 μ 为 A 产生的测度.

如果 (B_t) 是产生 μ 的另一增过程, 则 $B_t=\frac{dQ_t}{d\mathbb{P}}$ a.s.. 故 B_t

1) 在一零概集上修改轨道, 可保证 (A_t) 的所有轨道为 $\mathbb{R}_+$ 上非负、有限值、右连续增函数.

$=A_t$ a.s.. 但 (A_t), (B_t) 轨道均右连续, 故 A 与 B 无区别, 即产生 μ 的增过程是唯一的.

6.16 定义 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上的在不足道集上无负荷的测度 μ 称为可选的(相应地, 可料的), 如果对任何非负有界可测过程 X[1], 有 $\mu(X)=\mu({}^oX)$ (相应地, $\mu(X)=\mu({}^pX)$), 这里

$$\mu(X)\triangleq\int Xd\mu=\mathbb{E}_\mu[X].$$

注 设 X 为有界可测过程. 由定理6.4, 对一切有界可选(可料)测度 μ, 有 ${}^oX=\mathbb{E}_\mu[X|\mathscr{O}]$ (相应地, ${}^pX=\mathbb{E}_\mu[X|\mathscr{P}]$).

6.17 定理 设 A 为一增过程, μ_A 为 A 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的测度, 则为要 μ_A 为可选(相应地, 可料), 必须且只需 A 为适应(相应地, 可料)增过程.

证明 充分性. 设 A 适应. 令 X 为一非负有界可测过程. 我们用 (C_t) 表示与 (A_t) 联系的时变(定义 4.49), 则对每个 t, C_t 为停时(定理 4.50). 由引理 1.43, 定理 6.1 及 Fubini 定理, 我们有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}X_s dA_s\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty X_{C_s}I_{[C_s<\infty]}ds\right]=\int_0^\infty\mathbb{E}[X_{C_s}I_{[C_s<\infty]}]ds$$

$$=\int_0^\infty\mathbb{E}[{}^0X_{C_s}I_{[C_s<\infty]}]\,ds=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}{}^0X_s dA_s\right].$$

此即 $\mu_A(X)=\mu_A({}^0X)$, 故 μ_A 可选. 设 A 可料, 则 C_{t-} 为可料时(定理 4.50), 故由引理 1.43, 定理 6.2 及 Fubini 定理类似可证 $\mu_A(X)=\mu_A({}^pX)$, 即 μ_A 可料.

必要性. 设 μ_A 可选. 令 $X=I_F I_{[\![0,t]\!]}$, 其中 $F\in\mathscr{F}$. 则由于 X 与 $\mathbb{E}[I_F|\mathscr{F}_t]I_{[\![0,t]\!]}$ 有相同可选投影, 故有

$$\mathbb{E}[A_t I_F]=\mu_A(X)=\mu_A({}^0X)=\mathbb{E}[A_t\mathbb{E}[I_F|\mathscr{F}_t]]$$

$$=\mathbb{E}[\mathbb{E}[A_t|\mathscr{F}_t]\mathbb{E}[I_F|\mathscr{F}_t]]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[A_t|\mathscr{F}_t]I_F].$$

故 $A_t=\mathbb{E}[A_t|\mathscr{F}_t]$ a.s., 即 (A_t) 为适应的.

设 μ_A 可料. 由于对任何非负有界可测过程 X, X 和 ${}^0X$ 有

1) 实际上, 只需对形如 $X=I_H$ 的过程满足条件就够了, 这里 $H\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$.

相同的可料投影, 故 $\mu_A(X)=\mu({}^pX)=\mu({}^oX)$, 即 μ_A 可选, 从而 A 为适应增过程, 我们将证明 A 满足定理 5.51 的条件. 设 S 为一绝不可及时, 则 $I_{[\![S]\!]}$ 的可料投影显然为 0, 故由 μ_A 的可料性,

$$\mathbb{E}[\Delta A_S]=\mu_A(I_{[\![S]\!]})=\mu_A(0)=0.$$

但 $\Delta A_S\geqslant 0$, 故 $\Delta A_S=0$ a.s., 即 $\mathbb{P}[A_S\neq A_{S-},\ S<\infty]=0$. 设 T 为一可料时(或停时), 令 $X=I_FI_{[\![0,T]\!]}$, 其中 $F\in\mathscr{F}$. 由定理 6.10. 2), X 与 $Y=\mathbb{E}[I_F|\mathscr{F}_{T-}]I_{[\![0,T]\!]}$ 有相同可料投影, 故由 μ_A 的可料性,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_FA_T]=\mu_A(X)=\mu_A(Y)&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[I_F|\mathscr{F}_{T-}]A_T]\\&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[I_F|\mathscr{F}_{T-}]\mathbb{E}[A_T|\mathscr{F}_{T-}]]\\&=\mathbb{E}[I_F\mathbb{E}[A_T|\mathscr{F}_{T-}]].\end{aligned}$$

这表明 $A_T=\mathbb{E}[A_T|\mathscr{F}_{T-}]$ a.s., 即 A_T 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测. 这里 $A_\infty\triangleq\lim\limits_{t\to\infty}A_t$ 为 $\mathscr{F}_{\infty-}$ 可测. 故 $A_\infty I_{[T=\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测, 从而 $A_TI_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测. 由定理 5.51, A 为可料过程.

作为定理 6.17 的一个简单应用, 我们得到关于有限变差过程的 Radon-Nikodym 定理.

6.18 定理 设 A, B 为两个适应(相应地, 可料)有限变差过程. 如果对几乎所有 ω, $\mathbb{R}_+$ 上的测度 $|dB_.(\omega)|$ 关于 $|dA_.(\omega)|$ 绝对连续, 则存在一可选(相应地, 可料)过程 H, 使得对几乎所有 ω, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$B_t(\omega)=\int_{[0,t]}H_s(\omega)dA_s(\omega).$$

这里的积分是 Lebesgue-Stieltjes 积分.

证明 为叙述方便, 我们只考虑适应情形. 无妨假定 B 为适应增过程(否则分别考虑 $\overset{+}{B}$, $\overset{-}{B}$). 令 $C_t=\int_{[0,t]}|dA_s|$, 则 (C_t) 为适应增过程. 我们用 μ_B, μ_C 分别表示 B, C 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的测度, 则容易由定理假定条件看出, μ_B 关于 μ_C 绝对连续. 此外, μ_B, μ_C 限于可选 σ-域为 σ-有限的. 令 K 为 μ_B 关于 μ_C 限于

可选 σ-域上的 Radon-Nikodym 导数，则 K 为可选过程，并且对一切有界非负可选过程 X，有

$$\mu_B(X) = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} X_s K_s dC_s\right].$$

特别，令停时 $T_n \uparrow +\infty$，使得 $\mathbb{E}[B_{T_n-}] < +\infty$[1]．则

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[} K_s dC_s\right] = \mu_B([\![0, T_n[\![) = \mathbb{E}[B_{T_n-}] < +\infty^{2)}.$$

于是 $K.C$ 为一适应增过程(有限值)，令 $\mu_{K.C}$ 为 $K.C$ 产生的测度，则 $\mu_{K.C}$ 与 μ_B 限于可选 σ-域一致．但由定理 6.17，$\mu_{K.C}$ 及 μ_B 都是可选测度，故 $\mu_{K.C}$ 与 μ_B 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上一致，从而 $B=K.C$．应用这一结果于 $\overset{+}{A}$ 及 $\overset{-}{A}$，于是存在一可选过程 L，使得 $A=L.C$．显然，L 按测度 μ_C，a.e. 在集合 $\{-1, 1\}$ 中取值，故 $L.A=L^2_s C=C$．令 $H=KL$，我们有

$$B=K.C=K.(L.A)=H.A.$$

定理得证．

注　由定理证明看出：设 A，B 为两个增过程，为了对几乎所有 ω，$\mathbb{R}_+$ 上的测度 $dB.(\omega)$ 关于 $dA.(\omega)$ 绝对连续，必须且只需 μ_B 关于 μ_A 绝对连续．这里 μ_B，μ_A 分别是 B，A 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的测度．

下一定理推广了定理 6.17 的充分性部分，这一推广有时是很有用的．

6.19 定理　1) 设 (A_t) 为一适应增过程，$S\leqslant T$ 为两个停时，则对任一存在可选投影的非负可测过程 X，有

$$(19.1)\qquad \mathbb{E}\left[\int_{[S,T[} X_s dA_s \middle| \mathscr{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[S,T[} {}^0X_s dA_s \middle| \mathscr{F}_S\right].$$

2) 设 (A_t) 为一可料增过程，$S\leqslant T$ 为两个可料时，则对任一存在可料投影的非负可测过程 X，有

1) 例如，令 $T_n=\inf\{t: B_t\geqslant n\}$，则 $B_{T_n-}\leqslant n$．

2) 今后，在积分号下，我们用单括号表示随机区间，例如用 $[S, T[$ 表示 $[\![S, T[\![$．

$$(19.2)\quad \mathbb{E}\left[\int_{[S,T[} X_s dA_s \mid \mathscr{F}_{S-}\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[S,T[} {}^pX_s dA_s \mid \mathscr{F}_{S-}\right].$$

证明 我们只证2), 1)的证明类似. 设$F\in\mathscr{F}_{S-}$, 则$F\in\mathscr{F}_{T-}$, 故S_F, T_F为可料时, $[\![S_F, T_F[\![$ 为可料集. 我们有(由定理6.4及6.17)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_{[S,T[} X_s dA_s\right)I_F\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} I_{[\![S_F,T_F[\![}(s,\cdot)X_s dA_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} I_{[\![S_F,T_F[\![}(s,\cdot)\,{}^pX_s dA_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\int_{[S,T[} {}^pX_s dA_s\right)I_F\right].\end{aligned}$$

于是得(19.2).

注 1) 如在(19.1), (19.2)中将$[S, T[$换成$]S, T[$, $]S, T]$, $[S, T]$, 等式仍成立.

2) 如果在2)中, $S\leqslant T$为两个停时, 则有

$$(19.3)\quad \mathbb{E}\left[\int_{]S,T]} X_s dA_s \mid \mathscr{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[\int_{]S,T]} {}^pX_s dA_s \mid \mathscr{F}_S\right].$$

3) 如果在2)中, S为可料时, T为停时, 则(19.2)对$[S, T]$成立; 如果S为停时, T为可料时, 则(19.2)对$]S, T[$成立.

§4 测度的投影与增过程的对偶投影

6.20 定义 设μ为$\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$上的一$\sigma$-有限测度, 且在不足道集上无负荷. 对任何非负有界可测过程X, 令

$$\mu^o(X)=\mu({}^oX),\quad \mu^p(X)=\mu({}^pX),$$

则μ^o、μ^p分别为$\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$上的可选、可料测度, 且在不足道集上无负荷(但不一定为σ-有限). 我们分别称μ^o、μ^p为μ的可选、可料投影.

显然, μ与μ^o限于可选σ-域$\mathscr{O}$一致, μ与μ^p限于可料σ-域$\mathscr{P}$一致. 此外, 为了μ为$\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$上的可选(相应地, 可料)测度, 必须且只需$\mu=\mu^o$(相应地, $\mu=\mu^p$).

6.21 定义 设 A 为一增过程，称 A 为可积增过程，如果 $A_\infty=\lim\limits_{t\uparrow\infty}A_t$ 为一可积随机变量．称 A 为局部可积增过程，如果 A_0 关于 $\mathscr{F}_{0-}$ σ-可积，且存在停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.，使得 $A_{T_n}-A_0$ 为可积．称 A 为准局部可积增过程，如果存在停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.，使得 A_{T_n-} 为可积，这里约定 $A_{0-}=0$，$A_{\infty-}=A_\infty$．

显然，局部可积增过程为准局部可积的[1]．

设 (A_t) 为一有限变差过程，令 $V_t=\int_{[0,t]}|dA_s|$．如果 (V_t) 为(准)局部可积增过程，则称 A_t 为(准)局部可积变差过程．

显然，为了一有限变差过程 A 为(准)局部可积变差过程，必须且只需 A 为两个(准)局部可积增过程之差．

6.22 定理 适应有限变差过程为准局部可积变差过程；可料有限变差过程为局部可积变差过程．

证明 只需对增过程情形证明．设 A 为适应增过程，令

$$T_n=\inf\{t: A_t\geqslant n\},$$

则 T_n 为停时，$T_n\uparrow+\infty$ a.s.，且 $A_{T_n-}\leqslant n$，故 A 为准局部可积．如果 A 为可料增过程，则 T_n 为可料时(定理 5.31)．无妨设 $A_0=0$，这时 $T_n>0$．对每个 n，令停时列 $(S_{n,k})_{k\geqslant1}$ 预报 T_n(定理 5.28)，并令 $S_n=\bigvee\limits_{i=1}^{n}S_{i,n}$，则 $S_n<T_n$，$S_n\uparrow+\infty$ a.s.，且 $A_{S_n}\leqslant n$，故 A 为局部可积(甚至局部有界)增过程．

6.23 定理 设 μ 为一增过程 A 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的测度，μ^o、μ^p 分别为 μ 的可选、可料投影．

1) 为要 μ^o 为一(适应)增过程产生，必须且只需 A 为准局部可积．

2) 为要 μ^p 为一(可料)增过程产生，必须且只需 A 为局部可

---

1) 事实上，只需考虑 $A_t=A_0(t\in\mathbb{R}_+)$ 这一情形，其中 A_0 关于 $\mathscr{F}_{0-}$ σ-可积．令 $E_n\in\mathscr{F}_{0-}$，$E_n\uparrow\Omega$，使得每个 $A_0I_{E_n}$ 可积．令 $T_n=0\cdot I_{E_n^c}+(+\infty)I_{E_n}$，则 $T_n\uparrow+\infty$，且 $A_{T_n-}=A_0I_{E_n}$，故 (A_t) 为准局部可积．

积.

证明 1) 必要性. 设 μ^o 由增过程 A^o 产生, 则由定理 6.7, A^o 为适应增过程. 令

$$T_n = \inf\{t: A_t^o \geqslant n\},$$

则 T_n 为停时, $T_n \uparrow +\infty$, 且 $A_{T_n-}^o \leqslant n$. 于是

$$\mathbb{E}[A_{T_n-}] = \mu([\![0, T_n[\![) = \mu^o([\![0, T_n[\![) = \mathbb{E}[A_{T_n-}^o] \leqslant n.$$

这表明 A 为准局部可积.

充分性. 设 A 为准局部可积. 令停时 $T_n \uparrow +\infty$, 使得对一切 n, $\mathbb{E}[A_{T_n-}] < +\infty$. 则 $\mu([\![0, T_n[\![) = \mathbb{E}[A_{T_n-}] < +\infty$. 这表明 μ 限于可选 σ-域 $\mathscr{O}$ 为 σ-有限的. 特别, μ^o 为 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathscr{F}$ 上的 σ-有限测度. 此外, 设 $Q_t(F) = \mu^o([0, t] \times F)$, 令 $F_n = [T_n > t]$, 则 $\bigcup_n F_n = \Omega$, $[0, t] \times F_n \subset [\![0, T_n[\![$, 故 $Q_t(F_n) \leqslant \mu^o([\![0, T_n[\![) = \mathbb{E}[A_{T_n-}] < +\infty$. 于是 Q_t 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的 σ-有限测度. 令 $F \in \mathscr{F}$, 且 $\mathbb{P}(F) = 0$, 则 $[0, t] \times F$ 为可选集(甚至可料集), 故 $Q_t(F) = \mu^o([0, t] \times F) = \mu([0, t] \times F) = \mathbb{E}[I_F A_t] = 0$, 这表明 Q_t 关于 $\mathbb{P}$ 绝对连续. 故由定理 6.15, μ^o 由一增过程产生 (再由定理 6.17, 产生 μ^o 的增过程为适应的).

2) 必要性. 设 μ^p 为增过程 A^p 产生, 由定理 6.17, A^p 为可料增过程. 令 $F_n = [A_0^p \leqslant n]$, 则 $F_n \in \mathscr{F}_{0-}$, $F_n \uparrow \Omega$, 且

$$\mathbb{E}[A_0 I_{F_n}] = \mu(\{0\} \times F_n) = \mu^p(\{0\} \times F_n) = \mathbb{E}[A_0^p I_{F_n}] \leqslant n.$$

故 A_0 关于 $\mathscr{F}_{0-}$ σ-可积. 此外, 由于 A^p 局部可积(定理 6.22), 令停时 $T_n \uparrow +\infty$, 使得 $A_{T_n}^p - A_0^p$ 为可积. 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_{T_n} - A_0] &= \mu(]\!]0, T_n]\!]) = \mu^p(]\!]0, T_n]\!]) \\ &= \mathbb{E}[A_{T_n}^p - A_0^p] < +\infty.\end{aligned}$$

这表明 A 为局部可积.

充分性. 设 A 局部可积. 令 $B_t = A_0 (t \geqslant 0)$, $B_t^p = \mathbb{E}[A_0 | \mathscr{F}_{0-}]$ $(t \geqslant 0)$, 显然 μ_B^p 由可料增过程 B^p 产生. 于是不妨设 $A_0 = 0$(否则

考虑 $A-A_0$). 这时,令停时 $T_n\uparrow+\infty$,使得每个 A_{T_n} 可积. 我们有

$$\mu^p([\![0,\ T_n]\!])=\mu([\![0,\ T_n]\!])=\mathbb{E}[A_{T_n}]<+\infty.$$

于是 μ^p 为 σ-有限测度. 此外,设 $Q_t(F)=\mu^p([0,\ t]\times F)$,与上面 1) 的充分性证明类似,可证 Q_t 为 $(\Omega,\ \mathscr{F})$ 上的 σ-有限测度,且关于 $\mathbb{P}$ 绝对连续. 故由定理 6.15, μ^p 由一增过程产生(再由定理 6.17,产生 μ^p 的增过程为可料).

定理 6.23 导致如下的定义.

6.24 定义 设 A 为一准局部可积增过程, μ 为 A 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的测度, μ^0 为 μ 的可选投影. 由定理 6.23, 存在唯一的适应增过程 A^0, 使得 μ^0 由 A^0 产生, 我们称 A^0 为 A 的可选对偶投影(注意: 由定理 6.9, A 的可选投影 ${}^0A$ 也存在, 但 ${}^0A$ 一般不再是增过程). 设 A 为局部可积增过程, μ 为 A 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的测度, μ^p 为 μ 的可料投影. 由定理 6.23, 存在唯一的可料增过程 A^p, 使得 μ^p 由 A^p 产生, 我们称 A^p 为 A 的可料对偶投影(这里, 由定理 6.9, A 的可料投影 ${}^pA$ 也存在, 但 ${}^pA$ 一般不再是增过程).

设 A 为准局部可积变差过程,将 A 表为两个准局部可积增过程 A_1 及 A_2 之差,并令 $A^0=A_1^0-A_2^0$. 容易证明 A^0 与 A 的具体分解无关, 称 A^0 为 A 的可选对偶投影. 类似定义局部可积变差过程的可料对偶投影.

下面我们研究对偶投影的性质.

6.25 定理 1) 设 A 为一准局部可积变差过程, 则对任何可选过程 H, 有

$$(25.1)\qquad \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|\,|dA_s^0|\right]\leqslant\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|\,|dA_s|\right].$$

2) 设 A 为一局部可积变差过程,则对任何可料过程 H,有

$$(25.2)\qquad \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|\,|dA_s^p|\right]\leqslant\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|\,|dA_s|\right].$$

证明 只证 1), 2) 的证明类似. 令

$$\overset{+}{A}_t=\frac{\int_{[0,t]}|dA_s|+A_t}{2},\quad \overset{-}{A}_t=\frac{\int_{[0,t]}|dA_s|-A_t}{2},$$

则 $A=\overset{+}{A}-\overset{-}{A}$, $\overset{+}{A}$, $\overset{-}{A}$ 为准局部可积增过程. 我们有

$$A^0=(\overset{+}{A})^0-(\overset{-}{A})^0.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|\,|dA_s^0|\right]&\leqslant\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|d(\overset{+}{A})_s^0\right]\\&\quad+\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|d(\overset{-}{A})_s^0\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|d\overset{+}{A}_s\right]+\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|d\overset{-}{A}_s\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|\,|dA_s|\right].\end{aligned}$$

6.26 定理 1) 设 A 为一准局部可积变差过程, H 为一可选过程, 使得 $H.A$[1] 为一准局部可积变差过程,则 $H.A^0$ 为一适应有限变差过程,且有 $(H.A)^0=H.A^0$.

2) 设 A 为一局部可积变差过程, H 为一可料过程, 使得 $H.A$ 为一局部可积变差过程, 则 $H.A^p$ 为一可料有限变差过程, 且 $(H.A)^p=H.A^p$.

证明 我们只证 1). 令停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|I_{[0,T_n]}(s,\cdot)|dA_s|\right]&=\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n]}|H_s|\,|dA_s|\right]\\&<+\infty,\end{aligned}$$

则由(25.1)知, H 关于 A^0 可积, 且由定理 4.48.1), $H.A^0$ 为适应的. 无妨假定 A 为增过程, 且 H 非负, 则对一切非负有界可测过程 X, 我们有

$$\begin{aligned}\mu_{(H.A)^0}(X)&=\mu^0_{H.A}(X)=\mu_{H.A}({}^0X)=\mu_A(H\,{}^0X)\\&=\mu_A({}^0(HX))=\mu^0_A(HX)=\mu_{A^0}(HX)=\mu_{H.A^0}(X),\end{aligned}$$

1) 这里 $H.A$ 是 H 关于 A 按轨道的 Stieltjes 积分(定义 4.47).

故有 $(H.A)^o = H.A^o$.

6.27. 系 1) 设 A 为一准局部可积变差(相应地, 局部可积变差)过程, 则对任何停时 T, 有 $(A^T)^o = (A^o)^T$ (相应地, $(A^T)^p = (A^p)^T$).

2) 设 A 为局部可积变差过程, T 为一可料时. 令 $A^{T-} = AI_{[\![0,T[\![} + A_{T-}I_{[\![T,\infty[\![}$, 则 $(A^{T-})^p = (A^p)^{T-}$.

证明 在定理 6.26 中, 令 $H = I_{[\![0,T]\!]}$ 得 1), 令 $H = I_{[\![0,T[\![}$ 得 2).

6.28 定理 1) 设 A 为适应有限变差过程, H 为一存在可选投影的可测过程, 使得 $H.A$ 为准局部可积变差过程, 则 ${}^oH$ 关于 A 可积, 且 $(H.A)^o = ({}^oH).A$.

2) 设 A 为一可料有限变差过程, H 为一存在可料投影的可测过程, 使得 $H.A$ 为局部可积变差过程, 则 ${}^pH$ 关于 A 可积, 且 $(H.A)^p = ({}^pH).A$.

证明 只证 1). 令停时 $T_n \uparrow +\infty$, 使得 $\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[} |H_s||dA_s|\right] < \infty$, 则由于 $|{}^oH| \leqslant {}^o(|H|)$, 故

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[} |{}^oH_s||dA_s|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[} ({}^o|H|)_s|dA_s|\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[} |H_s||dA_s|\right] < \infty.$$

从而 ${}^oH$ 关于 A 可积. 无妨假定 A 为增过程且 H 非负, 则对一切非负有界可测过程 X, 我们有(注意: $\mu_A = \mu_A^o$, ${}^o({}^oHX) = {}^o(H{}^oX) = {}^oH{}^oX$)

$$\mu_{(H.A)^o}(X) = \mu_{H.A}({}^oX) = \mu_A(H{}^oX) = \mu_A({}^oHX) = \mu_{{}^oH.A}(X).$$

故 $(H.A)^o = {}^oH.A$.

注 实际上, 定理 6.26 和定理 6.28 可以统一在如下更一般的结果之中: 设 A 为一准局部可积变差过程(相应地, 局部可积变

差过程)，H 为一可测过程，使得 $H.A$ 为一准局部可积变差过程(相应地，局部可积变差过程)．则存在可选过程(相应地，可料过程) K，使得 $(H.A)^o=K.A^o$(相应地，$(H.A)^p=K.A^p$)．此外有 $K=\mathbb{E}_{\mu_A}[H|\mathscr{O}]$(相应地，$K=\mathbb{E}_{\mu_A}[H|\mathscr{P}]$)．

事实上，考虑 A 为准局部可积变差情形．由于 $\mu_{H.A}$ 关于 μ_A 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上绝对连续，且 $\frac{d\mu_{H.A}}{d\mu_A}=H$，又由于 $\mu_{H.A}$ 限于可选 σ-域 $\mathscr{O}$ 为 σ-有限，故 H 对于 $|\mu_A|$ 关于 $\mathscr{O}$ σ-可积，且有

$$\left.\frac{d\mu_{H.A}}{d\mu_A}\right|_{\mathscr{O}}=\mathbb{E}_{\mu_A}[H|\mathscr{O}],$$

这里 $\left.\frac{d\mu_{H.A}}{d\mu_A}\right|_{\mathscr{O}}$ 表示 $\mu_{H.A}$ 关于 μ_A 限于 $\mathscr{O}$ 的 Radon-Nikodym 导数．令 $K=\mathbb{E}_{\mu_A}[H|\mathscr{O}]$，则有 $(H.A)^o=K.A^o$．此外，若 H 的可选投影存在，则易知 $K={}^oH$，$|\mu_A|$-a. e.，于是我们得到定理 6.26 和定理 6.28．

下一定理是定理 6.26 和定理 6.28 的一个推论．

6.29 定理 1) 设 A 为一准局部可积增过程，$S\leqslant T$ 为两个停时，则对任何存在可选投影的非负可测过程 X，有

$$(29.1)\quad \mathbb{E}\left[\int_{[S,T[}{}^oX_s dA_s\Big|\mathscr{F}_S\right]=\mathbb{E}\left[\int_{[S,T[}X_s dA_s^o\Big|\mathscr{F}_S\right]=\mathbb{E}\left[\int_{[S,T[}{}^oX_s dA_s^o\Big|\mathscr{F}_S\right].$$

2) 设 A 为局部可积增过程，$S\leqslant T$ 为两个可料时，则对任何存在可料投影的非负可测过程 X，有

$$(29.2)\quad \mathbb{E}\left[\int_{[S,T[}{}^pX_s dA_s\Big|\mathscr{F}_{S-}\right]=\mathbb{E}\left[\int_{[S,T[}X_s dA_s^p\Big|\mathscr{F}_{S-}\right]=\mathbb{E}\left[\int_{[S,T[}{}^pX_s dA_s^p\Big|\mathscr{F}_{S-}\right].$$

证明 与定理 6.19 的证明完全类似．

注 我们有与定理 6.19 类似的注．

下一定理提供了计算对偶投影的跳的方法．

6.30 定理 1) 设 A 为一准局部可积变差过程，则 (ΔA_t) 的可选投影存在，且 ${}^o(\Delta A)=\Delta A^o$. 即对任何停时 T，有

(30.1) $$\Delta A_T^o I_{[T<\infty]}=\mathbb{E}[\Delta A_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_T].$$

2) 设 A 为一局部可积变差过程，则 (ΔA_t) 的可料投影存在，且 ${}^p(\Delta A)=\Delta A^p$. 即对任何可料时 T，有

(30.2) $$\Delta A_T^p I_{[T<\infty]}=\mathbb{E}[\Delta A_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}].$$

证明 我们只证 1)，2) 的证明类似. 无妨假定 A 为准局部可积增过程. 由定理 6.9，A 的可选投影存在，又 $A_-\leqslant A$，故 A_- 的可选投影也存在，从而 ΔA 的可选投影存在. 于是，对任何停时 T，$\Delta A_T I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ σ-可积，并且对一切 $F\in\mathscr{F}_T$，我们有

$$\mathbb{E}[\Delta A_T^o I_{[T<\infty]} I_F]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} I_{[\![T_F]\!]} dA_s^o\right]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} I_{[\![T_F]\!]} dA_s\right]$$
$$=\mathbb{E}[\Delta A_T I_{[T<\infty]} I_F].$$

此即(30.1).

6.31 系 1) 设 A 为一准局部可积变差过程. 若 A 连续，则 A^o 连续；若 ΔA 有界，则 ΔA^o 有界.

2) 设 A 为一局部可积变差过程，若 A 连续，则 A^p 连续；若 ΔA 有界，则 ΔA^p 有界.

3) 设 A 为一局部可积适应增过程，则为要 A^p 连续，必须且只需 A 拟左连续(见定义 5.21).

下一定理给出了对偶投影的两个简单的例子.

6.32 定理 1) 设 T 为一停时，ξ 为一实值随机变量，则为要有限变差过程 $A=\xi I_{[\![T,\infty[\![}$ 为准局部可积变差的，必须且只需 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ σ-可积. 这时 A 的可选对偶投影为

$$A^o=\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_T] I_{[\![T,\infty[\![}.$$

2) 设 T 为一可料时，ξ 为一实值随机变量，则为要过程 $A=\xi I_{[\![T,\infty[\![}$ 为局部可积变差的，必须且只需 $\xi I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{T-}$ σ-可积，这时 A 的可料对偶投影为 $A^p=\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}] I_{[\![T,\infty[\![}$.

证明 我们只证 1), 2) 的证明类似. 必要性以前已证过(见定义 6.24), 往证充分性. 无妨设 ξ 非负. 令 μ_A 为 A 产生的测度, 则 μ_A 以 $[\![T]\!]$ 为支撑. 取 $F_n\in\mathscr{F}_T$, $F_n\uparrow\Omega$, 使得 $\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}I_{F_n}]<\infty$. 则 $\mu_A([\![T_{F_n}]\!])=\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}I_{F_n}]<\infty$. 令 $H_n=[\![T]\!]^c\cup[\![T_{F_n}]\!]$. 则 H_n 为可选集, 且 $H_n\uparrow\mathbb{R}_+\times\Omega$. 此外, 我们有 $\mu_A(H_n)=\mu_A([\![T_{F_n}]\!])<\infty$. 故 μ_A 限于可选 σ-域为 σ-有限. 于是由定理 6.23 知, A 为准局部可积增过程. 这时, 对任何非负有界可测过程 X,

$$\mu_A({}^0X)=\mathbb{E}[{}^0X_T\xi I_{[T<\infty]}]=\mathbb{E}[{}^0X_TI_{[T<\infty]}\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_T]]$$
$$=\mathbb{E}[X_TI_{[T<\infty]}\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_T]].$$

令 $B=\mathbb{E}[\xi I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_T]I_{[\![T,\infty[\![}$, 上式表明 $\mu_A({}^0X)=\mu_B(X)$. 由于 B 适应, 故 $B=A^0$.

最后, 我们证明一个对今后有用的结果.

6.33 定理 设 A, B 为两个可积变差过程, 令 $A_{0-}=B_{0-}=0$, $A_\infty=A_{\infty-}=\lim\limits_{t\to\infty}A_t$, $B_\infty=B_{\infty-}=\lim\limits_{t\to\infty}B_t$.

1) 为了 A, B 有相同的可选对偶投影, 必须且只需对一切停时 T, 我们有

$$\mathbb{E}[A_\infty-A_{T-}]=\mathbb{E}[B_\infty-B_{T-}]\tag{33.1}$$

(即 $(A_\infty-A_{t-})$ 与 $(B_\infty-B_{t-})$ 有相同可选投影), 特别, 若 A, B 都是适应的, 则为了 A 与 B 无区别, 必须且只需对一切停时 T, (33.1) 成立.

2) 为了 A, B 有相同的可料对偶投影, 必须且只需

$$\mathbb{E}[A_0|\mathscr{F}_{0-}]=\mathbb{E}[B_0|\mathscr{F}_{0-}],$$

且对一切停时 T, 有

$$\mathbb{E}[A_\infty-A_T]=\mathbb{E}[B_\infty-B_T]\tag{33.2}$$

(即 $(A_\infty-A_t)$ 与 $(B_\infty-B_t)$ 有相同可选投影), 或者等价地,

$$\mathbb{E}[A_0|\mathscr{F}_{0-}]=\mathbb{E}[B_0|\mathscr{F}_{0-}],\tag{33.3}$$
$$\mathbb{E}[A_\infty-A_t|\mathscr{F}_t]=\mathbb{E}[B_\infty-B_t|\mathscr{F}_t]\quad \text{a.s. } (t\geqslant0).$$

特别，若 A, B 都可料，则为了 A, B 无区别，必须且只需 $A_0=B_0$, 且对一切停时 T, (33.2)成立，或者等价地，(33.3)成立.

证明 1) 必要性显然，往证充分性. 令 $\mathscr{C}=\{[\![T,\infty[\![, T$ 为停时$\}$, 则 $\mathscr{C}$ 为 π-系，$\mathscr{C}$ 生成可选 σ-域(定理 4.19)，且 $\mathbb{R}_+\times\Omega=[\![0,\infty[\![\in\mathscr{C}$. 设 μ_A, μ_B 分别为 A, B 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的有界符号测度. 由(33.1)，μ_A, μ_B 限于 $\mathscr{C}$ 一致，故由系 1.3.2)，μ_A, μ_B 限于可选 σ-域一致，即 μ_A, μ_B 的可选投影相同，于是 A, B 的可选对偶投影相同.

2) 必要性显然，往证充分性. 令 $\mathscr{C}=\{[\![0_A]\!], A\in\mathscr{F}_{0-}\}\cup\{]\!]T,\infty[\![, T$ 为停时$\}$，则 $\mathscr{C}$ 为 π 系，$\mathscr{C}$ 生成可料 σ-域(定理 4.22). 若 $\mathbb{E}[A_0|\mathscr{F}_{0-}]=\mathbb{E}[B_0|\mathscr{F}_{0-}]$, 且对一切停时 T, (33.2)成立，则 $\mu_A(\mathbb{R}_+\times\Omega)=\mu_B(\mathbb{R}_+\times\Omega)$, 且 μ_A, μ_B 限于 $\mathscr{C}$ 上一致，故 μ_A, μ_B 在可料 σ-域上一致(系 1.3.2))，即 A, B 有相同可料对偶投影. 同理，令

$$\mathscr{C}'=\{[\![0_A]\!], A\in\mathscr{F}_{0-}\}\cup\{]t,\infty[\times B: B\in\mathscr{F}_t, t\in\mathbb{R}_+\},$$

可证(33.3)式的充分性.

6.34 系 1) 设 A 为一可积变差过程(相应地，适应可积变差过程)，B 为一可料可积变差过程. 则为要 B 是 A 的可料对偶投影，必须且只需 $B_0=\mathbb{E}[A_0|\mathscr{F}_{0-}]$, 且 ${}^0A-B$(相应地，$A-B$)为一个一致可积鞅. 这里 ${}^0A$ 为 A 的可选投影.

2) 设 A 为一可积变差过程，则 ${}^0A-A^0$ 为一个一致可积鞅.

证明 1) 由定理 6.6, ${}^0A$ 为一右连左极适应过程，并且对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, ${}^0A_t=\mathbb{E}[A_t|\mathscr{F}_t]$ a.s.. 于是，为要(33.3)成立，必须且只需 $B_0=\mathbb{E}[A_0|\mathscr{F}_{0-}]$, 且对一切 $t\in\mathbb{R}_+$,

$${}^0A_t-B_t=\mathbb{E}[A_\infty-B_\infty|\mathscr{F}_t]\ \text{a.s.},$$

故得 1) 的结论.

2) 由 1), ${}^0A-A^p$ 为一致可积鞅，$A^0-A^p=A^0-(A^0)^p$ 为一致可积鞅，故 ${}^0A-A^0$ 为一致可积鞅.

§5 应用于停时及过程的研究

6.35 定理 设 A 为一适应增过程，M 为一非负一致可积右连续鞅，则对任何停时 T，有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,T]} M_s dA_s\right] = \mathbb{E}[M_T A_T]. \tag{35.1}$$

证明 令 $X = M_T I_{]0,T]]}$，则 ${}^oX_t = \mathbb{E}[M_T|\mathscr{F}_t] I_{[t<T]} = M_{t\wedge T} I_{[t<T]} = M_t I_{[t<T]}$，故由定理 6.17，

$$\mathbb{E}[M_T A_T] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} X_s dA_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} {}^oX_s dA_s\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_{[0,T]} M_s dA_s\right].$$

6.36 定理 设 A 为一适应增过程，且对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，A_t 可积. 则为要 A 是可料的，必须且只需对一切非负有界右连续鞅 M 及一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,t]} M_s dA_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,t]} M_{s-} dA_s\right], \tag{36.1}$$

其中 $M_{0-} = \mathbb{E}[M_0|\mathscr{F}_{0-}]$. 若 A 为适应可积增过程，则为要 A 是可料的，必须且只需对一切非负有界右连续鞅 M，有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} M_s dA_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} M_{s-} dA_s\right]. \tag{36.2}$$

证明 必要性由定理 6.17 推得（因 $I_{[0,t]]}M$ 的可料投影是 $I_{[0,t]]}M_-$），往证充分性. 首先设 A 为适应可积增过程. 令

$$\mathscr{C} = \{[0,t]\times F: t\in\mathbb{R}_+, F\in\mathscr{F}\}.$$

则 $\mathscr{C}$ 为 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上的 π-系，且 $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$. 设 $C = [0,t]\times F\in\mathscr{C}$，令 $M_t = \mathbb{E}[I_F|\mathscr{F}_t]$，则 ${}^oI_C = MI_{[0,t]]}$，${}^pI_C = M_- I_{[0,t]]}$. 故由 A 的适应性及 (36.1) 得

$$\mu_A(I_C) = \mu_A({}^oI_C) = \mu_A({}^pI_C).$$

这里 μ_A 为 A 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的测度. 令

$$\mathscr{G} = \{C\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}: \mu_A(I_C) = \mu_A({}^pI_C)\},$$

则 $\mathscr{G}$ 为 λ-系，且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{G}$，故由定理 1.2，$\mathscr{G}\supset\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$. 即 $\mathscr{G}=\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$. 于是 μ_A 为可料测度，故由定理 6.17，A 为可料增过程. 对一般情形，考虑每个适应可积增过程 A^n，则由上所证，A^n 为可料增过程，故 A 为可料增过程.

若 A 为适应可积增过程，且对一切非负有界右连续鞅 M，有 (36.2). 令 $M'=MI_{[\![0,t]\!]}+M_tI_{]\!]t,\infty[\![}$. 则 M' 仍是非负右连续鞅，故由(36.2)，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_{[0,t]}M_sdA_s\right]+\mathbb{E}[M_t(A_\infty-A_t)]\\&=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}M'_sdA_s\right]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}M'_{s-}dA_s\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_{[0,t]}M_{s-}dA_s\right]+\mathbb{E}[M_t(A_\infty-A_t)].\end{aligned}$$

在等式两端同时减去有限值 $\mathbb{E}[M_t(A_\infty-A_t)]$，即得(36.1). 于是根据前面已证结果，$A$ 为可料增过程.

作为定理 6.36 的一个应用，我们得到可料时的一个刻划.

6.37 定理 设 T 为一停时，则为要 T 是可料时，必须且只需对一切非负有界右连续鞅 M，有 $\mathbb{E}[M_{T-}]=\mathbb{E}[M_T]$. 这里 $M_{0-}\triangleq\mathbb{E}[M_0|\mathscr{F}_{0-}]$.

证明 必要性由定理 5.41 推得. 往证充分性. 令 $A=I_{[\![T,\infty[\![}$，则 A 为适应可积增过程，且对一切非负有界右连续鞅 M，有(注意：$M_\infty=M_{\infty-}$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}M_sdA_s\right]&=\mathbb{E}[M_TI_{[T<\infty]}]=\mathbb{E}[M_{T-}I_{[T<\infty]}]\\&=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}M_{s-}dA_s\right].\end{aligned}$$

故由定理 6.36，A 为可料增过程，从而 T 为可料时.

下一定理给出了绝不可及时的一个有用的刻划.

6.38 定理 设 $T>0$ 为一停时，则为要 T 是绝不可及时，必须且只需存在一零初值一致可积鞅 M，使得 M 在 $[\![T]\!]$ 外连续，且

在 $[T<\infty]$ 上有 $\Delta M_T=1$.

证明 必要性. 设 T 为绝不可及时. 令 $A=I_{[\![T,\infty[\![}$, 则 A 拟左连续, 从而 A 的可料对偶投影 A^p 连续 (系 6.31.3)). 令 $M=A-A^p$, 则 M 为零初值一致可积鞅 (系 6.34.1)), 且 M 满足要求的条件.

充分性. 设满足要求条件的一致可积鞅 M 存在. 则对任何可料时 S, 我们有

$$\Delta M_S=\Delta M_S I_{[S<\infty]}=\Delta M_T I_{[T=S<\infty]}=I_{[T=S<\infty]}.$$

由定理 5.41, $\mathbb{P}[T=S<\infty]=\mathbb{E}[\Delta M_S]=0$, 故 T 为绝不可及时.

下一定理给出了拟左连续 σ-域族(定义 4.39)的一个刻划.

6.39 定理 设 $\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0$, $\mathscr{F}_{\infty-}=\mathscr{F}_\infty$. 则为了 $(\mathscr{F}_t)$ 为拟左连续, 必须且只需一切一致可积右连续鞅为拟左连续的.

证明 必要性. 设 $(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续. 令 M 为一一致可积右连续鞅, 则对任何可料时 $T>0$, 我们有

$$\mathbb{E}[M_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]=M_{T-}I_{[T<\infty]}\quad \text{a.s.}.$$

但依假定 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$, 且 $M_T I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_T$ 可测, 故有 $\Delta M_T I_{[T<\infty]}=0$ a.s., 即 M 为拟左连续.

充分性. 设 $(\mathscr{F}_t)$ 不拟左连续, 则存在一可料时 T, 使得 $\mathbb{P}[T<\infty]>0$, 且 $\mathscr{F}_{T-}\neq\mathscr{F}_T$. 任取一集合 $H\in\mathscr{F}_T\setminus\mathscr{F}_{T-}$. 令 $M=(I_H-\mathbb{E}[I_H|\mathscr{F}_{T-}])I_{[\![T,\infty[\![}$, 则 M 为一致可积鞅(定理 6.12), 且 M 非拟左连续.

6.40 定义 σ-域族 $(\mathscr{F}_t)_{t\in\{0-\}\cup\bar{\mathbb{R}}_+}$ 称为全连续的, 如果对一切停时 T, 有 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{T-}$.

显然, 全连续性蕴含拟左连续性.

6.41 定理 设 $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{0-}$, $\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}_{\infty-}$. 则下列二断言等价:

i) $(\mathscr{F}_t)$ 全连续, 且一切停时为可料时;

ii) 一切一致可积右连续鞅为连续鞅.

证明 i)⇒ii). 设 i) 成立, 则对一切一致可积右连续鞅 M,

及一切停时(从而可料时)T，由定理 6.39，有 $M_T=M_{T-}$ a.s.. 这里约定 $M_{0-}=M_0$. 于是 (M_t) 与 (M_{t-}) 无区别. 但 (M_t) 右连续，故 (M_t) 连续.

ii)⟹i). 设 ii) 成立，则由定理 6.39，$(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续. 又由定理 6.37 知，一切停时为可料时，故 $(\mathscr{F}_t)$ 全连续.

§6 可积变差鞅

今后，我们经常与适应局部可积变差过程的可料对偶投影打交道. 因此，有必要引进新的简单术语和记号.

6.42 定义 设 (A_t) 为一适应局部可积变差过程，A 的可料对偶投影叫做 A 的补偿元，记为 $\widetilde{A}$；过程 $A-\widetilde{A}$ 叫做 A 的补偿，记为 $\overset{c}{A}$. 我们有 $\overset{c}{A}_0=A_0-\mathbb{E}[A_0|\mathscr{F}_{0-}]$.

由系 6.34 知，对任何适应可积变差过程 A，$A-\widetilde{A}$ 为一致可积鞅.

设 (X_t) 为适应可积变差过程，如果 (X_t) 为一鞅，则称 (X_t) 为可积变差鞅. 显然，可积变差鞅为一致可积右连续鞅. 此外，设 (X_t) 为一可积变差鞅，则由系 6.34，$\widetilde{X}_t=\mathbb{E}[X_0|\mathscr{F}_{0-}]$.

6.43 定理 设 M 为一可积变差鞅，令

$$A_t=\sum_{0<s\leqslant t}\Delta M_s,$$

则 A 为适应可积变差过程，$\widetilde{A}$ 连续，且有

$$M_t=M_0+A_t-\widetilde{A}_t. \tag{43.1}$$

此外，对任何可料过程 (H_t)，我们有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s|\,|dM_s|\right]\leqslant 2\mathbb{E}\left[\sum_{s>0}|H_s|\,|\Delta M_s|\right]. \tag{43.2}$$

证明 令 $D_t=M_t-M_0$，则

$$D_t=D_t^c+D_t^d=D_t^c+A_t,$$

(D_t) 为零初值一致可积鞅. 于是由系 6.34 知，$\widetilde{A}_t=-D_t^c$，从而 $\widetilde{A}$ 连续，且有(43.1). (43.2)容易由定理 6.25.2) 推得.

6.44 定理 1) 可料一致可积右连续鞅为连续鞅.

2) 令 (M_t) 为一可料可积变差鞅, 则 $M_t \equiv M_0$.

证明 1) 设 (M_t) 为一致可积右连续鞅. 若 (M_t) 可料, 则对任何可料时 T, M_T 为 $\mathscr{F}_{T-}$ 可测, 于是由定理 5.41,

$$M_T = \mathbb{E}[M_T | \mathscr{F}_{T-}] = M_{T-}.$$

由系 5.6, (M_t) 与 (M_{t-}) 无区别. 但 M 右连续, 故 M 连续.

2) 设 (M_t) 为一可料可积变差鞅, 这时由系 6.34, $M_t = \widetilde{M}_t = M_0$. (从定理 6.43 亦可推得此结果.)

下一定理是有关可积变差鞅的最主要的结果.

6.45 定理 设 M 为一可积变差鞅, 则对任何有界右连续鞅 N, 我们有

$$(45.1) \qquad \mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s].$$

这里约定 $M_{0-} = 0$, $N_{0-} = 0$. 此外, 过程 $L_t = M_t N_t - \sum_{s \leqslant t} \Delta M_s \Delta N_s$ 为一致可积右连续鞅.

证明 令 $X_t = N_\infty$, 则 (X_t) 的可选投影为 (N_t), 故有

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} N_\infty dM_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} N_s dM_s\right].$$

令 $N_{0-} = 0$, (N_{s-}) 为可料过程. 由于 (M_t) 的可料对偶投影为 $\mathbb{E}[M_0 | \mathscr{F}_{0-}]$, 故有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} N_{s-} dM_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} N_{s-} d\widetilde{M}_s\right] = 0.$$

从而有

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} \Delta N_s dM_s\right] = \mathbb{E}[\sum_s \Delta N_s \Delta M_s].$$

令 T 为一停时, 应用 (45.1) 于鞅 N^T, 得到

$$\mathbb{E}[M_T N_T] = \mathbb{E}[M_\infty N_T] = \mathbb{E}[\sum_{s \leqslant T} \Delta M_s \Delta N_s].$$

即 $\mathbb{E}[L_T] = 0$. 于是由定理 5.40, (L_t) 为一致可积鞅.

下一定理说明可料过程在随机积分中的特殊地位.

6.46 定理 令 M 为一可积变差鞅，H 为一可料过程，使得 $\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s||dM_s|\right]<+\infty$，则 $H.M$ 为一可积变差鞅.

证明 由定理 6.26.2)，

$$(\widetilde{H.M})=H.\widetilde{M}=H_0\widetilde{M}_0=H_0\mathbb{E}[M_0|\mathscr{F}_{0-}],$$

故 $H.M-(\widetilde{H.M})=H.M-H_0\mathbb{E}[M_0|\mathscr{F}_{0-}]$ 为可积变差鞅，从而 $H.M$ 为可积变差鞅.

§7 类 (D) 上鞅的 Doob-Meyer 分解

6.47 定理 设 (A_t) 为一可积增过程，令 (Z_t) 为过程 $(A_\infty-A_t)$ 的可选投影，则 (Z_t) 为一类 (D) 位势. 我们称 (Z_t) 为由增过程 (A_t) 生成的位势.

证明 由定理 6.6，(Z_t) 为右连左极适应过程. 此外，我们有 $Z_t=\mathbb{E}[A_\infty-A_t|\mathscr{F}_t]$ a.s.. 设 $s<t$，则有

$$\mathbb{E}[Z_t|\mathscr{F}_s]=\mathbb{E}[A_\infty-A_t|\mathscr{F}_s]\leqslant\mathbb{E}[A_\infty-A_s|\mathscr{F}_s]=Z_s \text{ a.s.},$$

故(Z_t)为非负右连续上鞅. 另一方面，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(Z_t)=\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[A_\infty-A_t]=0,$$

故(Z_t)为位势. 最后，$Z_t\leqslant\mathbb{E}[A_\infty|\mathscr{F}_t]$ a.s.，故(Z_t)为类(D)位势.

注 1) 设 (A_t) 为一可积增过程，则 (A_t-A_0) 与 (A_t) 生成相同位势.

2) 设 (A_t)，(B_t) 为两个可积增过程，则由定理 6.33 知，为要 A, B 有相同的可料对偶投影，必须且只需

$$\mathbb{E}[A_0|\mathscr{F}_{0-}]=\mathbb{E}[B_0|\mathscr{F}_{0-}],$$

且 A, B 生成相同的位势.

3) 设 (A_t) 为一零初值可料可积增过程，令 (Z_t) 为 A 生成的位势，μ_A 为 A 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的有界测度，则对任何停时 S，有

$$\mu_A(]\!]S,\ \infty[\![) = \mathbb{E}[A_\infty - A_S] = \mathbb{E}[Z_S].$$

又 $\mu_A([\![0]\!]) = 0$，故 μ_A 在可料 σ-域上的局限由 (Z_t) 唯一决定. 由于 A 可料，这表明 A 由它生成的位势 Z 唯一决定.

由定理 6.47，人们自然提出这样一个问题：是否任一类 (D) 位势都是由一可积增过程生成？下面，我们将沿着前面的注 3) 所提供的线索，给出这一问题的肯定的解答.

考虑形如 $[\![0_F]\!]$，$]\!]S,\ T]\!]$ 这样的随机区间，其中 $F\in\mathscr{F}_{0-}$，S，T 为停时，$S\leqslant T$. 令 $\mathscr{C}$ 表示这种随机区间的有限并全体，则 $\mathscr{C}$ 为 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上的一个域，且 $\mathscr{C}$ 生成可料 σ-域 (定理 4.22). 设 $H = [\![0_F]\!]\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}]\!]U_i, V_i]\!]\right)$ 为 $\mathscr{C}$ 中一元素. 令 S_1 为 $]\!]0,\ \infty[\![\cap H$ 的初遇，令 T_1 为 $]\!]S_1,\ +\infty[\![\cap H^c$ 的初遇，令 S_2 为 $]\!]T_1,\ \infty[\![\cap H$ 的初遇，令 T_2 为 $]\!]S_2,\ \infty[\![\cap H^c$ 的初遇等等，则 H 可以唯一地表成

$$H = [\![0_F]\!]\cup]\!]S_1,\ T_1]\!]\cup\cdots\cup]\!]S_n,\ T_n]\!].$$

其中 $F\in\mathscr{F}_{0-}$，在 $[S_i<+\infty]$ 上，$S_i<T_i$，在 $[T_i<+\infty]$ 上，$T_i<S_{i+1}$. 我们称 H 的这种表示为典则表示，并令

$$\overline{H} = [\![0_F]\!]\cup[\![S_1,\ T_1]\!]\cup\cdots\cup[\![S_n,\ T_n]\!].$$

6.48 引理 设 (Z_t) 为一类 (D) 位势. 设 $H\in\mathscr{C}$，其典则表示为

(48.1) $$H = [\![0_F]\!]\cup]\!]S_1,\ T_1]\!]\cup\cdots\cup]\!]S_n,\ T_n]\!].$$

令 $Z_\infty = 0$,

(48.2) $$\mu(H) = \mathbb{E}[Z_{S_1} - Z_{T_1}] + \cdots + \mathbb{E}[Z_{S_n} - Z_{T_n}],$$

则 μ 为 $\mathscr{C}$ 上的有界测度.

证明 首先，我们将证明如下事实：设 $H\in\mathscr{C}$，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $K\in\mathscr{C}$，使得 $\overline{K}\subset H$，且 $\mu(H)\leqslant\mu(K)+\varepsilon$. 为此，不妨假定 H 为形如 $]\!]S,\ T]\!]$ 的随机区间，其中 $S\leqslant T$，且在 $[S<\infty]$ 上有 $S<T$. 令

$$S_n = \left(S+\frac{1}{n}\right)_{[S+\frac{1}{n}<T]},\qquad T_n = T_{[S+\frac{1}{n}<T]}.$$

我们有 $S_n \geqslant S$, $S=\lim_n S_n$, 且在 $[S<+\infty]$ 上, $S_n>S$. 同时, $T_n \geqslant T$, $\lim_n T_n=T$, 且在 $[S_n<+\infty]$ 上有 $T_n=T$. 于是, 对每个 n, $[\![S_n, T_n]\!] \subset]\!]S, T]\!]$. 由于 Z 是右连续的, 且 Z 属于类 (D), 故有 $Z_{S_n} \xrightarrow{L^1} Z_S$, $Z_{T_n} \xrightarrow{L^1} Z_T$, 从而

$$\lim_n \mathbb{E}[Z_{S_n}-Z_{T_n}]=\mathbb{E}[Z_S-Z_T].$$

取 n 充分大, 使得 $\mathbb{E}[Z_{S_n}-Z_{T_n}] \geqslant \mathbb{E}[Z_S-Z_T]-\varepsilon$, 并令 $K=]\!]S_n, T_n]\!]$ 即可.

现在证明 μ 的 σ-可加性. 由于 μ 有界, 只需证明: 若 (H_n) 为 $\mathscr{C}$ 的元素降序列且 $\bigcap_n H_n=\emptyset$, 则 $\mu(H_n)$ 趋于 0. 任给 $\varepsilon>0$, 取 $K_n \in \mathscr{C}$, 使得 $\overline{K}_n \subset H_n$, 且 $\mu(H_n) \leqslant \mu(K_n)+2^{-n}\varepsilon$. 如果令 $L_n=K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n$, 则对一切 n, $L_n \in \mathscr{C}$, $\overline{L}_n \subset H_n$, 且

$$\mu(H_n) \leqslant \mu(L_n)+\varepsilon. \tag{48.3}$$

另一方面, $(\overline{L}_n)$ 单调降趋于空集. 于是, 若用 D_n 表示 $\overline{L}_n$ 的初遇, 则 $[\![D_n]\!] \subset \overline{L}_n$, 且序列 (D_n) 上升趋于 $+\infty$. 我们有 $L_n \subset]\!]D_n, \infty[\![$,

$$\mu(L_n) \leqslant \mu(]\!]D_n, \infty[\![)=\mathbb{E}[Z_{D_n}-Z_\infty]=\mathbb{E}[Z_{D_n}].$$

由于 $Z_{D_n} \xrightarrow{L^1} 0$ (Z 为类 (D) 位势), 故 $\lim_n \mu(L_n)=0$. 由 (48.3), $\lim_n \mu(H_n) \leqslant \varepsilon$. 但 ε 是任意的, 故 $\lim_n \mu(H_n)=0$. 引理得证.

6.49 定理 设 (Z_t) 为一类 (D) 位势, 则存在唯一的零初值可料的可积增过程 A, 使得 Z 是由 A 生成的位势.

证明 唯一性由定理 6.47 注 2) 推得. 往证存在性. 将按 (48.2) 定义的 $\mathscr{C}$ 上的有界测度 μ 唯一地扩张到可料 σ-域 $\mathscr{P}$ 上, 仍用 μ 表示之. 对任一不足道可料集 H, 其初遇 $D_H=+\infty$ a.s., 故 D_H 为可料时(定理 5.27). 令 $F=[D_H<\infty]$, 则 $F \in \mathscr{F}_{0-}$, 我们有

$$H \subset [\![0_F]\!] \cup]\!]0_F, \infty[\![.$$

由于 $\mathbb{P}(F)=0$, $0_F=+\infty$ a.s., 故 $\mu(H)=0$. 对任何非负有界可

测过程 X，令

$$(49.1) \qquad \bar{\mu}(X)=\mu({}^{p}X).$$

则 $\bar{\mu}$ 为 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上的有界测度，且在不足道集上无负荷. 由于 $\bar{\mu}$ 是 μ 的扩张，故由 (49.1)，$\bar{\mu}(X)=\bar{\mu}({}^{p}X)$，即 $\bar{\mu}$ 为可料测度. 于是由定理 6.15 及 6.17 知，存在唯一的可料可积增过程 A，使得 $\bar{\mu}$ 为 A 产生的测度. 由于 $\mathbb{E}A_0=\bar{\mu}([\![0]\!])=\mu([\![0]\!])=0$，故 $A_0=0$ a.s.. 此外，由 (48.2)，对任何停时 S,

$$\mathbb{E}[A_\infty-A_S]=\mu(]\!]S,\ \infty[\![)=\mathbb{E}[Z_S].$$

这表明 (Z_t) 为 $(A_\infty-A_t)$ 的可选投影，即 Z 为 A 产生的位势.

作为这一定理的一个重要推论，我们得到类 (D) 上鞅的 Doob-Meyer 分解定理.

6.50 定理 设 X 是一类 (D) 右连续上鞅，则存在唯一的零初值可积可料增过程 A，使得 $M=X+A$ 为一致可积鞅. 表达式 $X=M-A$ 称为 X 的 Doob-Meyer 分解.

证明 存在性. 令

$$Z_t=X_t-\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t].$$

则 (Z_t) 为类 (D) 位势. 由定理 6.49，存在一可积可料增过程 A，使得

$$Z_t=\mathbb{E}[A_\infty-A_t|\mathscr{F}_t]=\mathbb{E}[A_\infty|\mathscr{F}_t]-A_t.$$

令 $M_t=\mathbb{E}[X_\infty+A_\infty|\mathscr{F}_t]$. 则得 $M=X+A$.

唯一性. 设 $X=M-A$，$X=\bar{M}-\bar{A}$ 为 X 的两个 Doob-Meyer 分解，则 $A-\bar{A}=M-\bar{M}$ 为零初值可料可积变差鞅，故由定理 6.44.2)，$A-\bar{A}=0$，即 $A=\bar{A}$，$M=\bar{M}$.

6.51 定义 令 X 为一一致可积右连续上鞅，称 X 是正则的，如果对每个可料时 $T>0$，有

$$\mathbb{E}[X_{T-}]=\mathbb{E}[X_T].$$

或者等价地，$X_{T-}=\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_{T-}]$（因为恒有 $X_{T-}\geqslant\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_{T-}]$）.

由定义知:拟左连续上鞅为正则的;一致可积右连续鞅为正则的;可料正则上鞅必连续.

6.52 定理 令 X 为一类 (D) 右连续上鞅, $X=M-A$ 为其 Doob-Meyer 分解, 则为要 A 连续, 必须且只需 X 为正则的.

证明显然。

第七章

平方可积鞅

从本章起，我们将介绍现代鞅与随机积分理论．除非另有说明，我们讨论的出发点将始终是一个完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 及一族满足通常条件的 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域 $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$，并且，为简单起见，我们约定 $\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0$.

今后，除非特别声明，我们将对不足道集忽略不计．例如，我们将两个无区别的过程视为同一个过程，并用 $X=Y$ 表示过程 X 与过程 Y 无区别，用 $X\leqslant Y$ 表示 $[X>Y]$ 为不足道集．再如，我们将把与一可选（相应地，可料）过程无区别的过程称为可选（相应地，可料）过程[1]；把与一右连续（相应地，右连左极）过程无区别的过程称为右连续（相应地，右连左极）过程．此外，我们所研究的过程可以在一不足道集上无定义或取值 $\pm\infty$.

从本章起，我们考虑的一切鞅都假定为轨道右连续的（从而右连左极的），因此我们经常省略"右连续"这一定语.

§1　正交性与稳定子空间

7.1 定义　设 $M=(M_t)$ 为一右连续鞅，称 M 为平方可积鞅，如果 $\sup\limits_t \mathbb{E}[M_t^2]<+\infty$.

今后我们将采用如下记号:

$\mathscr{M}$——右连续一致可积鞅空间.

$\mathscr{W}$——可积变差鞅空间.

1）据 109 页脚注，与一可选（可料）过程无区别的可测过程，本身就是可选（可料）过程.

$\mathscr{M}^2$——平方可积鞅空间.

此外, 令 $\mathscr{M}_0=\{M\in\mathscr{M}: M_0=0\}$. 类似定义 $\mathscr{W}_0$, $\mathscr{M}_0^2$.

下一定理通常称为 Kolmogorov 不等式.

7.2 定理 设(M_t)为一平方可积鞅. 令 $M^*=\sup\limits_t|M_t|$, 则对任何 $\lambda>0$, 我们有

$$(2.1)\qquad \mathbb{P}([M^*\geqslant\lambda])\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\sup_t\mathbb{E}[M_t^2].$$

证明 设 $\{t_1, t_2, \cdots\}$ 为 $\mathbb{R}_+$ 的可数稠集, 则由系 2.13, 我们有

$$\mathbb{P}[\sup_{j\leqslant n}|M_{t_j}|>\lambda]\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\sup_t\mathbb{E}[M_t^2].$$

由于 $[M^*>\lambda]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\sup\limits_{j\leqslant n}|M_{t_j}|>\lambda]$, 且 $[\sup\limits_{j\leqslant n}|M_{t_j}|>\lambda]$ 关于 n 单调非降, 故有

$$\mathbb{P}([M^*>\lambda])\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\sup_t\mathbb{E}[M_t^2].$$

在上式中以 $\lambda+\varepsilon$ 代替 λ, 再令 $\varepsilon\downarrow 0$, 即得(2.1).

7.3 定理 1) 设 $M\in\mathscr{M}$, 令 $M_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}M_t$ a.s., 则为要 $M\in\mathscr{M}^2$, 必须且只需 $\mathbb{E}[M_\infty^2]<+\infty$. 设 $M\in\mathscr{M}^2$, 则有

$$(3.1)\qquad \mathbb{E}[M_\infty^2]=\sup_t\mathbb{E}[M_t^2].$$

2) $\mathscr{M}^2$ 按内积$(M, N)=\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]$ 为一 Hilbert 空间, 且与 $L^2(\Omega, \mathscr{F}_{\infty-}, \mathbb{P})$ 同构, $M\mapsto M_\infty$ 为其同构映象.

证明 1) 设 $M\in\mathscr{M}^2$, 由 Fatou 引理, 我们有

$$(3.2)\qquad \mathbb{E}[M_\infty^2]\leqslant\sup_t\mathbb{E}[M_t^2].$$

反之, 设 $M\in\mathscr{M}$, 且 $\mathbb{E}[M_\infty^2]<+\infty$. 由于 $M_t=\mathbb{E}[M_\infty|\mathscr{F}_t]$. 故由 Jensen 不等式, 我们有 $M_t^2\leqslant\mathbb{E}[M_\infty^2|\mathscr{F}_t]$. 从而有

$$(3.3)\qquad \sup_t\mathbb{E}[M_t^2]\leqslant\mathbb{E}[M_\infty^2]<+\infty.$$

这表明 $M\in\mathscr{M}^2$. 设 $M\in\mathscr{M}^2$, 则由(3.2)及(3.3)得(3.1).

2) 显然.

7.4 定理 设 $(M^n)_{n\geq1}\subset\mathscr{M}^2$, $M\in\mathscr{M}^2$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|M^n_\infty-M_\infty\|_2=\lim\limits_{n\to\infty}(\mathbb{E}[(M^n_\infty-M_\infty)^2])^{\frac{1}{2}}=0$, 则存在子序列 $(M^{n_k})_{k\geq1}$ 使得对几乎所有 ω, $M^{n_k}_t(\omega)$ 对 $t\in\mathbb{R}_+$ 一致收敛于 $M_t(\omega)$.

证明 选取子列 $(M^{n_k})_{k\geq1}$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|M^{n_k}_\infty-M_\infty\|_2<+\infty$. 由 Doob 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sup_t|M^{n_k}_t-M_t|\right]&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[\sup_t|M^{n_k}_t-M_t|]\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(\mathbb{E}[\sup_t(M^{n_k}_t-M_t)^2])^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant2\sum_{k=1}^{\infty}(\mathbb{E}[(M^{n_k}_\infty-M_\infty)^2])^{\frac{1}{2}}\\&<+\infty.\end{aligned}$$

特别有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sup\limits_t|M^{n_k}_t-M_t|<+\infty$ a.s.. 这表明, 对几乎所有 ω, $M^{n_k}_t(\omega)$ 对 $t\in\mathbb{R}_+$ 一致收敛于 $M_t(\omega)$.

7.5 系 令 $\mathscr{M}^{2,c}$ 表示连续平方可积鞅全体, 则 $\mathscr{M}^{2,c}$ 为 $\mathscr{M}^2$ 的闭子空间.

7.6 定理 1) 设 $M\in\mathscr{M}^2$, 则对任何停时 T, $M^T\in\mathscr{M}^2$. 此外, 设 $(T_n)_{n\geq1}$ 为一列停时, 且 $T_n\uparrow+\infty$ a.s., 则有 $M_{T_n}\xrightarrow{L^2}M_\infty$.

2) 设 $(M^n)_{n\geq1}\subset\mathscr{M}^2$, $M\in\mathscr{M}^2$. 若 $\|M^n_\infty-M_\infty\|_2\to0$, 则对任何停时 T, $\|M^n_T-M_T\|_2\to0$.

证明 1) 首先, 由定理 5.39, $M^T\in\mathscr{M}$. 又由于

$$\mathbb{E}[M_T^2]\leqslant\mathbb{E}[M^{*2}]\leqslant4\sup_t\mathbb{E}[M_t^2]<+\infty.$$

故由定理 7.3.1), $M^T\in\mathscr{M}^2$.

设 $T_n\uparrow+\infty$ a.s. 为一停时列, 由 Doob 停止定理, $(M_{T_n})_{n\geq1}$ 关于 $(\mathscr{F}_{T_n})_{n\geq1}$ 为一平方可积鞅, 故由系 2.19, 有 $M_{T_n}\xrightarrow{L^2}M_\infty$.

2) 由于 $(M^n-M)^2$ 为下鞅, 故有

$$\mathbb{E}[(M^n_T-M_T)^2]\leqslant\mathbb{E}[(M^n_\infty-M_\infty)^2].$$

由此推得 2).

7.7 定义 设 M, N 为两个平方可积鞅. 称 M 与 N 相互正交, 如果 $M_0N_0=0$, 且对一切停时 T, 有 $\mathbb{E}[M_TN_T]=0$. 我们用 $M\perp\!\!\!\perp N$ 表示 M 与 N 相互正交. 我们用 $M\perp N$ 表示 $\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]=0$, 即 $M\perp N$ 意味着 M、N 作为Hilbert 空间 $\mathscr{M}^2$ 中的两个元素相互正交. 为了区别于前述正交概念, 我们有时称后者为弱正交.

7.8 定理 设 M, $N\in\mathscr{M}^2$, 且 $M_0N_0=0$. 则为要 M 与 N 相互正交, 必须且只需 MN 为鞅.

证明 必要性直接由定理 5.40 推得. 往证充分性. 设 MN 为鞅, 则由于 $M^*\in L^2$, $N^*\in L^2$, 故 $M^*N^*\in L^1$. 从而 MN 为一致可积鞅. 于是, 对一切停时 T, $\mathbb{E}[M_TN_T]=\mathbb{E}[M_0N_0]=0$, 即 $M\perp\!\!\!\perp N$.

7.9 定理 设 $\mathscr{X}\subset\mathscr{M}^2$, $\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$ 为 $\mathscr{X}$ 生成的闭线性子空间. 令 $N\in\mathscr{M}^2$. 若 $N\perp\!\!\!\perp\mathscr{X}$, 则 $N\perp\!\!\!\perp\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$.

证明 显然有 $N\perp\!\!\!\perp\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 这里 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 为由 $\mathscr{X}$ 生成的线性空间. 设 $M\in\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$, 取 $(M^n)\subset\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 使 $\|M^n_\infty-M_\infty\|_2\to0$. 由定理 7.6, 对任何停时 T, $M^n_T\xrightarrow{L^2}M_T$, 从而 $M^n_TN_T\xrightarrow{L^1}M_TN_T$. 于是 $M_0N_0=0$, $\mathbb{E}[M_TN_T]=0$, 即 $N\perp\!\!\!\perp M$. 因此, $N\perp\!\!\!\perp\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$.

7.10 定义 令 $\mathscr{X}\subset\mathscr{M}^2$, 称 $\mathscr{X}$ 为稳定的, 如果

i) 对一切停时 T, $M\in\mathscr{X}\Rightarrow M^T\in\mathscr{X}$.

ii) 对一切 $A\in\mathscr{F}_0$, $M\in\mathscr{X}\Rightarrow I_AM\in\mathscr{X}$.

稳定的闭线性子空间称为稳定子空间.

7.11 定理 令 $\mathscr{X}\subset\mathscr{M}^2$. 若 $\mathscr{X}$ 为稳定的, 则 $\mathscr{X}^\perp$ 及 $\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$ 为稳定子空间, 并且 $\mathscr{X}^\perp\perp\!\!\!\perp\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$. 这里

$$\mathscr{X}^\perp=\{M\in\mathscr{M}^2:\forall N\in\mathscr{X},\ M\perp N\}.$$

证明 设 $N\in\mathscr{X}^\perp$, $M\in\mathscr{X}$. 则对任何停时 T, $M^T\in\mathscr{X}$, 故有

$$\mathbb{E}[M_\infty N^T_\infty]=\mathbb{E}[M_\infty N_T]=\mathbb{E}[M_TN_T]=\mathbb{E}[M^T_\infty N_\infty]=0.$$

这表明$N^T\in\mathscr{X}^\perp$. 此外, 令$A\in\mathscr{F}_0$,则$I_AM\in\mathscr{X}$, 故有$\mathbb{E}[I_AN_\infty M_\infty]=0$, 从而$I_AN\in\mathscr{X}^\perp$. 因此, $\mathscr{X}^\perp$为稳定子空间. 于是$\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}=(\mathscr{X}^\perp)^\perp$为稳定子空间.

现令$M\in\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$, $N\in\mathscr{X}^\perp$. 则对任何停时T, 我们有$M^T\in\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$, $N^T\in\mathscr{X}^\perp$, 从而$\mathbb{E}[M_TN_T]=\mathbb{E}[M_\infty^TN_\infty^T]=0$. 此外, 对任何$A\in\mathscr{F}_0$, 有$I_AM^T\in\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$, 故有$\mathbb{E}[I_AM_TN_T]=0$. 特别, 令$T=0$,则有$M_0N_0=0$. 这表明$M\perp\!\!\!\perp N$.

7.12 系 令$\mathscr{M}^{2,d}=(\mathscr{M}^{2,c})^\perp$. 则$\mathscr{M}^{2,c}$及$\mathscr{M}^{2,d}$为稳定子空间,且有$\mathscr{M}^{2,c}\perp\!\!\!\perp\mathscr{M}^{2,d}$.

7.13 定义 $\mathscr{M}^{2,d}$中的元称为纯断平方可积鞅. 设$M\in\mathscr{M}^{2,d}$, 显然有$M_0=0$ a.s.[1].

设$M\in\mathscr{M}^2$, 则由系7.12, M有如下唯一分解:

$$M=M^c+M^d,$$

其中$M^c\in\mathscr{M}^{2,c}$, $M^d\in\mathscr{M}^{2,d}$. 我们称M^c为M的连续鞅部分, M^d为M的纯断鞅部分.

设$M\in\mathscr{M}^2$, T为一停时,显然我们有

$$(M^T)^c=(M^c)^T,\quad (M^T)^d=(M^d)^T.$$

§2 纯断平方可积鞅的结构

7.14 引理 设(A_t)为一可积适应增过程,$(\widetilde{A}_t)$为其可料对偶投影,则有

$$\mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty^2]\leqslant 4\mathbb{E}[A_\infty^2].$$

证明 令(N_t)为鞅$\mathbb{E}[A_\infty|\mathscr{F}_t]$的右连续修正,$N^*=\sup\limits_t|N_t|$. 则由Doob不等式,

$$\mathbb{E}[N^{*2}]\leqslant 4\mathbb{E}[N_\infty^2]=4\mathbb{E}[A_\infty^2].$$

由于$A-\widetilde{A}$为一致可积鞅,故有

1) 这里需要特别指出: 在许多文献中, $\mathscr{M}^{2,c}$表示零初值连续平方可积鞅空间,从而纯断平方可积鞅的初值不必为零.

$$A_s-\widetilde{A}_s=\mathbb{E}[A_\infty-\widetilde{A}_\infty|\mathscr{F}_s]=N_s-\mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty|\mathscr{F}_s].$$

于是由定理 6.17,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty^2]&=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}\widetilde{A}_\infty d\widetilde{A}_s\right]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}\mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty|\mathscr{F}_{s-}]d\widetilde{A}_s\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}(\widetilde{A}_{s-}-A_{s-}+N_{s-})dA_s\right]\\&\leqslant\mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty A_\infty+N^*A_\infty].\end{aligned}$$

这里约定 $N_0=N_{0-}$. 但是,我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty A_\infty]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}A_\infty d\widetilde{A}_s\right]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}N_{s-}dA_s\right]\\\leqslant\mathbb{E}[N^*A_\infty],\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty^2]\leqslant2\mathbb{E}[N^*A_\infty]\leqslant2(\mathbb{E}[N^{*2}])^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}[A_\infty^2])^{\frac{1}{2}}\\\leqslant4\mathbb{E}[A_\infty^2].\end{aligned}$$

7.15 引理 设 $M\in\mathscr{M}^2$, 则对任何停时 T, 有[1)]

$$\mathbb{E}[\Delta M_T^2]\leqslant16\mathbb{E}[M_\infty^2].$$

这里约定 $\Delta M_0=M_0$, $\Delta M_\infty=0$.

证明 令 $M^*=\sup_t|M_t|$, 则由 Doob 不等式,

$$\mathbb{E}[M^{*2}]\leqslant4\mathbb{E}[M_\infty^2]<+\infty.$$

但 $|\Delta M_T|\leqslant2M^*$, 故 $\mathbb{E}[\Delta M_T^2]\leqslant16\mathbb{E}[M_\infty^2]$.

下面我们研究纯断平方可积鞅的结构.

设 T 为一停时且 $T>0$ a.s., 令

$$\mathscr{M}^2[T]=\{M\in\mathscr{M}^{2,d}:\ M\text{ 在 }[\![T]\!]\text{ 以外连续}\}.$$

显然 $\mathscr{M}^2[T]$ 为稳定子空间.

7.16 定理 设 T 为一绝不可及时或可料时, 且 $T>0$ a.s., 则

1) $M\in\mathscr{M}^2[T]\Leftrightarrow M=A-\widetilde{A}$, 其中

$$A=\xi I_{[\![T,\infty[\![},\quad \xi\in L^2(\mathscr{F}_T).$$

---

1) 这里及今后,我们用 ΔM^2 表示 $(\Delta M)^2$. 注意不要将 ΔM^2 误解为 $\Delta(M^2)$.

2) 设 $M\in\mathscr{M}^2[T]$，则对一切 $N\in\mathscr{M}^2$，我们有

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]=\mathbb{E}[\Delta M_T\Delta N_T]. \tag{16.1}$$

3) 设 $M\in\mathscr{M}^2$，则 M 到 $\mathscr{M}^2[T]$ 上的投影为 $N=A-\widetilde{A}$，其中 $A=\Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![}$.

证明 1) 充分性. 设 $\xi\in L^2(\mathscr{F}_T)$，$A=\xi I_{[\![T,\infty[\![}$，则由引理 7.14，$A-\widetilde{A}\in\mathscr{M}^2$. 若 T 为绝不可及时，则 $\widetilde{A}$ 连续(系 6.31.3))；若 T 为可料时，则 $\widetilde{A}=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]I_{[\![T,\infty[\![}$ (定理 6.32.2)). 在这两种情形下，$A-\widetilde{A}$ 在 $[\![T]\!]$ 外连续. 剩下只要证明 $A-\widetilde{A}\in\mathscr{M}^{2,d}$. 设 $N\in\mathscr{M}^{2,c}$，令

$$T_n=\inf\{t:N_t\geqslant n\},$$

则 T_n 为停时，且 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.. 对每个 n，N^{T_n} 为有界连续鞅，故由定理 6.45,

$$\mathbb{E}[(A-\widetilde{A})_\infty N_{T_n}]=\mathbb{E}[(A-\widetilde{A})_\infty N^{T_n}_\infty]=0.$$

从而由定理 7.6.1)，$\mathbb{E}[(A-\widetilde{A})_\infty N_\infty]=0$. 这表明 $A-\widetilde{A}\in\mathscr{M}^{2,d}$，于是 $A-\widetilde{A}\in\mathscr{M}^2[T]$.

必要性. 设 $M\in\mathscr{M}^2[T]$. 令 $A=\Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![}$. 则由上所证，$A-\widetilde{A}\in\mathscr{M}^2[T]$，从而 $M-(A-\widetilde{A})\in\mathscr{M}^2[T]$. 另一方面，若 T 为绝不可及时，$\widetilde{A}$ 连续，故 $\Delta(A-\widetilde{A})_T=\Delta A_T=\Delta M_T$；若 T 为可料时，则 $\widetilde{A}=\mathbb{E}[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}]I_{[\![T,\infty[\![}=0$ (定理 5.41)，故仍有 $\Delta(A-\widetilde{A})_T=\Delta M_T$. 这表明 $M-(A-\widetilde{A})\in\mathscr{M}^{2,c}$. 于是 $M-(A-\widetilde{A})=0$，即 $M=A-\widetilde{A}$.

2) 令 $N^{(n)}$ 为有界鞅 $\mathbb{E}[N_\infty I_{[|N_\infty|\leqslant n]}|\mathscr{F}_t]$ 的右连续修正，则由定理 6.45,

$$\mathbb{E}[M_\infty N^{(n)}_\infty]=\mathbb{E}[\Delta M_T\Delta N^{(n)}_T].$$

但 $N^{(n)}_\infty=N_\infty I_{[|N_\infty|\leqslant n]}\xrightarrow[n\to\infty]{L^2}N_\infty$，故由引理 7.15，$\Delta N^{(n)}_T\xrightarrow[n\to\infty]{L^2}\Delta N_T$. 于是在上式中令 $n\to\infty$ 得(16.1).

3) 由 1) 知，$N=A-\widetilde{A}\in\mathscr{M}^2[T]$，且 $M-N$ 在 $[\![T]\!]$ 上无跳.

故由 2), $M-N\perp\mathscr{M}^2[T]$, 即 N 为 M 到 $\mathscr{M}^2[T]$ 上的投影.

注 下面我们将看到(见定理 7.19.2)), 对一般停时 $T>0$ a.s., 我们仍有

$$M\in\mathscr{M}^2[T]\Rightarrow M=A-\widetilde{A},$$

其中 $A=\Delta M_T I_{[T,\infty[}$.

下一定理描述了纯断平方可积鞅的结构.

7.17 定理 1) 设 $M\in\mathscr{M}^2$, 则有

$$\mathbb{E}\big[\sum_s \Delta M_s^2\big]\leqslant\mathbb{E}[M_\infty^2]\quad(\Delta M_0=M_0). \tag{17.1}$$

为要(17.1)中等号成立, 当且仅当 $M-M_0\in\mathscr{M}^{2,d}$.

2) 设 $M\in\mathscr{M}^{2,d}$. 令 $(T_n)_{n\geqslant1}$ 为一穷举 M 跳的标准停时列(见定理 5.20), M^n 为 M 到 $\mathscr{M}^2[T_n]$ 上的投影(即 M^n 为 $\Delta M_{T_n}I_{[T_n,\infty[}$ 的补偿), 则 $\mathscr{M}^2$ 中的正交级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M^n$ 收敛于 M.

3) 设 $M\in\mathscr{M}^{2,d}$, 则 M 有如下唯一分解:

$$M=M^{da}+M^{di},$$

其中 $M^{da}\in\mathscr{M}^{2,d}$, $M^{di}\in\mathscr{M}^{2,d}$, M^{da} 只有可及跳, M^{di} 只有绝不可及跳.

证明 1) 设 $(T_n)_{n\geqslant1}$ 为一穷举 M 跳的标准停时列. 令

$$A^n=\Delta M_{T_n}I_{[T_n,\infty[},\quad M^n=A^n-\widetilde{A}^n,\quad H^k=\sum_{n=1}^{k}M^n.$$

则 $M-M_0-H^k$ 在 $[\![T_1]\!],\cdots,[\![T_k]\!]$ 上无跳, 故由(16.1), $M-M_0-H^k$ 弱正交于 H^k. 又 $M^1,\cdots,M^k$ 相互弱正交, 故有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_\infty^2]&=\mathbb{E}[M_0^2]+\mathbb{E}[(H_\infty^k)^2]+\mathbb{E}[(M_\infty-M_0-H_\infty^k)^2]\\&=\sum_{n=1}^{k}\mathbb{E}[(M_\infty^n)^2]+\mathbb{E}[M_0^2]+\mathbb{E}[(M_\infty-M_0-H_\infty^k)^2].\end{aligned}$$

由(16.1), $\mathbb{E}[(M_\infty^n)^2]=\mathbb{E}[\Delta M_{T_n}^2]$, 故有

$$\mathbb{E}[M_\infty^2]=\mathbb{E}[M_0^2]+\sum_{n=1}^{k}\mathbb{E}[\Delta M_{T_n}^2]+\mathbb{E}[(M_\infty-M_0-H_\infty^k)^2]. \tag{17.2}$$

特别, 正交级数 $\sum\limits_1^\infty M^n$ 在 $\mathscr{M}^2$ 中收敛于一元 H, 且 $H\in\mathscr{M}^{2,d}$. 此

外，由定理 7.4, H 与 M 的跳相同，故 $M-H$ 为连续平方可积鞅，从而 $M^d=H$, $M^c=M-H$. 由(17.2)，我们有

$$\mathbb{E}[M_\infty^2]=\mathbb{E}[M_0^2]+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[\Delta M_{T_n}^2]+\mathbb{E}[(M_\infty-M_0-H_\infty)^2]$$

$$=\mathbb{E}[\sum_s \Delta M_s^2]+\mathbb{E}[(M_\infty-M_0-H_\infty)^2].$$

于是有(17.1). 此外，为要(17.1)等号成立，当且仅当 $M=M_0+H$，即 $M^d=M-M_0$，也就是说，$M-M_0\in\mathscr{M}^{2,d}$.

2) 的证明已含于 1) 的证明之中.

3) 设 $(T_n)_{n\geq 1}$ 为一穷举 M 跳的标准停时列. 令 $\mathbb{N}_1=\{n: T_n$ 为可料时$\}$, $\mathbb{N}_2=\{n: T_n$ 为绝不可及时$\}$，置

$$M^{da}=\sum_{n\in\mathbb{N}_1}M^n,\quad M^{di}=\sum_{n\in\mathbb{N}_2}M^n,$$

这里 M^n 为 $\Delta M_{T_n}I_{[\![T_n,\infty[\![}$ 的补偿. 由定理 7.4, M^{da} 只有可及跳，M^{di} 只有绝不可及跳，且由 2) 知，$M=M^{da}+M^{di}$. 分解的唯一性不难证明(参见定理 5.24 的证明).

7.18 定理 1) 设 $M, N\in\mathscr{M}^2$. 则我们有

(18.1) $$\mathbb{E}[\sum_s|\Delta M_s\Delta N_s|]\leqslant\sqrt{\mathbb{E}[M_\infty^2]}\sqrt{\mathbb{E}[N_\infty^2]}.$$

2) 设 $M\in\mathscr{M}^{2,d}$，则对任何 $N\in\mathscr{M}^2$，有

(18.2) $$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]=\mathbb{E}[\sum_s\Delta M_s\Delta N_s].$$

此外，$L_t=M_tN_t-\sum_{s\leq t}\Delta M_s\Delta N_s$ 为一致可积鞅.

证明 1) 由 Schwarz 不等式，我们有

$$\mathbb{E}[\sum_s|\Delta M_s\Delta N_s|]\leqslant(\mathbb{E}[\sum_s\Delta M_s^2])^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}[\sum_s\Delta N_s^2])^{\frac{1}{2}}.$$

由上式及(17.1)推得(18.1).

2) 首先设 $N\in\mathscr{M}^{2,d}$，则由定理 7.17.1)，

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]=\frac{1}{2}(\mathbb{E}[(M_\infty+N_\infty)^2]-\mathbb{E}[M_\infty^2]-\mathbb{E}[N_\infty^2])$$

$$=\frac{1}{2}\mathbb{E}(\sum_s(\Delta M_s+\Delta N_s)^2-\sum_s\Delta M_s^2-\sum_s\Delta N_s^2)=\mathbb{E}[\sum_s\Delta M_s\Delta N_s],$$

此即(18.2). 对一般 $N\in\mathscr{M}^2$, 令 $N=N^c+N^d$, 其中 $N^c\in\mathscr{M}^{2,c}$, $N^d\in\mathscr{M}^{2,d}$. 由于 M 正交于 N^c, 故 $\mathbb{E}[M_\infty N_\infty^c]=0$. 从而有

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]=\mathbb{E}[M_\infty N_\infty^d]=\mathbb{E}[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s].$$

(18.2)得证.

设 T 为一停时, 对 M^T, N^T 应用 (18.2), 得 $\mathbb{E}[L_T]=0$. 故由定理 5.40, (L_t) 为一致可积鞅.

下一定理建立了可积变差鞅与纯断平方可积鞅之间的内在联系.

7.19 定理 1) 我们有 $\mathscr{M}_0^2\cap\mathscr{W}\subset\mathscr{M}^{2,d}$.

2) 设 $M\in\mathscr{M}^{2,d}$. 如果 $\mathbb{E}[\sum_s|\Delta M_s|]<+\infty$, 则 $M\in\mathscr{W}$, 并且 $M=A-\widetilde{A}$, 其中 $A_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta M_s$.

3) 设 $M\in\mathscr{W}_0$. 如果 $\mathbb{E}[\sum_s \Delta M_s^2]<+\infty$, 则 $M\in\mathscr{M}^{2,d}$.

证明 1) 设 $M\in\mathscr{M}_0^2\cap\mathscr{W}$,则对任何有界鞅 N,有(定理6.45)

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]=\mathbb{E}[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s]. \tag{19.1}$$

由于有界鞅在 $\mathscr{M}^2$ 中按范数 $\|M\|=\sqrt{\mathbb{E}[M_\infty^2]}$ 稠密, 故由(18.1), 对一切 $N\in\mathscr{M}^2$, (19.1) 成立. 特别令 $N=M$, 则有

$$\mathbb{E}[M_\infty^2]=\mathbb{E}[\sum_s \Delta M_s^2].$$

由于 $M_0=0$, 故由定理 7.17. 1) 知 $M\in\mathscr{M}^{2,d}$.

2) 设 (T_n) 为一穷举 M 跳的标准停时列, 令

$$A^n=\Delta M_{T_n} I_{[T_n,\infty[},\quad M^n=A^n-\widetilde{A}^n,$$

$$B^k=\sum_{n=1}^{k} A^n,$$

则由定理 7.17.2), $B^k-\widetilde{B}^k$ 在 $\mathscr{M}^2$ 中收敛于 M. 于是, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有 $B_t^k-\widetilde{B}_t^k\xrightarrow[k\to\infty]{L^2}M_t$. 另一方面, 令

$$A_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta M_s=\sum_n \Delta M_{T_n} I_{[T_n\leqslant t]}.$$

由于 $A_t-B_t^k=\sum_{n=k+1}^{\infty}\Delta M_{T_n} I_{[T_n\leqslant t]}$, 且

$$\mathbb{E}\left[\int\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta M_{T_n}|\right]=\mathbb{E}\left[\sum_s|\Delta M_s|\right]<\infty,$$

故有

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d(A_t-B_t^k)|\right]=\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{n=k+1}^{\infty}|\Delta M_{T_n}|\right]=0.$$

于是由定理 6.25.3) 有

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d(A_t-\widetilde{A}_t-B_t^k+\widetilde{B}_t^k)|\right]$$

$$\leqslant 2\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d(A_t-B_t^k)|\right]=0.$$

特别，对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，我们有 $B_t^k-\widetilde{B}_t^k\xrightarrow{L^1}A_t-\widetilde{A}_t$. 但前面我们已证 $B_t^k-\widetilde{B}_t^k\xrightarrow{L^2}M_t$. 于是有 $M_t=A_t-\widetilde{A}_t$ a.s., 即有 $M=A-\widetilde{A}\in\mathscr{W}$.

3) 设 $(T_n)_{n\geqslant1}$ 为一穷举 M 跳的标准停时列. 令

$$B^k=\sum_{n=1}^{k}\Delta M_{T_n}I_{[\![T_n,\infty[\![},$$

则 $B^k-\widetilde{B}^k\in\mathscr{M}^{2,d}$ (定理 7.16.1)), 且当 $k\to+\infty$ 时, $B^k-\widetilde{B}^k$ 在 $\mathscr{M}^2$ 中收敛于 $\mathscr{M}^{2,d}$ 中的一元 N. 特别, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $B_t^k-\widetilde{B}_t^k\xrightarrow[k\to\infty]{L^2}N_t$. 此外, 令

$$A_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta M_s=\sum_n\Delta M_{T_n}I_{[T_n\leqslant t]}.$$

则 $M=A-\widetilde{A}$ (定理 6.43), 且由 2) 的证明知, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $B_t^k-\widetilde{B}_t^k\xrightarrow[k\to\infty]{L^1}A_t-\widetilde{A}_t=M_t$. 于是 $M=N$, $M\in\mathscr{M}^{2,d}$.

§3 与平方可积鞅联系的增过程

7.20 定义 设 $M\in\mathscr{M}^2$, 由 Doob 不等式, $M^*=\sup\limits_t|M_t|\in L^2$, 故 M^2 为类(D)下鞅. 由上鞅 Doob-Meyer 分解定理, 存在唯一的可料可积增过程(记为 $\langle M,M\rangle$), 使得 $M^2-\langle M,M\rangle$ 为零初值一致可积鞅. 我们称 $\langle M,M\rangle$ 为与 M 联系的可料增过程.

设 M, $N\in\mathscr{M}^2$, 我们令

$$\langle M, N\rangle=\frac{1}{2}(\langle M+N, M+N\rangle-\langle M, M\rangle-\langle N, N\rangle).$$

注 设 $M\in\mathscr{M}^2$，则为要 $\langle M, M\rangle=0$，必须且只需 $M=0$. 此外，由定理 6.52 知：如果 M 拟左连续，则 $\langle M, M\rangle$ 连续.

7.21 例 设 (M_t) 为一独立增量过程（关于 $(\mathscr{F}_t)$），若对一切 t，M_t 可积，且 $E[M_t]=a$ 为常数，则 (M_t) 为一鞅. 若进一步 (M_t) 为平方可积鞅，则有 $\langle M, M\rangle_t=M_0^2+E[M_t^2]-E[M_0^2]$. 特别，若 $M_0=a$，则 $\langle M, M\rangle_t=E[M_t^2]$ 为非随机的.

事实上，设 $s<t$，我们有

$$E[M_t-M_s|\mathscr{F}_s]=E[M_t-M_s]=0.$$

这表明 (M_t) 为一鞅. 令 $\alpha(t)=M_0^2+E[M_t^2]-E[M_0^2]$，则有

$$\begin{aligned}E[M_t^2-M_s^2|\mathscr{F}_s]&=E[(M_t-M_s)^2|\mathscr{F}_s]=E[(M_t-M_s)^2]\\&=E[M_t^2]-E[M_s^2]=\alpha(t)-\alpha(s).\end{aligned}$$

由于 $\alpha(0)=M_0^2$，这表明 $M^2-\alpha(\cdot)$ 为零初值鞅，故

$$\langle M, M\rangle_t=\alpha(t).$$

注 设 $M\in\mathscr{M}^2$，则 M 为正交增量过程. 事实上，设 $t_1<t_2<t_3$，我们有

$$\begin{aligned}&E[(M_{t_2}-M_{t_1})(M_{t_3}-M_{t_2})|\mathscr{F}_{t_2}]\\&=(M_{t_2}-M_{t_1})E[M_{t_3}-M_{t_2}|\mathscr{F}_{t_2}]=0,\end{aligned}$$

因此，我们有

$$E[(M_{t_2}-M_{t_1})(M_{t_3}-M_{t_2})]=0.$$

下一定理刻划了 $\langle M, N\rangle$.

7.22 定理 设 $M, N\in\mathscr{M}^2$，则 $\langle M, N\rangle$ 是唯一的可料可积变差过程，使得 $MN-\langle M, N\rangle$ 为零初值一致可积鞅.

证明 我们有

$$\begin{aligned}MN-\langle M, N\rangle=\frac{1}{2}[&(M+N)^2-\langle M+N, M+N\rangle\\&-M^2+\langle M, M\rangle-N^2+\langle N, N\rangle].\end{aligned}$$

于是 $MN-\langle M, N\rangle$ 为零初值一致可积鞅. 唯一性容易由定理

6.44.2)看出.

7.23 定义 设 M, $N\in\mathscr{M}^2$, M^c, N^c 分别为其连续鞅部分. 令

$$(23.1)\qquad [M, N]_t=\langle M^c, N^c\rangle_t+\sum_{0<s\leq t}\Delta M_s\Delta N_s,$$

则 $[M, N]$ 为可积变差过程(定理 7.18.1)).

7.24 定理 设 M, $N\in\mathscr{M}^2$, 则

1) $MN-[M, N]$ 为零初值一致可积鞅, 特别有

$$E[M_\infty N_\infty]=E[M, N]_\infty.$$

2) $\langle M, N\rangle$ 为 $[M, N]$ 的可料对偶投影.

证明 1) 令 $M=M^c+M^d$, 由定理 7.18.2), $M^dN-[M^d, N]$ 为一致可积鞅. 又 M^cN^d 为一致可积鞅, 故 $M^cN-[M^c, N]=M^cN^c+M^cN^d-\langle M^c, N^c\rangle$ 为一致可积鞅, 从而 $MN-[M, N]$ 为一致可积鞅.

2) 由 1) 及定理 7.22 推得.

7.25 系 设 M, $N\in\mathscr{M}^2$, 则下列三条件等价:

i) M 正交于 N;

ii) $[M, N]$ 为零初值一致可积鞅;

iii) $\langle M, N\rangle=0$.

7.26 定理 设 M, $N\in\mathscr{M}^2$, 则下列二条件等价:

i) $[M, N]=0$;

ii) M 与 N 正交, 且 $\Delta M\Delta N=0$(即 M 与 N 无公共跳).

证明 i)⇒ii). 设 $[M, N]=0$, 则由系 7.25, M 与 N 正交, 且 $\Delta M\Delta N=\Delta[M, N]=0$.

ii)⇒i). 设 M 与 N 正交且 $\Delta M\Delta N=0$. 则由系 7.25, $[M, N]=\langle M^c, N^c\rangle$ 为零初值可料可积变差鞅, 故 $[M, N]=0$(定理 6.44.2)).

7.27 定理 设 M, $N\in\mathscr{M}^2$, T 为一停时, 则有

(27.1) $$\langle M, N^T\rangle=\langle M, N\rangle^T,$$

(27.2) $$[M, N^T]=[M, N]^T.$$

证明 由于$(MN)^T-\langle M, N\rangle^T$为鞅(定理5.39)，故由定理6.44.2)，为证(27.1)，只需证$(MN)^T-\langle M, N^T\rangle$为鞅. 但$MN^T-\langle M, N^T\rangle$为鞅，于是只需证$(MN)^T-MN^T$为鞅. 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_T-M_\infty)N_T|\mathscr{F}_t]&=\mathbb{E}[(M_T-M_\infty)N_T|\mathscr{F}_{t\vee T}|\mathscr{F}_t]\\&=\mathbb{E}[(M_T-M_{t\vee T})N_T|\mathscr{F}_t]\\&=\mathbb{E}[(M_T-M_t)N_TI_{[T<t]}|\mathscr{F}_t]\\&=(M_T-M_t)N_TI_{[T<t]}\\&=(M_{t\wedge T}-M_t)N_{t\wedge T}.\end{aligned}$$

即$(MN)^T-MN^T$为一致可积鞅，(27.1)得证.

由(27.1)，$\langle M^c, (N^T)^c\rangle=\langle M^c, (N^c)^T\rangle=\langle M^c, N^c\rangle^T$，故由(23.1)推得(27.2).

7.28 引理 设$M, N\in\mathscr{M}^2$，则对几乎所有ω，对一切$0\leqslant s<t<\infty$，有

(28.1) $$\begin{aligned}&|\langle M, N\rangle_t(\omega)-\langle M, N\rangle_s(\omega)|\\&\leqslant(\langle M, M\rangle_t(\omega)-\langle M, M\rangle_s(\omega))^{\frac{1}{2}}\\&\quad\times(\langle N, N\rangle_t(\omega)-\langle N, N\rangle_s(\omega))^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

(28.2) $$\begin{aligned}&|[M, N]_t(\omega)-[M, N]_s(\omega)|\\&\leqslant([M, M]_t(\omega)-[M, M]_s(\omega))^{\frac{1}{2}}\\&\quad\times([N, N]_t(\omega)-[N, N]_s(\omega))^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

证明 我们只证(28.1)，(28.2)的证明完全相同. 给定$0\leqslant s<t<\infty$，则对一切有理数λ，同时有

$$\langle M+\lambda N, M+\lambda N\rangle_t-\langle M+\lambda N, M+\lambda N\rangle_s\geqslant0\ \text{a.s.},$$

我们用$\langle M, N\rangle_s^t$表示$\langle M, N\rangle_t-\langle M, N\rangle_s$，则有

$$\langle M, M\rangle_s^t+2\lambda\langle M, N\rangle_s^t+\lambda^2\langle N, N\rangle_s^t\geqslant0\quad\text{a.s.},$$

故有

$$|\langle M,N\rangle_s^t|\leqslant(\langle M,M\rangle_s^t)^{\frac{1}{2}}(\langle N,N\rangle_s^t)^{\frac{1}{2}}\ \text{a.s.}.$$

但 $\langle M,N\rangle$, $\langle M,M\rangle$, $\langle N,N\rangle$ 均为右连续过程，故对几乎所有 ω, 对一切 $0\leqslant s<t<\infty$, (28.1) 成立.

由引理 7.28 及定理 1.43，我们立即推得如下的 Kunita-Watanabe 不等式.

7.29 定理 设 $M,N\in\mathscr{M}^2$, H, K 为两个可测过程，则有

$$(29.1)\quad \int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d\langle M,N\rangle_s|\leqslant\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d\langle M,M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{[0,\infty[}K_s^2d\langle N,N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\ \text{a.s.},$$

$$(29.2)\quad \int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d[M,N]_s|\leqslant\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{[0,\infty[}K_s^2d[N,N]_s\right)^{\frac{1}{2}}\ \text{a.s.}.$$

7.30 系 令 p, q 为一对共轭指数，即 $1<p<\infty$, $1<q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则在定理 7.29 的假设下，我们有

$$(30.1)\quad \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d\langle M,N\rangle_s|\right]\leqslant\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}H_s^2d\langle M,M\rangle_s}\right\|_p\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}K_s^2d\langle N,N\rangle_s}\right\|_q,$$

$$(30.2)\quad \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d[M,N]_s|\right]\leqslant\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M,M]_s}\right\|_p\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}K_s^2d[N,N]_s}\right\|_q,$$

这里 $\|\xi\|_p=(\mathbb{E}[|\xi|^p])^{\frac{1}{p}}$.

证明 由定理 7.29 及 Hölder 不等式 ($\mathbb{E}|\xi\eta|\leqslant\|\xi\|_p\|\eta\|_q$) 推得.

第 八 章

局部鞅、半鞅与拟鞅

§1 局部有界过程与局部可积变差过程

8.1 定义 设 $H=(H_t)$ 为一过程，称 H 为局部有界的，如果存在一列停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.，使得对每个 n，$HI_{]0,T_n]}$ 为有界过程.

8.2 定理 1) 设 H 为一过程，H_0 为 $\mathscr{F}_0$ 可测. 则为要 H 局部有界，必须且只需 $H-H_0$ 为局部有界，即存在一列停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.，使得对每个 n，$H^{T_n}-H_0$ 为有界过程.

2) 设 H 为一过程. 若存在一列停时 T_n，使得 $\sup\limits_n T_n=+\infty$ a.s.，且对每个 n，H^{T_n} 为局部有界，则 H 为局部有界.

证明 1) 令 $T_n=O_{[|H_0|\geq n]}$，则 $T_n\uparrow+\infty$. 设 $L_t=H_0(t\geqslant 0)$，则对每个 n，$LI_{]0,T_n]}=H_0I_{[|H_0|<n]}I_{]0,\infty[}$ 为有界过程，故 L 为局部有界过程. 由此推得 1) 的结论.

2) 对每个 n，令停时 $R_{nm}\uparrow+\infty(m\to\infty)$，使得对一切 m，$H^{T_n}I_{[0,R_{nm}]}$ 为有界过程. 特别，对一切 n，m，$HI_{]0,T_n\wedge R_{nm}]}$ 为有界过程. 令

$$S_k=\bigvee_{n=1}^{k}(T_n\wedge R_{nk}),$$

则 $S_k\uparrow+\infty$，且 $HI_{]0,S_k]}$ 为有界过程，故 H 为局部有界过程.

下一定理给出了一些今后常用的局部有界过程.

8.3 定理 设 H 为一右连左极适应过程.

1) $H_-=(H_{t-})$ 为局部有界可料过程，这里 $H_{0-}=0$.

2) 为要 H 局部有界，必须且只需 $\Delta H=H-H_-$ 为局部有界.

3) 若 H 可料，则 H 局部有界.

证明 1) 令

$$T_n=\inf\{t:|H_t|\geqslant n\},$$

则 $T_n\uparrow+\infty$，且 $|H_-^{T_n}|\leqslant n$. 故 H_- 为局部有界过程.

2) 是 1) 的简单推论.

3) 的证明与定理 6.22 第二个结论的证明相同.

我们在第六章已给出局部可积变差过程的定义(6.21)，现在，在 $\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0$ 的约定下，我们将定义 6.21 重新叙述如下:

8.4 定义 设 $A=(A_t)$ 为一有限变差过程，称 A 为局部可积变差过程，如果 A_0 关于 $\mathscr{F}_0$ σ-可积，且存在一列停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.，使得对每个 n，$A^{T_n}-A_0$ 为可积变差过程$\left(即 E\left[\int_{]0,T_n]}|dA_s|\right]<\infty\right)$.

8.5 定理 1) 设 (A_t) 为一有限变差过程. 如果存在一列停时 T_n，使得 $\sup\limits_n T_n=\infty$ a.s.，且对每个 n，A^{T_n} 为局部可积变差过程，则 A 为局部可积变差过程.

2) 设 (A_t) 为一适应有限变差过程. 如果 (A_t) 为局部有界，则 (A_t) 为局部可积变差过程. 特别，可料有限变差过程为局部可积变差过程.

证明 1) 证明与定理 8.2.2) 的证明类似.

2) 令停时 $S_n\uparrow+\infty$，使得对每个 n，$AI_{[0,S_n]}$ 为有界过程. 令

$$T_n=\inf\left\{t:\int_{]0,t]}|dA_s|\geqslant n\right\}\wedge S_n,$$

则 $T_n\uparrow+\infty$，且有

$$\begin{aligned}\int_{]0,T_n]}|dA_s|&=\int_{]0,T_n[}|dA_s|+|\Delta A_{T_n}|I_{[T_n>0]}\\&\leqslant n+|\Delta A_{T_n}|I_{[T_n>0]}.\end{aligned}$$

从而 $\int_{]0,T_n]}|dA_s|$ 有界，特别 $\mathbb{E}\left[\int_{]0,T_n]}|dA_s|\right]<\infty$. 故 A 为局部可积变差过程.

8.6 定理　设 $A=(A_t)$ 为一局部可积变差过程，则存在一列可料时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得 $A^{T_n}-A_0$ 为可积变差过程.

证明　无妨假定 A 为局部可积增过程. 令 $\widetilde{A}$ 为 A 的可料对偶投影(定义 6.24), 由定理 6.22 的证明看出, 存在一列可料时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得对每个 n, $(\widetilde{A})^{T_n}-\widetilde{A}_0$ 为可积增过程. 由系6.27.1), $(\widetilde{A})^{T_n}=(\widetilde{A^{T_n}})$, 故 $A^{T_n}-A_0$ 为可积增过程.

8.7 定理　设 A 为一局部可积增过程, $\widetilde{A}$ 为其可料对偶投影, 则有

$$(7.1)\qquad [\widetilde{A}_\infty<+\infty]\subset[A_\infty<\infty]\quad \text{a.s.}.$$

证明　令 $T_n=\inf\{t:\widetilde{A}_t\geqslant n\}$, 则 T_n 为可料时, 且 $\widetilde{A}_{T_n-}\leqslant n$, 于是有

$$\mathbb{E}[A_{T_n-}]=\mu_A([\![0,T_n[\![)=\mu_{\widetilde{A}}([\![0,T_n[\![)=\mathbb{E}[\widetilde{A}_{T_n-}]\leqslant n.$$

故有 $$[\widetilde{A}_\infty<n]\subset[T_n=\infty]\subset[A_\infty<\infty]\quad \text{a.s.},$$

由此推得(7.1).

下一定理给出适应的局部可积变差过程的几个等价条件.

8.8 定理　设 A 为一适应有限变差过程, 则下列三断言等价:

1) A 为局部可积变差过程;

2) $B=\sum_{s\leqslant\cdot}\Delta A_s$ 为局部可积变差过程;

3) $C=\sqrt{\sum_{s\leqslant\cdot}\Delta A_s^2}$ 为局部可积增过程;

4) $A^*=\sup_{s\leqslant\cdot}|A_s|$ 为局部可积增过程.

证明　1)⇒2)⇒3) 显然.

3)⇒4). 设 C 为局部可积增过程. 由于 $(\Delta A)^*\leqslant C$, 故 $(\Delta A)^*$ 为局部可积增过程. 另一方面, 我们有

$$A^* \leqslant (\Delta A)^* + (A_-)^*,$$

其中 $(A_-)_t = A_{t-}$. 由于 A_- 局部有界(定理 8.3.1)), 故 $(A_-)^*$ 局部有界, 从而 A^* 为局部可积增过程.

4)⇒1). 设 A^* 为局部可积增过程. 无妨设 $A_0=0$. 令停时 $S_n\uparrow+\infty$, 使得每个 $A^*_{S_n}$ 可积, 令

$$T_n = \inf\left\{t: \int_{[0,t]} |dA_s| > n\right\} \wedge S_n,$$

则有 $$\int_{[0,T_n]} |dA_s| = \int_{[0,T_n[} |dA_s| + |\Delta A_{T_n}| \leqslant n + 2A^*_{S_n},$$

从而 A 为局部可积变差过程.

§2 局部鞅的定义及基本性质

8.9 定义 设 M 为一右连续适应过程, 称 M 为一局部鞅(相应地,局部上鞅,局部可积变差鞅), 如果存在停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s., 使得每个 $M^{T_n}-M_0$ 为一致可积鞅(相应地, 类(D)上鞅, 可积变差鞅).

类似地,我们可以定义局部有界鞅、局部平方可积鞅等概念.

8.10 注 由定义我们立刻看出以下事实:

1) 局部鞅为一右连左极适应过程;

2) 右连续鞅为局部鞅(令 $T_n=n$);

3) 局部鞅空间为线性空间;

4) 设 M 为局部鞅, T 为停时, 则 M^T 为局部鞅.

8.11 定理 设 M 为一非负局部上鞅. 若 M_0 可积, 则 M 为上鞅.

证明 令停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s., 使得每个 M^{T_n} 为类(D)上鞅. 设 $0\leqslant s<t$, 则有

$$E[M_{t\wedge T_n}|\mathscr{F}_s] \leqslant M_{s\wedge T_n} \quad \text{a.s.}.$$

令 $n\to\infty$, 由 Fatou 引理知, M_s 及 M_t 可积且有

$$E[M_t|\mathscr{F}_s] \leqslant M_s \quad \text{a.s.},$$

这表明 M 为上鞅.

8.12 定理 设 M 为一右连续适应过程.

1) 为要 M 是局部鞅，必须且只需存在停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.，使得每个 $M^{T_n}I_{[T_n>0]}$ 为一致可积鞅.

2) 设 S, T 为两个停时，使得 M^S 及 M^T 为一致可积鞅，则 $M^{S\vee T}$ 也为一致可积鞅.

3) 如果存在停时列 (T_n)，使得 $\sup\limits_n T_n=+\infty$ a.s.，且每个 M^{T_n} 为局部鞅，则 M 为局部鞅.

证明 1) 及 3) 的证明与定理 8.2 的证明类似. 2) 由如下等式推得：

$$M^{S\vee T}=M^S+M^T-M^{S\wedge T}.$$

8.13 定理 设 M 为一局部鞅，T 为一停时. 则为要 M^T 为一致可积鞅，必须且只需 M^T 为类 (D) 过程.

证明 只要证充分性. 设 M^T 为类(D)过程，则 M_0 可积. 于是存在停时 $T_n\uparrow+\infty$，使得每个 M^{T_n} 为一致可积鞅. 从而每个 $M^{T\wedge T_n}$ 为一致可积鞅. 设 $0\leqslant s<t<+\infty$，我们有

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T\wedge T_n}|\mathscr{F}_s]=M_{s\wedge T\wedge T_n}\quad \text{a.s.}. \tag{13.1}$$

由于 $(M_{t\wedge T\wedge T_n})_{n\geqslant 1}$ 一致可积，且 $\lim\limits_{n\to\infty}M_{t\wedge T\wedge T_n}=M_{t\wedge T}$ a.s.，于是

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T\wedge T_n}|\mathscr{F}_s]\xrightarrow[n\to\infty]{L^1}\mathbb{E}[M_{t\wedge T}|\mathscr{F}_s].$$

故在(13.1)中令 $n\to\infty$ 得

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T}|\mathscr{F}_s]=M_{s\wedge T},\quad \text{a.s.}.$$

这表明 M^T 为鞅，从而 M^T 为一致可积鞅.

8.14 定理 设 M 为一局部鞅，T 为一停时，ξ 为一 $\mathscr{F}_T$ 可测实值随机变量，则 $\xi(M-M^T)$ 为局部鞅.

证明 令 $N=\xi(M-M^T)$. 首先设 M 为一致可积鞅且 ξ 有界，往证 N 为一致可积鞅. 令 $t\in\mathbb{R}_+$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_\infty|\mathscr{F}_t] &= \mathbb{E}[\xi(M_\infty - M_T)|\mathscr{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi(M_\infty - M_T)|\mathscr{F}_{t\vee T}]|\mathscr{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[\xi(M_{t\vee T} - M_T)|\mathscr{F}_t] \\ &= \xi I_{[T<t]}(M_t - M_{t\wedge T}) = N_t.\end{aligned}$$

这表明 N 为一致可积鞅.

现在证明定理，不妨设 $M_0=0$. 令停时 $T_n\uparrow+\infty$，使得每个 M^{T_n} 为一致可积鞅. 令 $S_n=T_n\wedge T_{[|\xi|>n]}$，则 $S_n\uparrow+\infty$，且有

$$\begin{aligned}[\xi(M-M^T)]^{S_n} &= \xi I_{[|\xi|\leq n]}(M-M^T)^{T_n} \\ &= \xi I_{[|\xi|\leq n]}(M^{T_n}-M^{T_n\wedge T}).\end{aligned}$$

于是由上面所证，$[\xi(M-M^T)]^{S_n}$ 为一致可积鞅，从而 $\xi(M-M^T)$ 为局部鞅.

8.15 定理 1) 可料局部鞅为连续局部鞅.

2) 设 M 为一可料的局部可积变差鞅，则 $M_t=M_0$ a.s. $(t\geqslant 0)$.

3) 设 A 为一局部可积变差适应过程，$\widetilde{A}$ 为其可料对偶投影. 则 $\widetilde{A}$ 为唯一的可料有限变差过程，使得 $A-\widetilde{A}$ 为零初值局部鞅.

证明 1) 及 2) 容易由定理 6.44 推得. 往证 3). 令停时 $T_n\uparrow\infty$，使得对每个 n，$A^{T_n}-A_0$ 为可积变差过程，则 $\widetilde{A}^{T_n}-A_0$ 为 $A^{T_n}-A_0$ 的可料对偶投影，故 $A^{T_n}-\widetilde{A}^{T_n}$ 为一致可积鞅，从而 $A-\widetilde{A}$ 为局部鞅. 另一方面，设 B 为一可料有限变差过程，使得 $A-B$ 为零初值局部鞅，则 $\widetilde{A}-B$ 为零初值可料局部可积变差鞅，由 2)，$\widetilde{A}-B=0$，即 $\widetilde{A}=B$. 3) 得证.

下一定理部分地推广了定理 5.41.

8.16 定理 设 M 为一局部鞅，S 为一可料时，ξ 为一 $\mathscr{F}_{S-}$-可测的实值随机变量，则

1) $M_S I_{[S<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{S-}$ σ-可积，且有

(16.1) $\quad \mathbb{E}[M_S I_{[S<\infty]}|\mathscr{F}_{S-}] = M_{S-} I_{[S<\infty]}$ a.s.,

这里约定 $M_{0-}=M_0$.

2) $\xi\Delta M_S I_{[S,\infty[}$ 为局部鞅. 这里 $\Delta M_0 = \Delta M_\infty = 0$.

证明 1) 无妨设 M 为右连左极局部鞅. 由定理 6.9.2), M 的可料投影 ${}^pM$ 存在, 且由定理 6.8, ${}^pM = M_-$, 其中 $M_{0-} = M_0$, $M_- = (M_{t-})$. 故 $M_S I_{[S<\infty]}$ 关于 $\mathscr{F}_{S-}$ σ-可积, 且有(16.1).

2) 令 $A = \xi M_S I_{[\![S,\infty[\![} = \xi M_S I_{[S<\infty]} I_{[\![S,\infty[\![}$, 则由 1) 及定理 6.32.2), A 为局部可积变差过程, 且 A 的可料对偶投影为

$$\widetilde{A} = \mathbb{E}[\xi M_S I_{[S<\infty]} | \mathscr{F}_{S-}] I_{[\![S,\infty[\![} = \xi M_{S-} I_{[S<\infty]} I_{[\![S,\infty[\![}.$$

于是 $\xi\Delta M_S I_{[\![S,\infty[\![} = A - \widetilde{A}$ 为局部鞅(定理 8.15.3)).

8.17 定理 设 $A = (A_t)$ 为一适应局部可积变差过程, $A = A^c + A^{da} + A^{di}$, 其中 A^c 为 A 的连续部分, A^{da} 为 A 的可及跳部分, A^{di} 为 A 的绝不可及跳部分(定理 5.24). 则

1) $\widetilde{A}^{da}$ 为纯断的, $\widetilde{A}^{di}$ 为连续的;

2) 为要 $\widetilde{A}$ 连续, 必须且只需 A^{da} 为局部鞅;

3) 为要 $\widetilde{A}$ 纯断, 必须且只需 $A_0 = 0$, 且 $A^c + A^{di}$ 为局部鞅.

证明 2) 及 3) 容易由 1) 推得, 只需证 1). 令(T_n)为一穷举 A^{da} 跳的可料时列, 且对一切 n, $T_n > 0$, 此外, 当 $n \neq m$, 有 $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$. 令 $H = \bigcup_n [\![T_n]\!]$, 则 H 为可料集. 由可料对偶投影的性质(定理 6.25.2))知,

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} I_{H^c}(s,\cdot)|d\widetilde{A}_s^{da}|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} I_{H^c}(s,\cdot)|dA_s^{da}|\right] = 0.$$

这表明: 对几乎所有 ω, 测度 $d\widetilde{A}_\cdot^{da}(\omega)$ 在可数集 $H(\omega) = \{T_n(\omega): T_n(\omega) < \infty\}$ 之外无负荷, 即 $\widetilde{A}_\cdot^{da}(\omega)$ 为纯断的. 于是 $\widetilde{A}^{da}$ 为纯断过程.

由于 A^{di} 拟左连续, 故由系 6.31.3), $\widetilde{A}^{di}$ 连续.

8.18 定理 设 (M_t) 为一局部可积变差鞅. 令

$$A_t = \sum_{0<s\leqslant t} \Delta M_s,$$

则 (A_t) 为一局部可积变差过程, 且其可料对偶投影 $(\widetilde{A}_t)$ 连续. 我

们有

$$M_t=M_0+A_t-\widetilde{A}_t.$$

此外,若 M 只有可及跳,则

$$M_t=M_0+\sum_{0<s\leqslant t}\Delta M_s.$$

证明 定理的前半部分由定理 6.43 推得.若 M 只有可及跳,则 A 亦然. 因 $\widetilde{A}$ 连续, 故由定理 8.17, $A=A^{da}$ 为局部鞅, 从而 $\widetilde{A}=0$. 于是 $M=M_0+A$.

下一定理是非负上鞅的 Ito-Watanabe 分解, 局部鞅概念最早就是在这一分解中引入的.

8.19 定理 设 X 为一非负右连续上鞅, 则 X 有如下唯一分解: $X=M-A$, 其中 M 为在 L^1 中有界的局部鞅, A 为一零初值可料可积增过程.

证明 令

$$T_n=\inf\{t: X_t>n\}\wedge n,$$

则对一切停时 S,

$$X_S^{T_n}=X_{T_n\wedge S}\leqslant n+X_{T_n},$$

从而 X^{T_n} 为类(D)上鞅. 由 Doob-Meyer 分解定理,

$$X^{T_n}=M^{(n)}-A^{(n)},$$

其中 $M^{(n)}$ 为一致可积鞅, $A^{(n)}$ 为零初值可料可积增过程. 由分解的唯一性知

$$(M^{(n+1)})^{T_n}=M^{(n)},\quad (A^{(n+1)})^{T_n}=A^{(n)},$$

于是存在一局部鞅 M 及一可料增过程 A, 使得 $X=M-A$, 且对一切 n, 有 $M^{T_n}=M^{(n)}$, $A^{T_n}=A^{(n)}$. 此外, 我们有

$$\mathbb{E}[A_{T_n}]=\mathbb{E}[M_{T_n}]-\mathbb{E}[X_{T_n}]\leqslant\mathbb{E}[M_{T_n}]=\mathbb{E}[M_0]=\mathbb{E}[X_0].$$

从而 $\mathbb{E}[A_\infty]\leqslant\mathbb{E}[X_0]$, 这表明 A 为可积增过程. 由于 X, A 都在 L^1 中有界(定义 3.27), 故 M 在 L^1 中有界.

分解的唯一性显然.

注 由定理证明看出: 若 X 为一右连续上鞅, 则 X 仍有如下

唯一分解：$X=M-A$，其中 M 为一局部鞅，A 为一零初值可料增过程。

§3　局部鞅基本定理及局部鞅分解

下一定理称为局部鞅基本定理，它在局部鞅理论中起着核心作用。

8.20 定理　设 M 为一局部鞅，则对任给 $\varepsilon>0$，M 可作如下分解：

$$M=M_0+U+V,$$

其中 U 为零初值局部有界鞅，且 $|\Delta U|<\varepsilon$；V 为局部可积变差鞅。如果 M 拟左连续，则可要求 U 及 V 也拟左连续，且 U 与 V 无公共跳。

证明　无妨假定 $M_0=0$。令

$$A_t=\sum_{s\leq t}\Delta M_s I_{[|\Delta M_s|>\frac{\varepsilon}{2}]},$$

则 (A_t) 为一适应有限变差过程。令停时 $S_n\uparrow+\infty$，使得对每个 n，M^{S_n} 为一致可积鞅。令

$$T_n=\inf\{t:|M_t|\geqslant n \quad 或 \quad \sum_{s\leq t}|\Delta A_s|\geqslant n\}\wedge S_n.$$

则 $T_n\uparrow\infty$，且有

$$|\Delta A_{T_n}|\leqslant|\Delta M_{T_n}|\leqslant|M_{T_n}|+|M_{T_n-}|\leqslant|M_{T_n}|+n,$$

$$\sum_{s\leq T_n}|\Delta A_s|=\sum_{s<T_n}|\Delta A_s|+|\Delta A_{T_n}|\leqslant n+|\Delta A_{T_n}|\leqslant 2n+|M_{T_n}|.$$

由于 $T_n\leqslant S_n$，故 $\mathbb{E}[|M_{T_n}|]<\infty$。这表明 (A_t) 为一局部可积变差过程。令 $V=A-\widetilde{A}$，其中 $\widetilde{A}$ 为 A 的可料对偶投影，则 V 为局部可积变差鞅。令 $U=M-V$，则对任何可料时 T，由定理 8.16，

$$\mathbb{E}[\Delta M_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]=0.$$

故由定理 6.30，我们有

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{A}_T I_{[T<\infty]}&=\mathbb{E}[\Delta A_T I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}]\\&=\mathbb{E}[(\Delta A_T-\Delta M_T)I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T-}].\end{aligned}$$

但由于

$$|(\Delta A_T-\Delta M_T)I_{[T<\infty]}|=|\Delta M_T I_{[|\Delta M_T|<\frac{\varepsilon}{2}]}I_{[T<\infty]}|<\frac{\varepsilon}{2},$$

故 $|\Delta\widetilde{A}_T|I_{[T<\infty]}<\frac{\varepsilon}{2}$ a.s., 于是

$$|\Delta U_T|\leqslant|\Delta M_T-\Delta A_T|+|\Delta\widetilde{A}_T|<\varepsilon.$$

这里约定 $\Delta U_\infty=\Delta M_\infty=\Delta A_\infty=0$. 此外, 对任何绝不可及时 T, 我们有 $\Delta\widetilde{A}_T=0$ a.s., 故有

$$|\Delta U_T|\leqslant|\Delta M_T-\Delta A_T|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是对一切停时 T, $|\Delta U_T|<\varepsilon$ a.s.. 于是 $|\Delta U|<\varepsilon$(定理 5.5), 特别 U 为局部有界鞅.

如果 M 拟左连续, 则 A 亦拟左连续, 从而 $\widetilde{A}$ 连续, 于是 U 及 V 拟左连续. 此外, $\Delta V=\Delta MI_{[|\Delta M|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}]}$, $\Delta U=\Delta MI_{[|\Delta M|<\frac{\varepsilon}{2}]}$, 故 U 与 V 无公共跳.

8.21 系 设 M 为一局部鞅, 则 M^* 为局部可积增过程. 这里 $M_t^*=\sup\limits_{s\leqslant t}|M_s|$.

8.22 定理 有限变差局部鞅为局部可积变差鞅.

证明 设 M 为一有限变差局部鞅, 令

$$M=M_0+U+V,$$

其中 U 为局部有界鞅, V 为局部可积变差鞅. 由于 U 为适应有限变差过程且局部有界, 故 U 为局部可积变差鞅(定理 8.5.2)), 从而 M 为局部可积变差鞅.

8.23 系 设 A 为一适应有限变差过程, 则为要 A 为局部可积变差过程, 必须且只需存在一可料有限变差过程 B, 使得 $A-B$ 为局部鞅.

8.24 定义 设 M 为一局部鞅, 称 M 为纯断局部鞅, 如果 $M_0=0$, 且 M 可作如下分解:

$$M=U+V,$$

其中 U 为零初值局部纯断平方可积鞅，V 为零初值有限变差局部鞅.

下面我们将研究局部鞅的分解．为此先证明两个引理.

8.25 引理　设 M 为一局部鞅，若 M 既是纯断局部鞅又是连续局部鞅，则 $M=0$.

证明　令 $M=U+V$，其中 U 为零初值局部纯断平方可积鞅，V 为零初值有限变差局部鞅(即局部可积变差鞅)．由于假定 M 连续，故 M 为局部有界鞅，从而 V 为局部平方可积鞅．于是由定理 7.19.1)，V 为局部纯断平方可积鞅．从而 M 既为局部连续平方可积鞅，又为局部纯断平方可积鞅，且 $M_0=0$，故 $M=0$.

8.26 引理　设 V 为零初值有限变差局部鞅．令 $V=V^c+V^{da}+V^{di}$(见定理 5.24)，则 V^{da} 为局部鞅．$V^c=-\widetilde{V}^{di}$.

证明　我们有

$$0=\widetilde{V}=V^c+\widetilde{V}^{da}+\widetilde{V}^{di}.$$

由定理 8.17.1)，$\widetilde{V}^{da}$ 纯断，$\widetilde{V}^{di}$ 连续，且

$$\widetilde{V}^{da}=-(V^c+\widetilde{V}^{di}),$$

故 $\widetilde{V}^{da}=0$，即 V^{da} 为局部鞅．此外有 $V^c=-\widetilde{V}^{di}$.

8.27 定理　设 M 为一局部鞅，则 M 有如下唯一分解：

$$M=M^c+M^{da}+M^{di},$$

其中 M^c 为连续局部鞅，M^{da} 为只有可及跳的纯断局部鞅，M^{di} 为只有绝不可及跳的纯断局部鞅.

证明　存在性．令

$$M=M_0+U+V,$$

其中 U 为零初值局部有界鞅，V 为零初值有限变差局部鞅．由定理 7.17.3)，U 有如下分解：

$$U=U^c+U^{da}+U^{di},$$

其中 U^c 为连续局部鞅，U^{da} 为只有可及跳的局部纯断平方可积鞅，

U^{di} 为只有绝不可及跳的局部纯断平方可积鞅. 令

$$V=V^c+V^{da}+V^{di},$$

由引理 8.26, V^{da} 为只有可及跳的有限变差局部鞅, V^c+V^{di} 为只有绝不可及跳的有限变差局部鞅. 令

$$M^c=M_0+U^c,\quad M^{da}=U^{da}+V^{da},$$
$$M^{di}=U^{di}+V^c+V^{di},$$

则 $M=M^c+M^{da}+M^{di}$ 为所要求的分解.

唯一性. 设 $M=\overline{M}^c+\overline{M}^{da}+\overline{M}^{di}$ 为满足定理要求的分解. 则由引理 8.25, $M^c=\overline{M}^c$. 于是有 $M^{da}-\overline{M}^{da}=\overline{M}^{di}-M^{di}$, 从而 $M^{da}-\overline{M}^{da}$ 既无绝不可及跳又无可及跳, 即 $M^{da}-\overline{M}^{da}$ 为连续局部鞅. 故由引理 8.25, $M^{da}-\overline{M}^{da}=0$, 因而也有 $\overline{M}^{di}-M^{di}=0$. 唯一性得证.

注 设 M 为局部鞅, 今后我们称 M^c 为 M 的连续鞅部分, $M^d=M^{da}+M^{di}$ 为 M 的纯断鞅部分[1]. 由定理证明看出, 为要一局部鞅 M 是纯断的, 必须且只需 $M^c=0$. 此外, 对任何停时 T, 我们有 $(M^T)^c=(M^c)^T$, $(M^T)^d=(M^d)^T$.

8.28 定理 设 M 为一纯断局部鞅. 如果对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\sum\limits_{s\leq t}|\Delta M_s|<\infty$ a.s., 则 M 为有限变差局部鞅.

证明 令

$$M=U+V,$$

其中 U 为零初值局部有界鞅, V 为零初值有限变差局部鞅(定理 8.20). 由于 M 为纯断局部鞅, 故 $U^c=M^c=0$, 即 U 为局部纯断平方可积鞅. 令

$$A_t=\sum_{s\leq t}|\Delta U_s|,$$

我们有
$$A_t\leq\sum_{s\leq t}|\Delta M_s|+\sum_{s\leq t}|\Delta V_s|.$$

---

1) 严格地说, M^c 应称为 M 的连续局部鞅部分; M^d 应称为 M 的纯断局部鞅部分. 这里省略了"局部"二字, 是为了叙述上的简便.

从而 (A_t) 为一增过程. 由于 $\Delta A=|\Delta U|$ 为局部有界, 故 (A_t) 为局部可积增过程. 于是由定理 7.19.2), U 为局部可积变差鞅. 因此, M 为有限变差局部鞅.

§4 与局部鞅联系的增过程

8.29 引理 设 $M=(M_t)$ 为一局部鞅, 则对几乎所有的 ω, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有 $\sum\limits_{0<s\leqslant t}\Delta M_s^2(\omega)<\infty$.

证明 令 $M=M_0+U+V$, 其中 U 为局部有界鞅, V 为局部可积变差鞅. 令有限停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得对一切 U, V^{T_n} 为有界鞅(从而为平方可积鞅), V^{T_n} 为可积变差鞅. 则有

$$\sum_{0<s\leqslant T_n}\Delta M_s^2\leqslant 2\Big(\sum_{s\leqslant T_n}\Delta U_s^2+\sum_{s\leqslant T_n}\Delta V_s^2\Big)$$
$$\leqslant 2\Big[\sum_{s\leqslant T_n}\Delta U_s^2+\Big(\sum_{s\leqslant T_n}|\Delta V_s|\Big)^2\Big]<\infty\quad \text{a.s.},$$

定理得证.

8.30. 定义 设 $M=(M_t)$ 为一局部鞅, M^c 为其连续鞅部分. 令

$$[M,M]_t=\langle M^c,M^c\rangle_t+\sum_{0<s\leqslant t}\Delta M_s^2, \tag{30.1}$$

这里, $(\langle M^c,M^c\rangle_t)$ 为唯一的可料增过程, 使得 $(M^c)^2-\langle M^c,M^c\rangle$ 为一零初值局部鞅(参看定义 7.20, 这里 M^c 为局部平方可积鞅). 我们称 $[M,M]$ 为与局部鞅 M 联系的增过程.

由(30.1)看出, 为要一零初值局部鞅 M 为连续的(相应地, 纯断的), 必须且只需 $[M,M]$ 是连续(相应地, 纯断)增过程; 为要 $M=0$, 必须且只需 $[M,M]=0$.

8.31 定义 设 M, N 为两个局部鞅. 令

$$[M,N]_t=\frac{1}{2}\big([M+N,M+N]_t-[M,M]_t-[N,N]_t\big). \tag{31.1}$$

容易验证, 我们有

$$(31.2)\qquad [M,\ N]=\langle M^c,\ N^c\rangle_t+\sum_{0<s\leq t}\Delta M_s\Delta N_s.$$

这里

$$(31.3)\qquad \langle M^c,\ N^c\rangle_t=\frac{1}{2}(\langle M^c+N^c,\ M^c+N^c\rangle-\langle M^c,\ M^c\rangle-\langle N^c,\ N^c\rangle).$$

设 $M,\ N,\ P$ 为三个局部鞅，显然有

$$(31.4)\qquad [M+N,\ P]=[M,\ P]+[N,\ P].$$

此外，由(31.2)看出，对任何停时 T，我们有

$$(31.5)\qquad [M^T,\ N]=[M,\ N]^T.$$

8.32 定理 设 M 为一局部鞅，则 $\sqrt{[M,\ M]}$ 为局部可积增过程.

证明 由于

$$\sqrt{[M,\ M]}-|M_0|\leqslant\sqrt{[M,\ M]-M_0^2}=\sqrt{[M-M_0,\ M-M_0]},$$

故无妨设 $M_0=0$. 令

$$M=U+V,$$

其中 U 为零初值局部有界鞅，V 为零初值局部可积变差鞅. 我们有

$$\sqrt{[V,\ V]_t}=\sqrt{\sum_{s\leq t}\Delta V_s^2}\leqslant\sum_{s\leq t}|\Delta V_s|,$$

于是 $\sqrt{[V,\ V]}$ 为局部可积增过程. 由于 $[U,\ U]$ 为局部可积增过程，故 $\sqrt{[U,\ U]}$ 为局部可积增过程. 但我们有

$$\sqrt{[M,\ M]}\leqslant\sqrt{[U,\ U]+[V,\ V]+2\sqrt{[U,\ U][V,\ V]}}=\sqrt{[U,U]}+\sqrt{[V,\ V]},$$

从而 $\sqrt{[M,\ M]}$ 为局部可积增过程.

下一定理给出了有限变差过程 $[M,\ N]$ 的一个有用的刻划.

8.33 定理 设 $M,\ N$ 为两个局部鞅，则$[M,\ N]$为唯一的适应有限变差过程 A，使得 $\Delta A=\Delta M\Delta N$ 且 $MN-A$ 为局部鞅.

证明　首先我们证明 $MN-[M, N]$ 为局部鞅，为此只需对 $N=M$ 情形证明这一事实，因为一般情形容易归结为这种情形．令 $M=U+V$，其中 U 为局部有界鞅，V 为局部可积变差鞅．我们有

$$(33.1)\qquad M^2-[M, M]=U^2-[U, U]+V^2-[V, V]+2(UV-[U, V]).$$

由定理 7.24.1)，$U^2-[U,U]$ 为局部鞅；由定理 6.45，$UV-[U,V]$ 为局部鞅．又由分部积分公式(引理 1.44)，我们有

$$V_t^2-[V, V]_t=V_t^2-\sum_{s\leq t}\Delta V_s^2=2\int_{[0, t]}V_{s-}dV_s.$$

但 (V_{t-}) 为局部有界可料过程(定理 8.3.1))，故由定理 6.46，$V^2-[V, V]$ 为局部鞅．因此由(33.1)，$M^2-[M, M]$ 为局部鞅．此外，由定义 8.31，我们有 $\Delta[M, N]=\Delta M\Delta N$．最后，设 A 为一适应有限变差过程，使得 $\Delta A=\Delta M\Delta N$ 且 $MN-A$ 为局部鞅，则 $A-[M, N]$ 为零初值连续有限变差局部鞅．于是由定理 8.15.2)，$A=[M, N]$．定理证毕．

下一定理是应用上一定理的一个例子，它补充了定理 8.14 的结论．

8.34 定理　设 M 为一局部鞅，T 为一停时，ξ 为一 $\mathscr{F}_T$ 可测实值随机变量．令 $N=\xi(M-M^T)$，则 N 为局部鞅，且对任何局部鞅 L 有

$$(34.1)\qquad [N, L]=\xi([M, L]-[M, L]^T).$$

证明　由定理 8.14，N 为局部鞅．令

$$A=\xi([M, L]-[M, L]^T),$$

我们有

$$\begin{aligned}NL-A&=\xi(M-M^T)L-\xi([M, L]-[M, L]^T)\\&=\xi[(ML-[M, L])-(ML-[M, L])^T]\\&\quad-\xi M_T I_{[T<\infty]}(L-L^T).\end{aligned}$$

故由定理 8.33 及定理 8.14 知 $NL-A$ 为局部鞅. 此外, 由于 $\Delta(M-M^T)\Delta L=\Delta([M, L]-[M, L]^T)$, 故有 $\Delta A=\Delta N\Delta L$. 因此由定理 8.33 推得 $[N, L]=A$, 此即 (34.1).

下一定理通过局部鞅给出平方可积鞅的一个刻划.

8.35 定理 设 M 为一局部鞅, 则为要 M 为平方可积鞅, 必须且只需 $\mathbb{E}[M, M]_\infty<\infty$.

证明 只要证充分性. 依假定, $\mathbb{E}[M_0^2]\leqslant\mathbb{E}[M, M]_\infty<\infty$, 故 $\mathbb{E}[|M_0|]<\infty$. 令有穷停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s., 使得每个 M^{T_n} 及每个 $(M^2-[M, M])^{T_n}$ 为一致可积鞅. 我们有

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}^2]=\mathbb{E}[M, M]_{t\wedge T_n}.$$

于是

$$\sup_n \mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}^2]\leqslant\mathbb{E}[M, M]_t<+\infty.$$

但 $M_{t\wedge T_n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}}M_t$, 故由定理 1.11 及定理 1.15, $M_{t\wedge T_n}\xrightarrow[n\to\infty]{L^1}M_t$. 设 $0\leqslant s<t<+\infty$, 由于 M^{T_n} 为一致可积鞅, 故有

$$M_{s\wedge T_n}=\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}|\mathscr{F}_s]\quad \text{a.s.},$$

由于 $\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}|\mathscr{F}_s]\xrightarrow[n\to\infty]{L^1}\mathbb{E}[M_t|\mathscr{F}_s]$, 故在上式中令 $n\to\infty$ 得

$$M_s=\mathbb{E}[M_t|\mathscr{F}_s]\quad \text{a.s.}.$$

这表明 M 为鞅. 此外, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 我们有

$$\mathbb{E}[M_t^2]\leqslant\sup_n\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}^2]=\sup_n\mathbb{E}[M, M]_{t\wedge T_n}$$
$$\leqslant\mathbb{E}[M, M]_\infty<+\infty.$$

从而 M 为一平方可积鞅. 定理证毕.

设 M 为一纯断局部鞅, N 为一连续局部鞅, 则 $[M, N]=0$, 从而由定理 8.33 知 MN 为一局部鞅. 下一定理表明, 这一性质完全刻划了纯断局部鞅.

8.36 定理 设 M 为一零初值局部鞅. 如果对一切零初值有界连续鞅 N, MN 为局部鞅(或者等价地, $[M, N]$ 为局部鞅), 则 M 为纯断局部鞅. 特别, 如果对任何零初值有界连续鞅 N, 有

$[M, N]=0$, 则 M 为纯断局部鞅.

证明 令 $M=M^c+M^d$, 其中 M^c 为 M 的连续鞅部分, M^d 为 M 的纯断鞅部分. 令

$$T_n=\inf\{t: |M_t^c|\geqslant n\},$$

则 $T_n\uparrow+\infty$ a.s., 且 $(M^c)^{T_n}$ 为有界连续鞅. 我们有

$$\langle (M^c)^{T_n}, (M^c)^{T_n}\rangle=\langle M^c, M^c\rangle^{T_n}=[M, (M^c)^{T_n}].$$

故依假定, $\langle (M^c)^{T_n}, (M^c)^{T_n}\rangle$ 为零初值局部鞅, 从而

$$\langle (M^c)^{T_n}, (M^c)^{T_n}\rangle=0.$$

于是 $(M^c)^{T_n}=0$. 令 $n\to\infty$ 得 $M^c=0$. 这表明 M 为纯断局部鞅.

下一定理是前一定理的对偶形式.

8.37 定理 设 M 为一局部鞅. 如果对一切纯断局部鞅 N, MN 为局部鞅, 则 M 为连续局部鞅. 特别, 如果对一切纯断局部鞅 N, 有 $[M, N]=0$, 则 M 为连续局部鞅.

证明 令 $M=M^c+M^d$, 则 $MM^d=M^cM^d+(M^d)^2$. 依假定, MM^d 为局部鞅. 又由定理 8.35, M^cM^d 为局部鞅, 故 $(M^d)^2$ 为局部鞅, 从而 $M^d=0$. 这表明 M 为连续局部鞅.

8.38 定理 设 M 为一零初值局部鞅. 如果对一切零初值有界鞅 N, MN 为局部鞅(或者等价地, $[M, N]$ 为局部鞅), 则 $M=0$.

证明 令停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得每个 M^{T_n} 为一致可积鞅. 设 N 为一有界鞅, 则 N^{T_n} 为有界鞅, 故由假定, $[M^{T_n}, N]=[M, N^{T_n}]=[M, (N-N_0)^{T_n}]$ 为局部鞅. 于是由定理 8.33, $M^{T_n}N$ 为局部鞅. 但 $M^{T_n}N$ 为类 (D) 过程, 故由定理 8.13, $M^{T_n}N$ 为一致可积鞅. 特别, 我们有

$$\mathbb{E}[M_{T_n}N_\infty]=\mathbb{E}[M_0N_0]=0.$$

由于 M_{T_n} 为 $\mathscr{F}_{\infty-}$ 可测, N_∞ 可以是任意有界 $\mathscr{F}_{\infty-}$ 可测随机变量, 故 $M_{T_n}=0$. 从而 $M^{T_n}=0$. 令 $n\to\infty$ 得 $M=0$.

8.39 定义 设 M、N 为两个局部鞅. 如果 $[M, N]$ 为局部

可积变差过程，则我们用 $\langle M, N\rangle$ 表示 $[M, N]$ 的可料对偶投影。这时我们说 $\langle M, N\rangle$ 存在。

设 M, N 为两个局部平方可积鞅，则显然 $\langle M, N\rangle$ 存在，并且由定理 7.24.2) 知，这里定义的 $\langle M, N\rangle$ 与直接按定义 7.20 确定的 $\langle M, N\rangle$ 是一致的。

8.40 定理 1) 设 M 为一局部鞅，则为要 $\langle M, M\rangle$ 存在，必须且只需 M 为局部平方可积鞅。

2) 设 M 为一局部平方可积鞅，则为要 $M=0$，必须且只需 $\langle M, M\rangle=0$。

3) 设 M 为一局部平方可积鞅，S、T 为两个停时，则为要 $M^S=M^T$，必须且只需 $\langle M, M\rangle_S=\langle M, M\rangle_T$。

证明 1) 充分性不待证，必要性由定理 8.35 推得。

2) 显然。

3) 必要性显然。往证充分性。设有 $\langle M, M\rangle_S=\langle M, M\rangle_T$，则 $\langle M, M\rangle^T=\langle M, M\rangle^S=\langle M, M\rangle^{S\wedge T}$ 令 $N=M^T-M^S$，则 N 为局部平方可积鞅，且有

$$\begin{aligned}\langle N, N\rangle &= \langle M, M\rangle^T+\langle M, M\rangle^S-2\langle M, M\rangle^{T\wedge S}\\ &=0,\end{aligned}$$

故由 2)，$N=0$，即 $M^T=M^S$。

下一定理给出使 $\langle M, N\rangle$ 存在的一个充分条件。

8.41 定理 设 M 为一局部有界鞅，则对一切局部鞅 N，$\langle M, N\rangle$ 存在。

证明 令 $N=N_0+U+V$，其中 U 为局部有界鞅，V 为局部可积变差鞅。则有

$$[M, N]_t=[M, U]_t+[M, V]_t+M_0N_0.$$

显然，$[M, U]$ 及 $[M, V]$ 都为局部可积变差过程，故 $[M, N]$ 为局部可积变差过程，即 $\langle M, N\rangle$ 存在。

§5 局部平方可积鞅的一个不等式

本节研究局部平方可积鞅的 a.s. 收敛性，给出局部平方可积鞅的一个不等式及应用.

8.42 定理 设 M 为一零初值局部平方可积鞅，则有

(42.1) $[\langle M, M\rangle_\infty<\infty]\subset[\lim\limits_{t\to\infty} M_t$ 存在且有穷$]$ a.s..

证明 令

$$T_n=\inf\{t: \langle M, M\rangle_t\geqslant n\},$$

则 T_n 为可料时，且 $T_n\uparrow\infty$ a.s.. 令

$$M^{T_n-}=MI_{[\![0,T_n[\![}+M_{T_n-}I_{[\![T_n,\infty[\![}=M^{T_n}-\Delta M_{T_n}I_{[\![T_n,\infty[\![},$$

这里约定 $M_{0-}=0$，则由定理 8.16.2)，M^{T_n-} 为局部鞅，且有

$$[M^{T_n-}, M^{T_n-}]=[M, M]^{T_n}-\Delta M^2_{T_n}I_{[\![T_n,\infty[\![}=[M, M]^{T_n-}.$$

于是由系 6.27.2)，

$$\mathbb{E}[M^{T_n-}, M^{T_n-}]_\infty=\mathbb{E}[M, M]_{T_n-}=\mathbb{E}\langle M, M\rangle_{T_n-}\leqslant n.$$

故由定理 8.34，M^{T_n-} 为平方可积鞅. 从而 $\lim\limits_{t\to\infty}M_t^{T_n-}$ a.s. 存在且有穷. 因此我们有

$$[\langle M, M\rangle_\infty<\infty]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[T_n=\infty]\subset[\lim_{t\to\infty} M_t \text{ 存在且有穷}] \text{ a.s.}.$$

8.43 定理 设 M 为一零初值局部平方可积鞅，则对任给 $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $A\in\mathscr{F}$ 及一切停时 T，我们有

(43.1) $\mathbb{P}(A\cap[M_T^*\geqslant\delta])\leqslant\dfrac{\varepsilon}{\delta^2}+\mathbb{P}(A\cap[\langle M, M\rangle_T\geqslant\varepsilon])$,

这里，$M_t^*=\sup\limits_{s\leqslant t}|M_s|$, $0\leqslant t\leqslant+\infty$.

证明 令

$$S=\inf\{t: \langle M, M\rangle_t\geqslant\varepsilon\},$$

则 S 为可料时，并由定理 8.42 的证明知，M^{S-} 为平方可积鞅，且 $\mathbb{E}[(M_\infty^{S-})^2]=\mathbb{E}[M^{S-}, M^{S-}]_\infty\leqslant\varepsilon$. 由平方可积鞅的 Kolmogorov

不等式(定理 7.2)，我们有

$$\mathbb{P}([M^{S-})^*_\infty\geqslant\delta])\leqslant\frac{1}{\delta^2}\mathbb{E}[(M^{S-}_\infty)^2]\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta^2}.$$

但是，$[S<\infty]\subset[\langle M, M\rangle_\infty\geqslant\varepsilon]$，故有

$$\begin{aligned}A\cap[M^*_\infty\geqslant\delta]&\subset[(M^{S-})^*_\infty\geqslant\delta]\cup(A\cap[S<\infty])\\&\subset[(M^{S-})^*_\infty\geqslant\delta]\cup(A\cap[\langle M, M\rangle_\infty\geqslant\varepsilon]).\end{aligned}$$

由此推得

(43.2) $$\mathbb{P}(A\cap[M^*_\infty\geqslant\delta])\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta^2}+\mathbb{P}(A\cap[\langle M, M\rangle_\infty\geqslant\varepsilon]).$$

对 M^T 应用(43.2)立即得到(43.1)。

8.44 系 设 M 为零初值局部平方可积鞅，T 为一停时，则

(44.1) $$[\langle M, M\rangle_T=0]\subset[M^*_T=0]\quad \text{a.s.}.$$

证明 在(43.1)中，令 $A=[\langle M, M\rangle_T<\varepsilon]$ 得

$$\mathbb{P}([\langle M, M\rangle_T<\varepsilon]\cap[M^*_T\geqslant\delta])\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta^2}.$$

在上式中令 $\varepsilon\downarrow 0$ 得

$$\mathbb{P}([\langle M, M\rangle_T=0]\cap[M^*_T\geqslant\delta])=0.$$

上式对一切 $\delta>0$ 成立，故有

$$\mathbb{P}([\langle M, M\rangle_T=0]\cap[M^*_T>0])=0.$$

此即(44.1)。

下一定理是不等式(43.1)的一个重要应用。

8.45 定理 设 $(M^n)_{n\geqslant1}$ 为一列零初值局部平方可积鞅，M 为一零初值局部平方可积鞅．则对任何停时 T 及任何 $A\in\mathscr{F}$，我们有

(45.1) $$I_A\langle M^n-M, M^n-M\rangle_T\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0$$

$$\Rightarrow I_A\sup_{t\leqslant T}|M^n_t-M_t|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0.$$

证明 对 M^n-M 应用(43.1)，我们有

$$\mathbb{P}(A\cap[\sup_{t\leq T}|M_t^n-M_t|\geq\delta])$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{\delta^2}+\mathbb{P}(A\cap[\langle M^n-M,\ M^n-M\rangle_T\geq\varepsilon]),$$

由此立即推得定理的结论.

§6 半鞅, K-W 不等式

8.46 定义 设 $X=(X_t)$ 为一右连续适应过程, 称 X 为一半鞅, 如果 X 可作如下分解:

$$X=M+A,$$

其中 M 为一局部鞅, A 为一适应有限变差过程.

由局部鞅基本定理(定理 8.20)知, 为要一右连续适应过程 X 为半鞅, 必须且只需 X 有如下分解:

$$X=M+A.$$

其中 M 为一局部有界鞅(甚至可要求 M 的跳有界), A 为一适应有限变差过程.

8.47 定义 设 X 为一半鞅, 令

$$X=M+A,$$

其中 M 为一局部鞅, A 为零初值有限变差过程. 容易看出, 在这一分解中, M 的连续鞅部分 M^c 被半鞅 X 唯一决定(引理 8.25). 令 $X^c=M^c$, 称 X^c 为半鞅 X 的连续鞅部分. 设 T 为一停时, 容易看出, 我们有 $(X^T)^c=(X^c)^T$, $(X^{T-})^c=(X^c)^T-X_0I_{[T=0]}$, 这里 $X^{T-}=X^T-\Delta X_T I_{[T,\infty[}$.

8.48 定义 设 X 为一半鞅, 令

$$[X,\ X]_t=\langle X^c,\ X^c\rangle_t+\sum_{0<s\leq t}\Delta X_s^2,$$

则 $[X,\ X]$ 为适应增过程. 我们称 $[X,\ X]$ 为与半鞅 X 联系的增过程.

设 X, Y 为两个半鞅, 令

$$[X,\ Y]_t=\langle X^c,\ Y^c\rangle_t+\sum_{0<s\leq t}\Delta X_s\Delta Y_s.$$

则 $[X, Y]$ 为适应有限变差过程. 此外, 对任何停时 T, 有

$$[X, Y^T]=[X, Y]^T,\ [X, Y^{T-}]=[X, Y]^{T-}.$$

8.49 定义 设 X, Y 为两个半鞅. 如果 $[X, Y]$ 为局部可积变差过程, 则我们用 $\langle X, Y\rangle$ 表示 $[X, Y]$ 的可料对偶投影. 这时我们说 $\langle X, Y\rangle$ 存在.

容易看出, 对半鞅情形有相应的 Kunita-Watanabe 不等式(简称 K-W 不等式).

8.50 定理 设 X, Y 为两个半鞅; H, K 为两个可测过程; p, q 为一对共轭指数. 则有

(50.1)
$$\int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d[X, Y]_s| \leqslant\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[X, X]_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{[0,\infty[}K_s^2d[Y, Y]_s\right)^{\frac{1}{2}}\ \text{a.s.},$$

(50.2)
$$E\left[\int_{[0,\infty[}|H_sK_s||d[X, Y]_s|\right] \leqslant\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}H_s^2d[X, X]_s}\right\|_p\left\|\sqrt{\int_{[0,\infty[}K_s^2d[Y, Y]_s}\right\|_q.$$

注 若 $\langle X, X\rangle$, $\langle X, Y\rangle$, $\langle Y, Y\rangle$ 都存在, 则也有相应的 K-W 不等式.

§7 特殊半鞅

8.51 定义 设 X 为一半鞅, 称 X 为特殊半鞅, 如果 X 可作如下分解:

$$X=M+A,$$

其中 M 为局部鞅, A 为局部可积变差过程.

由定理 8.19 的注知, 右连续上鞅(或下鞅)为特殊半鞅.

设 X 为一特殊半鞅, $X=N+B$ 为 X 的一个分解, 其中 N 为局部鞅, B 为有限变差过程. 则由于 $B-A=M-N$ 为有限变差局部鞅, 故 $B-A$ 为局部可积变差鞅(定理 8.22). 从而 B 为局

部可积变差过程.

8.52 定理 设 X 为一特殊半鞅，则 X 有如下唯一分解：$X=M+A$，其中 M 为局部鞅，A 为零初值可料有限变差过程. 今后，我们称这一分解为特殊半鞅 X 的典则分解.

证明 存在性. 设 $X=N+B$ 为 X 的一个分解，其中 N 为局部鞅，B 为零初值局部可积变差过程. 令 $A=\widetilde{B}$，$M=N+B-\widetilde{B}$，这里 $\widetilde{B}$ 为 B 的可料对偶投影，则得所要的分解：$X=M+A$. 唯一性容易由定理 8.15 推得. ∎

下一定理给出了特殊半鞅的几个有用的刻划.

8.53 定理 设 X 为一半鞅，则下列诸断言等价：

1) X 为特殊半鞅；

2) $\sqrt{[X, X]}$ 为局部可积增过程；

3) $X_t^*=\sup\limits_{s\leqslant t}|X_s|$ 为局部可积增过程.

证明 1)⇒2). 设 X 为特殊半鞅，令 $X=M+A$ 为其典则分解，则由 K-W 不等式，

$$\begin{aligned}\sqrt{[X, X]}&=\sqrt{[M, M]+2[M, A]+[A, A]}\\&\leqslant\sqrt{[M, M]+[A, A]+2\sqrt{[M, M][A, A]}}\\&=\sqrt{[M, M]}+\sqrt{[A, A]}.\end{aligned}$$

由于 $\sqrt{[M, M]}$ 为局部可积增过程（定理 8.32），$\sqrt{[A, A]}=\sqrt{\sum\limits_{s\leqslant t}\Delta A_s^2}\leqslant\sum\limits_{s\leqslant t}|\Delta A_s|$ 为局部可积增过程，故 $\sqrt{[X, X]}$ 为局部可积增过程.

2)⇒3). 设 $\sqrt{[X, X]}$ 为局部可积增过程. 由于

$$(\Delta X)_t^*\leqslant\Big[\sum_{0\leqslant s\leqslant t}(\Delta X_s)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{[X, X]_t},$$

故 $(\Delta X)^*$ 为局部可积增过程. 另一方面，我们有

$$X^*\leqslant(\Delta X)^*+(X_-)^*,$$

其中 $(X_-)_t=X_{t-}$. 由于 (X_{t-}) 局部有界（定理 8.3.1)），故 $(X_-)^*$

也局部有界，从而 X^* 为局部可积增过程.

3)⇒1). 设 X^* 为局部可积增过程. 令 $X=M+A$, 其中 M 为局部鞅, A 为零初值有限变差过程. 由于 M^* 为局部可积增过程(系 8.21), 故 A^* 为局部可积增过程. 从而由定理 8.8, A 为局部可积变差过程. 依定义, X 为特殊半鞅.

8.54 系 跳有界的半鞅(或者更一般地,局部有界半鞅)为特殊半鞅. 特别,由定理 8.3.3) 知,可料半鞅为特殊半鞅.

8.55 定理 设 X 为一特殊半鞅, $X=M+A$ 为其典则分解. 若存在常数 $C>0$, 使得对一切可料时 $T>0$, 有 $|\Delta X_T|\leqslant C$ a.s., 则 $|\Delta A|\leqslant C$.

证明 设 $T>0$ 为一可料时, 则由定理 8.16.1), 我们有 $\mathbb{E}[\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}]=0$ a.s., 故有(因 A 可料)

$$\Delta A_T=\mathbb{E}[\Delta A_T|\mathscr{F}_{T-}]=\mathbb{E}[\Delta X_T-\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}]$$
$$=\mathbb{E}[\Delta X_T|\mathscr{F}_{T-}]\ \text{a.s.}$$

从而 $|\Delta A_T|\leqslant C$ a.s.. 但对一切绝不可及时 T, $\Delta A_T=0$ a.s., 于是有 $|\Delta A|\leqslant C$.

8.56 系 设 X 为一拟左连续(相应地, 连续)特殊半鞅, $X=M+A$ 为其典则分解, 则 A 连续, M 拟左连续(相应地, 连续).

§8 拟鞅, Rao 分解

8.57 定义 设 $X=(X_t)$ 为一右连续适应过程,我们称 X 为拟鞅,如果对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, X_t 可积,且有

$$(57.1)\qquad \operatorname{Var}(X)=\sup_{\tau}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}[|X_{t_i}-\mathbb{E}(X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i})|]+\mathbb{E}[|X_{t_n}|]\right\}<+\infty.$$

这里 τ: $0=t_0<t_1<\cdots<t_n<+\infty$ 为 $[0,+\infty[$ 的一个有限分割, sup 是在 $[0,+\infty[$ 的有限分割全体所成集合上取的.

如果右连续适应过程 X 不是拟鞅，则令 $\mathrm{Var}(X)=+\infty$.

设 X 为一右连续一致可积鞅，则由 (57.1)，$\mathrm{Var}(X)=E[|X_\infty|]<\infty$，从而 X 为拟鞅. 设 X 为一右连续非负上鞅，则 $\mathrm{Var}(X)=E[X_0]$，从而 X 为拟鞅.

设 X, Y 为两个拟鞅，显然有

$$\mathrm{Var}(X+Y)\leqslant \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y).$$

下一定理称为拟鞅的 Rao 分解定理.

8.58 定理　设 $X=(X_t)$ 为一右连续适应过程，则为要 X 是拟鞅，必须且只需 X 为两个右连续非负上鞅之差. 设 X 是拟鞅，则 X 有如下唯一分解(称为拟鞅 X 的 Rao 分解)：

$$X=X'-X'', \tag{58.1}$$

其中 X' 及 X'' 为两个右连续非负上鞅，使得

$$\mathrm{Var}(X)=E[X_0'+X_0'']. \tag{58.2}$$

证明　充分性显然，往证必要性. 设 X 为拟鞅. 令 τ: $t=t_0<t_1<\cdots<t_n<\infty$ 为区间 $[t,+\infty[$ 的一个有限分割. 置

$$U_t'(\tau)=E\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i}-E[X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i}])^+ + X_{t_n}^+ \Big|\mathscr{F}_t\Big],$$

$$U_t''(\tau)=E\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i}-E[X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i}])^- + X_{t_n}^- \Big|\mathscr{F}_t\Big].$$

由于对 $t\leqslant s<u<v$，我们有

$$\begin{aligned}
&(X_s-E[X_v|\mathscr{F}_s])^+\\
&\quad=(X_s-E[X_u|\mathscr{F}_s]+E[X_u|\mathscr{F}_s]-E[X_v|\mathscr{F}_s])^+\\
&\quad\leqslant(X_s-E[X_u|\mathscr{F}_s])^+ + (E[X_u-E[X_v|\mathscr{F}_u]\,|\mathscr{F}_s])^+\\
&\quad\leqslant(X_s-E[X_u|\mathscr{F}_s])^+ + E[(X_u-E[X_v|\mathscr{F}_u])^+|\mathscr{F}_s],
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
E[(X_s-E[X_v|\mathscr{F}_s])^+|\mathscr{F}_t]&\leqslant E[(X_s-E[X_u|\mathscr{F}_s])^+|\mathscr{F}_t]\\
&\quad+E[(X_u-E[X_v|\mathscr{F}_u])^+|\mathscr{F}_t].
\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$E[X_u^+|\mathscr{F}_t]\leqslant E[(X_u-E[X_v|\mathscr{F}_u])^+ + X_v^+|\mathscr{F}_t].$$

因此, 当分割 τ' 比分割 τ 加细时, 则有

$$U_t'(\tau)\leqslant U_t'(\tau'),\quad U_t''(\tau)\leqslant U_t''(\tau').$$

但对 $[t,+\infty[$ 的一切有限分割 τ, $\mathbb{E}[U_t'(\tau)]\leqslant \mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}[U_t''(\tau)]\leqslant \mathrm{Var}(X)$, 从而 $U_t'(\tau)$, $U_t''(\tau)$ 沿着 $[t,\infty[$ 的有限分割的半序集合在 L^1 中收敛, 记其极限为 U_t', U_t''. (即 $U_t'=\text{ess.}\sup\limits_{\tau} U_t'(\tau)$, $U_t''=\text{ess.}\sup\limits_{\tau} U_t''(\tau)$.) 设 $s<t$, 则有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U_t'(\tau)\,|\,\mathscr{F}_s]&=\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i}-\mathbb{E}[X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i}])^+ + X_{t_n}^+\,|\,\mathscr{F}_s\Big]\\&\leqslant \mathbb{E}\Big[(X_s-\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s])^+\\&\qquad+\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i}-\mathbb{E}[X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i}])^+ + X_{t_n}^+\,|\,\mathscr{F}_s\Big]\\&=U_s'(\tilde{\tau})\leqslant U_s'\quad \text{a.s.}\,,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\tau}$ 为 $[s,+\infty[$ 的一个有限分割. 于是有 $\mathbb{E}[U_t'|\mathscr{F}_s]\leqslant U_s'$, 即 (U_t') 为非负上鞅. 同理, (U_t'') 为非负上鞅. 令 Q_+ 为 $\mathbb{R}_+$ 中有理数全体, 由 Föllmer 引理 (定理 3.5), 存在右连续上鞅 (X_t') 及 (X_t''), 使得对几乎所有 ω, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$X_t'(\omega)=\lim_{s\in Q_+,s\downarrow\downarrow t}U_s'(\omega),\quad X_t''(\omega)=\lim_{s\in Q_+,s\downarrow\downarrow t}U_s''(\omega).$$

但对 $[t,+\infty[$ 的一切有限分割 τ 有

$$X_t=U_t'(\tau)-U_t''(\tau)\quad \text{a.s.}\,,\ t\in\mathbb{R}_+,$$

从而有 $X_t=U_t'-U_t''$. 于是由 (X_t) 的右连续性有

$$X_t=X_t'-X_t''\quad \text{a.s.}\,.$$

此外, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=\sup_{\tau}\mathbb{E}[U_0'(\tau)+U_0''(\tau)]=\mathbb{E}[U_0'+U_0'']\\&\geqslant \lim_{s\in Q_+,s\downarrow\downarrow t}\mathbb{E}[U_s'+U_s'']\geqslant \mathbb{E}[X_0'+X_0'']\quad (\text{Fatou 引理})\\&=\mathrm{Var}(X')+\mathrm{Var}(X'').\end{aligned}$$

但相反的不等式恒成立, 故有 (58.2).

现在证明满足 (58.2) 的分解是唯一的. 设 $X=X^1-X^2$, 其

中 X^1, X^2 为两个右连续非负上鞅，使得

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}[X_0^1+X_0^2].$$

若 $s<t$，我们有

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}[X_s-X_t|\mathscr{F}_s])^+=&(\mathbb{E}[X_s^1-X_t^1|\mathscr{F}_s]\\&-\mathbb{E}[X_s^2-X_t^2|\mathscr{F}_s])^+\\\leqslant&\mathbb{E}[X_s^1-X_t^1|\mathscr{F}_s].\end{aligned}$$

由此容易推得

$$U_t'\leqslant X_t^1,\quad \mathbb{E}[U_s'-U_t'|\mathscr{F}_s]\leqslant\mathbb{E}[X_s^1-X_t^1|\mathscr{F}_s].$$

从而 X^1-U' 为非负上鞅，X^1-X' 为右连续非负上鞅．同理可证 X^2-X'' 为非负上鞅．但依假定，$\mathbb{E}[X_0'+X_0'']=\mathbb{E}[X_0^1+X_0^2]=\mathrm{Var}(X)$，从而 $X_0^1-X_0'=X_0^2-X_0''=0$．于是对一切 t，$X_t^1-X_t'=0$，$X_t^2-X_t''=0$．唯一性得证．

8.59 注 1) 设 X 为一拟鞅，$X=X'-X''$ 为其 Rao 分解．令 $X=Y-Z$，其中 Y、Z 为两个右连续非负上鞅，则由定理证明看出，$Y-X'$ 及 $Z-X''$ 为非负上鞅．此外，如果 $X=X^T$（T 为一停时)，则有 $(X')^T=X'$，$(X'')^T=X''$．

2) 由于右连续非负上鞅在 L^1 中有界，故由定理知，拟鞅在 L^1 中有界．

8.60 例 设 X 为一适应可积增过程，则

$$\mathrm{Var}(X)=2\mathbb{E}[X_\infty]-\mathbb{E}[X_0]<+\infty.$$

从而 X 为一拟鞅．令

$$X_t'=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t],$$

$$X_t''=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t]-X_t,$$

则 X' 及 X'' 为非负上鞅，$X=X'-X''$ 为 X 的 Rao 分解．

由该例知，适应可积变差过程为拟鞅．

下一定理表明：在参照 σ-域族减缩下，拟鞅性保持不变．这是拟鞅的一个重要性质．以后，我们将利用拟鞅的这一性质证明半鞅也具有这一性质．

8.61 定理 设 $(\mathscr{G}_t)$ 为一满足通常条件的子 σ-域族，使得对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $\mathscr{G}_t\subset\mathscr{F}_t$. 设 $X=(X_t)$ 关于 $(\mathscr{F}_t)$ 为一拟鞅，且关于 $(\mathscr{G}_t)$ 适应，则 X 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 仍为拟鞅.

证明 设 $0\leqslant s<t<\infty$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_s-\mathbb{E}(X_t|\mathscr{G}_s)|]&=\mathbb{E}[|\mathbb{E}(\mathbb{E}[X_s-X_t|\mathscr{F}_s]|\mathscr{G}_s)|]\\&\leqslant\mathbb{E}[|\mathbb{E}(X_s-X_t|\mathscr{F}_s)|]\\&=\mathbb{E}[|X_s-\mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s)|].\end{aligned}$$

于是由(57.1)有

$$\mathrm{Var}(X)(\mathscr{G}_t)\leqslant\mathrm{Var}(X)(\mathscr{F}_t)<+\infty.$$

从而 X 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 为拟鞅.

§9 局部鞅的 Krickeberg-Kazamaki 分解

本节研究在 L^1 中有界的局部鞅.

8.62 引理 设 X 为一右连续适应过程.

1) 设 $S\geqslant T$ 为两个停时，则有 $\mathrm{Var}(X^T)\leqslant\mathrm{Var}(X^S)$.

2) 设停时 $T_n\uparrow+\infty$，则有 $\mathrm{Var}(X)=\sup\limits_n\mathrm{Var}(X^{T_n})$.

证明 1) 无妨设 $\mathrm{Var}(X^S)<+\infty$，即设 X^S 为拟鞅. 令 $X^S=X'-X''$ 为 X^S 的 Rao 分解，则有 $X^T=(X')^T-(X'')^T$，故有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X^T)&\leqslant\mathrm{Var}(X'^T)+\mathrm{Var}(X''^T)=\mathbb{E}[X'_0]+\mathbb{E}[X''_0]\\&=\mathrm{Var}(X^S).\end{aligned}$$

2) 无妨设 $\sup\limits_n\mathrm{Var}(X^{T_n})<+\infty$. 对每个 n，令 $X^{T_n}=Y^{(n)}-Z^{(n)}$ 为拟鞅 X^{T_n} 的 Rao 分解，则由注 8.59.1) 知，对 $k>j$，我们有

$$Y^{(k)T_j}\geqslant Y^{(j)},\quad Z^{(k)T_j}\geqslant Z^{(j)}.$$

于是对固定 m，当 $k>j\geqslant m$ 时，我们有

$$Y^{(k)T_m}\geqslant Y^{(j)T_m},\quad Z^{(k)T_m}\geqslant Z^{(j)T_m}.$$

这表明，对每个固定的 m，$(Y^{(n)T_m})_{n\geqslant m}$ 及 $(Z^{(n)T_m})_{n\geqslant m}$ 为右连续非负上鞅的单调非降序列，并且有

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}[Y_0^{(n)}]+\mathbb{E}[Z_0^{(n)}])=\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}(X^{T_n})<+\infty.$$

故由定理5.48.1)，这两个序列的极限 $\bar{Y}^{(m)}$ 及 $\bar{Z}^{(m)}$ 为右连续非负上鞅. 显然我们有

$$(\bar{Y}^{(m+1)})^{T_m}=\bar{Y}^{(m)},\quad (\bar{Z}^{(m+1)})^{T_m}=\bar{Z}^{(m)},$$

于是由定理8.11，存在右连续非负上鞅 $\bar{Y}$ 及 $\bar{Z}$ 使得对每个 m，有 $\bar{Y}^{T_m}=\bar{Y}^{(m)}$，$\bar{Z}^{T_m}=\bar{Z}^{(m)}$. 这时我们有 $X=\bar{Y}-\bar{Z}$. 从而 X 为拟鞅，且有

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X)&\leqslant\mathbb{E}[\bar{Y}_0+\bar{Z}_0]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[Y_0^{(n)}+Z_0^{(n)}]\\&=\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}(X^{T_n})=\sup_n\operatorname{Var}(X^{T_n}).\end{aligned}$$

但是由1)，我们有 $\operatorname{Var}(X)\geqslant\sup\limits_n\operatorname{Var}(X^{T_n})$. 因此最终有

$$\operatorname{Var}(X)=\sup_n\operatorname{Var}(X^{T_n}).$$

引理证毕.

令 $\mathscr{T}_b$ 表示有界停时全体. 设 M 为一局部鞅，今后我们令

$$\|M\|_1=\sup_{T\in\mathscr{T}_b}\mathbb{E}[|M_T|].$$

于是依定义，称 M 在 L^1 中有界，是指 $\|M\|_1<+\infty$.

8.63 定理 1) 设 M 为一局部鞅，则为要 M 为拟鞅，必须且只需 M 在 L^1 中有界.

2) 设 M 为在 L^1 中有界的局部鞅，则 $\operatorname{Var}(M)=\|M\|_1$. 此外，令 $T_n\uparrow+\infty$ 为一列有穷停时，使得对一切 n，M^{T_n} 为一致可积鞅，则

$$\|M\|_1=\sup_n\mathbb{E}[|M_{T_n}|].\tag{63.1}$$

证明 1) 的必要性不待证，1) 的充分性由 2) 得到. 往证 2). 对每个 n，M^{T_n} 为一致可积鞅，从而 $|M^{T_n}|$ 为下鞅，故 $\mathbb{E}[|M_{T_n}|]$ 单调非降. 设 T 为一有穷停时，由 Fatou 引理，

$$\mathbb{E}[|M_T|]\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[|M_{T\wedge T_n}|]\leqslant\sup_n\mathbb{E}[|M_{T_n}|].$$

从而有(63.1). 此外由引理8.62.2), 我们有

$$\mathrm{Var}(M)=\sup_n \mathrm{Var}(M^{T_n})=\sup_n \mathbb{E}[|M_{T_n}|]=\|M\|_1.$$

下一定理是非负上鞅的 Ito-Watanabe 分解定理的一个推广. 它表明, 拟鞅为特殊半鞅; 局部拟鞅与特殊半鞅是同一概念.

8.64 定理 设 X 为一右连续适应过程. 则为要 X 是拟鞅, 必须且只需 X 有如下分解:

$$X=M+A,$$

其中 M 为在 L^1 中有界的局部鞅, A 为零初值可料可积变差过程. 此外, 拟鞅的这种分解是唯一的.

证明 充分性显然, 必要性由定理 8.58 及定理 8.19 推得. 这种分解的唯一性显然.

下一定理是局部鞅的 Krickeberg-Kazamaki 分解定理, 它是拟鞅的 Rao 分解定理的特例.

8.65 定理 设 M 为一在 L^1 中有界的局部鞅. 则 M 有如下唯一分解:

$$M=M'-M'',$$

其中 M' 及 M'' 为在 L^1 中有界的非负局部鞅, 且有

$$\|M\|_1=\|M'\|_1+\|M''\|_1.$$

证明 由定理 8.63, M 为拟鞅, 故由定理 8.58, M 有如下唯一分解:

$$M=M'-M'',$$

其中 M' 及 M'' 为非负右连续上鞅, 且 $\mathrm{Var}(M)=\|M\|_1=\mathbb{E}[M'_0+M''_0]$. 令 $T_n\uparrow+\infty$ 为一列有穷停时, 使得对每个 n, M^{T_n} 为一致可积鞅. 于是对一切 m, 我们有

$$\mathbb{E}[M'_0+M''_0]=\|M\|_1=\sup_n \mathbb{E}[|M_{T_n}|]=\sup_{n\geq m}\mathbb{E}[|M_{T_n}|]$$

$$\leqslant \sup_{n\geq m}\mathbb{E}(M'_{T_n}+M''_{T_m})=\mathbb{E}(M'_{T_m}+M''_{T_m}).$$

但 $\mathbb{E}[M'_0]\geqslant \mathbb{E}[M'_{T_m}]$, $\mathbb{E}[M''_0]\geqslant \mathbb{E}[M''_{T_m}]$, 故有 $\mathbb{E}[M'_0]=\mathbb{E}[M'_{T_m}]$,

$\mathbb{E}[M''_0]=\mathbb{E}[M''_{T_m}]$. 这表明，对一切 m，$(M')^{T_m}$，$(M'')^{T_m}$ 为鞅，从而 M' 及 M'' 为局部鞅. 此外有(定理 8.63.2))

$$\|M\|_1=\mathbb{E}[M'_0+M''_0]=\mathrm{Var}(M')+\mathrm{Var}(M'')$$
$$=\|M'\|_1+\|M''\|_1.$$

定理证毕.

8.66 定理 设 M 为一鞅，且在 L^1 中有界. 则 M 有如下唯一分解：

$$M=M'-M'',$$

其中 M' 及 M'' 为在 L^1 中有界的非负鞅，使得

$$\|M\|_1=\|M'\|_1+\|M''\|_1.$$

证明 在前一定理证明中令 $T_n=n$，即得本定理的证明.

最后，作为本节的结束，我们证明在 L^1 中有界的局部鞅的一个不变性质.

8.67 定理 设 $(\mathscr{G}_t)$ 为一满足通常条件的子 σ-域族，使得对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $\mathscr{G}_t\subset\mathscr{F}_t$. 设 M 为一在 L^1 中有界的 $(\mathscr{F}_t)$ 局部鞅，且关于 $(\mathscr{G}_t)$ 适应，则 M 为在 L^1 中有界的 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅.

证明 令

$$T_n=\inf\{t:|M_t|\geqslant n\}\wedge n,$$

则 (T_n) 为一列有穷 $(\mathscr{G}_t)$ 停时，且 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.. 由于 $\mathbb{E}[|M_{T_n}|]<+\infty$，且 $|M^{T_n}|\leqslant n+|M_{T_n}|$，故 M^{T_n} 为一致可积 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅. 由于 $M_{T_n\wedge t}$ 为 $\mathscr{G}_t$ 可测，故有

$$\mathbb{E}[M_{T_n}|\mathscr{G}_t]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{T_n}|\mathscr{F}_t]|\mathscr{G}_t]$$
$$=\mathbb{E}[M_{T_n\wedge t}|\mathscr{G}_t]=M_{T_n\wedge t}\text{ a.s.}.$$

这表明 M^{T_n} 为一致可积 $(\mathscr{G}_t)$ 鞅，从而 M 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅. 最后，凡 $(\mathscr{G}_t)$ 停时皆为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，故有

$$\|M\|_1(\mathscr{G}_t)\leqslant\|M\|_1(\mathscr{G}_t).$$

从而 M 为在 L^1 中有界的 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅.

§10 时间变换下的半鞅与拟鞅

在研究时间变换之前，我们首先证明：局部半鞅仍为半鞅.

8.68 定理 设 X 为一右连续适应过程. 若存在一列停时 T_n，使得 $\sup\limits_n T_n = +\infty$ a.s.，且对每个 n，X^{T_n} 为半鞅(相应地，特殊半鞅)，则 X 为半鞅(相应地，特殊半鞅).

证明 无妨假定 $T_n \uparrow +\infty$ a.s.. 首先考虑特殊半鞅情形，即设每个 X^{T_n} 为特殊半鞅. 令 $X^{T_n} = M^n + A^n$ 为其典则分解，由典则分解的唯一性知，我们有

$$(M^{n+1})^{T_n} = M^n, \quad (A^{n+1})^{T_n} = A^n.$$

设 $T_0 = 0$，令

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M^n I_{]T_{n-1}, T_n]}, \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} A^n I_{[T_{n-1}, T_n[},$$

则 M 为一局部鞅 $(M^{T_n} = M^n)$，A 为一可料有限变差过程 $(A^{T_n} = A^n)$，且 $X = M + A$，故 X 为特殊半鞅.

现设每个 X^{T_n} 为半鞅，则易知 X 为右连左极过程. 令

$$V_t = \sum_{0<s\leqslant t} \Delta X_s I_{[|\Delta X_s|>1]},$$

则 V 为适应有限变差过程，且 $X^{T_n} - V^{T_n} = (X-V)^{T_n}$ 的跳有界(以 1 为界)，从而 $(X-V)^{T_n}$ 为特殊半鞅(系 8.54). 由上所证，$X - V$ 为特殊半鞅，从而 X 为半鞅.

8.69 定义 一右连续增过程 (τ_t) 称为关于 $(\mathscr{F}_t)$ 的时间变换，如果对一切 $t \in \mathbb{R}_+$，τ_t 为一 a.s. 有穷的 $(\mathscr{F}_t)$ 停时.

下一定理表明，在时间变换下，半鞅性质仍保持.

8.70 定理 设 (τ_t) 关于 $(\mathscr{F}_t)$ 为一时间变换. 令 $(\mathscr{G}_t) = (\mathscr{F}_{\tau_t})$，则 $(\mathscr{G}_t)$ 满足通常条件. 设 X 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 半鞅，令 $Y_t = X_{\tau_t}$，则 (Y_t) 为 $(\mathscr{G}_t)$ 半鞅. 若 (τ_t) 连续且 X 为 $(\mathscr{F}_t)$ 局部鞅，则 (Y_t) 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅.

证明 $(\mathscr{G}_t)$ 的完备性显然，右连续性由定理 4.4.10) 推得.

设 $X=M+A$，其中 M 为一零初值 $(\mathscr{F}_t)$ 局部鞅，A 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 适应有限变差过程．令 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 $T_n\uparrow+\infty$，使得每个 M^{T_n} 为一致可积 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅．令

$$N_t^n=M_{\tau_t}^{T_n}=M_{\tau_t\wedge T_n},$$

则容易由 Doob 停止定理知，N^n 为一致可积 $(\mathscr{G}_t)$ 鞅．令

$$\overline{T}_n=\inf\{t:\ \tau_t\geqslant T_n\},$$

则 $[\overline{T}_n\leqslant t]=[\tau_t\geqslant T_n]\in\mathscr{F}_{\tau_t}=\mathscr{G}_t$，从而 $\overline{T}_n$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时．由于 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.，故对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，$\mathbb{P}([\overline{T}_n>t])=\mathbb{P}([T_n>\tau_t])\to1\ (n\to\infty)$．从而 $\overline{T}_n\uparrow+\infty$ a.s.．此外，由于 $[t<\overline{T}_n]=[\tau_t<T_n]$，我们有

$$N_\cdot^nI_{[\![0,\overline{T}_n[\![}=M_{\tau_\cdot\wedge T_n}I_{[\![0,\overline{T}_n[\![}=M_{\tau_\cdot}I_{[\![0,\overline{T}_n[\![}=M_{\tau_\cdot\wedge\overline{T}_n}I_{[\![0,\overline{T}_n[\![}.$$

令 $N_t=M_{\tau_t}$，则上式表明

$$\begin{aligned}N^{\overline{T}_n}&=N^{\overline{T}_n}I_{[\![0,\overline{T}_n[\![}+N_{\overline{T}_n}I_{[\![\overline{T}_n,\infty[\![}=N^nI_{[\![0,\overline{T}_n[\![}+N_{\overline{T}_n}I_{[\![\overline{T}_n,\infty[\![}\\&=N^n+(N_{\overline{T}_n}-N_{\overline{T}_n}^n)I_{[\![\overline{T}_n,\infty[\![}.\end{aligned}$$

由于 N^n 为一致可积 $(\mathscr{G}_t)$ 鞅，故 $N^{\overline{T}_n}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 半鞅．于是由定理 8.68，N 为 $(\mathscr{G}_t)$ 半鞅．另一方面，(A_{τ_t}) 显然为 $(\mathscr{G}_t)$ 适应有限变差过程，故 (X_{τ_t}) 为 $(\mathscr{G}_t)$ 半鞅．另一结论留给读者证明．

下一定理表明，在时间变换下，拟鞅性质仍保持．

8.71 定理 设 (τ_t) 关于 $(\mathscr{F}_t)$ 为一时间变换，(X_t) 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 拟鞅．令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{\tau_t}$，$Y_t=X_{\tau_t}$，则 (Y_t) 为 $(\mathscr{G}_t)$ 拟鞅．

证明 由定理 8.58，不妨设 (X_t) 为一非负 $(\mathscr{F}_t)$ 上鞅．这时，由 Doob 停止定理，(Y_t) 为一非负 $(\mathscr{G}_t)$ 上鞅，从而 (Y_t) 为 $(\mathscr{G}_t)$ 拟鞅．

§11 凸函数与半鞅

8.72 定理 设 X 为一半鞅，f 为 $\mathbb{R}$ 上的一凸函数，则 $f(X)$ 为一半鞅．

证明 首先假定 $X=M+A$，其中 M 为有界鞅，$|M|\leqslant C$，A 为零初值可积变差过程，且 $\int_0^\infty|dA_s|\leqslant C$．这时，$X$ 在 $[-2C,\ 2C]$

中取值，故 $f(X)$ 为有界过程．令 K 为 f 在 $[-2C, 2C]$ 上的 Lipschitz 常数，置

$$Y_t=f(X_t)+K\int_0^t |dA_s|.$$

往证 (Y_t) 为一下鞅．令 $s<t$，我们有

$$|f(M_t+A_t)-f(M_t+A_s)|\leqslant K|A_t-A_s|\leqslant K\int_s^t |dA_u|.$$

于是

$$\begin{aligned}
&E[Y_t-Y_s|\mathscr{F}_s]\\
&=E\Big[f(M_t+A_t)-f(M_t+A_s)+K\int_s^t |dA_u|\Big|\mathscr{F}_s\Big]\\
&\quad+E[f(M_t+A_s)|\mathscr{F}_s]-f(M_s+A_s)\\
&\geqslant E[f(M_t+A_s)|\mathscr{F}_s]-f(M_s+A_s)\quad \text{a.s.}.
\end{aligned}$$

由于 $(M_t+A_s)_{t\geqslant s}$ 为鞅，故 $(f(M_t+A_s))_{t\geqslant s}$ 为下鞅，从而由上式有

$$E[Y_t-Y_s|\mathscr{F}_s]\geqslant 0\quad \text{a.s.}.$$

这表明 (Y_t) 为一下鞅．于是 (Y_t) 为半鞅，$f(X)$ 为半鞅．

现在假定 X_0 有界．令 $X=M+A$，其中 M 为局部有界鞅，A 为零初值有限变差过程．令停时 $T_n\uparrow\infty$，使得对充分大的 n，$|M^{T_n}|\leqslant n$，$\int_0^{T_n-}|dA_s|\leqslant n$．令 $\overline{X}^{(n)}=M^{T_n}+A^{T_n-}$，其中

$$A^{T_n-}=AI_{[\![0,T_n[\![}+A_{T_n-}I_{[\![T_n,\infty[\![},$$

则由上所证，$f(\overline{X}^{(n)})$ 为半鞅．但我们有

$$f(X^{T_n})=f(\overline{X}^{(n)})+[f(X_{T_n})-f(\overline{X}^{(n)}_{T_n})]I_{[\![T_n,\infty[\![},$$

故 $f(X^{T_n})$ 为半鞅，从而 $f(X)$ 为半鞅．

最后，对一般半鞅 X，令 $R_n=\infty\cdot I_{[|X_0|\leqslant n]}+0_{[|X_0|>n]}$，$\overline{X}^{(n)}=XI_{[|X_0|\leqslant n]}=X^{R_n}-X_0I_{[|X_0|>n]}$，则由上所证，$f(\overline{X}^{(n)})$ 为半鞅．但我们有

$$f(X^{R_n})=f(\overline{X}^{(n)})I_{[|X_0|\leqslant n]}+f(X_0)I_{[|X_0|>n]}.$$

故 $f(X^{R_n})$ 为半鞅，从而 $f(X)$ 为半鞅．

8.73 系 1) 设 X 为半鞅(相应地, 特殊半鞅), 则 $|X|$ 为半鞅(相应地, 特殊半鞅).

2) 设 X, Y 为两个半鞅(相应地, 特殊半鞅), 则 $X\vee Y$ 及 $X\wedge Y$ 为半鞅(相应地, 特殊半鞅).

证明 1) 显然. 2) 由 1) 及如下等式推得:

$$X\vee Y=\frac{X+Y}{2}+\frac{|X-Y|}{2},$$

$$X\wedge Y=\frac{X+Y}{2}-\frac{|X-Y|}{2}.$$

第九章

随机积分

所谓随机积分，是指形如$\int_{[0,t]} H_s dX_s$（或$\int_{0-}^{t} H_s dX_s$）的“积分”，其中(H_t)和(X_t)为两个随机过程．1944年，Ito[1]最早定义了适应可测过程对布朗运动的随机积分．这一积分的一个重要特点，是积分得到的过程为一鞅（或者更一般地，局部鞅）．1967年，Kunita和Watanabe[1]定义了适应可测过程对一般平方可积鞅的随机积分，迈出了现代随机积分理论的关键性的一步．1970年，Doléans-Dade和Meyer[1]研究了局部有界可料过程对局部鞅及半鞅的随机积分．1976年，Meyer[10]研究了可选过程对局部鞅的随机积分．1979年，Jacod[5]研究了非有界可料过程对半鞅的随机积分．本章介绍随机积分的定义及其基本性质．

§1 可测过程对局部鞅的随机积分

9.1 记号 为叙述上的方便，今后我们将采用如下记号

$\mathscr{M}$——一致可积鞅空间．

$\mathscr{W}$——可积变差鞅空间．

$\mathscr{W}^{da}$——只有可及跳的可积变差鞅空间．

$\mathscr{W}^{di}$——只有绝不可及跳的可积变差鞅空间．

$\mathscr{M}^2$——平方可积鞅空间．

$\mathscr{M}^{2,c}$——连续平方可积鞅空间．

$\mathscr{M}^{2,d}$——纯断平方可积鞅空间．

$\mathscr{M}^{2,da}$——只有可及跳的纯断平方可积鞅空间．

$\mathscr{M}^{2,di}$——只有绝不可及跳的纯断平方可积鞅空间。

$\mathscr{M}_{loc}$——局部鞅空间。

$\mathscr{M}^c_{loc}$——连续局部鞅空间。

$\mathscr{M}^d_{loc}$——纯断局部鞅空间。

$\mathscr{M}^2_{loc}$——局部平方可积鞅空间。

$\mathscr{W}_{loc}$——有限变差局部鞅(即局部可积变差鞅)空间。

此外，我们用 $\mathscr{M}^2_0$ 表示零初值平方可积鞅空间，用 $\mathscr{M}_{0,loc}$ 表示零初值局部鞅空间等。读者可以自行给出 $\mathscr{M}^{da}_{loc}$, $\mathscr{W}^{di}_{loc}$ 等记号的涵义。

9.2 定理 设 M 为一局部鞅，H 为一可测过程，使得 $\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} H^2_s d[M,M]_s\right]<\infty$，则

1) 存在唯一的 $L\in\mathscr{M}^2$，使得对一切 $N\in\mathscr{M}^2$，有

$$\mathbb{E}[L_\infty N_\infty]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} H_s d[M,N]_s\right]. \tag{2.1}$$

我们称 L 为 H 关于 M 的随机积分，记为 $H.M$。

2) 我们有

$$\mathbb{E}[(H.M)^2_\infty]\leqslant\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} H^2_s d[M,M]_s\right]. \tag{2.2}$$

3) 对任何绝不可及时 T，有

$$\Delta(H.M)_T=\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T]\ \text{a.s.}, \tag{2.3}$$

对任何可料时 $T>0$，有

$$\Delta(H.M)_T=\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T]-\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}]\quad \text{a.s.}. \tag{2.4}$$

此外，

$$(H.M)_0=\mathbb{E}[H_0M_0|\mathscr{F}_0]\ \text{a.s.}. \tag{2.5}$$

4) 对任何停时 T，有

$$(H.M)^T=H.M^T=(HI_{[\![0,T]\!]}).M. \tag{2.6}$$

5) $M\in\mathscr{M}^c_{loc}\Rightarrow H.M\in\mathscr{M}^{2,c}$, $M\in\mathscr{M}^d_{loc}(\mathscr{M}^{da}_{loc},\ \mathscr{M}^{di}_{loc})\Rightarrow H.M\in\mathscr{M}^{2,d}(\mathscr{M}^{2,da},\ \mathscr{M}^{2,di})$。

证明 1) $\mathscr{M}^2$ 按内积 $(M, N)=\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]=\mathbb{E}[M, N]_\infty$ 为一 Hilbert 空间. 由 Kunita-Watanabe 不等式(定理 8.50), 对一切 $N\in\mathscr{M}^2$, 我们有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s||d[M, N]_s|\right]$$

$$\leqslant\left(\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M, M]_s\right]\right)^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}[N_\infty^2])^{\frac{1}{2}}.$$

从而 $N\mapsto\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}H_s d[M, N]_s\right]$ 为 $\mathscr{M}^2$ 上的有界线性泛函, 故存在唯一的 $L\in\mathscr{M}^2$, 使得对一切 $N\in\mathscr{M}^2$, 有 (2.1).

2) 由(2.1)及 K-W 不等式得

$$\mathbb{E}[(H.M)_\infty^2]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}H_s d[M, H.M]_s\right]$$

$$\leqslant\left(\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M, M]_s\right]\right)^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}[(H.M)_\infty^2])^{\frac{1}{2}},$$

由此推得(2.2).

3) 设 T 为一绝不可及时, 令

$$A=\xi I_{[\![T,\infty[\![},$$

其中 ξ 为 $\mathscr{F}_T$ 可测随机变量, 且 $\mathbb{E}[\xi^2]<\infty$ (简记为 $\xi\in L^2(\mathscr{F}_T)$). 令 $N=A-\widetilde{A}$, 则 $\widetilde{A}$ 连续, 且 $N\in\mathscr{M}^{2,d}$ (定理 7.16.1)). 故有 $[M, N]=\xi\Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![}$, 从而

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}H_s d[M, N]_s\right]=\mathbb{E}[H_T\Delta M_T\xi]$$

$$=\mathbb{E}[\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T]\xi].$$

但由定理 7.18.2),

$$\mathbb{E}[(H.M)_\infty N_\infty]=\mathbb{E}[\Delta(H.M)_T\xi],$$

于是由(2.1)得

$$\mathbb{E}[(\Delta(H.M)_T-\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T])\xi]=0.$$

特别取 $\xi=\Delta(H.M)_T-\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T]$, 则有 $\mathbb{E}[\xi^2]=0$, 从而 $\xi=0$ a.s., 此即(2.3).

设 T 为一可料时，且 $T>0$. 令

$$N=\xi I_{[\![T,\infty[\![},$$

其中 $\xi\in L^2(\mathscr{F}_T)$，且 $\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]=0$. 则由定理 7.16，$N\in\mathscr{M}^{2,d}$，故有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}H_s d[M,N]_s\right]$$

$$=\mathbb{E}[H_T\Delta M_T\xi]$$

$$=\mathbb{E}\{(\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T]-\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}])\xi\},$$

$$\mathbb{E}[(H.M)_\infty N_\infty]=\mathbb{E}[\Delta(H.M)_T\xi].$$

取 $\xi=\Delta(H.M)_T-(\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T]-\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}])$，则由上面二等式及(2.1)式得 $\mathbb{E}[\xi^2]=0$，从而 $\xi=0$ a.s.，此即(2.4).

令 $N_t=N_0\in L^2(\mathscr{F}_0)$，则由(2.1)，

$$\mathbb{E}[(H.M)_0N_0]=\mathbb{E}[(H.M)_\infty N_0]=\mathbb{E}[H_0M_0N_0],$$

由此得(2.5).

4) 容易由 1) 推得.

5) 设 $M\in\mathscr{M}^c_{loc}$，则由(2.1)知，对一切 $N\in\mathscr{M}^{2,d}$，有

$$\mathbb{E}[(H.M)_\infty N_\infty]=0,$$

从而 $H.M\in\mathscr{M}^{2,c}$[1]. 同理可证

$$M\in\mathscr{M}^d_{loc}\Rightarrow H.M\in\mathscr{M}^{2,d}.$$

进一步由 3) 推知

$$M\in\mathscr{M}^{da}_{loc}(\mathscr{M}^{di}_{loc})\Rightarrow H.M\in\mathscr{M}^{2,da}(\mathscr{M}^{2,di}).$$

9.3 系 设 $M\in\mathscr{M}^c_{loc}$，H 为一可测过程，使得对几乎所有 ω，$[t:H_t(\omega)\neq0]$ 为至多可数集，则 $H.M=0$.

9.4 定理 设 M 为一纯断局部鞅，H 为一可测过程，使得 $\mathbb{E}[\sum_s|H_s\Delta M_s|]<\infty$. 则

1) 存在唯一的 $L\in\mathscr{W}_0$，使得对一切有界鞅 N，有

$$\mathbb{E}[L_\infty N_\infty]=\mathbb{E}\left[\sum_s H_s\Delta M_s\Delta N_s\right]. \tag{4.1}$$

---

1) 由 3) 也可直接推得 $M\in\mathscr{M}^c_{loc}\Rightarrow H.M\in\mathscr{M}^{2,c}$.

我们称 L 为 H 关于 M 的随机积分，记为 $H.M$.

2) 我们有

$$(4.2)\qquad \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d(H.M)_s|\right]\leqslant 2\mathbb{E}\left[\sum_s|H_s\Delta M_s|\right].$$

3) 对任何绝不可及时 T，有

$$(4.3)\qquad \Delta(H.M)_T=\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T]\quad \text{a.s.},$$

对任何可料时 $T>0$，有

$$(4.4)\qquad \Delta(H.M)_T=\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T]-\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}]\text{a.s.}.$$

4) 对任何停时 T，有

$$(4.5)\qquad (H.M)^T=H.M^T=(HI_{[\![0,T]\!]}).M.$$

5) $M\in\mathscr{M}_{loc}^{da}(\mathscr{M}_{loc}^{di})\Rightarrow H.M\in\mathscr{W}^{da}(\mathscr{W}^{di})$.

证明 1) 存在性. 令 (T_n) 为一穷举 M 跳的标准停时列(定理 5.20). 令

$$(4.6)\qquad A=\sum_n\mathbb{E}[H_{T_n}\Delta M_{T_n}|\mathscr{F}_{T_n}]I_{[\![T_n,\infty[\![},$$

则有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|dA_s|\right]=\mathbb{E}\left[\sum_n|\mathbb{E}[H_{T_n}\Delta M_{T_n}|\mathscr{F}_{T_n}]|\right]$$
$$\leqslant\mathbb{E}\left[\sum_n|H_{T_n}\Delta M_{T_n}|\right]=\mathbb{E}\left[\sum_s|H_s\Delta M_s|\right]<\infty.$$

从而 A 为一适应可积变差过程. 令

$$(4.7)\qquad L=A-\widetilde{A},$$

则 $L\in\mathscr{W}_0$. 由定理 6.30.2)容易看出，(T_n) 仍穷举 L 的跳，且若 T_n 为绝不可及时，则有

$$(4.8)\qquad \Delta L_{T_n}=\Delta A_{T_n}=\mathbb{E}[H_{T_n}\Delta M_{T_n}|\mathscr{F}_{T_n}];$$

若 T_n 为可料时，则有

$$(4.9)\qquad \Delta L_{T_n}=\Delta A_{T_n}-\mathbb{E}[\Delta A_{T_n}|\mathscr{F}_{T_n-}]$$
$$=\mathbb{E}[H_{T_n}\Delta M_{T_n}|\mathscr{F}_{T_n}]-\mathbb{E}[H_{T_n}\Delta M_{T_n}|\mathscr{F}_{T_n-}].$$

于是对一切有界鞅 N，由定理 6.45，我们有

$$\mathbb{E}[L_\infty N_\infty]=\mathbb{E}\left[\sum_s\Delta L_s\Delta N_s\right]=\mathbb{E}\left[\sum_n\Delta L_{T_n}\Delta N_{T_n}\right].$$

但若 T_n 为可料时，我们有 $\mathbb{E}[\Delta N_{T_n}|\mathscr{F}_{T_n-}]=0$. 从而

$$\mathbb{E}[(\mathbb{E}[H_{T_n}\Delta M_{T_n}|\mathscr{F}_{T_n-}])\Delta N_{T_n}]=0.$$

因此我们有

$$\mathbb{E}[L_\infty N_\infty]=\mathbb{E}[\sum_n H_{T_n}\Delta M_{T_n}\Delta N_{T_n}]=\mathbb{E}[\sum_s H_s\Delta M_s\Delta N_s].$$

此即(4.1).

唯一性. 设 L^1, $L^2\in\mathscr{W}_0$, 使得对一切有界鞅 N, 有 (4.1) 成立, 则有 $\mathbb{E}[(L^1_\infty-L^2_\infty)N_\infty]=0$. 特别, 对任何 $A\in\mathscr{F}_{\infty-}$, $\mathbb{E}[(L^1_\infty-L^2_\infty)I_A]=0$. 故 $L^1_\infty-L^2_\infty=\mathbb{E}[L^1_\infty-L^2_\infty|\mathscr{F}_{\infty-}]=0$. 由于 L^1, $L^2\in\mathscr{M}$, 故 $L^1=L^2$. 唯一性得证.

2) 由定理 6.25.2), 我们有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d\widetilde{A}_s|\right]\leqslant\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|dA_s|\right]\leqslant\mathbb{E}[\sum_s|H_s\Delta M_s|],$$

故得(4.2).

3) 设 T 为一绝不可及时. 令

$$S_0=T,\quad S_n=T_{n[T_n\neq T]}\quad(n\geqslant 1),$$

则 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 为一穷举 M 跳的标准停时列. 故对 $S_0=T$ 应用 (4.8) 得到(4.3). 同理对可料时 $T>0$ 可证(4.4).

4) 容易由 1) 推得.

5) 容易由 3) 推得.

下一定理表明: 定理 9.2 与定理 9.4 定义的随机积分是吻合的.

9.5 定理 设 M 为一纯断局部鞅, H 为一可测过程, 使得

$$\mathbb{E}[\sum_s|H_s\Delta M_s|]<\infty,\quad \mathbb{E}[\sum_s H_s^2\Delta M_s^2]<\infty,$$

则分别按定理 9.2 及定理 9.4 所定义的随机积分 $H.M$ 是相同的.

证明 设 $H.M$ 按定理 9.2 定义, 则由 (2.1), 对一切有界鞅 N, (4.1) 成立. 但由定理 9.4 唯一性部分的证明, 使 (4.1) 成立的一致可积鞅 L 是唯一的, 故有定理的结论.

下一定理表明：若 M 为可积变差鞅，H 为可料过程，则按定理 9.4 定义的随机积分，就是按轨道的 Stieltjes 积分。

9.6 定理 设 $M\in\mathscr{W}_0$，H 为可料过程，使得

$$\mathbb{E}[\sum_s|H_s\Delta M_s|]<\infty,$$

则对几乎所有 ω，对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有

$$(H.M)_t(\omega)=\int_{[0,t]}H_s(\omega)dM_s(\omega).$$

这里 $H.M$ 是定理 9.4 所定义的随机积分，等式右端是 Stieltjes 积分.

证明 由定理 6.43 知，$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty|H_s||dM_s|\right]<\infty$. 令 $L_t=\int_{[0,t]}H_s\cdot dM_s$，则由定理 6.46，$L\in\mathscr{W}_0$，且对一切有界鞅 N，有(定理 6.45)

$$\mathbb{E}[L_\infty N_\infty]=\mathbb{E}[\sum_s\Delta L_s\Delta N_s]=\mathbb{E}[\sum_s H_s\Delta M_s\Delta N_s],$$

故由定理 9.4.1)，$L=H.M$.

现在，我们应用定理 9.2 及定理 9.4，给出可测过程对局部鞅的随机积分的一般定义.

9.7 定理 设 M 为一局部鞅，且 $M_0=0$[1]. 令 H 为一可测过程，使得 $\sqrt{H^2.[M,M]}$ 为局部可积增过程，且 $H^2.[M,M]$ 为准局部可积增过程(定义 6.21)[2]. 则

1) 存在唯一的零初值局部鞅 L，使得对一切满足

$$\mathbb{E}\sqrt{\int_{[0,T]}H_s^2d[M,M]_s}<\infty \tag{7.1}$$

与

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,T[}H_s^2d[M,M]_s\right]<\infty$$

的停时 T，及一切有界鞅 N，有

---

1) 这里假定 $M_0=0$ 只是为了定理的叙述方便. 对一般的 $M\in\mathscr{M}_{loc}$，可令 $H.M=\mathbb{E}[H_0M_0|\mathscr{F}_0]+H.(M-M_0)$.

2) 下面，有时说 H 关于 M 可积，是指 H 满足这一条件. 显然，一切局部有界可测过程关于任一零初值局部鞅可积.

(7.2) $$\mathbb{E}[L_T N_T]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,T]} H_s d[M, N]_s\right].$$

我们称 L 为 H 关于 M 的随机积分，记为 $H.M$，或 $\int_{0-}^{\cdot} H_s dM_s$ $\left(\text{下面，我们经常用} \int_0^{\cdot} H_s dM_s \text{ 表示 } HI_{]0,\infty[}.M\right)$.

2) 对任何绝不可及时 T，有

(7.3) $$\Delta(H.M)_T=\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T] \quad \text{a.s.},$$

对任何可料时 $T>0$，有

(7.4) $$\Delta(H.M)_T=\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_T]-\mathbb{E}[H_T\Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}] \quad \text{a.s.}.$$

换句话说，我们有 $\Delta(H.M)={}^o(H\Delta M)-{}^p(H\Delta M)$.

3) 对任何停时 T，有

(7.5) $$(H.M)^T=H.M^T=(HI_{[0,T]})\cdot M.$$

4) $$M\in\mathscr{M}^c_{loc}(\mathscr{M}^d_{loc})\Rightarrow H.M\in\mathscr{M}^c_{loc}(\mathscr{M}^d_{loc}),$$
$$M\in\mathscr{M}^{da}_{loc}(\mathscr{M}^{di}_{loc})\Rightarrow H.M\in\mathscr{M}^{da}_{loc}(\mathscr{M}^{di}_{loc}).$$

5) 设 $H^{(1)}$、$H^{(2)}$ 为两个可测过程，关于 M 可积，则对任何实数 α_1, α_2, $\alpha_1H^{(1)}+\alpha_2H^{(2)}$ 关于 M 可积，且有 $(\alpha_1H^{(1)}+\alpha_2H^{(2)}).M=\alpha_1H^{(1)}.M+\alpha_2H^{(2)}.M$.

6) 设 $M^{(1)}$、$M^{(2)}$ 为两个局部鞅，H 为一可测过程. 如果 H 关于 $M^{(1)}$ 及 $M^{(2)}$ 可积，则对任何实数 α_1, α_2, H 关于 $\alpha_1M^{(1)}+\alpha_2M^{(2)}$ 可积，且有 $H.(\alpha_1M^{(1)}+\alpha_2M^{(2)})=\alpha_1H.M^{(1)}+\alpha_2H.M^{(2)}$.

证明 1) 令停时 $T_n\uparrow+\infty(T_0=0)$，使得对一切 n，有

$$\mathbb{E}\sqrt{\int_{[0,T_n]} H_s^2 d[M, M]_s}<\infty,$$

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[} H_s^2 d[M, M]_s\right]<\infty,$$

则有 $$|H_{T_n}\Delta M_{T_n}|\leqslant\sqrt{\int_{[0,T_n]} H_s^2 d[M, M]_s}\in L^1.$$

令 $$H'=\sum_{n=0}^{\infty} HI_{]T_n,T_{n+1}[},\quad H''=HI_{\bigcup_{n=0}^{\infty}[T_n]},$$

则有 $H=H'+H''$，并且有

$$\int_{[0,\infty[} H_s'^2 d[M^{T_n}, M^{T_n}]_s = \int_{[0,T_n]} H_s'^2 d[M, M]_s$$

$$\leqslant \int_{[0,T_n[} H_s^2 d[M, M]_s \in L^1,$$

$$\sum_s |H_s'' \Delta M_s^{T_n}| = \sum_{s\leqslant T_n} |H_s'' \Delta M_s| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |H_{T_k} \Delta M_{T_k}| \in L^1,$$

故可分别按定理 9.2 及定理 9.4 定义 $H'.M^{T_n}$ 及 $H''.(M^d)^{T_n}$. 令

(7.7) $$L^n = H'.M^{T_n} + H''.(M^d)^{T_n}.$$

则由(2.6)及(4.5)有 $(L^{n+1})^{T_n} = L^n$. 故存在 $L \in \mathscr{M}_{loc}$, 使得对一切 n, 有 $L^{T_n} = L^n$. 由定理 9.2 及定理 9.4 知: 对一切 T_n 及一切有界鞅 N, 有

(7.8) $$\mathrm{E}[L_{T_n} N_{T_n}] = \mathrm{E}[(H'.M^{T_n})_\infty N_\infty^{T_n} + [H''.(M^d)^{T_n}]_\infty N_\infty^{T_n}]$$

$$= \mathrm{E}\left[\int_{[0,T_n]} H_s' d[M, N]_s + \int_{[0,T_n]} H_s'' d[M^d, N]_s\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\int_{[0,T_n]} H_s' d[M, N]_s + \int_{[0,T_n]} H_s'' d[M, N]_s\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\int_{[0,T_n]} H_s d[M, N]_s\right].$$

设停时 T 满足 (7.1), 令 $S_1 = T$, $S_n = T \vee T_n (n \geqslant 2)$, 则可定义 $\overline{L} \in \mathscr{M}_{loc}$, 使得每个 $\overline{L}^{S_n}$ 为一致可积鞅, 且有相应的 (7.8) 成立. 于是, 易知对每个 n 有 $\overline{L}^{S_n \wedge T_n} = L^{S_n \wedge T_n}$, 即 $\overline{L} = L$. 在 (7.8) 中令 $S_1 = T$ 即得 (7.2).

唯一性显然.

2) 设 T 为一绝不可及时. 由定理 9.2 及定理 9.4, 对一切 n, 我们有

$$\Delta(H.M)_T I_{[T<T_n]} = \Delta(H.M^{T_n})_T I_{(T<T_n)}$$

$$= \mathrm{E}[H_T \Delta M_{T\wedge T_n} | \mathscr{F}_T] I_{[T<T_n]}$$

$$= \mathrm{E}[H_T \Delta M_T I_{[T<T_n]} | \mathscr{F}_T] \quad \text{a.s.},$$

由于 $[T \leqslant T_n] \in \mathscr{F}_T$, 且 $\bigcup_n [T \leqslant T_n] = \Omega$, 故 $H_T \Delta M_T$ 关于 $\mathscr{F}_T$ σ-可积. 于是由定理 1.19 得

$$\Delta(H.M)_T I_{[T<T_n]} = E[H_T \Delta M_T | \mathscr{F}_{T-}] I_{[T<T_n]} \quad \text{a.s.}.$$

令 $n\to\infty$，立刻得到(7.3)．同理对可料时 $T>0$ 可证(7.4)．

3) 容易由 1) 推得．

4) 由 $H.M$ 的定义及定理 9.2、定理 9.4 推得．

5)、6) 都显然．

9.8 系 设 M 为一局部鞅，H 为一循序可测过程，使得 $\sqrt{H^2.[M,M]}$ 为局部可积增过程，则 $H^2.[M,M]$ 为适应增过程(从而准局部可积)，因此 $H.M$ 有定义．这时，$H.M$ 为唯一的局部鞅 L，使得 $L_0=H_0M_0$，且对一切有界鞅 N，$LN-H.[M,N]$ 为局部鞅．

证明 由定理 4.48.1) 知：$H^2.[M,M]$ 为适应增过程，$H.[M,N]$ 为适应有限变差过程．无妨假定 $M_0=0$．设停时 T 使(7.1)成立，则由(7.2)，$((H.M)N-H.[M,N])^T$ 为一致可积鞅，从而 $(H.M)N-H.[M,N]$ 为局部鞅．

9.9 系 设 M 为一拟左连续局部鞅，H 为一循序可测过程，使得 $\sqrt{H^2.[M,M]}$ 为局部可积．则过程 $\Delta(H.M)$ 与 $H\Delta M$ 无区别，并且对一切局部鞅 N，有

$$[H.M,N]=H.[M,N]. \tag{9.1}$$

这时，$H.M$ 为唯一的局部鞅 L，使得 $L_0=H_0M_0$，且对一切零初值有界鞅 N，有(9.1)成立．

证明 由(7.3)，对一切绝不可及时 T，有 $\Delta(H.M)_T=H_T\Delta M_T$ a.s.．由(7.4)，对一切可料时 $T>0$，有 $\Delta(H.M)_T=H_T\Delta M_T=0$ a.s.．从而对一切停时 T，有 $\Delta(H.M)_T=H_T\Delta M_T$ a.s.．设(T_n)为一穷举 M 跳的标准停时列，则

$$H\Delta M=(HI_{\bigcup_n[T_n]})\Delta M=(\sum_n H_{T_n}I_{[T_n]})\Delta M,$$

从而 $H\Delta M$ 为一可选过程．因此 $\Delta(H.M)$ 与 $H\Delta M$ 无区别．

设 N 为一有界鞅，则由系 9.8 及定理 8.33，$R\triangleq[H.M,N]$

$-H.[M,N]$ 为一零初值有限变差局部鞅，但由上所证，$\Delta R=0$，故 R 连续，从而 $R=0$. 这表明(9.1)式对一切有界鞅 N 成立. 设 N 为一局部鞅，令

$$N=U+V,$$

其中 U 为局部有界鞅，V 为有限变差局部鞅. 则显然我们有

$$[H.M, U]=H.[M, U],$$

$$[H.M, V]_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta(H.M)_s\Delta V_s=\sum_{s\leqslant t}H_s\Delta M_s\Delta V_s$$

$$=(H.[M, V])_t.$$

从而(9.1)成立.

设 L 为一局部鞅，使得 $L_0=H_0M_0$，且对一切零初值有界鞅 N，有(9.1)成立，则由定理 8.38 知，$L=H.M$.

9.10 系 设 M 为一局部鞅，H 为一可料过程，使得 $\sqrt{H^2.[M,M]}$ 为局部可积. 则过程 $\Delta(H.M)$ 与 $H\Delta M$ 无区别，并且对一切局部鞅 N，有

(10.1) $$[H.M, N]=H.[M, N].$$

这时，$H.M$ 为唯一的局部鞅 L，使得 $L_0=H_0M_0$，且对一切零初值有界鞅 N，有(10.1)成立.

9.11 定理 设 M 为一局部鞅(相应地，拟左连续局部鞅)，H、K 为两个可料(相应地，循序可测)过程. 如果 H 关于 M 可积，则为要 K 关于 $H.M$ 可积，必须且只需 KH 关于 M 可积. 这时，我有 $(KH).M=K.(H.M)$.

证明 由系 9.9 及 9.10，我们有

(11.1) $$K^2.[H.M, H.M]=(KH)^2.[M, M].$$

由此得第一个结论. 此外，对一切局部鞅 N，有

(11.2) $$[K.(H.M), N]=(KH).[M, N]$$

$$=[(KH).M, N].$$

由此得第二个结论.

§2 归结为可选情形

现在我们证明：可测过程对局部鞅的随机积分，可以归结为可选过程对局部鞅的随机积分.

9.12 定理 设 M 为一零初值的局部鞅，H 为一可测过程，使得 $\sqrt{H^2.[M,M]}$ 为局部可积，且 $H^2.[M,M]$ 为准局部可积. 则存在一可选过程 $\overline{H}$，使得 $\sqrt{\overline{H}^2.[M,M]}$ 为局部可积，且 $\overline{H}.M=H.M$.

证明[1] 令停时 $T_n\uparrow+\infty(T_0=0)$，使得 $[M,M]_{T_n-}\leqslant n$，且使

$$\mathbb{E}\sqrt{\int_{[0,T_n]}H_s^2d[M,M]_s}<\infty,\quad \mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[}H_s^2d[M,M]_s\right]<\infty.$$

由 K-W 不等式(定理 8.50)，我们有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[}|H_s|d[M,M]_s\right]$$

$$\leqslant\left(\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[}H_s^2d[M,M]_s\right]\right)^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}[M,M]_{T_n-})^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

又令 $\mu_{[M,M]}$ 表示可选增过程 $[M,M]$ 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的 σ-有限测度，则 $\mu_{[M,M]}$ 限于可选 σ-域 $\mathscr{O}$ 也是 σ-有限的. 故由熟知的 Radon-Nikodym 定理(Loève[1], p. 312)，可定义可选过程

$$\overline{H}=\mathbb{E}_{\mu_{[M,M]}}[H\mid\mathscr{O}].$$

由类似于条件期望的平滑性质，我们有

$$\overline{H}I_{[\![0,T_n[\![}=\mathbb{E}_{\mu_{[M,M]}}[HI_{[\![0,T_n[\![}\mid\mathscr{O}],$$

$$\frac{\overline{H}}{\Delta M_{T_n}}I_{[\Delta M_{T_n}\neq0]}I_{[\![T_n]\!]}=\mathbb{E}_{\mu_{[M,M]}}\left[\frac{H}{\Delta M_{T_n}}I_{[\Delta M_{T_n}\neq0]}I_{[\![T_n]\!]}\mid\mathscr{O}\right].$$

故由 Jensen 不等式得

$$\overline{H}^2I_{[\![0,T_n[\![}\leqslant\mathbb{E}_{\mu_{[M,M]}}[H^2I_{[\![0,T_n[\![}\mid\mathscr{O}],$$

$$\left|\frac{\overline{H}}{\Delta M_{T_n}}\right|I_{[\Delta M_{T_n}\neq0]}I_{[\![T_n]\!]}\leqslant\mathbb{E}_{\mu_{[M,M]}}\left[\left|\frac{H}{\Delta M_{T_n}}\right|I_{[\Delta M_{T_n}\neq0]}I_{[\![T_n]\!]}\mid\mathscr{O}\right].$$

---

1) 感谢潘一民同志简化了原证明.

于是我们有

$$\mathbb{E}\sqrt{\int_{[0,T_n]}\overline{H}_s^2 d[M, M]_s}$$

$$=\mathbb{E}\sqrt{\int_{[0,T_n[}\overline{H}_s^2 d[M, M]_s+\overline{H}_{T_n}^2\Delta M_{T_n}^2}$$

$$\leqslant\mathbb{E}\sqrt{\int_{[0,T_n[}\overline{H}_s^2 d[M, M]_s}+\mathbb{E}[|\overline{H}_{T_n}\Delta M_{T_n}|]$$

$$\leqslant\left(\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[}\overline{H}_s^2 d[M, M]_s\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}\left|\frac{\overline{H}_s}{\Delta M_{T_n}}\right| I_{[\Delta M_{T_n}\neq 0]}I_{[\![T_n]\!]}(s,\cdot)d[M, M]_s\right]$$

$$=(\mathbb{E}_{\mu_{[M,M]}}[\overline{H}^2 I_{[\![0,T_n[\![}])^{\frac{1}{2}}+\mathbb{E}_{\mu_{[M,M]}}\left[\left|\frac{\overline{H}}{\Delta M_{T_n}}\right| I_{[\Delta M_{T_n}\neq 0]}I_{[\![T_n]\!]}\right]$$

$$\leqslant\left(\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n[}H_s^2 d[M, M]_s\right]\right)^{\frac{1}{2}}+\mathbb{E}[|H_{T_n}\Delta M_{T_n}|]<\infty.$$

这表明 $\sqrt{\overline{H}^2.[M, M]}$ 为局部可积，从而可以定义 $\overline{H}$ 关于 M 的随机积分 $\overline{H}.M$.

下面我们证明 $\overline{H}.M=H.M$. 设 N 为一有界鞅，令 $\mu_{[M,N]}$ 为适应有限变差过程 $[M, N]$ 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}$ 上产生的 σ-有限测度. 由 K-W 不等式看出，对几乎所有 ω, $\mathbb{R}_+$ 上的 σ-有限测度 $|d[M, N].(\omega)|$ 关于 σ-有限测度 $d[M, M].(\omega)$ 绝对连续. 故由定理 6.18, 存在可选过程 f, 使得对几乎所有 ω, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$[M, N]_t(\omega)=\int_{[0,t]}f_s(\omega)d[M, M]_s(\omega).$$

这也就是说, $\mu_{[M,N]}\ll\mu_{[M,M]}$, 且 $f=\dfrac{d\mu_{[M,N]}}{d\mu_{[M,M]}}$. 于是由平滑性质，对任何 n,

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n]}H_s d[M, N]_s\right]$$

$$=\mathbb{E}_{\mu_{[M,N]}}[HI_{[\![0,T_n]\!]}]=\mathbb{E}_{\mu_{[M,M]}}[f\overline{H}I_{[\![0,T_n]\!]}]=\mathbb{E}_{\mu_{[M,M]}}[fHI_{[\![0,T_n]\!]}]$$

$$=\mathbb{E}_{\mu_{[M,N]}}[HI_{[\![0,T_n]\!]}]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,T_n]}H_s d[M, N]_s\right].$$

故由定理 9.7 易知 $\overline{H}.M=H.M$. 定理证毕.

下面我们研究两个特殊例子.

9.13 例 设 M 为一零初值连续局部鞅, H 为一循序可测过程, 使得 H^2 关于 $[M,M]$ 可积, 则存在一可料过程 $\overline{H}$, 使得 $\overline{H}.M=H.M$. 事实上, 由 K-W 不等式, H 关于$[M,M]$可积, 从而 $H.[M,M]$ 为连续适应有限变差过程. 由定理 6.18, 存在一可料过程 $\overline{H}$, 使得 $\overline{H}.[M,M]=H.[M,M]$. 于是有

$$\overline{H}^2.[M,M]=\overline{H}H.[M,M]=H.(\overline{H}.[M,M])$$
$$=H.(H.[M,M])=H^2.[M,M].$$

从而 $\overline{H}.M$ 有定义. 此外, 我们有 $(H-\overline{H})^2.[M,M]=0$, 故 $(H-\overline{H}).M=0$, 即有 $\overline{H}.M=H.M$.

下一例子的论证与上述论证完全类似.

9.14 例 设 M 为一零初值局部鞅, H 为一循序可测过程, 使得 $\sqrt{H^2.[M,M]}$ 为局部可积. 令 $\overline{H}$ 为一可选过程, 使得 $\overline{H}.[M,M]=H.[M,M]$(定理 6.18). 则有 $\overline{H}^2.[M,M]=H^2.[M,M]$, 且有 $\overline{H}.M=H.M$.

§3 随机积分的例, Yœurp 引理

下一定理表明: 我们给出的随机积分的定义是合理的.

9.15 定理 1) 设 M 为一零初值局部鞅; S,T 为两个停时, 且 $S\leqslant T$; ξ 为一实值 $\mathscr{F}_S$ 可测随机变量. 令 $H=\xi I_{]\!]S,T]\!]}$, 则 H 为可料过程, H 关于 M 可积, 且有 $H.M=\xi(M^T-M^S)$.

2) 设 M 为一零初值局部鞅, R 为一可料时, η 为一 $\mathscr{F}_{R-}$ 可测的实值随机变量. 令 $H=\eta I_{[\![R]\!]}$, 则 H 关于 M 可积, 且有 $H.M=\eta\Delta M_R I_{[\![R,\infty[\![}$.

证明 1) 令 $L=\xi(M^T-M^S)$, 则由定理 8.34, L 为局部鞅, 且有

$$[L,L]=\xi^2([M,M]^T-[M,M]^S)=H^2.[M,M].$$

从而 $\sqrt{H^2.[M,M]}=\sqrt{[L,L]}$ 为局部可积，故 $H.M$ 存在. 此外，对一切局部鞅 N，我们有

$$[L,N]=\xi([M,N]^T-[M,N]^S)=H.[M,N].$$

故由系 9.10，$H.M=L$.

2) 的证明与 1) 的证明类似.

9.16 定理 设 M 为一纯断局部鞅，H 为一循序可测过程，使得 $\sum\limits_{s\leqslant \cdot}|H_s\Delta M_s|$ 为局部可积增过程. 则 H 关于 M 可积，且 $H.M=A-\widetilde{A}$，其中

$$A_t=\sum_{s\leqslant t}H_s\Delta M_s. \tag{16.1}$$

证明 设 (S_n) 为一穷举 M 跳的标准停时列，则有

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}H_{S_n}\Delta M_{S_n}I_{[\![S_n,\infty[\![}.$$

依假定，A 为适应局部可积变差过程. 令停时 $T_n\uparrow+\infty$，使得对一切 n，有 $E[\sum\limits_{s\leqslant T_n}|H_s\Delta M_s|]<\infty$. 但我们有

$$A^{T_n}=\sum_{k=1}^{\infty}H_{S_k}I_{[S_k\leqslant T_n]}\Delta M_{S_k}I_{[\![S_k,\infty[\![},$$

故由定理 9.4 的证明知，

$$(HI_{[\![0,T_n]\!]}).M=A^{T_n}-\widetilde{A}^{T_n}=(A-\widetilde{A})^{T_n}.$$

于是由定理 9.7.4)，$(H.M)^{T_n}=(A-\widetilde{A})^{T_n}$，即有 $H.M=A-\widetilde{A}$.

下面我们应用定理 9.16，给出可选过程对局部鞅的随机积分的一个有趣的例子.

9.17 定理 设 X 为一半鞅，M 为一零初值局部鞅. 则为要 ΔX 关于 M 可积，必须且只需 $\langle X,M\rangle$ 存在(定义 8.49). 若 $\langle X,M\rangle$ 存在，则有

$$(\Delta X).M=[X,M]-\langle X,M\rangle. \tag{17.1}$$

证明 依定义，为要 ΔX 关于 M 可积，必须且只需过程 $\sqrt{\sum\limits_{s\leqslant \cdot}\Delta X_s^2\Delta M_s^2}=\sqrt{\Delta X^2.[M,M]}$ 为局部可积. 由定理 8.8，这等价于过程 $[X,M]$ 为局部可积变差过程，即 $\langle X,M\rangle$ 存在. 设

$\langle X, M\rangle$ 存在. 令 $M=M^c+M^d$, 则有 $(\Delta X).M^c=0$(系 9.3), 故由定理 9.16, 我们有

$$(\Delta X).M=(\Delta X).M^d=[X, M^d]-[\widetilde{X, M^d}]$$
$$=[X, M]-\langle X^c, M^c\rangle-(\langle X, M\rangle-\langle X^c, M^c\rangle)$$
$$=[X, M]-\langle X, M\rangle.$$

9.18 定理 设 $M\in\mathscr{W}_{loc}$, H 为一关于 M 可积的可料过程. 如果对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\sum\limits_{s\leq t}|H_s\Delta M_s|<+\infty$ a.s., 则 H 关于 M 按轨道的 Stieltjes 积分也存在, 且两种积分一致.

证明 首先, 不妨设 $M_0=0$, 则 $H.M\in\mathscr{M}^d$. 由于对一切 $\in\mathbb{R}_+$, $\sum\limits_{s\leq t}|\Delta(H.M)_s|=\sum\limits_{s\leq t}|H_s\Delta M_s|<+\infty$ a.s., 故由定理 8.28, $H.M\in\mathscr{W}_{loc}$. 于是 $\sum\limits_{s\leq\cdot}|H_s\Delta M_s|$ 为局部可积增过程, 故由定理 9.6 推得定理结论.

9.19 定理 设 $M\in\mathscr{M}_{loc}^{da}$, H 为一可料过程, 使得 $\sqrt{\sum\limits_{s\leq\cdot}H_s^2\Delta M_s^2}$ 为局部可积增过程(即 H 关于 M 可积). 如果对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\sum\limits_{s\leq t}|H_s\Delta M_s|<+\infty$ a.s., 则 $H.M$ 与有限变差过程 $\sum\limits_{s\leq\cdot}H_s\Delta M_s$ 无区别. 即对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$(H.M)_t=\sum_{s\leq t}H_s\Delta M_s\quad\text{a.s.}.\tag{19.1}$$

证明 由定理 9.7, $H.M\in\mathscr{M}_{loc}^{da}$, 并且由系 9.10, $\Delta(H.M)=H\Delta M$. 依假定, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\sum\limits_{s\leq t}\Delta(H.M)_s<+\infty$ a.s., 故由定理 8.28, $H.M\in\mathscr{W}_{loc}^{da}$. 于是, 由定理 8.18 有

$$(H.M)_t=\sum_{s\leq t}\Delta(H.M)_s=\sum_{s\leq t}H_s\Delta M_s\quad\text{a.s.}.$$

下一定理通常称为 Yœurp 引理, 今后我们将经常应用它.

9.20 定理 设 M 为一局部鞅, A 为一可料有限变差过程, 则有

$$[M, A]=(\Delta A).M.\tag{20.1}$$

特别，$[M, A]$ 为一局部鞅.

证明 无妨设 $M_0=0$. 由定理 8.3，ΔA 为局部有界可料过程，从而 ΔA 关于 M 可积. 故由定理 9.17，我们有

$$\Delta A.M=[M, A]-\widetilde{[M, A]}.$$

由于 ${}^p(\Delta M)=0$，且有

$$[M, A]_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta M_s\Delta A_s=\int_{[0,t]}\Delta M_s dA_s,$$

故由定理 6.28.2)，

$$\widetilde{[M, A]}_t=\int_{[0,t]}{}^p(\Delta M)_s dA_s=0.$$

因此有(20.1).

§4 随机积分与稳定子空间

下一定理刻划了 $\mathscr{M}^2$ 的稳定子空间.

9.21 定理 设 $\mathscr{X}$ 为 $\mathscr{M}^2$ 的闭线性子空间. 则为要 $\mathscr{X}$ 是稳定子空间(定义 7.10)，必须且只需对一切 $M\in\mathscr{X}$ 及任一使得 $E\left[\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M, M]_s\right]<\infty$ 的可料过程 H，有 $H.M\in\mathscr{X}$.

证明 必要性. 设 $\mathscr{X}$ 为稳定子空间. 令 $M\in\mathscr{X}$，H 为一可料过程，使得 $E\left[\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M, M]_s\right]<\infty$. 则 $H.M\in\mathscr{M}^2$. 由定理 7.11，对一切 $N\in\mathscr{X}^\perp$，M 与 N 正交，故有 $\langle M, N\rangle=0$ (系 7.25). 由系 9.10，$[H.M, N]=H.[M, N]$，故有 $\langle H.M, N\rangle=H.\langle M, N\rangle=0$ (定理 6.26.2)). 这表明 $H.M$ 与 N 正交，即 $H.M\in(\mathscr{X}^\perp)^\perp=\mathscr{X}$.

充分性. 设 $M\in\mathscr{X}$，T 为一停时，则 $M^T=(I_{[0,T]}).M$. 依假定，$M^T\in\mathscr{X}$. 设 $A\in\mathscr{F}_0$，则 $I_A M=(I_{R_+\times A}).M$. 同样依假定，$I_A M\in\mathscr{X}$. 这表明 $\mathscr{X}$ 是稳定的.

9.22 定理 设 $M\in\mathscr{M}^2$. 令

$$L^2(M)=\left\{H: H\text{ 为可料过程, 使得 }\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M,M]_s\right]<\infty\right\}.$$

则 $\mathscr{X}=\{H.M: H\in L^2(M)\}$ 为由 M 生成的稳定子空间(即包含 M 的最小稳定子空间).

证明 显然 $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{M}^2$ 的线性子空间，且 $\mathscr{X}$ 是稳定的. 由于 $L^2(M)=L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega, \mathscr{P}, \mu_{[M,M]})$，从而 $L^2(M)$ 是完备的，故 $\mathscr{X}$ 在 $\mathscr{M}^2$ 中是闭的(因 $\mathscr{X}$ 与 $L^2(M)$ 同构).

§5 正交性与局部鞅的正交分解

9.23 定义 设 M, N 为两个局部鞅. 称 M 与 N 相互正交，如果 MN 为零初值局部鞅.

由定理 7.8 知，这一定义与平方可积鞅情形的正交性定义(定义 7.7)是相吻合的.

由定理 8.33 知，纯断局部鞅与连续局部鞅相互正交.

下面两个定理分别推广了系 7.25 及定理 7.26，其证明是显然的.

9.24 定理 设 $M, N\in\mathscr{M}_{loc}$，则下列三条件等价:

i) M 正交于 N;

ii) $[M, N]$ 为零初值局部鞅;

iii) $\langle M, N\rangle$ 存在且 $\langle M, N\rangle=0$.

9.25 定理 设 $M, N\in\mathscr{M}_{loc}$，则下列二条件等价:

i) $[M, N]=0$;

ii) M 与 N 正交，且 M 与 N 无公共跳(即 $\Delta M\Delta N=0$).

下面我们研究局部鞅的正交分解.

9.26 定理 设 $M\in\mathscr{M}^2_{loc}$. 则对任何 $N\in\mathscr{M}^2_{loc}$，存在 N 的如下分解:

(26.1) $$N=H.M+L,$$

其中 H 为一可料过程，使得 $H^2.[M, M]$ 为局部可积；L 为一与 M 正交的局部平方可积鞅. N 的这一分解按 $H.M$ 及 L 是唯一的. 此外，若 $N\in\mathscr{M}^2$，则 $L\in\mathscr{M}^2$.

证明 由 K-W 不等式，对任何 $0\leqslant s<t<\infty$，有

$$\int_{]s,t]}|d\langle M, N\rangle_s|\leqslant\left(\int_{]s,t]}d\langle M, M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{]s,t]}d\langle N, N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这表明：对几乎所有 ω，$\mathbb{R}_+$ 上的符号测度 $d\langle M, N\rangle.(\omega)$ 关于 $d\langle M, M\rangle.(\omega)$ 绝对连续. 故由定理 6.18，存在一可料过程 H，使得 $\langle M, N\rangle=H.\langle M, M\rangle$. 往证 $H^2.\langle M, M\rangle$ 为局部可积. 令 $H^{(n)}=HI_{\{|H|\leqslant n\}}$，则由 K-W 不等式，

$$\begin{aligned}\int_{[0,t]}H_s^{(n)2}d\langle M, M\rangle_s&=\int_{[0,t]}H_s^{(n)}H_s d\langle M, M\rangle_s\\&=\int_{[0,t]}H_s^{(n)}d\langle M, N\rangle_s\\&\leqslant\left(\int_{[0,t]}H_s^{(n)2}d\langle M, M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}(\langle N, N\rangle_t)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

由于 $\int_{[0,t]}H_s^{(n)2}d[M, M]_s<\infty$，故由上式得

$$\int_{[0,t]}H_s^{(n)2}d\langle M, M\rangle_s\leqslant\langle N, N\rangle_t.$$

由于 $H^{(n)2}\uparrow H^2(n\to\infty)$. 故在上式中令 $n\to\infty$ 得

$$H^2.\langle M, M\rangle\leqslant\langle N, N\rangle.$$

从而 $H^2.\langle M, M\rangle$ 为局部可积. 这等价于 $H^2.[M, M]$ 为局部可积. 特别 $H.M$ 有定义，且 $H.M\in\mathscr{M}^2_{loc}$. 令 $L=N-H.M$，则由系 9.10，我们有

$$\begin{aligned}[M, L]&=[M, N]-[M, H.M]\\&=[M, N]-H.[M, M].\end{aligned}$$

由于 $\langle M, L\rangle$，$\langle M, N\rangle$ 存在，故 $H.[M, M]$ 的可料对偶投影存在，且有 $\widetilde{H.[M, M]}=H.\langle M, M\rangle$（定理 6.26.2)）. 于是由上

式得

$$\langle M, L\rangle = \langle M, N\rangle - H.\langle M, M\rangle = 0.$$

即 M 与 L 正交.

往证分解的唯一性. 设有满足定理要求的两个分解:

$$N = H.M + L = H'.M + L',$$

则有 $L-L' = (H'-H).M$. 由于 $L-L'$ 正交于 M, 故由定理 9.24, $[L-L', M]$ 为零初值局部鞅. 但我们有

$$\begin{aligned}[L-L', L-L'] &= [L-L', (H'-H).M] \\ &= (H'-H).[L-L', M].\end{aligned}$$

故由定理 9.18, $[L-L', L-L']$ 为零初值局部鞅, 从而 $L-L' = 0$. 于是 $L=L'$, $H.M = H'.M$. 唯一性得证.

最后, 设 $N\in\mathscr{M}^2$. 由于 $\langle L, M\rangle = 0$, 且有

$$\begin{aligned}[N, N] &= [H.M+L, H.M+L] \\ &= [H.M, H.M] + 2H.[L, M] + [L, L],\end{aligned}$$

故有 $$\langle N, N\rangle = \langle H.M, H.M\rangle + \langle L, L\rangle,$$

特别有 $E[\langle L, L\rangle_\infty] \leqslant E[\langle N, N\rangle_\infty] < \infty$, 从而 $E([L, L]_\infty) = E[\langle L, L\rangle_\infty] < \infty$. 由定理 8.34, $L\in\mathscr{M}^2$.

9.27 定理 设 M 为一拟左连续局部鞅. 则对任何局部鞅 N, 存在 N 的如下分解:

$$N = H.M + L, \tag{27.1}$$

其中 H 为一可选过程, 使得 $\sqrt{H^2.[M, M]}$ 为局部可积; L 为一局部鞅, 使得 $[L, M] = 0$, N 的这一分解按 $H.M$ 及 L 是唯一的. 此外, 若 $N\in\mathscr{M}^2$, 则 $L\in\mathscr{M}^2$; 若 N 为局部有界鞅, 则 L 为局部有界鞅.

证明 由定理 6.18, 存在一可选过程 H, 使得 $[M, N] = H.[M, M]$. 与上一定理的证明类似, 我们可以证明

$$H^2.[M, M] \leqslant [N, N],$$

从而 $\sqrt{H^2.[M, M]}$ 局部可积, $H.M$ 有定义. 令 $L = N - H.M$,

则由系 9.9, 我们有

$$[M, L]=[M, N]-[M, H.M]$$
$$=H.[M, M]-H.[M, M]=0.$$

往证分解的唯一性. 设有两个这样的分解:

$$N=H.M+L=H'.M+L'$$

则有 $L-L'=(H'-H).M$, 于是

$$[L-L', L-L']=[L-L', (H'-H).M]$$
$$=(H'-H).[L-L', M]=0.$$

从而 $L'=L$, $H'.M=H.M$. 唯一性得证.

设 $N\in\mathscr{M}^2$, 则有

$$[N, N]=[H.M+L, H.M+L]$$
$$=[H.M, H.M]+[L, L]\geqslant[L, L],$$

故 $\mathbb{E}([L, L]_\infty)\leqslant\mathbb{E}([N, N]_\infty)<\infty$, 从而 $L\in\mathscr{M}^2$(定理 8.34).

最后,设 N 为局部有界鞅. 由于 $[H.M, L]=H.[M, L]=0$, 故 $H.M$ 与 L 无公共跳(定理 9.25), 从而有

$$|\Delta N|=|\Delta(H.M)|+|\Delta L|.$$

特别 $|\Delta L|\leqslant|\Delta N|$, 从而 $|\Delta L|$ 局部有界, 即 L 为局部有界鞅.

§6 可料过程对半鞅的随机积分

9.28 定义 设 X 为一半鞅, H 为一可料过程. 如果存在 X 的一个分解: $X=M+A$, 其中 M 为局部鞅, A 为有限变差过程, 使得 H 关于 M 可积(即过程 $\sqrt{H^2.[M, M]}$ 局部可积), H 关于 A 可积 $\left(\text{即对一切 } t\in\mathbb{R}_+, \int_{[0,t]}|H_s||dA_s|<+\infty \text{ a.s.}\right)$, 则称 H 关于 X 可积 (简称 H 为 X-可积), 并称 $X=M+A$ 为 X 的一个 H-分解.

9.29 定理 设可料过程 H 关于半鞅 X 可积.

1) 令 $X=M+A$, $X=N+B$ 为 X 的两个 H-分解, 则有

$H.M+H.A=H.N+H.B$. 我们用 $H.X$ 表示 $H.M+H.A$ ($H.X$ 不依赖 X 的具体的 H-分解)，并称 $H.X$ 为 H 关于 X 的随机积分. 通常我们用 $\int_{0-}^{t} H_s dX_s$ 表示 $(H.X)_t$，用 $\int_0^t H_s dX_s$ 表示 $(HI_{]0,\infty[}.X)_t$.

2) 设 $X=L+C$ 为 X 的一个分解，其中 L 为局部鞅，C 为有限变差过程，则为要这一分解是 X 的一个 H-分解，必须且只需 H 关于 L 可积，且对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $\sum\limits_{s\leq t}|H_s\Delta C_s|<+\infty$ a.s..

证明 1) 由于 $M-N=B-A$ 为有限变差局部鞅，故由定理 9.18 立刻推得 1).

2) 只需证充分性. 设 $X=M+A$ 为 X 的一个 H-分解，则 $M-L=C-A$ 为一有限变差局部鞅. 依假定 H 关于 $M-L$ 可积，且对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，

$$\sum_{s\leq t}|H_s\Delta(M-L)_s|\leqslant\sum_{s\leq t}|H_s\Delta C_s|+\sum_{s\leq t}|H_s\Delta A_s|$$

$$<+\infty \quad \text{a.s.},$$

故由定理 9.18, H 关于 $C-A$ 按轨道的 Stieltjes 积分存在，从而 H 关于 C 可积. 因此，$X=L+C$ 为 X 的一个 H-分解.

注 1) 设 X 为一半鞅，$X=M+A$ 为 X 的一个分解，其中 M 为局部鞅，A 为有限变差过程. 则对任何局部有界可料过程 H，H 关于 X 可积，且 $X=M+A$ 为 H-分解.

2) 这里关于可料过程对半鞅的随机积分的定义，是可料过程对局部鞅的随机积分定义的自然推广. 事实上，设 M 为一局部鞅，H 为一可料过程，如果在局部鞅随机积分意义下，H 关于 M 可积，则在半鞅随机积分意义下，H 关于 M 也可积，且两种意义下的积分是一致的. 但是，反过来，如果在半鞅随机积分意义下，H 关于 M 可积，则一般不能断言 $H.M$ 仍为局部鞅，从而在局部鞅随机积分意义下，H 不一定关于 M 可积.

下一定理概括了这一随机积分的基本性质，其证明是不足

道的.

9.30 定理 设 X 为一半鞅, H 为一关于 X 可积的可料过程, 则

1) 我们有

$$(H.X)^c = H.X^c, \quad \Delta(H.X) = H\Delta X;$$

2) 对一切停时 T, 有

$$(H.X)^T = H.X^T = HI_{[0,T]}.X,$$
$$(H.X)^{T-} = H.X^{T-};$$

3) 对一切半鞅 Y, 有

$$[H.X, Y] = H.[X, Y];$$

4) 设 H 关于另一半鞅 Y 也可积, 则 H 关于 $X+Y$ 可积, 且有 $H.(X+Y) = H.X + H.Y$;

5) 设 K 为一可料过程. 若 $|K| \leqslant |H|$, 则 K 关于 X 可积.

下面我们用 $L(X)$ 表示关于半鞅 X 可积的可料过程全体.

9.31 定理 设 X 为一特殊半鞅, 其典则分解为 $X=M+A$. 令 $H \in L(X)$, 则为要 $H.X$ 为特殊半鞅, 必须且只需 $X=M+A$ 为 X 的一个 H-分解.

证明 充分性显然, 往证必要性. 设 $H.X$ 为特殊半鞅. 令 $X=N+B$ 为 X 的一个 H-分解, 其中 N 为一局部鞅, B 为一零初值局部可积变差过程, 则有 $H.X = H.N + H.B$. 依假定, $H.X$ 为一特殊半鞅, 从而 $H.B$ 为局部可积变差过程. 由于 $A = \widetilde{B}$, 故由定理 6.26.2), H 关于 A 可积, 且有 $H.A = \widetilde{H.B}$. 我们有

$$\sqrt{H^2.[M, M]} \leqslant \sqrt{H^2.[X, X]} + \sqrt{H^2.[A, A]}$$
$$\leqslant \sqrt{[H.X, H.X]} + \sum_{s \leqslant \cdot} |H_s \Delta A_s|.$$

由于 $\sqrt{[H.X, H.X]}$ 为局部可积增过程(定理 8.53), 故过程 $\sqrt{H^2.[M, M]}$ 为局部可积, 从而 H 关于局部鞅 M 可积. 综上所

证，$X=M+A$ 为一 H-分解.

下一定理是上一定理的一个重要推论.

9.32 定理 设 X 为一半鞅，$H\in L(X)$. 令 U 为一可选集，使得 $U\supset[|H\Delta X|>1$ 或 $|\Delta X|>1]$，且对几乎所有 ω，对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，$\{s:(s,\omega)\in U\}\cap[0,t]$ 至多有有穷多个点. 置

$$A_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta X_s I_{\{(s,\cdot)\in U\}},\qquad Z_t=X_t-A_t,$$

则 $H\in L(Z)$，且特殊半鞅 Z 的典则分解 $Z=N+B$ 为一 H-分解.

证明 在定理条件下，显然(A_t)有定义，且(A_t)为一阶梯有限变差过程，故 H 关于 A 可积，从而 H 关于 Z 可积. 此外，我们有 $|\Delta Z|\leqslant1$，$|\Delta(H.Z)|=|H\Delta Z|\leqslant1$，从而 Z 及 $H.Z$ 为特殊半鞅. 于是由定理 9.31，Z 的典则分解 $Z=N+B$ 为一 H-分解.

注 在定理中，如果令 $U=[|H\Delta X|>1$ 或 $|\Delta X|>1]$，则 $X=N+(B+A)$ 为 X 的一个 H-分解，其中 N 为一局部鞅，且 $|\Delta N|\leqslant2$(因 $|\Delta B|\leqslant1$)，从而 N 为一局部有界鞅.

下面我们应用定理 9.32 进一步研究随机积分的性质.

9.33 定理 设 X 为一半鞅.

1) $H,K\in L(X)\Rightarrow H+K\in L(X)$；

2) 设 $H\in L(X)$，K 为一可料过程. 则为要 $K\in L(H.X)$，必须且只需 $KH\in L(X)$. 此外，我们有 $K.(H.X)=(KH).X$.

证明 1) 在定理 9.32 中，令 $U=[|H\Delta X|>1$ 或 $|K\Delta X|>1$ 或 $|\Delta X|>1]$，则 $X=N+(A+B)$ 既为 H-分解又为 K-分解，从而为 $H+K$-分解，即 $H+K\in L(X)$.

2) 必要性显然，往证充分性. 设 $KH\in L(X)$. 在定理 9.32 中，令 $U=[|H\Delta X|>1$，或 $|KH\Delta X|>1$，或 $|\Delta X|>1]$，则 $X=N+(A+B)$ 既为 H-分解又为 HK-分解. 这表明 $H.X=H.N+H.(A+B)$ 为 $H.X$ 的 K-分解，故有 $K\in L(H.X)$，且有

$$K.(H.X)=K.(H.N)+K.[H.(A+B)]$$
$$=(KH).N+(KH).(A+B)=(KH).X.$$

9.34 定理 设 H 为一可料过程，X 为一半鞅. 如果存在停时 $T_n\uparrow+\infty$，使得对每个 n，有 $H\in L(X^{T_n})$，则 $H\in L(X)$.

证明 由于 $H^2.[X,X]^{T_n}=[H.X^{T_n},H.X^{T_n}]$，故 $H^2.[X,X]$ 为一增过程. 令

$$A_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta X_s I_{[|H_s\Delta X_s|>1 \text{ 或 } |\Delta X_s|>1]},$$

$$Z_t=X_t-A_t.$$

则 (A_t) 为一阶梯有限变差过程，故 $H.A$ 存在. 因此只需证 $H\in L(Z)$. 设 $Z=N+B$ 为特殊半鞅 Z 的典则分解. 则对每个 n，$Z^{T_n}=N^{T_n}+B^{T_n}$ 为 Z^{T_n} 的典则分解. 由于

$$|\Delta(H.Z^{T_n})|=|H\Delta Z^{T_n}|\leqslant 1,$$

故 $H.Z^{T_n}$ 为特殊半鞅，从而由定理 9.31，$H.N^{T_n}$ 及 $H.B^{T_n}$ 存在. 因此 $H.N$ 及 $H.B$ 存在，即 $H\in L(Z)$. 此即欲证之结论.

§7 随机积分的收敛定理

本节研究随机积分关于被积过程的连续性.

下一定理是定理 8.45 的直接推论.

9.35 定理 设 M 为一零初值局部平方可积鞅，H 为一可料过程，$(H^{(n)})$ 为一列可料过程，使得 H 及每个 $H^{(n)}$ 关于 M 可积，且 $H.M$ 及每个 $H^{(n)}.M$ 为局部平方可积鞅. 令 $A\in\mathscr{F}$，T 为一有穷停时. 如果 $I_A\int_{[0,T]}(H_s^{(n)}-H_s)^2d\langle M,M\rangle_s\xrightarrow{\mathbb{P}}0$，则有 $I_A\sup\limits_{t\leqslant T}|(H^{(n)}.M)_t-(H.M)_t|\xrightarrow{\mathbb{P}}0$.

9.36 定理 设 X 为一半鞅. H 为一局部有界可料过程，$(H^{(n)})$ 为一列局部有界可料过程. 令 $A\in\mathscr{F}$，T 为一有穷停时. 如果对几乎所有 $\omega\in A$，在区间 $[0,T(\omega)]$ 上，$(H^{(n)}.(\omega))_{n\geqslant1}$ 一致有界，且收敛于 $H.(\omega)$，则有

(36.1) $$I_A \sup_{t\le T} |(H^{(n)}.X)_t-(H.X)_t| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

证明 令 $X=M+A$, 其中 M 为局部有界鞅, A 为有限变差过程. 在定理假定下, 由 Lebesgue 控制收敛定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} I_A \int_{[0,T]} (H_s^{(n)}-H_s)^2 d\langle M, M\rangle_s=0 \quad \text{a.s.}.$$

故由定理 9.35,

$$I_A \sup_{t\le T} |(H^{(n)}.M)_t-(H.M)_t| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

此外, 由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$I_A \sup_{t\le T} |(H^{(n)}.A)_t-(H.A)_t|$$

$$\leqslant I_A \int_{0-}^{T} |H_s^{(n)}-H_s||dA_s| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

故有(36.1).

作为定理 9.36 的一个应用, 我们得到一类随机积分的 Riemann-Stieltjes 逼近.

9.37 定义 设 T 为一有穷停时, $(T_n)_{n\ge0}$ 为一单调增停时序列, 使得 $T_0=0$ a.s., $\sup_n T_n=T$ a.s.. 称 $\tau: 0=T_0\leqslant T_1\leqslant\cdots$, 为区间 $[0, T]$ 的一个随机分割, 如果对几乎所有 ω, 序列 $(T_n(\omega))$ 是尾定的(即存在自然数 $n(\omega)$, 使得当 $n\geqslant n(\omega)$, 有 $T_n(\omega)=T_{n(\omega)}(\omega)=T(\omega)$), 也就是说, 对几乎所有 ω, $(T_n(\omega))$ 构成区间 $[0, T(\omega)]$ 的一个有限分割. 令

$$\delta(\tau)=\sup_j |T_{j+1}-T_j|,$$

则 $\delta(\tau)$ 为一 a.s. 有穷的随机变量, 称 $\delta(\tau)$ 为分割 τ 的步长.

9.38 定理 设 X 为一半鞅, H 为一右连左极适应过程, T 为一有穷停时. 令

$$\tau^{(n)}: 0=T_0^{(n)}\leqslant T_1^{(n)}\leqslant\cdots, \quad n=1, 2, \cdots,$$

为 $[0, T]$ 的一列随机分割, 使得 $\lim_{n\to\infty}\delta(\tau^{(n)})=0$ a.s., 则有

(38.1) $\sup_{t\leq T}\left|\sum_j H_{T_j^{(n)}}(X_{T_{j+1}^{(n)}\wedge t}-X_{T_j^{(n)}\wedge t})-\int_0^t H_{s-}dX_s\right|\xrightarrow[n\to\infty]{P}0.$

证明 令 $H^{(n)}=\sum_j H_{T_j^{(n)}}I_{]\!]T_j^{(n)},T_{j+1}^{(n)}]\!]}$，则 $H^{(n)}$ 为局部有界可料过程，且由定理 9.15,

$$(H^{(n)}.X)_t=\sum_j H_{T_j^{(n)}}(X_{T_{j+1}^{(n)}\wedge t}-X_{T_j^{(n)}\wedge t}),$$

由于右连左极函数 $H.(\omega)$ 在有穷区间 $[0, T(\omega)]$ 上有界，从而 $(H^{(n)}.(\omega))_{n\geq 1}$ 在 $[0, T(\omega)]$ 上对 n 一致有界. 此外，对几乎所有 ω, 对一切 $t\in[0, T(\omega)]$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}H_t^{(n)}(\omega)=H_{t-}(\omega).$$

故由定理 9.36 得到(38.1).

下一定理是随机积分的控制收敛定理.

9.39 定理 设 X 为一半鞅, $H\in L(X)$, K^n 及 K 为可料过程，使得 $|K^n|\leq|H|$, $|K|\leq|H|$. 令 $A\in\mathscr{F}$, T 为一有穷停时. 如果对几乎所有 $\omega\in A$, 对一切 $t\in[0, T(\omega)]$, 有 $\lim_{n\to\infty}K_t^{(n)}(\omega)=K_t(\omega)$, 则有

(39.1) $I_A\sup_{t\leq T}|(K^{(n)}.X)_t-(K.X)_t|\xrightarrow{P}0.$

证明 无妨设 $X_0=0$. 令

$$A_t=\sum_{s\leq t}\Delta X_s I_{[|H_s\Delta X_s|>1\text{ 或 }|\Delta X_s|>1]},$$

$$Z_t=X_t-A_t.$$

设 $Z=N+B$ 为特殊半鞅 Z 的典则分解，则由定理 9.32, $X=N+(B+A)$ 为 X 的一个 H-分解. 此外，我们有 $|\Delta Z|\leq 1$, $|\Delta(H.Z)|=|H\Delta Z|\leq 1$. 从而由定理 8.55, 有 $|\Delta N|\leq 2$, $|\Delta(H.N)|\leq 2$. 特别 N 及 $H.N$ 为零初值局部平方可积鞅. 但由假定, $|K^n|\leq|H|$, $|K|\leq|H|$, 从而 $K^n.N$ 及 $K.N$ 为零初值局部平方可积鞅. 其余证明与定理 9.36 的证明类似.

注 设 X 为一半鞅, $H\in L(X)$. 令 $H^n=HI_{[|H|\leq n]}$, 则由定

理知：对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，$H^n.X$ 在 $[0,t]$ 上依概率一致收敛于 $H.X$. 即有

$$\sup_{s\leq t}|(H^n.X)_s-(H.X)_s|\xrightarrow{\mathbb{P}}0.$$

最后，应该指出：在半鞅积分意义下，可料过程关于适应有限变差过程的积分，不一定是 Stieltjes 积分. 但我们有如下的

9.40 定理 设 A 为一可料有限变差过程，H 为一可料过程. 如果在半鞅积分意义下，H 关于 A 可积，则在 Stieltjes 积分意义下，H 关于 A 也可积，且这两种积分一致.

证明 令 $H^{(n)}=HI_{[|H|\leq n]}$. 显然，定理结论对每个 $H^{(n)}$ 成立. 特别，每个 $H^{(n)}.A$ 为可料半鞅. 于是由定理 9.39，$H.A$ 为可料半鞅，从而为特殊半鞅(系 8.54). 于是由定理 9.31 推得定理结论.

第 十 章

变量替换公式(Ito 公式)

1951 年，Ito[2] 最早建立了关于 Brown 运动的随机积分的微分法则(即变量替换公式)，简称为 Ito 公式. 1967 年 Kunita, Watanabe[1], 1970 年 Doléans-Dade, Meyer[1], 在推广随机积分的同时，也相应地推广了 Ito 公式. 可以说，Ito 公式是随机积分理论中的一个最重要的结果，是随机分析的一个极其重要的工具.

本章首先建立 Ito 公式，然后给出应用 Ito 公式的一些初步例子.

§1 Ito 公式：连续情形

10.1 定理 设 $F(x, y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的一函数，关于 x 一次连续可微，关于 y 二次连续可微. 令 X 为一连续适应有限变差过程，Y 为一连续半鞅，则 $F(X_t, Y_t)$ 为一半鞅，且对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有

$$
(1.1)\qquad F(X_t, Y_t)-F(X_0, Y_0)=\int_0^t F'_x(X_s, Y_s)dX_s+\int_0^t F'_y(X_s, Y_s)dY_s+\frac{1}{2}\int_0^t F''_{yy}(X_s, Y_s)d\langle Y^c, Y^c\rangle_s \quad \text{a.s.},
$$

其中 Y^c 为半鞅 Y 的连续鞅部分.

证明 令 $Y=M+A$ 为 Y 的典则分解，则由系 8.56，M 为连续局部鞅，A 为零初值连续有限变差过程. 从而 $Y^c=M$. 首先，可以假定 X_0, Y_0 都有界. 否则，对每个 n，考虑 $XI_{[|X_0|\leq n]}$ 及 $YI_{[|Y_0|\leq n]}$. 其次，无妨假定存在一常数 K，使得

$$\int_{[0,\infty[}|dX_s|\leqslant K,\quad \int_{[0,\infty[}|dA_s|\leqslant K,$$

$$|M|\leqslant K,\quad \langle M, M\rangle_\infty\leqslant K.$$

否则令停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得对每个 n, X^{T_n}, A^{T_n}, M^{T_n}, $\langle M, M\rangle^{T_n}$ 满足相应的条件. 于是, 过程 X 在 $[-K, K]$ 中取值, Y 在 $[-2K, 2K]$ 中取值.

我们有如下的 Taylor 公式:

$$F(x'', y)-F(x', y)=F'_x(x', y)(x''-x')+h(x', x'', y),$$

$$F(x, y'')-F(x, y')$$

$$=F'_y(x, y')(y''-y')+\frac{1}{2}F''_{yy}(x, y')(y''-y')^2$$

$$+\gamma(y', y'', x).$$

由于 F'_x, F''_{yy} 在 $[-K, -K]\times[-2K, 2K]$ 上一致连续, 故存在 $\mathbb{R}_+$ 上的增函数 $\varepsilon(t)$, 使得 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\varepsilon(t)=0$, 且对一切 $\{x', x'', x\}\subset[-K, K]$, $\{y', y'', y\}\subset[-2K, 2K]$, 有

$$|h(x', x'', y)|\leqslant\varepsilon(|x''-x'|)|x''-x'|,$$

$$|\gamma(y', y'', x)|\leqslant\varepsilon(|y''-y'|)(y''-y')^2.$$

此外, 我们取一常数 C, 使得在 $[-K, K]\times[-2K, 2K]$ 上, 一致地有 $|F'_x|\leqslant C$, $|F'_y|\leqslant C$, $|F''_{yy}|\leqslant C$.

现在我们构造区间 $[0, t]$ 的一个随机分割. 给定 $a>0$, 令 $T_0=0$, 并归纳定义 T_1, T_2, $\cdots$ 如下:

$$T_{i+1}=t\wedge(T_i+a)\wedge\inf\{s>T_i: |X_s-X_{T_i}|+|M_s-M_{T_i}|$$

$$+|A_s-A_{T_i}|+(\langle M, M\rangle_s-\langle M, M\rangle_{T_i})>a\}.$$

则当 $T_i<t$ 时, 有 $T_{i+1}>T_i$, 并当 $T_{i+1}<t\wedge(T_i+a)$时, 有

$$|X_{T_{i+1}}-X_{T_i}|+|M_{T_{i+1}}-M_{T_i}|+|A_{T_{i+1}}-A_{T_i}|$$

$$+(\langle M, M\rangle_{T_{i+1}}-\langle M, M\rangle_{T_i})=a.$$

于是容易看出, $\tau_a: 0=T_0\leqslant T_1\leqslant\cdots$ 为 $[0, t]$ 的一个随机分割(见定义 9.37), 其步长 $\delta(\tau_a)\leqslant a$. 此外, 对一切 i, 有

$$|X_{T_{i+1}}-X_{T_i}|+|M_{T_{i+1}}-M_{T_i}|+|A_{T_{i+1}}-A_{T_i}|$$
$$+(\langle M, M\rangle_{T_{i+1}}-\langle M, M\rangle_{T_i})\leqslant a.$$

我们有

$$\begin{aligned}
&F(X_t, Y_t)-F(X_0, Y_0)\\
&=\sum_i[F(X_{T_{i+1}}, Y_{T_{i+1}})-F(X_{T_i}, Y_{T_i})]\\
&=\sum_i[F(X_{T_{i+1}}, Y_{T_{i+1}})-F(X_{T_i}, Y_{T_{i+1}})]\\
&\quad+\sum_i[F(X_{T_i}, Y_{T_{i+1}})-F(X_{T_i}, Y_{T_i})]\\
&=\sum_i F'_x(X_{T_i}, Y_{T_{i+1}})(X_{T_{i+1}}-X_{T_i})\\
&\quad+\sum_i F'_y(X_{T_i}, Y_{T_i})(Y_{T_{i+1}}-Y_{T_i})\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_i F''_{yy}(X_{T_i}, Y_{T_i})(Y_{T_{i+1}}-Y_{T_i})^2\\
&\quad+\sum_i h(X_{T_i}, X_{T_{i+1}}, Y_{T_{i+1}})+\sum_i\gamma(Y_{T_i}, Y_{T_{i+1}}, X_{T_i})\\
&\triangleq S_1^{(a)}+S_2^{(a)}+\frac{1}{2}S_3^{(a)}+R_1^{(a)}+R_2^{(a)}.
\end{aligned}$$

由 Lebesgue 控制收敛定理, 我们有

$$S_1^{(a)}\xrightarrow[a\to 0]{\text{a.s.}}\int_0^t F'_x(X_s, Y_s)dX_s.$$

由定理 9.38 我们有

$$S_2^{(a)}\xrightarrow[a\to 0]{\mathbb{P}}\int_0^t F'_y(X_s, Y_s)dY_s.$$

此外, 我们有

$$\begin{aligned}
|R_1^{(a)}|&\leqslant\sum_i\varepsilon(|X_{T_{i+1}}-X_{T_i}|)|X_{T_{i+1}}-X_{T_i}|\\
&\leqslant\varepsilon(a)\int_{[0,t]}|dX_s|\leqslant K\varepsilon(a)\xrightarrow[a\to 0]{}0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|R_2^{(a)}|&\leqslant\sum_i\varepsilon(|Y_{T_{i+1}}-Y_{T_i}|)(Y_{T_{i+1}}-Y_{T_i})^2\\
&\leqslant 2\varepsilon(a)\Big(\sum_i[(M_{T_{i+1}}-M_{T_i})^2+(A_{T_{i+1}}-A_{T_i})^2]\Big)\\
&\leqslant 2\varepsilon(a)\Big(\big(\sum_i M_{T_{i+1}}-M_{T_i}\big)^2+a\int_0^t|dA_s|\Big).
\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}(M_{T_{i+1}}-M_{T_i})^2=\mathbb{E}[M_{T_{i+1}}^2]-\mathbb{E}[M_{T_i}^2]$, 故有

$$\mathbb{E}|R_2^{(a)}|\leqslant 2\varepsilon(a)(\mathbb{E}[M_t^2]+aK)\xrightarrow[a\to 0]{}0.$$

从而 $R_2^{(a)}\xrightarrow[a\to 0]{\mathbb{P}}0$. 因此, 为了证明(1.1)式, 只需证明

$$S_3^{(a)}\xrightarrow[a\to 0]{\mathbb{P}}\int_0^t F''_{yy}(X_s,\ Y_s)d\langle M,\ M\rangle_s.$$

令 $S_3^{(a)}=V_1^{(a)}+V_2^{(a)}+V_3^{(a)}$, 其中

$$V_1^{(a)}=\sum_i[F''_{yy}(X_{T_i},\ Y_{T_i})(A_{T_{i+1}}-A_{T_i})](A_{T_{i+1}}-A_{T_i}),$$

$$V_2^{(a)}=2\sum_i[F''_{yy}(X_{T_i},\ Y_{T_i})(M_{T_{i+1}}-M_{T_i})](A_{T_{i+1}}-A_{T_i}),$$

$$V_3^{(a)}=\sum_i F''_{yy}(X_{T_i},\ Y_{T_i})(M_{T_{i+1}}-M_{T_i})^2.$$

我们有

$$|V_1^{(a)}|\leqslant aC\sum_i|A_{T_{i+1}}-A_{T_i}|\leqslant aCK\xrightarrow[a\to 0]{}0,$$

$$|V_2^{(a)}|\leqslant 2aC\sum_i|A_{T_{i+1}}-A_{T_i}|\leqslant 2aCK\xrightarrow[a\to 0]{}0.$$

此外, 如果令

$$J_3^{(a)}=\sum_i F''_{yy}(X_{T_i},\ Y_{T_i})(\langle M,\ M\rangle_{T_{i+1}}-\langle M,\ M\rangle_{T_i}),$$

则由 Lebesgue 控制收敛定理, 我们有

$$J_3^{(a)}\xrightarrow[a\to 0]{\text{a. s.}}\int_0^t F''_{yy}(X_s,\ Y_s)d\langle M,\ M\rangle_s,$$

因此, 问题归结为证明 $|V_3^{(a)}-J_3^{(a)}|\xrightarrow[a\to 0]{\mathbb{P}}0$.

我们有

$$V_3^{(a)}-J_3^{(a)}=\sum_i F''_{yy}(X_{T_i},\ Y_{T_i})[(M_{T_{i+1}}-M_{T_i})^2-(\langle M,\ M\rangle_{T_{i+1}}-\langle M,\ M\rangle_{T_i})].$$

由于当 $j>i$ 时, 有

$$\mathbb{E}[(M_{T_j}-M_{T_i})^2-(\langle M,\ M\rangle_{T_j}-\langle M,\ M\rangle_{T_i})|\mathscr{F}_{T_i}]=0.$$

故前式右端求和号下各项两两正交, 从而有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(V_3^{(a)}-J_3^{(a)})^2]\\
&=\sum_i \mathbb{E}\{F''_{yy}(X_{T_i}, Y_{T_i})^2[(M_{T_{i+1}}-M_{T_i})^2\\
&\quad -(\langle M, M\rangle_{T_{i+1}}-\langle M, M\rangle_{T_i})]^2\}\\
&\leqslant 2C^2\mathbb{E}(\sum_i[(M_{T_{i+1}}-M_{T_i})^4+(\langle M, M\rangle_{T_{i+1}}-\langle M, M\rangle_{T_i})^2])\\
&\leqslant 2C^2(a^2\mathbb{E}[\sum_i(M_{T_{i+1}}-M_{T_i})^2]+a\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t])\\
&=2C^2(a^2\mathbb{E}[M_t^2]+a\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t])\xrightarrow[a\to 0]{} 0.
\end{aligned}
$$

特别有 $V_3^{(a)}-J_3^{(a)}\xrightarrow[a\to 0]{\mathbb{P}} 0$. 定理证毕.

§2 Ito 公式：一般情形

10.2 引理 设 M 为一局部鞅，T 为一停时，令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{T+t}$，$\overline{M}_t=M_{T+t}I_{[T<\infty]}$. 则

1) $\overline{M}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅;

2) 对任何局部鞅 L, 我们有

$[\overline{M}, \overline{L}]_t(\mathscr{G}_t)=([M, L]_{T+t}-[M, L]_T+M_TL_T)I_{[T<\infty]}$;

3) 我们有

$\overline{M}^c=(M^c_{T+t}-M^c_T+M_T)I_{[T<\infty]}$, $\overline{M}^d=(M^d_{T+t}-M^d_T)I_{[T<\infty]}$;

4) 设 H 为一右连左极适应过程，令 $\overline{H}_t=H_{T+t}I_{[T<\infty]}$，则我们有

$$
(2.1)\qquad \underset{(\mathscr{G}_t)}{\int_0^t}\overline{H}_{s-}d\overline{M}_s=\left(\underset{(\mathscr{F}_t)}{\int_0^{T+t}}H_{s-}dM_s-\underset{(\mathscr{F}_t)}{\int_0^{T}}H_{s-}dM_s\right)I_{[T<\infty]}.
$$

证明 1) 设 S 为一有穷 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，令

$$R=(S-T)^+I_{[T<+\infty]}+(+\infty)I_{[T=+\infty]}.$$

则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$,

$$
\begin{aligned}
[R\leqslant t]&=[(S-T)^+\leqslant t]\cap[T<\infty]\\
&=[S\leqslant T+t]\cap[T<\infty]\in\mathscr{F}_{T+t}=\mathscr{G}_t.
\end{aligned}
$$

从而 R 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时. 无妨设 $M_0=0$. 设 M^S 为一致可积鞅，则

有(注意 $R+T=SI_{[T\le S]}+TI_{[T>S]}$)

$$\mathbb{E}[\overline{M}_R-\overline{M}_0|\mathscr{G}_t]$$
$$=\mathbb{E}[(M_{R+T}-M_T)I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T+t}]$$
$$=\mathbb{E}[(M_S I_{[T\le S]}+M_T I_{[T>S]}-M_T)I_{[T<\infty]}|\mathscr{F}_{T+t}]$$
$$=(M_{S\wedge(T+t)}I_{[T\le S]}+M_T I_{[T>S]}-M_T)I_{[T<\infty]}$$
$$=(M_{(t\wedge R)+T}-M_T)I_{[T<\infty]}=\overline{M}_{t\wedge R}-\overline{M}_0.$$

这表明 $(\overline{M}-\overline{M}_0)^R$ 为一致可积 $(\mathscr{G}_t)$ 鞅. 令有穷 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 $S_n\uparrow+\infty$, 使得每个 M^{S_n} 为一致可积 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅. 设 R_n 为相应的 $(\mathscr{G}_t)$ 停时, 则 $R_n\uparrow+\infty$, 且每个 $(\overline{M}-\overline{M}_0)^{R_n}$ 为一致可积 $(\mathscr{G}_t)$ 鞅, 因此 $\overline{M}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅.

2) 令 $A=([M,L]_{T+t}-[M,L]_T+M_TL_T)I_{[T<\infty]}$, 则由 1), $\overline{M}\overline{L}-A$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅. 此外, $\Delta A_t=\Delta M_{T+t}\Delta L_{T+t}=\Delta\overline{M}_t\Delta\overline{L}_t$, 故由定理 8.33, $[\overline{M},\overline{L}](\mathscr{G}_t)=A$.

3) 令 $K_t=(M^d_{T+t}-M^d_T)I_{[T<\infty]}$, 则由 2), $[K,K](\mathscr{G}_t)$ 为纯断增过程, 从而 K 为纯断 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅. 另一方面, $W_t\triangleq(M^c_{T+t}-M^c_T+M_T)I_{[T<\infty]}$ 为连续 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅, 从而 $K=\overline{M}^d$, $W=\overline{M}^c$.

4) 设 N 为一零初值有界 $(\mathscr{G}_t)$ 鞅. 令 $v_t=\mathbb{E}[N_\infty|\mathscr{F}_t]$, 则 $v_T=\mathbb{E}[N_\infty|\mathscr{F}_T]=\mathbb{E}[N_\infty|\mathscr{G}_0]=N_0=0$. 从而 $v^T=0$, $[M,v]^T=0$. 此外, 我们有

$$N_t=\mathbb{E}[N_\infty|\mathscr{F}_{T+t}]=v_{T+t}=v_{T+t}I_{[T<\infty]}.$$

于是由 2), 我们有

(2.2) $$I_{[T<\infty]}\int_0^{T+t}H_{s-}d[M,v]_s=I_{[T<\infty]}\int_T^{t+t}H_{s-}d[M,v]_s$$
$$=\int_0^t\overline{H}_{s-}d[\overline{M},N]_s.$$

令 $L_t=[(H_-.M)_{T+t}-(H_-.M)_T]I_{[T<\infty]}$, 由 1) 及 2), L 为$(\mathscr{G}_t)$局部鞅, 且有

(2.3) $$[L,N]_t(\mathscr{G}_t)=[H_-.M,v]_{T+t}I_{[T<\infty]}.$$

由系 9.10, (2.3)右端与(2.2)左端相等, 故有

$$[L, N] = \overline{H}_{-}.[M, N].$$

于是由系 9.10 知, $L = \overline{H}_{-}. M$, 此即(2.1). 引理证毕.

10.3 定理 设 $F(x, y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的一函数, 关于 x 一次连续可微, 关于 y 二次连续可微. 令 X 为一适应有限变差过程, Y 为一半鞅, 则 $F(X, Y)$ 为一半鞅, 且对一切 $t \in \mathbb{R}_+$, 有

$$\begin{aligned}(3.1)\quad & F(X_t, Y_t) - F(X_0, Y_0) \\ &= \int_0^t F'_x(X_{s-}, Y_{s-})dX_s + \int_0^t F'_y(X_{s-}, Y_{s-})dY_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t F''_{yy}(X_{s-}, Y_{s-})d\langle Y^c, Y^c\rangle_s \\ &\quad + \sum_{0<s\leq t}[F(X_s, Y_s) - F(X_{s-}, Y_{s-}) \\ &\qquad - F'_x(X_{s-}, Y_{s-})\Delta X_s - F'_y(X_{s-}, Y_{s-})\Delta Y_s] \quad \text{a.s.},\end{aligned}$$

这里, 最后一项级数绝对收敛.

证明 首先需要指出: 由于 $F'_y(X_s, Y_s)$ 为右连左极适应过程, 从而 $F'_y(X_{s-}, Y_{s-})$ 为局部有界可料过程, 故(3.1)中出现的随机积分有意义.

往证(3.1)中的级数绝对收敛. 令 $\omega \in \Omega$, 则 $|X.(\omega)|, |Y.(\omega)|$ 在 $[0, t]$ 中有界, 设 $C(t, \omega)$ 是其界. 在 $[-C(t, \omega), C(t, \omega)] \times [-C(t, \omega), C(t, \omega)]$ 上, $|F'_x|$ 及 $|F''_{yy}|$ 被一正数 $K(t, \omega)$ 界住. 于是对 $s \leq t$, 有

$$\begin{aligned}&|F(X_s, Y_s) - F(X_{s-}, Y_{s-}) - F'_x(X_{s-}, Y_{s-})\Delta X_s \\ &\quad - F'_y(X_{s-}, Y_{s-})\Delta Y_s| \\ &\leq |F(X_{s-}, Y_s) - F(X_{s-}, Y_{s-}) - F'_y(X_{s-}, Y_{s-})\Delta Y_s| \\ &\quad + |F(X_s, Y_s) - F(X_{s-}, Y_s) - F'_x(X_{s-}, Y_{s-})\Delta X_s| \\ &\leq \frac{1}{2} K(t, .)\Delta Y_s^2 + 2K(t, .)|\Delta X_s|.\end{aligned}$$

这表明(3.1)中的级数绝对收敛.

下面我们分三个步骤来完成定理的证明.

(1) 假定存在 N 个停时 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 穷举 X 及 Y 的跳,

往证(3.1)式成立.

我们将(3.1)式右端记为 $G(X, Y)_t$, 由于对任何停时 T, 我们有 $\langle (Y^{T-})^c, (Y^{T-})^c\rangle = \langle Y^c, Y^c\rangle^{T-}$, 故由定理 9.30.2) 易知 $G(X^T, Y^T) = G(X, Y)^T$, $G(X^{T-}, Y^{T-}) = G(X, Y)^{T-}$, 这里 $X^{T-} \triangleq X^T - \Delta X_T I_{[T,\infty[} = X I_{[0,T[} + X_{T-} I_{[T,\infty[}$.

无妨设 $T_1 \leqslant T_2 \leqslant \cdots \leqslant T_N$. 则 X^{T_1-} 为连续有限变差过程, Y^{T_1-} 为连续半鞅, 故由定理 10.1, 我们有

$$
\begin{aligned}
&F(X, Y)^{T_1-} - F(X_0, Y_0)^{T_1-}\\
&= F(X^{T_1-}, Y^{T_1-}) - F(X_0^{T_1-}, Y_0^{T_1-})\\
&= G(X^{T_1-}, Y^{T_1-}) = G(X, Y)^{T_1-}.
\end{aligned}
$$

但显然有 $\Delta F(X_t, Y_t) = \Delta G(X, Y)_t$ a.s. $(t>0)$, 故有

$$
F(X, Y)^{T_1} - F(X_0, Y_0) = G(X, Y)^{T_1}. \tag{3.2}
$$

令 $\overline{X}_t = X_{T_1+t} I_{[T_1<\infty]}$, $\overline{Y}_t = Y_{T_1+t} I_{[T_1<\infty]}$, $(\mathscr{G}_t) = (\mathscr{F}_{T_1+t})$, $R = (T_2 - T_1) I_{[T_1<\infty]} + (+\infty) I_{[T_1=\infty]}$, 则由引理 10.2, $\overline{Y}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 半鞅, R 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时. 此外, $\overline{X}$, $\overline{Y}$ 在 $[\![0, R[\![$ 上连续, 故由已证结果及引理 10.2 得

$$
\begin{aligned}
&[F(X, Y)^{T_2} - F(X_{T_1}, Y_{T_1})] I_{[T_1<\infty]}\\
&= [F(\overline{X}, \overline{Y})^R - F(\overline{X}_0, \overline{Y}_0)] I_{[T_1<\infty]}\\
&= G(\overline{X}, \overline{Y})^R I_{[T_1<\infty]}\\
&= [G(X, Y)^{T_2} - G(X, Y)_{T_1}] I_{[T_1<\infty]}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

合并(3.2)、(3.3)得

$$
F(X, Y)^{T_2} - F(X_0, Y_0) = G(X, Y)^{T_2}.
$$

依此类推, 可得 $F(X, Y) - F(X_0, Y_0) = G(X, Y)$, 即有(3.1).

(2) 设 X 为一适应有限变差过程, $Y = M + A$ 为一半鞅, 其中 M 为局部鞅, A 为零初值适应有限变差过程. 假定存在常数 K, 使得

$$
|M - M_0| \leqslant K, \quad \int_0^\infty |dX_s| \leqslant K, \quad \int_0^\infty |dA_s| \leqslant K.
$$

往证(3.1)式。

设 (T_n) 为一穷举 X, M 及 A 的跳的标准停时列. 令[1]

$$X^N = X^c + \sum_{k=1}^{N} \Delta X_{T_k} I_{[\![T_k,\infty[\![},$$

$$M^N = M^c + \sum_{k=1}^{N} [\Delta M_{T_k} I_{[\![T_k,\infty[\![} - \widetilde{\Delta M_{T_k} I_{[\![T_k,\infty[\![}}],$$

$$A^N = A^c + \sum_{k=1}^{N} \Delta A_{T_k} I_{[\![T_k,\infty[\![}.$$

则显然有 $\|X^N - X\|_V \to 0$, $\|A^N - A\|_V \to 0$, $\|M^N - M\|_{\mathscr{M}^2} \to 0$, 这里 $\|B\|_V \triangleq \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} |dB_s|\right]$. 取一子列 (N_k), 使得

$$\sum_k \|X^{N_k} - X\|_V < \infty, \quad \sum_k \|A^{N_k} A\|_V < \infty, \quad \sum_k \|M^{N_k} M\|_{\mathscr{M}^2} < \infty.$$

则由定理7.4的证明知: 对几乎所有 ω, $M_t^{N_k}(\omega)$ 对 $t \in \mathbb{R}_+$ 一致收敛于 $M_t(\omega)$ (这里 $M^{N_k} - M \in \mathscr{M}^2$). 此外,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_t |X_t^{N_k} - X_t|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \int_{[0,\infty[} |d(X_s^{N_k} - X_s)|\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \|X^{N_k} - X\|_V < +\infty.$$

故对几乎所有 ω, $X_t^{N_k}(\omega)$ 对 $t \in \mathbb{R}_+$ 一致收敛于 $X_t(\omega)$. 对 A^{N_k} 情形类似.

令 $Y^{N_k} = M^{N_k} + A^{N_k}$, 则由 (1), (3.1) 式对 X^{N_k}, Y^{N_k} 成立. 置

$$I_1^{(k)} = \int_0^t F_x'(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k})\, dX_s^{N_k} - \int_0^t F_x'(X_{s-}, Y_{s-})\, dX_s,$$

$$I_2^{(k)} = \int_0^t F_y'(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k})\, dA_s^{N_k} - \int_0^t F_y'(X_{s-}, Y_{s-})\, dA_s,$$

$$I_3^{(k)} = \int_0^t F_y'(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k})\, dM_s^{N_k} - \int_0^t F_y'(X_{s-}, Y_{s-})\, dM_s,$$

$$I_4^{(k)} = \int_0^t F_{yy}''(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k})\, d\langle Y^{N_k^c}, Y^{N_k^c}\rangle_s$$

$$- \int_0^t F_{yy}''(X_{s-}, Y_{s-})\, d\langle Y^c, Y^c\rangle_s,$$

---

1) 这里 X^c, A^c 分别表示有限变差过程 X, A 的连续部分.

$$I_5^{(k)} = \sum_{0<s\leqslant t} \{[F(X_s^{N_k}, Y_s^{N_k}) - F(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k})$$
$$- F_x'(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k})\Delta X_s^{N_k} - F_y'(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k})\Delta Y_s^{N_k}]$$
$$- [F(X_s, Y_s) - F(X_{s-}, Y_{s-})$$
$$- F_x'(X_{s-}, Y_{s-})\Delta X_s - F_y'(X_{s-}, Y_{s-})\Delta Y_s]\}.$$

我们有

$$|I_1^{(k)}| \leqslant \left|\int_0^t F_x'(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k})\, d(X_s^{N_k} - X_s)\right|$$
$$+ \left|\int_0^t [F_x'(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k}) - F_x'(X_{s-}, Y_{s-})]\, dX_s\right|$$
$$\triangleq I_{11}^{(k)} + I_{12}^{(k)}.$$

对给定 ω, 由于对任一 k, $F_x'(X_{s-}^{N_k}(\omega), Y_{s-}^{N_k}(\omega))$ 在 $[0, t]$ 上有界, 且序列在 $[0, t]$ 上一致收敛, 故存在 $C(t, \omega) < \infty$, 使得对一切 k, 对一切 $s \in [0, t]$ 有 $|F_x'(X_{s-}^{N_k}(\omega), Y_{s-}^{N_k}(\omega))| \leqslant C(t, \omega)$,

$$|F_x'(X_{s-}(\omega), Y_{s-}(\omega)| \leqslant C(t, \omega).$$

故由 Lebesgue 控制收敛定理, 有 $I_{12}^{(k)} \xrightarrow{\text{a. s.}} 0$. 此外, 我们有

$$I_{11}^{(k)}(\omega) \leqslant C(t, \omega)\int_0^t |d(X_s^{N_k}(\omega) - X_s(\omega))|.$$

从而 $I_{11}^{(k)} \xrightarrow{\text{a. s.}} 0$. 于是有 $I_1^{(k)} \xrightarrow{\text{a. s.}} 0$. 同理有 $I_2^{(k)} \xrightarrow{\text{a. s.}} 0$. 注意 $Y^{N_k c} = M^c = Y^c$, 故也有 $I_4^{(k)} \xrightarrow{\text{a. s.}} 0$.

现在研究 $I_3^{(k)}$. 我们有

$$|I_3^{(k)}| \leqslant \left|\int_0^t F_y'(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k})\, d(M_s^{N_k} - M_s)\right|$$
$$+ \left|\int_0^t [F_y'(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k}) - F_y'(X_{s-}, Y_{s-})]\, dM_s\right|$$
$$\triangleq |I_{31}^{(k)}| + |I_{32}^{(k)}|.$$

由于

$$E(\sum_k \langle M^{N_k} - M, M^{N_k} - M\rangle_\infty)$$
$$= \sum_k \|M^{N_k} - M\|_{\mathscr{H}^2}^2 \leqslant (\sum_k \|M^{N_k} - M\|_{\mathscr{H}^2})^2 < \infty.$$

故有 $\langle M^{N_k}-M, M^{N_k}-M\rangle_\infty \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$. 与上面证明 $I_{11}^{(k)} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ 类似，我们有

$$\int_0^t [F_y'(X_{s-}^{N_k}, Y_{s-}^{N_k})]^2 d\langle M^{N_k}-M, M^{N_k}-M\rangle_s \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

故由定理 8.45，$I_{31}^{(k)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. 同样由定理 8.45 容易推知 $I_{32}^{(k)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. 从而 $I_3^{(k)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

最后，记 $I_5^{(k)} = \sum\limits_{0<s\leq t} \alpha_s^{N_k}$. 对给定 ω，存在正数 $C(t, \omega)$，使得对一切 k，及一切 $s\in[0, t]$，有

$$|X_s^{N_k}(\omega)|\leqslant C(t, \omega), \quad |Y_s^{N_k}(\omega)|\leqslant C(t, \omega),$$
$$|X_s(\omega)|\leqslant C(t, \omega), \quad |Y_s(\omega)|\leqslant C(t, \omega).$$

在 $[-C(t, \omega), C(t, \omega)]^2$ 上，$|F_x'|$ 及 $|F_{yy}''|$ 被一正数 $K(t, \omega)$ 界住. 此外，显然有 $|\Delta Y_s^{N_k}|\leqslant|\Delta Y_s|$，$|\Delta X_s^{N_k}|\leqslant|\Delta X_s|$，故由前面关于级数绝对收敛的证明，我们有

$$\begin{aligned}|\alpha_s^{N_k}| &\leqslant \frac{1}{2}K(t, \cdot)(\Delta Y_s^{N_k}+\Delta Y\cdot) \\ &\quad +2K(t, \cdot)(|\Delta X_s^{N_k}|+|\Delta X_s^{N_k}|) \\ &\leqslant K(t, \cdot)\Delta Y_s^2+4K(t, \cdot)|\Delta X_s|.\end{aligned}$$

于是，对固定 ω，级数 $\sum\limits_{0<s\leq t}\alpha_s^{N_k}(\omega)$ 对 k 一致收敛，从而有

$$\lim_{k\to\infty} I_5^{(k)} = \sum_{0<s\leq t}\lim \alpha_s^{N_k}=0 \quad \text{a.s.}.$$

综上所证，我们有(3.1)成立.

(3) 现在考虑一般情形. 令

$$Y=M+A,$$

其中 M 为局部有界鞅，A 为零初值适应有限变差过程. 令停时 $S_n\uparrow+\infty$，使得对一切 n，$M^{S_n}-M_0$ 为有界鞅. 令

$$T_n=\inf\left\{t: \int_0^t |dX_s|\geqslant n \text{ 或 } \int_0^t |dA_s|\geqslant n\right\}\wedge S_n.$$

则 $T_n\uparrow+\infty$. 对每个 n，令

$$X^{(n)}=X^{T_n-},$$

$$Y^{(n)}=M^{T_n}+(A^{T_n-}-\Delta M_{T_n}I_{[T_n,\infty[})=Y^{T_n-}.$$

则由(2)知,(3.1)式对 $X^{(n)}$, $Y^{(n)}$ 成立. 但(3.1)式两边有相同跳,故(3.1)式对 X^{T_n}, Y^{T_n} 也成立. 于是(3.1)式对 X, Y 成立. 定理证毕.

定理 10.3 给出了二维情形的 Ito 公式. 下面我们将给出 N 维情形的 Ito 公式,其证明与二维情形完全类似,只是符号较为复杂,我们省略这一证明.

10.4 定理 设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 为 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的一函数,关于每个 x_i 一次连续可微,关于每个 y_k 二次连续可微. 令 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(n)}$ 为 n 个适应有限变差过程, $Y^{(1)}, \cdots, Y^{(m)}$ 为 m 个半鞅, 则 $F(X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}; Y^{(1)}, \cdots, Y^{(m)})$ 为一半鞅, 且对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$\begin{aligned}(4.1)\quad F(\vec{X}_t, \vec{Y}_t)=&F(\vec{X}_0, \vec{Y}_0)+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t F'_{x_i}(\vec{X}_{s-}, \vec{Y}_{s-})dX_s^{(i)}\\ &+\sum_{j=1}^{m}\int_0^t F'_{y_j}(\vec{X}_{s-}, \vec{Y}_{s-})dY_s^{(j)}\\ &+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m}\int_0^t F''_{y_jy_k}(\vec{X}_{s-}, \vec{Y}_{s-})d\langle Y^{(j)c}, Y^{(k)c}\rangle_s\\ &+\sum_{0<s\leq t}\Big[F(\vec{X}_s, \vec{Y}_s)-F(\vec{X}_{s-}, \vec{Y}_{s-})\\ &\quad-\sum_{i=1}^{n}F'_{x_i}(\vec{X}_{s-}, \vec{Y}_{s-})\Delta X_s^{(i)}\\ &\quad-\sum_{j=1}^{m}F'_{y_j}(\vec{X}_{s-}, \vec{Y}_{s-})\Delta Y_s^{(j)}\Big]\quad \text{a.s.},\end{aligned}$$

这里, $\vec{X}\triangleq(X^{(1)}, \cdots, X^{(n)})$, $\vec{Y}\triangleq(Y^{(1)}, \cdots, Y^{(m)})$.

注 在定理中,"$n=0$"意味着变元 x 不出现,这时(4.1)为半鞅的 Ito 公式;"$m=0$"意味着变元 y 不出现,这时(4.1)为有限变差过程的变量代换公式.

§3 分部积分公式，$[X, Y]$ 的逼近

作为 Ito 公式的一个重要的例子，我们有如下的分部积分公式.

10.5 定理 设 X，Y 为半鞅，则其乘积 XY 为半鞅，并且我们有

$$X_tY_t=\int_0^t X_{s-}dY_s+\int_0^t Y_{s-}dX_s+[X, Y]_t. \tag{5.1}$$

如果 X 为适应有限变差过程，则还有

$$X_tY_t=\int_0^t X_{s-}dY_s+\int_0^t Y_sdX_s+X_0Y_0. \tag{5.2}$$

证明 (5.1)直接由(4.1)推得. 设 X 为适应有限变差过程，则 X 的连续鞅部分 $X^c=X_0$，故有

$$[X, Y]_t=\langle X^c, Y^c\rangle_t+\sum_{0<s\le t}\Delta X_s\Delta Y_s=X_0Y_0+\sum_{0<s\le t}\Delta X_s\Delta Y_s$$

$$=X_0Y_0+\int_0^t(\Delta Y_s)dX_s.$$

故由(5.1)得到(5.2).

10.6 定理 设 X 为一可料有限变差过程，Y 为一半鞅，则有

$$X_tY_t=\int_0^t X_sdY_s+\int_0^t Y_{s-}dX_s+X_0Y_0. \tag{6.1}$$

证明 令 $Y=Y_0+M+A$，其中 M 为零初值局部鞅，A 为零初值适应有限变差过程. 由 Yœurp 引理(定理 9.20)，我们有

$$[X, Y]_t=X_0Y_0+[X, M]_t+[X, A]_t$$

$$=X_0Y_0+\int_0^t\Delta X_sdM_s+\int_0^t\Delta X_sdA_s$$

$$=X_0Y_0+\int_0^t\Delta X_sdY_s.$$

故由(5.1)推得(6.1).

作为分部积分公式的一个简单应用，我们得到关于 $[X, Y]$

的逼近定理，这里 X, Y 是两个半鞅.

10.7 定理 设 X, Y 为两个半鞅, T 为一有穷停时. 令

$$\tau_n: 0 = T_0^{(n)} \leqslant T_1^{(n)} \leqslant \cdots$$

为 $[0, T]$ 的一列随机分割 (见定义 9.37), 使得其步长 $\delta(\tau_n)$ a.s. 趋于 0, 则有

$$(7.1)\qquad \sup_{t\leqslant T}\Big|\sum_i (X_{T_{i+1}^{(n)}\wedge t} - X_{T_i^{(n)}\wedge t})(Y_{T_{i+1}^{(n)}\wedge t} - Y_{T_i^{(n)}\wedge t}) + X_0Y_0 - [X, Y]_t\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

证明 我们将利用如下的"分部求和公式":

$$(7.2)\qquad \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)(b_{i+1}-b_i) = a_kb_k - a_0b_0 - \sum_{i=0}^{k-1}a_i(b_{i+1}-b_i) - \sum_{i=0}^{k-1}b_i(a_{i+1}-a_i).$$

由(7.2), 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_i (X_{T_{i+1}^{(n)}\wedge t} - X_{T_i^{(n)}\wedge t})(Y_{T_{i+1}^{(n)}\wedge t} - Y_{T_i^{(n)}\wedge t}) + X_0Y_0\\
&= X_{T\wedge t}Y_{T\wedge t} - \sum_i X_{T_i^{(n)}\wedge t}(Y_{T_{i+1}^{(n)}\wedge t} - Y_{T_i^{(n)}\wedge t})\\
&\quad - \sum_i Y_{T_i^{(n)}\wedge t}(X_{T_{i+1}^{(n)}\wedge t} - X_{T_i^{(n)}\wedge t})\\
&= X_{T\wedge t}Y_{T\wedge t} - \sum_i X_{T_i^{(n)}}(Y_{T_{i+1}^{(n)}\wedge t} - Y_{T_i^{(n)}\wedge t})\\
&\quad - \sum_i Y_{T_i^{(n)}}(X_{T_{i+1}^{(n)}\wedge t} - X_{T_i^{(n)}\wedge t}).
\end{aligned}$$

由分部积分公式(5.1), 我们有

$$[X, Y]_{t\wedge T} = X_{T\wedge t}Y_{T\wedge t} - \int_0^{t\wedge T} X_{s-}dY_s - \int_0^{t\wedge T} Y_{s-}dX_s,$$

于是由定理 9.38 推得(7.1).

注 设 X 为一半鞅. 令 $t\in\mathbb{R}_+$, $\tau_n: 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k_n}^{(n)} = t$ 为 $[0, t]$ 的有限分割序列, 且其步长 $\delta(\tau_n)$ 趋于 0. 由(7.1), 我们有

$$S_{\tau_n}(X) = X_0^2 + \sum_{i=0}^{k_n}(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} [X, X]_t.$$

因此，我们有时称 $[X, X]_t$ 为半鞅 X 在区间 $[0, t]$ 上的平方变差，称过程 $[X, X]$ 为半鞅 X 的平方变差(过程).

§4 Brown 运动的鞅刻划(Lévy 定理)

10.8 定义 一零初值连续适应过程 (B_t) 叫做关于族 $(\mathscr{F}_t)$ 的 Brown 运动(或 Wiener 过程)，如果对任何 $0 \leqslant s < t < \infty$，$B_t - B_s$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立，并且 $B_t - B_s$ 服从均值为零、方差为 $t-s$ 的正态分布.

一 n 维向量过程 $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \cdots, B_t^{(n)})$ 叫做 n 维 Brown 运动，如果每个分量过程 $(B_t^{(i)})$ 为 Brown 运动，且不同分量之间相互独立.

下一定理称为 Lévy 定理，它给出了 Brown 运动的鞅刻划. 为简单起见，我们只讨论一维情形.

10.9 定理 设 (B_t) 为一零初连续适应过程. 则为要 (B_t) 为 Brown 运动，必须且只需 (B_t) 为一局部鞅，且 $\langle B, B\rangle_t = t$.

证明 必要性. 设 (B_t) 为 Brown 运动. 这时 B_t 可积，B_t^2 可积(因 B_t 服从正态分布). 由于对任何 $0 \leqslant s < t < \infty$，$B_t - B_s$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立，故有

$$\mathbb{E}[B_t - B_s | \mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0.$$

从而 (B_t) 为鞅. 此外，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 | \mathscr{F}_s] &= \mathbb{E}[B_t^2 - 2B_t B_s + B_s^2 | \mathscr{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] \\ &= t - s.\end{aligned}$$

这表明 $B_t^2 - t$ 为零初值鞅，故 $\langle B, B\rangle_t = t$.

充分性. 设 (B_t) 为一局部鞅，且 $\langle B, B\rangle_t = t$. 于是由定理 8.34 容易看出，$(B_t)$ 为鞅.

设 $u \in \mathbb{R}$，令 $F(x, y) = \exp\left(\frac{u^2}{2} x + iuy\right)$. 置

(9.1) $$Z_t = F(t, B_t) = \exp\left(iuB_t + \frac{u^2}{2}t\right),$$

则由 Ito 公式,

$$Z_t = 1 + \frac{u^2}{2}\int_0^t Z_s ds + iu\int_0^t Z_s dB_s - \frac{u^2}{2}\int_0^t Z_s d\langle B, B\rangle_s$$
$$= 1 + iu\int_0^t Z_s dB_s.$$

由于 $|Z_s| \leqslant e^{\frac{u^2}{2}s}$,故由上式知 (Z_t) 为一(复值)鞅. 于是由(9.1),对 $t>s\geqslant 0$, 我们有

$$\mathbb{E}[\exp\{iu(B_t - B_s)\} | \mathscr{F}_s] = \exp\left\{-\frac{u^2}{2}(t-s)\right\}.$$

因此 $B_t - B_s$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立,且 $B_t - B_s$ 服从均值为零、方差为 $t-s$ 的正态分布,即 (B_t) 为 Brown 运动.

下一定理是 Lévy 定理的一个重要应用.

10.10 定理 设 (M_t) 为一零初值连续局部鞅,且

$$\lim_{t\to\infty} \langle M, M\rangle_t = \infty \text{ a.s.},$$

令 $$T_t = \inf\{s: \langle M, M\rangle_s > t\},$$

则 (M_{T_t}) 为 $(\mathscr{F}_{T_t})$ Brown 运动.

证明 令 $N_t = M_{T_t}$, $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{T_t} (t\in\mathbb{R}_+)$, $\mathscr{G}_\infty = \mathscr{F}_\infty$. 则由定理 4.50, T_t 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时,且 $\langle M, M\rangle_{T_t} = t$. 故由定理 8.35, $(M_s^{T_t})_{s\geqslant 0}$ 为平方可积鞅, 且 $(M^2_{s\wedge T_t} - \langle M, M\rangle_{s\wedge T_t})_{s\geqslant 0}$ 为一致可积鞅. 设 $s<t$, 由 Doob 停止定理,

$$\mathbb{E}[N_t | \mathscr{G}_s] = \mathbb{E}[M_{T_t} | \mathscr{F}_{T_s}] = M_{T_s} = N_s \text{ a.s.},$$
$$\mathbb{E}[N_t^2 - t | \mathscr{G}_s] = \mathbb{E}[M^2_{T_t} - \langle M, M\rangle_{T_t} | \mathscr{F}_{T_s}]$$
$$= M^2_{T_s} - \langle M, M\rangle_{T_s} = N_s^2 - s \text{ a.s.},$$

这表明 (N_t) 及 $(N_t^2 - t)$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 鞅.

下面我们证明 (N_t) 连续. 令 $\overline{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{T_{\langle M, M\rangle_t}} (t\in\mathbb{R}_+)$. 由于对一切 $s\in\mathbb{R}_+$, 有 $\langle M, M\rangle_{T_{\langle M, M\rangle_s}} = \langle M, M\rangle_s$, 故容易由定理 8.40.3) 知, 对一切 $t\geqslant s$, 我们有

$$\mathbb{E}[M_t|\overline{\mathscr{F}}_s]=\mathbb{E}[M_t|\mathscr{F}_{T_{\langle M,M\rangle_s}}]=M_{t\wedge T_{\langle M,M\rangle_s}}=M_s \text{ a.s.}.$$

这表明(M_t)关于$(\overline{\mathscr{F}}_t)$为鞅. 现设$S$为一有界$(\mathscr{G}_t)$停时, 由于$(M_t)$连续, 故$N_{S-}=M_{(T_S)-}$. 由定理 4.51, T_S及T_{S-}都为$(\overline{\mathscr{F}}_t)$停时, 此外, 由于$\langle M, M\rangle(\overline{\mathscr{F}}_t)=\langle M, M\rangle$, $\langle M, M\rangle_{T_S}=S$, 故$M^{T_S}$为$(\overline{\mathscr{F}}_t)$平方可积鞅. 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(N_S-N_{S-})^2]&=\mathbb{E}[(M_{T_S}-M_{(T_S-)})^2]=\mathbb{E}[M^2_{T_S}-M^2_{(T_S-)}]\\&=\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_{T_S}-\langle M, M\rangle_{(T_S-)}]\\&=\mathbb{E}[S-S]=0.\end{aligned}$$

从而$N_S=N_{S-}$ a.s.. 由于S为任意有界$(\mathscr{G}_t)$停时, 故(N_t)为连续$(\mathscr{G}_t)$鞅.

综上所证, 由 Lévy 定理知, (N_t)为$(\mathscr{G}_t)$ Brown 运动.

§5　Poisson 过程的鞅刻划

10.11 定义　设(P_t)为一纯断适应增过程, $P_0=0$, 其跳为$+1$. 称(P_t)为一 Poisson 过程, 如果对一切$0\leqslant s<t<\infty$, P_t-P_s与$\mathscr{F}_s$独立, 且P_t-P_s服从参数为$t-s$的 Poisson 分布, 即

$$\mathbb{P}([P_t-P_s=k])=\frac{(t-s)^k}{k!}e^{-(t-s)},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

下一定理给出了 Poisson 过程的鞅刻划.

10.12 定理　设(P_t)为一纯断适应增过程, $P_0=0$, 其跳为$+1$. 则为要(P_t)为一 Poisson 过程, 必须且只需(P_t-t)为一鞅[1].

证明　必要性. 设(P_t)为一 Poisson 过程, 则对$0\leqslant s<t<\infty$, 我们有

$$\mathbb{E}[P_t-P_s|\mathscr{F}_s]=\mathbb{E}[P_t-P_s]=t-s.$$

从而(P_t-t)为一鞅.

充分性. 设(P_t-t)为一鞅. 令$u\in\mathbb{R}$, $F(x, y)=\exp\{(1-e^{iu})x$

---

1) 这等价于如下表面上较弱的条件: (P_t-t)为一局部鞅. 事实上, 设(P_t-t)为一局部鞅, 则$\tilde{P}_t=t$, 故$\mathbb{E}[P_t]=t$, 即P_t可积. 于是(P_t-t)为鞅.

$+iuy\}$, 并令

(12.1) $$Z_t=F(t,\ P_t)=\exp\{iuP_t+(1-e^{iu})t\}.$$

则由 Ito 公式,

(12.2) $$Z_t=1+\int_0^t(1-e^{iu})Z_{s-}ds+iu\int_0^t Z_{s-}dP_s+\sum_{0<s\leqslant t}(\Delta Z_s-iuZ_{s-}\Delta P_s).$$

但我们有

$$\sum_{0<s\leqslant t}\Delta Z_s=\sum_{0<s\leqslant t}Z_{s-}(e^{iu\Delta P_s}-1)=\sum_{0<s\leqslant t}Z_{s-}(e^{iu}-1)\Delta P_s$$
$$=(e^{iu}-1)\int_0^t Z_{s-}dP_s,$$

故由(12.2)得

(12.3) $$Z_t=1+(e^{iu}-1)\int_0^t Z_{s-}d(P_s-s).$$

由于 $|Z_t|\leqslant e^{2t}$, 于是由 12.3 知 (Z_t) 为一(复值)鞅. 因此, 由(12.1), 对 $t>s\geqslant 0$, 我们有

$$E[\exp\{iu(P_t-P_s)\}|\mathscr{F}_s]=\exp\{(e^{iu}-1)(t-s)\}.$$

这表明 P_t-P_s 与 $\mathscr{F}_s$ 独立, 且 P_t-P_s 服从参数为 $t-s$ 的 Poisson 分布, 即 (P_t) 为 Poisson 过程.

注 设(P_t)为一纯断适应增过程, $P_0=0$, 其跳为 $+1$. 若$(\widetilde{P}_t)$连续, 则由定理证明看出: 过程 $Z_t=\exp\{iuP_t+(1-e^{iu})\widetilde{P}_t\}$ 为一(复值)局部鞅. 更确切地, (Z_t)满足如下方程:

$$Z_t=1+(e^{iu}-1)\int_0^t Z_{s-}d(P_s-\widetilde{P}_s).$$

作为这一定理的应用, 我们有如下类似于 Brown 运动情形定理 10.10 的结果.

10.13 定理 设 (P_t) 为一纯断适应增过程, $P_0=0$, 且其跳为 $+1$. 此外, 设 (P_t) 的可料对偶投影 $(\widetilde{P}_t)$ 连续, 且 $\lim\limits_{t\to\infty}\widetilde{P}_t=\infty$ a.s.. 令

$$T_t=\inf\{s:\widetilde{P}_s>t\}.$$

则 (P_{T_t}) 关于 $(\mathscr{F}_{T_t})$ 为 Poisson 过程.

证明 令 $Q_t=P_{T_t}$, $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{T_t}$, 显然 T_t 为有穷停时, 且 $\widetilde{P}_{T_t}=t$. 从而 $(P-\widetilde{P})^{T_t}$ 为一致可积鞅. 设 $s<t$, 由 Doob 停止定理, 我们有

$$\mathbb{E}[Q_t-t\,|\,\mathscr{G}_s]=\mathbb{E}[P_{T_t}-\widetilde{P}_{T_t}\,|\,\mathscr{F}_{T_s}]=P_{T_s}-\widetilde{P}_{T_s}$$
$$=Q_s-s \text{ a.s.},$$

这表明 (Q_t-t) 为 $(\mathscr{G}_t)$ 鞅.

令 $\widetilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{T_{\widetilde{P}_t}}$. 设 S 为一有界 $(\mathscr{G}_t)$ 停时, 由定理 4.51, T_S 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时, T_{S-} 为 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 停时. 由于 $(P-\widetilde{P})^{T_s}$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 一致可积鞅, 故对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 由 Doob 停止定理,

$$\mathbb{E}[P_{T_s}-\widetilde{P}_{T_s}\,|\,\widetilde{\mathscr{F}}_t]=\mathbb{E}[P_{T_s}-\widetilde{P}_{T_s}\,|\,\mathscr{F}_{T_{\widetilde{P}_t}}]$$
$$=P_{T_s\wedge T_{\widetilde{P}_t}}-\widetilde{P}_{T_s\wedge T_{\widetilde{P}_t}}.$$

但由于 $\widetilde{P}_{T_{\widetilde{P}_t}}=\widetilde{P}_t$, 故容易看出, 我们有 $\widetilde{P}^{T_{\widetilde{P}_t}}=\widetilde{P}^t$, $P^{T_{\widetilde{P}_t}}=P^t$. 从而由上式得

$$\mathbb{E}[P_{T_s}-\widetilde{P}_{T_s}\,|\,\widetilde{\mathscr{F}}_t]=P_{T_s\wedge t}-\widetilde{P}_{T_s\wedge t}.$$

这表明 $(P-\widetilde{P})^{T_s}$ 为 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 一致可积鞅. 故有

$$\mathbb{E}[P_{T_s}-P_{(T_s-)}]=\mathbb{E}[\widetilde{P}_{T_s}-\widetilde{P}_{(T_s-)}]=\mathbb{E}[S-S]=0.$$

由于 $P_{T_s}\geqslant P_{(T_s-)}$, 上式表明 $P_{T_s}=P_{(T_s-)}$ a.s.. 另一方面, 对一切 $t>0$, 我们有

$$P_{(T_{t-})-}=\lim_{s\uparrow\uparrow t}P_{T_s}=\lim_{s\uparrow\uparrow t}Q_s=Q_{t-}.$$

于是 $\qquad Q_S-Q_{S-}=P_{T_s}-P_{(T_{s-})-}=P_{(T_s-)}-P_{(T_{s-})-}$ a.s.,

这表明 Q_S-Q_{S-} a.s. 在 $\{0, 1\}$ 中取值. 由于 S 为任一有界 $(\mathscr{G}_t)$ 停时, 故过程 (Q_t) 的跳为 $+1$.

综上所证, 由定理 10.12, (Q_t) 为 $(\mathscr{G}_t)$ Poisson 过程.

第十一章

鞅空间 $\mathscr{H}^1$ 和 $\mathscr{BMO}$

本章研究的内容是现代鞅论中较精细同时也是较难的结果. 空间 $\mathscr{H}^1$ 和 $\mathscr{BMO}$ 都是从分析那里借用来的术语. H 意味着 Hardy, BMO 是英文 "bounded mean oscillation" 的三个词头.

§1 鞅空间 $\mathscr{H}^1$

11.1 定义 设 M 为一局部鞅, 置

(1.1) $$\|M\|_{\mathscr{H}^1}=\mathbb{E}[\sqrt{[M,M]_\infty}].$$

令 $\mathscr{H}^1=\{M\in\mathscr{M}_{loc}:\|M\|_{\mathscr{H}^1}<+\infty\}$. 我们称 $\mathscr{H}^1$ 中的元素为 $\mathscr{H}^1$ 鞅. 显然, $\mathscr{H}^1$ 为一线性空间.

11.2 注 1) 容易验证, $\|\ \|_{\mathscr{H}^1}$ 是 $\mathscr{H}^1$ 上的一范数. 特别, 若 $\|M\|_{\mathscr{H}^1}=0$, 则 $M=0$.

2) 设 $M\in\mathscr{M}_{loc}$, 且 $\mathbb{E}[|M_0|]<+\infty$. 则由定理 8.32 知, 存在停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得每个 $M^{T_n}\in\mathscr{H}^1$.

3) 设 $M\in\mathscr{M}^2$. 则由于 $\mathbb{E}[\sqrt{[M,M]_\infty}]\leqslant(\mathbb{E}[M,M]_\infty)^{\frac{1}{2}}<+\infty$, 故 $M\in\mathscr{H}^1$, 并且有 $\|M\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|M\|_{\mathscr{M}^2}$.

4) 设 $M\in\mathscr{W}$. 则由于 $\sqrt{[M,M]_\infty}=\sqrt{\sum_s \Delta M_s^2}\leqslant\sum_s|\Delta M_s|$, 故 $M\in\mathscr{H}^1$, 并且有 $\|M\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|M\|_V$. 这里 $\|M\|_V\triangleq\mathbb{E}[\int_{0-}^\infty|dM_s|]$.

5) 设 $M\in\mathscr{H}^1$, 则对任何停时 T, $M^T\in\mathscr{H}^1$, 且 $\|M^T\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|M\|_{\mathscr{H}^1}$.

下一引理是局部鞅基本定理 (定理 8.20) 的精细化. 借助这一引理, 我们可以把许多有关局部鞅的问题, 归结为研究有界鞅及

单跳可积变差过程的补偿这两种特殊情形，从而使问题简化.

11.3 引理 设 M 为一零初值局部鞅. 令

(3.1) $$A_t=\sum_{0<s\leqslant t}\Delta M_s I_{[|\Delta M_s|\geqslant 1]},\ V=A-\widetilde{A},\ U=M-V.$$

则存在停时 $T_n\uparrow+\infty$，使得对一切 n，U^{T_n} 为有界鞅，V^{T_n} 为有限多个单跳适应可积变差过程补偿和. 这里，我们将形如 $\xi I_{[\![T,\infty[\![}$ 的过程称为单跳过程.

证明 令 $S_1=\inf\{t:|\Delta A_t|\geqslant 1\}$，并归纳定义 $(S_k)_{k\geqslant 2}$ 如下：

$$S_{k+1}=\inf\{t>S_k:|\Delta A_t|\geqslant 1\},$$

则每个 S_k 为停时，$S_k\uparrow+\infty$，且对 $k\neq j$，有 $[\![S_j]\!]\cap[\![S_k]\!]=\emptyset$. 此外，我们有

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta M_{S_k}I_{[\![S_k,\infty[\![}.$$

由定理 8.20，存在停时 $R_n\uparrow+\infty$，使得 U^{R_n} 为有界鞅，A^{R_n} 为可积变差过程. 令 $T_n=R_n\wedge S_n$，则 $T_n\uparrow+\infty$. 且有

$$A^{T_n}=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_{S_k}I_{[S_k<T_n]}I_{[\![S_k,\infty[\![}.$$

但是，我们有

$$\sum_{s\leqslant T_n}|\Delta A_s|=\sum_{k=1}^{n}|\Delta M_{S_k}|I_{[S_k<T_n]}.$$

于是，对 $1\leqslant k\leqslant n$，$\Delta M_{S_k}I_{[S_k<T_n]}$ 为 $\mathscr{F}_{S_k}$ 可测的可积随机变量，即 $\Delta M_{S_k}I_{[S_k<T_n]}I_{[\![S_k,\infty[\![}$ 为单跳适应可积变差过程. 我们有 $V^{T_n}=A^{T_n}-(\widetilde{A^{T_n}})$. 引理得证.

11.4 引理 设 $M\in\mathscr{H}^1$. 令 (T_n) 为一列停时，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=+\infty$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|M-M^{T_n}\|_{\mathscr{H}^1}=0$.

证明 令

$$\xi_n=\sqrt{[M^{T_n}-M,\ M^{T_n}-M]_\infty}=\sqrt{[M,\ M]_\infty-[M,\ M]_{T_n}}.$$

由于 $\xi_n\xrightarrow{\text{a.s.}}0$，且 $\xi_n\leqslant\sqrt{[M,\ M]_\infty}\in L^1$，故有 $\mathbb{E}[\xi_n]\to 0$. 即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|M-M^{T_n}\|_{\mathscr{H}^1}=0$.

11.5 定理 有界鞅全体在$\mathscr{H}^1$中稠密.

证明 由于有界鞅全体在$\mathscr{M}^2$中稠密，且$\mathscr{M}^2$的范数比$\mathscr{H}^1$的范数强，故只需证明$\mathscr{M}^2$在$\mathscr{H}^1$中稠密.

设$M\in\mathscr{H}^1$，往证存在$(M^{(n)})\subset\mathscr{M}^2$，使得$\|M^{(n)}-M\|_{\mathscr{H}^1}\to 0$. 显然，无妨假定$M_0=0$. 由引理11.4及引理11.3看出，只需考虑$M$为单跳补偿情形.

设T为一停时，ξ为一$\mathscr{F}_T$可测的可积随机变量，令

$$A=\xi I_{[\![T,\infty[\![},\ M=A-\widetilde{A},$$

$$A^{(k)}=\xi I_{[|\xi|\leqslant k]}I_{[\![T,\infty[\![},\ M^{(k)}=A^{(k)}-\widetilde{A}^{(k)}.$$

则由引理7.14，$M^{(k)}\in\mathscr{M}^2$. 由注11.2.4)，我们有

$$\|M^{(k)}-M\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|M^{(k)}-M\|_V$$

$$\leqslant 2\|A^{(k)}-A\|_V\leqslant 2\mathbb{E}|\xi I_{[|\xi|>k]}|\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

这里第二个不等号是根据定理6.25.2)得到的. 定理证毕.

§2 鞅空间$\mathscr{BMO}$

11.6 定义 设M为一平方可积鞅，置

$$\|M\|_{\mathscr{BMO}}=\sup_{T\in\mathscr{T}}\sqrt{\frac{\mathbb{E}(M_\infty-M_{T-})^2}{\mathbb{P}([T<\infty])}},\tag{6.1}$$

这里$\mathscr{T}$为停时全体，并约定$M_{0-}=0$，$\frac{0}{0}=0$. 令

$$\mathscr{BMO}=\{M\in\mathscr{M}^2:\|M\|_{\mathscr{BMO}}<+\infty\}.\tag{6.2}$$

我们称$\mathscr{BMO}$的元素为$\mathscr{BMO}$鞅. 设$\alpha\in\mathbb{R}$，显然有$\|\alpha M\|_{\mathscr{BMO}}=|\alpha|\|M\|_{\mathscr{BMO}}$. 由于

$$\sqrt{\mathbb{E}(\xi+\eta)^2}\leqslant\sqrt{\mathbb{E}[\xi^2]}+\sqrt{\mathbb{E}[\eta^2]},$$

故有 $$\|M+N\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\|M\|_{\mathscr{BMO}}+\|N\|_{\mathscr{BMO}}.$$

此外，设$M\in\mathscr{BMO}$，则$\|M\|_{\mathscr{M}^2}\leqslant\|M\|_{\mathscr{BMO}}$. 特别，若$\|M\|_{\mathscr{BMO}}=0$，则$M=0$. 于是$\mathscr{BMO}$为一线性空间，$\|\ \|_{\mathscr{BMO}}$为$\mathscr{BMO}$上的一个范数.

11.7 引理 设 $M\in\mathscr{M}^2$, 则对任何停时 T, 有

$$\mathbb{E}[(M_\infty-M_{T-})^2|\mathscr{F}_T]=\mathbb{E}[[M,M]_\infty|\mathscr{F}_T]-[M,M]_T+\Delta M_T^2 \text{ a.s.}. \tag{7.1}$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_\infty-M_{T-})^2|\mathscr{F}_T]&=\mathbb{E}[M_\infty^2-2M_\infty M_{T-}+M_{T-}^2|\mathscr{F}_T]\\&=\mathbb{E}[M_\infty^2|\mathscr{F}_T]-2M_TM_{T-}+M_{T-}^2\\&=\mathbb{E}[M_\infty^2|\mathscr{F}_T]-M_T^2+\Delta M_T^2\\&=\mathbb{E}[[M,M]_\infty|\mathscr{F}_T]-[M,M]_T\\&\quad+\Delta M_T^2\text{a. s.}.\end{aligned}$$

11.8 引理 设 $M\in\mathscr{M}^2$, 则为要 $M\in\mathscr{BMO}$, 必须且只需存在常数 $c>0$, 使得对一切停时 T, 有

$$\mathbb{E}[(M_\infty-M_{T-})^2|\mathscr{F}_T]\leqslant c^2\text{ a.s.}. \tag{8.1}$$

证明 必要性. 设 $M\in\mathscr{BMO}$. 则对一切停时 T, 有

$$\mathbb{E}[(M_\infty-M_{T-})^2]\leqslant c^2\mathbb{P}(T<\infty), \tag{8.2}$$

其中 $c=\|M\|_{\mathscr{BMO}}$. 设 $A\in\mathscr{F}_T$. 在 (8.2) 中用 T_A 代替那里的 T, 我们有

$$\mathbb{E}[(M_\infty-M_{T-})^2I_A]\leqslant c^2\mathbb{P}(A\cap[T<\infty])\leqslant c^2\mathbb{P}(A),$$

故得(8.1).

充分性. 设(8.1)式对一切停时 T 成立. 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_\infty-M_{T-})^2|\mathscr{F}_T]&=\mathbb{E}[(M_\infty-M_{T-})^2|\mathscr{F}_T]I_{[T<\infty]}\\&\leqslant c^2I_{[T<\infty]}\text{ a.s.}.\end{aligned}$$

在上式两边取期望得(8.2), 因此 $M\in\mathscr{BMO}$.

11.9 定理 设 M 为一局部鞅, 则下列断言等价:

1) $M\in\mathscr{BMO}$;

2) 存在常数 $c_1,c_2>0$, 使得对一切停时 T, 有 $|\Delta M_T|\leqslant c_1$ a.s. ($\Delta M_0\triangleq M_0$), 且有

$$\mathbb{E}([M,M]_\infty-[M,M]_T)\leqslant c_2^2\mathbb{P}(T<\infty). \tag{9.1}$$

3) 存在常数 $c_1,c_2>0$, 使得对一切停时 T, 有 $|\Delta M_T|\leqslant c_1$ a. s.,

且有

(9.2) $\qquad \mathbb{E}[[M, M]_\infty | \mathscr{F}_T] - [M, M]_T \leqslant c_2^2$ a.s..

4) 存在常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得对一切停时 T, 有 $|\Delta M_T| \leqslant c_1$ a.s., 此外, 对一切 $t \in \mathbb{R}_+$, 有

(9.3) $\qquad \mathbb{E}[[M, M]_\infty | \mathscr{F}_t] - [M, M]_t \leqslant c_2^2$ a.s..

特别, $\mathscr{BMO}$ 鞅为局部有界鞅.

证明 1)⇔3)容易由引理 11.7 及引理 11.8 看出. 2)⇔3)的证明与引理 11.8 的证明类似. 剩下只需证明 4)⇒3). 设对一切 $t \in \mathbb{R}_+$, 有(9.3)成立. 令(X_t)为鞅 $\mathbb{E}[[M, M]_\infty | \mathscr{F}_t]$的右连续修正, 则由 (9.3) 及 $X - [M, M]$ 的右连续性, 对几乎所有 ω, 对一切 $t \in \mathbb{R}_+$, 有

$$X_t(\omega) - [M, M]_t(\omega) \leqslant c_2^2.$$

特别, 对一切停时 T, 有

$$X_T - [M, M]_T \leqslant c_2^2 \text{ a.s.}.$$

亦即有(9.2)式成立. 4)⇒3)得证.

11.10 注 1) 设 $M \in \mathscr{BMO}$, 则由定理 11.9.2) 看出, 有 $\|M^c\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \|M\|_{\mathscr{BMO}}$, $\|M^d\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \|M\|_{\mathscr{BMO}}$.

2) 设 ξ 为一 a.s. 有界随机变量, 今后用 $\|\xi\|_{L^\infty}$ 表示 ξ 的 a.s. 上确界. 由引理 11.7 及 11.8 的证明看出: 对 $M \in \mathscr{M}^2$, 有

$$\|M\|_{\mathscr{BMO}}^2 = \sup_{T \in \mathscr{T}} \|\mathbb{E}[[M, M]_\infty - [M, M]_{T-} | \mathscr{F}_T]\|_{L^\infty}$$
$$= \sup_{T \in \mathscr{T}} \|\mathbb{E}[(M_\infty - M_{T-})^2 | \mathscr{F}_T]\|_{L^\infty}.$$

特别, 设 $M \in \mathscr{BMO}$, 则由引理 11.7, $|\Delta M| \leqslant \|M\|_{\mathscr{BMO}}$.

设 M 为一局部鞅, 若 $M \notin \mathscr{BMO}$, 则令 $\|M\|_{\mathscr{BMO}} = +\infty$.

下面我们给出 $\mathscr{BMO}$ 鞅的几个有用的例子.

11.11 定理 设 M 为一有界鞅, 则 $M \in \mathscr{BMO}$, 且有

$$\|M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2\|M_\infty\|_{L^\infty}.$$

证明 设 $\|M_\infty\|_{L^\infty} = c$, 由于 $M_t = \mathbb{E}[M_\infty | \mathscr{F}_t]$, 故有 $|M_t| \leqslant$

c a.s.. 于是对一切停时 T,

$$\mathbb{E}[(M_\infty - M_{T-})^2 | \mathscr{F}_T] \leqslant (2c)^2 \text{ a.s.}.$$

从而有 $\|M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2c$.

11.12 定理 设 (A_t) 为一适应可积增过程. 令 (M_t) 为鞅 $\mathbb{E}[A_\infty | \mathscr{F}_t]$ 的右连续修正. 如果存在常数 $c>0$, 使得对几乎所有 ω 及一切 $t \in \mathbb{R}_+$, 有 $M_t(\omega) - A_{t-}(\omega) \leqslant c$, 则 $M \in \mathscr{BMO}$, 且 $\|M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \sqrt{3}\,c$.

证明 令 $X_t = M_t - A_{t-}$, 则 $c \geqslant X_t \geqslant 0$, 且对一切停时 T, 有 $M_\infty - M_{T-} = (A_\infty - A_{T-}) - X_{T-}$. 故有

$$(12.1)\quad \mathbb{E}[(M_\infty - M_{T-})^2 | \mathscr{F}_T] \leqslant \mathbb{E}[(A_\infty - A_{T-})^2 + X_{T-}^2 | \mathscr{F}_T]$$
$$\leqslant \mathbb{E}[(A_\infty - A_{T-})^2 | \mathscr{F}_T] + c^2.$$

由于对任何增函数 $a(t)$, 我们有

$$a(\infty)^2 - a(t-)^2 = \int_{[t,\infty[} a(s-)\,da(s) + \int_{[t,\infty[} a(s)\,da(s)$$
$$\geqslant 2\int_{[t,\infty[} a(s-)\,da(s),$$

故有

$$(a(\infty) - a(t-))^2 \leqslant 2\int_{[t,\infty[} [a(\infty) - a(s-)]\,da(s).$$

于是我们有(注意 (X_t) 是 $(A_\infty - A_{t-})$ 的可选投影)

$$\mathbb{E}[(A_\infty - A_{T-})^2 | \mathscr{F}_T] \leqslant 2\mathbb{E}\left[\int_{[T,\infty[} (A_\infty - A_{s-})\,dA_s \,\Big|\, \mathscr{F}_T\right]$$
$$= 2\mathbb{E}\left[\int_{[T,\infty[} X_s\,dA_s \,\Big|\, \mathscr{F}_T\right] \leqslant 2c\,\mathbb{E}[A_\infty - A_{T-} | \mathscr{F}_T]$$
$$= 2c[M_T - A_{T-}] \leqslant 2c^2.$$

故由(12.1), $\mathbb{E}[(M_\infty - M_{T-})^2 | \mathscr{F}_T] \leqslant 3c^2$, 因而 $\|M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \sqrt{3}\,c$ (见注 11.10).

11.13 定理 设 (A_t) 为一可料可积增过程, 且 $A_0 = 0$. 令 (M_t) 为鞅 $\mathbb{E}[A_\infty | \mathscr{F}_t]$ 的右连续修正. 若存在常数 $c>0$, 使得对一切 $t \in \mathbb{R}_+$, 有 $M_t - A_t \leqslant c$ a.s., 则 $M \in \mathscr{BMO}$, 且 $\|M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2\sqrt{3}\,c$.

证明 令$Y=M-A$，则$0\leqslant Y\leqslant c$. Y为特殊半鞅，且$Y=M+(-A)$为其典则分解. 由定理8.55，我们有$0\leqslant \Delta A\leqslant c$，从而对几乎所有$\omega$，对一切$t\in\mathbb{R}_+$，有$M_t(\omega)-A_{t-}(\omega)\leqslant 2c$. 故由定理11.12，$M\in\mathscr{BMO}$，且$\|M\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant 2\sqrt{3}\,c$.

11.14 定理 设$M\in\mathscr{M}^2$，B为一适应增过程. 令$L=B_-.M$（即L为B_-关于M的随机积分）. 如果对一切$t\in\mathbb{R}_+$，$|B_tM_t|\leqslant 1$ a.s.，则$L\in\mathscr{BMO}$，且$\|L\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant 2$.

证明 设T为一停时，由于$[L,L]=B_-^2.[M,M]$，故由分部积分公式，我们有

$$(14.1)\qquad [L,L]_\infty-[L,L]_{T-}=\int_{[T,\infty[}B_{s-}^2d[M,M]_s$$

$$=\int_{[T,\infty[}([M,M]_\infty-[M,M]_s)dB_s^2+([M,M]_\infty-[M,M]_{T-})B_{T-}^2.$$

由于$[M,M]-M^2$为一致可积鞅，故过程$([M,M]_\infty-[M,M]_t)$与过程$(M_\infty^2-M_t^2)$有相同的可选投影，故由定理6.19.1)得

$$(14.2)\qquad \mathbb{E}\left[\int_{[T,\infty[}([M,M]_\infty-[M,M]_s)dB_s^2\,|\,\mathscr{F}_T\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_{[T,\infty[}(M_\infty^2-M_s^2)dB_s^2\,|\,\mathscr{F}_T\right]$$

$$\leqslant\mathbb{E}[M_\infty^2(B_\infty^2-B_{T-}^2)\,|\,\mathscr{F}_T]$$

$$\leqslant 1-B_{T-}^2\mathbb{E}[M_\infty^2\,|\,\mathscr{F}_T]\ \text{a.s.},$$

另一方面，我们有

$$\mathbb{E}[([M,M]_\infty-[M,M]_{T-})B_{T-}^2\,|\,\mathscr{F}_T]$$

$$=\mathbb{E}[[M,M]_\infty-[M,M]_T\,|\,\mathscr{F}_T]B_{T-}^2+\Delta M_T^2B_{T-}^2$$

$$=\mathbb{E}[M_\infty^2-M_T^2\,|\,\mathscr{F}_T]B_{T-}^2+\Delta M_T^2B_{T-}^2$$

$$\leqslant B_{T-}^2\mathbb{E}[M_\infty^2\,|\,\mathscr{F}_T]-M_T^2B_{T-}^2+2(M_T^2+M_{T-}^2)B_{T-}^2$$

$$=B_{T-}^2\mathbb{E}[M_\infty^2\,|\,\mathscr{F}_T]+M_T^2B_{T-}^2+2M_{T-}^2B_{T-}^2$$

$$\leqslant B_{T-}^2\mathbb{E}[M_\infty^2\,|\,\mathscr{F}_T]+3\ \text{a.s.},$$

故由(14.1)、(14.2)得

$$E[[L, L]_\infty - [L, L]_{T-}|\mathscr{F}_T] \leqslant 4 \text{ a.s.}.$$

从而 $L \in \mathscr{BMO}$, 且 $\|L\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2$.

11.15 系 设 $M \in \mathscr{M}^2$, H 为一可料过程. 若存在一适应增过程 B, 使得 $|BM| \leqslant 1$, 且 $|H| \leqslant B_-$, 则 $H.M \in \mathscr{BMO}$, 且 $\|H.M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2$.

证明 令 $L = B_-.M$, 则对任何停时 T,

$$[H.M, H.M]_\infty - [H.M, H.M]_{T-} = \int_{[T,\infty[} H_s^2 d[M, M]_s$$

$$\leqslant \int_{[T,\infty[} B_{s-}^2 d[M, M]_s = [L, L]_\infty - [L, L]_{T-}.$$

由于 $L \in \mathscr{BMO}$, 故 $H.M \in \mathscr{BMO}$, 且 $\|H.M\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \|L\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2$.

最后, 我们以 $\mathscr{BMO}$ 鞅的一个有趣性质结束本节.

11.16 定理 设 $M \in \mathscr{BMO}$, 则对任何停时 T, 有 $M^T \in \mathscr{BMO}$, $M - M^T \in \mathscr{BMO}$, 且有

$$(16.1) \qquad \|M^T\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \|M\|_{\mathscr{BMO}}, \quad \|M - M^T\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant \|M\|_{\mathscr{BMO}}.$$

此外, 令停时 $T_n \uparrow +\infty$ a.s., 则有 $\|M^{T_n}\|_{\mathscr{BMO}} \uparrow \|M\|_{\mathscr{BMO}}$.

证明 设 S 为一停时, 我们有

$$[M^T, M^T]_\infty - [M^T, M^T]_{S-}$$
$$= ([M, M]_T - [M, M]_{S-}) I_{[S \leqslant T]} \leqslant [M, M]_\infty - [M, M]_{S-},$$
$$[M - M^T, M - M^T]_\infty - [M - M^T, M - M^T]_{S-}$$
$$= [M, M]_\infty - [M, M]_T - [M, M]_{S-} + ([M, M]^T)_{S-}$$
$$\leqslant [M, M]_\infty - [M, M]_{S-}.$$

故有 (16.1).

设停时 $T_n \uparrow +\infty$ a.s.. 由于对任何停时 S,

$$[M^{T_n}, M^{T_n}]_\infty - [M^{T_n}, M^{T_n}]_{S-} \uparrow [M, M]_\infty - [M, M]_{S-},$$

故由注 11.10 容易看出: $\|M^{T_n}\|_{\mathscr{BMO}} \uparrow \|M\|_{\mathscr{BMO}}$.

注 我们有 $\|M - M^{T_n}\|_{\mathscr{BMO}}$ 单调非增, 但一般说来, 未必有 $\|M - M^{T_n}\|_{\mathscr{BMO}} \to 0$. 事实上, 令 $\mathscr{M}^\infty$ 为有界鞅全体, Dellacherie,

Meyer, Yor[1] 证明了下述结果：若 $\mathscr{M}^\infty \subsetneqq \mathscr{BMO}$，则 $\mathscr{M}^\infty$ 在 $\mathscr{BMO}$ 中既不是闭集，又不在 $\mathscr{BMO}$ 中稠密.

§3 Fefferman 不等式

下一定理给出的 Fefferman 不等式，是有关 $\mathscr{H}^1$ 和 $\mathscr{BMO}$ 理论的最重要的结果，它比 Kunita-Watanabe 不等式深刻得多.

11.17 定理 设 M, N 为两个局部鞅，U 为一可选过程（或者更一般地，为一循序可测过程），则有

$$(17.1)\quad \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|U_s|\,|d[M,N]_s|\right] \leqslant \sqrt{2}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}U_s^2 d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right]\|N\|_{\mathscr{BMO}}.$$

特别，如果令 $U=1$，则有

$$(17.2)\quad \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d[M,N]_s|\right]\leqslant\sqrt{2}\,\|M\|_{\mathscr{H}^1}\|N\|_{\mathscr{BMO}}.$$

证明 不妨假定(17.1)右边为有限值. 令

$$c_t=\int_{[0,t]}U_s^2 d[M,M]_s.$$

我们定义两个非负可选过程 H, K 如下：

$$H_t^2=\frac{U_t^2}{\sqrt{c_t}+\sqrt{c_{t-}}}I_{[c_t>0]},\quad K_t^2=\sqrt{c_t}$$

则有
$$H_t^2K_t^2\geqslant\frac{1}{2}U_t^2 I_{[c_t>0]}.$$

此外，由分部积分公式，我们有

$$\begin{aligned} dc_t=d(\sqrt{c_t})^2&=\sqrt{c_{t-}}\,d\sqrt{c_t}+\sqrt{c_t}\,d\sqrt{c_t}\\ &=(\sqrt{c_t}+\sqrt{c_{t-}})\,d\sqrt{c_t}.\end{aligned}$$

于是
$$H_t^2 d[M,M]_t=I_{[c_t>0]}\frac{dc_t}{\sqrt{c_t}+\sqrt{c_{t-}}}=I_{[c_t>0]}\,d\sqrt{c_t}.$$

由于(K-W 不等式)

$$\int_{[0,\infty[}|U_sI_{[c_s=0]}|\ |d[M,N]_s|$$

$$\leqslant\left(\int_{[0,\infty[}U_s^2I_{[c_s=0]}d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}([N,N]_\infty)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_{[0,\infty[}I_{[c_s=0]}dc_s\right)^{\frac{1}{2}}([N,N]_\infty)^{\frac{1}{2}}=0\ \text{a.s.},$$

故有

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty]}|U_s|\ |d[M,N]_s|\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|I_{[c_s>0]}U_s|\ |d[M,N]_s|\right]$$

$$\leqslant\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_sK_s|\ |d[M,N]_s|\right]\leqslant\sqrt{E_1}\sqrt{E_2},$$

其中

$$E_1=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M,M]_s\right]\leqslant\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}d\sqrt{c_t}\right]=\mathbb{E}\sqrt{c_\infty}$$

$$=\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}U_s^2d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$E_2=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}K_s^2d[N,N]_s\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}([N,N]_\infty-[N,N]_{s-})dK_s^2\right].$$

但由于过程$([N,N]_\infty-[N,N]_{t-})$的可选投影为$\mathbb{E}[[N,N]_\infty|\mathscr{F}_t]-[N,N]_{t-}$，它被$\|N\|^2_{\mathscr{BMO}}$所界住，故有

$$E_2=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}(\mathbb{E}[[N,N]_\infty|\mathscr{F}_s]-[N,N]_{s-})dK_s^2\right]$$

$$\leqslant\|N\|^2_{\mathscr{BMO}}\mathbb{E}[\sqrt{c_\infty}].$$

(17.1)得证.

下一定理给出了 Fefferman 不等式的加强形式.

11.18 定理 设 M, N 为两个局部鞅，U 为一可选过程，T 为一停时，则有

(18.1) $$\mathbb{E}\left[\int_{[T,\infty[}|U_s||d[M,N]_s|\right] \leqslant \sqrt{2}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_{[T,\infty[}U_s^2 d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right]\|N\|_{\mathscr{BMO}},$$

(18.2) $$\mathbb{E}\left[\int_{[T,\infty[}|U_s|\,|d[M,N]_s|\,\Big|\,\mathscr{F}_T\right] \leqslant \sqrt{2}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_{[T,\infty[}U_s^2 d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\Big|\mathscr{F}_T\right]\|N\|_{\mathscr{BMO}}.$$

证明 在(17.1)中，以 $UI_{[T,\infty]}$ 代替那里的 U，得到 (18.1)。对任何 $A\in\mathscr{F}_T$，在(18.1)中以 T_A 代替 T，即得(18.2)。

作为 Fefferman 不等式的一个应用，我们将证明 $\mathscr{H}^1$ 鞅为一致可积鞅.

11.19 定理 设 $M\in\mathscr{H}^1$，则 M 为一致可积鞅，且有

$$\|M_\infty\|_{L^1}\leqslant 2\sqrt{2}\,\|M\|_{\mathscr{H}^1}.$$

证明 首先，设 M 为一有界鞅与一可积变差鞅之和，则对任何有界鞅 N，由定理 6.45、定理 7.24 及 Fefferman 不等式，有

$$|\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]|=|\mathbb{E}[M,N]_\infty|\leqslant\sqrt{2}\,\|M\|_{\mathscr{H}^1}\|N\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2\sqrt{2}\,\|M\|_{\mathscr{H}^1}\|N_\infty\|_{L^\infty}.$$

最后一个不等号是根据定理 11.11 得到. 于是有(令 $N_\infty=\operatorname{sgn}M_\infty$)

$$\|M_\infty\|_{L^1}\leqslant 2\sqrt{2}\,\|M\|_{\mathscr{H}^1}.$$

对一般的 $M\in\mathscr{H}^1$，令停时 $S_n\uparrow+\infty$，使得每个 M^{S_n} 为一有界鞅与一可积变差鞅之和，则有

$$\|M_{S_n}-M_{S_m}\|_{L^1}\leqslant 2\sqrt{2}\,\|M^{S_n}-M^{S_m}\|_{\mathscr{H}^1}.$$

由于 $\|M^{S_n}-M\|_{\mathscr{H}^1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，上式表明 $\{M_{S_n}\}$ 为 L^1 中的基本列，从而 $M_{S_n}\xrightarrow{L_1}\xi$. 令 (ξ_t) 为鞅 $\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t]$ 的右连续修正，则对任何给定的 m，有

$$\xi_{t\wedge S_m}=\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{t\wedge S_m}]=(L^1)\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[M_{S_n}|\mathscr{F}_{t\wedge S_m}]=M_{t\wedge S_m}\ \text{a.s.}.$$

于是对一切 t，$M_t=\xi_t$ a.s.. 特别，M 为一致可积鞅，且 $M_\infty=\xi$ a.s.. 此外我们有

$$\|M_\infty\|_{L^1}=\lim_{n\to\infty}\|M_{S_n}\|_{L^1}\leqslant 2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\|M^{S_n}\|_{\mathscr{H}^1}=2\sqrt{2}\|M\|_{\mathscr{H}^1}.$$

定理证毕.

§4 视为 $\mathscr{H}^1$ 的对偶的 $\mathscr{BMO}$

首先,我们给出 $\mathscr{BMO}$ 缺的一个有用的刻划.

11.20 定理 设 $N\in\mathscr{M}^2$, 则为要 $N\in\mathscr{BMO}$, 必须且只需存在常数 $c>0$, 使得对一切 $M\in\mathscr{M}^2$, 有[1]

(20.1) $$|\mathbb{E}[M, N]_\infty|\leqslant c\|M\|_{\mathscr{H}^1}.$$

这时, $\|N\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\sqrt{5}\,c$.

证明 必要性由 Fefferman 不等式得到(取 $c=\sqrt{2}\|N\|_{\mathscr{BMO}}$), 往证充分性.

首先证明 $|N_0|\leqslant c$ a.s.. 令 $B=[|N_0|>c]$. 假定 $P(B)>0$, 令 $\xi=\dfrac{\operatorname{sgn}N_0}{\mathbb{P}(B)}I_B$, 这里及今后,我们约定

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

则 $|\xi|=\dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}I_B$, $\mathbb{E}[|\xi|]=1$. 令 $M_t=\xi\,(t\in\mathbb{R}_+)$, 则 $M\in\mathscr{M}^2$, $\|M\|_{\mathscr{H}^1}=\mathbb{E}[|\xi|]=1$, 但我们有

$$|\mathbb{E}[M, N]_\infty|=\mathbb{E}[M_0N_0]=\mathbb{E}\left[\frac{|N_0|I_{[|N_0|>c]}}{\mathbb{P}([|N_0|>c])}\right]$$
$$>c=c\|M\|_{\mathscr{H}^1}.$$

这与假设条件矛盾. 因此,必须有 $\mathbb{P}(B)=0$, 即有 $|N_0|\leqslant c$ a.s..

其次证明 $|\Delta N|\leqslant 2c$. 设 T 为一绝不可及时或可料时, 且 $T>0$. 假定 $\mathbb{P}([|\Delta N_T|>2c])>0$, 令

$$\xi=\frac{\operatorname{sgn}\Delta N_T}{\mathbb{P}([|\Delta N_T|>2c])}I_{[|\Delta N_T|>2c]},$$

1) 容易看出:这等价于对一切有界鞅 M 有(20.1).

则 ξ 为一 $\mathscr{F}_T$ 可测有界随机变量且 $\xi I_{[T=\infty]}=0$ a.s.. 令

$$M=\xi I_{[\![T,\infty[\![}-\widetilde{\xi I_{[\![T,\infty[\![}},$$

则 $M\in\mathscr{M}^{2,d}$, M 只在 T 处有跳:

$$\Delta M_T=(\xi-\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]),\quad \text{若 } T \text{ 为可料时},$$

$$\Delta M_T=\xi,\quad\quad \text{若 } T \text{ 为绝不可及时}.$$

且有 $\|M\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|M\|_V\leqslant 2\|\xi I_{[\![T,\infty[\![}\|_V=2\mathbb{E}[|\xi|]=2$. 由于当 T 为可料时, 有 $\mathbb{E}[\Delta N_T|\mathscr{F}_{T-}]=0$, 故在两种情况下, 由定理 7.24, 皆有

$$\mathbb{E}[M,N]_\infty=\mathbb{E}[\Delta M_T\Delta N_T]=\mathbb{E}[\xi\Delta N_T]$$

$$=\mathbb{E}\left[\frac{|\Delta N_T|I_{[|\Delta N_T|>2c]}}{\mathbb{P}([|\Delta N_T|>2c])}\right]>2c\geqslant c\|M\|_{\mathscr{H}^1}.$$

这与假设条件矛盾. 因此, 必须有 $\mathbb{P}([|\Delta N_T|>2c])=0$, 即有 $|\Delta N_T|\leqslant 2c$ a.s.. 于是对一切停时 T, 也有 $|\Delta N_T|\leqslant 2c$ a.s..

最后, 设 T 为一停时. 令 $M=N-N^T$, $\xi=[N,N]_\infty-[N,N]_T$, 则 $M\in\mathscr{M}^2$, 且 $[M,M]_\infty=[M,N]_\infty=\xi$. 故由假定,

$$\mathbb{E}[\xi]=\mathbb{E}[M,N]_\infty\leqslant c\|M\|_{\mathscr{H}^1}=c\mathbb{E}(\sqrt{\xi})$$

$$=c\mathbb{E}(\sqrt{\xi}I_{[T<\infty]})\leqslant c(\mathbb{E}[\xi])^{\frac{1}{2}}[\mathbb{P}([T<\infty])]^{\frac{1}{2}}.$$

于是 $\mathbb{E}[\xi]\leqslant c^2\mathbb{P}([T<\infty])$, 此即

$$\mathbb{E}[[N,N]_\infty-[N,N]_T]\leqslant c^2\mathbb{P}([T<\infty]).$$

综上所证, 由定理 11.9 知, $N\in\mathscr{BMO}$, 并且

$$\|N\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\sqrt{c^2+(2c)^2}=\sqrt{5}\,c.$$

现在我们证明 $\mathscr{H}^1$ 的对偶空间是 $\mathscr{BMO}$. 更确切地说, 我们有

11.21 定理 设 $\mathscr{H}^{1*}$ 为 $\mathscr{H}^1$ 上有界线性泛函全体所成的 Banach 空间(即 $\mathscr{H}^{1*}$ 为 $\mathscr{H}^1$ 的对偶空间). 设 $N\in\mathscr{BMO}$, 令

$$\varphi_N(M)=\mathbb{E}[M,N]_\infty,\quad M\in\mathscr{H}^1. \tag{21.1}$$

则 $N\mapsto\varphi_N$ 为 $\mathscr{BMO}$ 到 $\mathscr{H}^{1*}$ 之上的一对一线性映射, 并且有

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|\varphi_N\|\leqslant\|N\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\sqrt{5}\,\|\varphi_N\|, \tag{21.2}$$

这里 $\|\varphi\|$ 表示有界线性泛函 φ 的范数. 特别, $\mathscr{BMO}$ 按范数 $\|\ \|_{\mathscr{BMO}}$ 为 Banach 空间.

证明 设 $N\in\mathscr{BMO}$, 由 Fefferman 不等式,

$$|\varphi_N(M)|=|\mathbb{E}[M,N]_\infty|\leqslant\sqrt{2}\,\|N\|_{\mathscr{BMO}}\|M\|_{\mathscr{H}^1},$$

故 $\varphi_N\in\mathscr{H}^{1*}$, 且 $\|\varphi_N\|\leqslant\sqrt{2}\,\|N\|_{\mathscr{BMO}}$.

设 $N\in\mathscr{BMO}$, 且 φ_N 为 0 泛函. 由于 $\mathscr{BMO}\subset\mathscr{M}^2\subset\mathscr{H}^1$, 故有 $\mathbb{E}[N,N]_\infty=\varphi_N(N)=0$, 从而 $N=0$. 这表明 $N\mapsto\varphi_N$ 是 $\mathscr{BMO}$ 到 $\mathscr{H}^{1*}$ 中的一对一线性映射(线性性显然).

剩下要证明 φ. 的象空间是整个空间 $\mathscr{H}^{1*}$, 且 $\|N\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\sqrt{5}\,\|\varphi_N\|$. 令 $\varphi\in\mathscr{H}^{1*}$. 由于 $\mathscr{M}^2\subset\mathscr{H}^1$, 且有 $\|\ \|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|\ \|_{\mathscr{M}^2}$, 故对一切 $M\in\mathscr{M}^2$, 有

$$|\varphi(M)|\leqslant\|\varphi\|\|M\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\|\varphi\|\|M\|_{\mathscr{M}^2}.$$

这表明 φ 限于 $\mathscr{M}^2$ 为 Hilbert 空间 $\mathscr{M}^2$ 上的有界线性泛函, 故存在唯一的 $N\in\mathscr{M}^2$, 使得对一切 $M\in\mathscr{M}^2$, 有

$$\varphi(M)=\mathbb{E}(M_\infty N_\infty)=\mathbb{E}([M,N]_\infty)\leqslant\|\varphi\|\|M\|_{\mathscr{H}^1}.$$

由定理 11.20, $N\in\mathscr{BMO}$, 且 $\|N\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\sqrt{5}\,\|\varphi\|$. 此外, φ_N 与 φ 限于 $\mathscr{M}^2$ 一致. 但 $\mathscr{M}^2$ 在 $\mathscr{H}^1$ 中稠(定理 11.5), 故 φ_N 与 φ 是 $\mathscr{H}^{1*}$ 中同一个元素. 这表明

$$\mathscr{H}^{1*}=\{\varphi_N:N\in\mathscr{BMO}\}.$$

综上所证, $\mathscr{BMO}$ 按范数 $\|\varphi_N\|$ 与 $\mathscr{H}^{1*}$ 同构. 又由 (21.2), 范数 $\|\varphi_N\|$ 与范数 $\|N\|_{\mathscr{BMO}}$ 等价, 故 $\mathscr{BMO}$ 按范数 $\|\ \|_{\mathscr{BMO}}$ 是完备的. 定理证毕.

注 由定理知, $\mathscr{H}^1$ 上的一切有界线性泛函具有 (21.1) 的形式.

我们令

$$\mathscr{H}^1_0=\{M\in\mathscr{H}^1:M_0=0\text{ a.s.}\},$$

$$\mathscr{BMO}_0=\{M\in\mathscr{BMO}:M_0=0\text{ a.s.}\},$$

则在定理 11.21 的证明中用 $\mathscr{M}^2_0$ 代替那里的 $\mathscr{M}^2$, 我们立刻得到

下述定理.

11.22 定理 设 $N\in\mathscr{BMO}_0$, 令

$$\varphi_N(M)=\mathbb{E}[M,N]_\infty,\ M\in\mathscr{H}_0^1, \tag{22.1}$$

则 $N\mapsto\varphi_N$ 为 $\mathscr{BMO}_0$ 到 $(\mathscr{H}_0^1)^*$ 上的一对一线性映射, 并且有

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|\varphi_N\|\leqslant\|N\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\sqrt{5}\|\varphi_N\|. \tag{22.2}$$

§5 Davis 不等式

11.23 引理 设 M 为一局部鞅, H 为一可选过程(或更一般地, 为一循序可测过程), 使得 $H.M\in\mathscr{H}^1$, 且

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M,M]_s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]<\infty,$$

则对任何 $N\in\mathscr{BMO}$, $[H.M,N]-H.[M,N]$ 为可积变差鞅. 特别有 $\mathbb{E}[H.M,N]_\infty=\mathbb{E}\Big[\int_{[0,\infty[}H_sd[M,N]_s\Big]$.

证明 设 $N\in\mathscr{BMO}$. 由于 ΔN 有界, 故 N 为局部有界鞅. 于是由系 9.8, $[H.M,N]-H.[M,N]$ 为局部鞅. 由 Fefferman 不等式, 我们有

$$\mathbb{E}\Big[\int_{[0,\infty[}|d[H.M,N]_s|\Big]\leqslant\sqrt{2}\|H.M\|_{\mathscr{H}^1}\|N\|_{\mathscr{BMO}}<\infty,$$

$$\mathbb{E}\Big[\int_{[0,\infty[}|H_s||d[M,N]_s|\Big]$$

$$\leqslant\sqrt{2}\,\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M,M]_s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\|N\|_{\mathscr{BMO}}<\infty.$$

故 $[H.M,N]-H.[M,N]$ 为可积变差鞅.

设 M 为一右连续过程, 我们令

$$M_t^*(\omega)=\sup_{s\leqslant t}|M_s(\omega)|,\ M^*(\omega)=M_\infty^*(\omega)=\sup_{s<\infty}|M_s(\omega)|.$$

下一定理是 Davis 第一不等式. 我们这里给出的形式是通常形式的推广.

11.24 定理 设 M 为一局部鞅, H 为一可选过程(或更一

一般地，循序可测过程)，使得$\sqrt{H^2 \cdot [M, M]}$局部可积. 则有

(24.1) $\mathbb{E}[(H.M)^*] \leqslant 2\sqrt{6}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M, M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

特别，我们有

(24.2) $$\mathbb{E}[M^*] \leqslant 2\sqrt{6}\,\|M\|_{\mathscr{H}^1}.$$

证明 无妨假定$\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M, M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$，这时$H.M_0$可积. 于是可进一步假定$H.M \in \mathscr{H}^1$，否则令停时$T_n \uparrow +\infty$，使得对一切$n$，$H.M^{T_n} = (H.M)^{T_n} \in \mathscr{H}^1$，我们有$(H.M^{T_n})^* \uparrow (H.M)^*$. 设$S$为一有限值非负随机变量，令$B = \mathrm{sgn}(H.M)_S I_{[S,\infty[}$. 令$(A_t)$为$(B_t)$的可选对偶投影. 则容易由定理 6.25 看出：对一切停时T，有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[T,\infty[} |dA_s| \,|\, \mathscr{F}_T\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_{[T,\infty[} |dB_s| \,|\, \mathscr{F}_T\right] \leqslant 1 \text{ a.s.},$$

于是有

$$\mathbb{E}[A_\infty^+ - A_{T-}^+ \,|\, \mathscr{F}_T] \leqslant 1 \text{ a.s.}, \quad \mathbb{E}[A_\infty^- - A_{T-}^- \,|\, \mathscr{F}_T] \leqslant 1 \text{ a.s.},$$

这里A^+、A^-分别表示A的正、负变差. 令(N_t)为鞅$\mathbb{E}[A_\infty|\mathscr{F}_t]$的右连续修正，则由定理 11.12，$N \in \mathscr{BMO}$，且$\|N\|_{\mathscr{BMO}} \leqslant 2\sqrt{3}$.

现在我们用L表示$H.M$，并假定$L \in \mathscr{H}^1$. 令停时$T_n \uparrow +\infty$，使得对一切n，N^{T_n}为有界鞅，L^{T_n}为一有界鞅与一可积变差鞅之和. 这时我们有

(24.3) $$\mathbb{E}(N_{T_n} L_{T_n}) = \mathbb{E}[L, N]_{T_n} = \mathbb{E}[L, N^{T_n}]_\infty.$$

故由引理 11.23 及 Fefferman 不等式得

(24.4) $$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_{S\wedge T_n}\mathrm{sgn}(L_S)] &= \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} L_s^{T_n} dB_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} L_s^{T_n} dA_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} L_{T_n} dA_s\right] \\ &= \mathbb{E}[L_{T_n} A_\infty] = \mathbb{E}[L_{T_n} N_\infty] = \mathbb{E}[L_{T_n} N_{T_n}] \\ &= \mathbb{E}[L, N^{T_n}]_\infty = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} H_s d[M, N^{T_n}]_s\right]\end{aligned}$$

$$\leqslant\sqrt{2}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right]\|N^{T_n}\|_{\mathscr{BMO}}$$

$$\leqslant 2\sqrt{6}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

最后一个不等号是由于 $\|N^{T_n}\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\|N\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant 2\sqrt{3}$（定理11.16）。另一方面，我们有

$$L_{S\wedge T_n}\operatorname{sgn}L_S=|L_S|I_{[S\leqslant T_n]}+L_{T_n}\operatorname{sgn}(L_S)I_{[T_n<S]}.$$

由于 $[T_n<S]\downarrow\emptyset$，且 (L_{T_n}) 为一致可积（因 $L\in\mathscr{H}^1$，由定理 11.19，L 为一致可积鞅），故 $\mathbb{E}(L_{T_n}\operatorname{sgn}(L_S)I_{[T_n<S]})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$。从而有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[L_{S\wedge T_n}\operatorname{sgn}(L_S)]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[|L_S|I_{[S\leqslant T_n]}]=\mathbb{E}[|L_S|].$$

于是，由(24.4)，我们有

$$\text{(24.5)}\qquad \mathbb{E}[|L_S|]\leqslant 2\sqrt{6}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

现在，对给定 $\varepsilon>0$，令

$$S(\omega)=\inf\{t:|L_t(\omega)|\geqslant L^*(\omega)-\varepsilon\}.$$

由于 L 为一致可积鞅，$\lim\limits_{t\to\infty}L_t=L_\infty$ a.s.，且 $|L_\infty|<\infty$ a.s.，故 $L^*<\infty$ a.s.。从而 S 为一有限值非负随机变量，且有 $|L_S|\geqslant L^*-\varepsilon$ a.s. 对此 S 应用(24.5)，我们有

$$\mathbb{E}[L^*]-\varepsilon\leqslant\mathbb{E}[|L_S|]\leqslant 2\sqrt{6}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

在上式中令 $\varepsilon\downarrow 0$，我们得到(24.1)。定理证毕。

下一定理给出了 Davis 不等式(24.2)的加强形式。

11.25 定理 设 $M\in\mathscr{H}^1$，则对一切停时 T，我们有

$$\text{(25.1)}\qquad \mathbb{E}[M^*-M^*_{T-}|\mathscr{F}_T]$$
$$\leqslant 2\sqrt{6}\,\mathbb{E}[\sqrt{[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}}|\mathscr{F}_T].$$

证明 令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{T+t}$，$M'_t=(M_{T+t}-M_{T-})I_{[T<\infty]}$，则由引理 10.2，$(M'_t)$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅，且 $[M',M']_\infty(\mathscr{G}_t)=[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}$，于是 (M'_t) 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 为 $\mathscr{H}^1$ 鞅。由 Davis 不等式(24.2)，有

$$\mathbb{E}[M'^*]\leqslant 2\sqrt{6}\,\mathbb{E}[\sqrt{[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}}].$$

但显然有 $M^*\leqslant M^*_{T-}+M'^*$，故由上式得

(25.2) $$\mathbb{E}[M^*-M^*_{T-}]\leqslant 2\sqrt{6}\,\mathbb{E}[\sqrt{[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}}].$$

对一切 $A\in\mathscr{F}_T$，用 T_A 代替(25.2)中的 T，立即推得(25.1)。

下一定理进一步推广了定理 11.24.

11.26 定理 设 M 为一局部鞅，H 为一可选过程（或更一般地，循序可测过程），使得 $\sqrt{H^2.[M,M]}$ 为局部可积，T 为一停时。则我们有

(26.1) $$\mathbb{E}[(H.M)^*_T]\leqslant 2\sqrt{6}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,T]}H_s^2d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

证明 我们有

$$(H.M)^*_T=(H.M^T)^*=(HI_{[\![0,T]\!]}.M)^*.$$

故由(24.1)推得(26.1)。

作为定理 11.26 的一个应用，我们得到随机积分的如下收敛定理.

11.27 定理 设 M 为一局部鞅，记

$$L(M)=\{H:H\ \text{为可选过程，使得}\sqrt{H^2.[M,M]}\text{为局部可积}\}.$$

令 $(H^{(n)})\subset L(M)$，$H\in L(M)$，T 为一停时.

1) 如果 $\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,T]}(H_s^{(n)}-H_s)^2d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right]\to 0$，则有

$$\mathbb{E}[\sup_{t\leqslant T}|(H^{(n)}.M)_t-(H.M)_t|]\to 0.$$

2) 如果 $\sum_{n=1}^\infty\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,T]}(H_s^{(n)}-H_s)^2d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right]<\infty$，则有

$$\sup_{t\leqslant T}|(H^{(n)}.M)_t-(H.M)_t|\xrightarrow{\text{a.s.}}0.$$

下一定理是 Davis 第二不等式.

11.28 定理 设 M 为一局部鞅，我们有

(28.1) $$\|M\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant(7+4\sqrt{2})\mathbb{E}[M^*].$$

此外，对一切停时 T，有

$$(28.2)\qquad \mathbb{E}[\sqrt{[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}}\,|\mathscr{F}_T]\leqslant 2(7+4\sqrt{2})\mathbb{E}[M^*|\mathscr{F}_T].$$

证明 无妨设$\mathbb{E}[M^*]<+\infty$. 首先考虑M为零初值局部鞅情形. 给定$\varepsilon>0$, 令$\overline{M}=M+\varepsilon$, 则$\overline{M}^*\geqslant\varepsilon$, $\dfrac{1}{\overline{M}^*}\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$. 对有界鞅$H_t=\mathbb{E}\left[\dfrac{1}{\overline{M}^*}\Big|\mathscr{F}_t\right]$及适应增过程$B_t=\overline{M}_t^*$应用系11.15知, $L=\overline{M}_-.H\in\mathscr{BMO}$, 且$\|L\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant 2$. 于是由Fefferman不等式得

$$(28.3)\qquad \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d[\overline{M},L]_s|\right]\leqslant\sqrt{2}\,\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}\|L\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant 2\sqrt{2}\,\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}.$$

令$K=\overline{M}^2-[\overline{M},\overline{M}]$, 则由分部积分公式, $K=2\overline{M}_-.\overline{M}$, 故有

$$[K,H]=2\overline{M}_-.[\overline{M},H]=2[\overline{M},\overline{M}_-.H]=2[\overline{M},L].$$

于是由(28.3),我们有

$$(28.4)\qquad \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d[K,H]_s|\right]\leqslant 4\sqrt{2}\,\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}.$$

现在, 我们先假定$\overline{M}$及K属于$\mathscr{H}^1$. 令停时$S_n\uparrow+\infty$, 使得$(KH)^{S_n}-[K,H]^{S_n}$为一致可积鞅,则由(28.4), 有

$$|\mathbb{E}(K_{S_n}H_{S_n})|=|\mathbb{E}[K,H]_{S_n}|\leqslant 4\sqrt{2}\,\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}.$$

但因H有界, K为一致可积鞅, 故$K_{S_n}H_{S_n}\xrightarrow{L^1}K_\infty H_\infty$, 于是有

$$\left|\mathbb{E}\left[\frac{\overline{M}_\infty^2-[\overline{M},\overline{M}]_\infty}{\overline{M}^*}\right]\right|=\mathbb{E}(K_\infty H_\infty)\leqslant 4\sqrt{2}\,\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}.$$

由于$\dfrac{\overline{M}_\infty^2}{\overline{M}^*}\leqslant\overline{M}^*$, 故有

$$\mathbb{E}\left[\frac{[\overline{M},\overline{M}]_\infty}{\overline{M}^*}\right]\leqslant\mathbb{E}[\overline{M}^*]+4\sqrt{2}\,\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}.$$

但是由Schwarz不等式

$$\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}=\mathbb{E}(\sqrt{[\overline{M},\overline{M}]_\infty})\leqslant(\mathbb{E}[\overline{M}^*])^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\frac{[\overline{M},\overline{M}]_\infty}{\overline{M}^*}\right)^{\frac{1}{2}},$$

从而我们有

$$\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}\leqslant\sqrt{\mathbb{E}[\overline{M}^*]}\sqrt{\mathbb{E}[\overline{M}^*]+4\sqrt{2}\,\|\overline{M}\|_{\mathscr{H}^1}}.$$

解此不等式得

(28.5) $$\|\bar{M}\|_{\mathscr{H}^1} \leqslant (2\sqrt{2}+3)\mathbb{E}[\bar{M}^*].$$

对一般情形，令停时 $T_n \uparrow +\infty$，使得 $\bar{M}^{T_n}, K^{T_n} \in \mathscr{H}^1$. 则由(28.5)，我们有

$$\|\bar{M}^{T_n}\|_{\mathscr{H}^1} \leqslant (2\sqrt{2}+3)\mathbb{E}[(\bar{M}^{T_n})^*] \leqslant (2\sqrt{2}+3)\mathbb{E}[\bar{M}^*].$$

于是令 $n\to\infty$，仍然有(28.5). 注意到 $[\bar{M}, \bar{M}]_\infty = [M, M]_\infty + \varepsilon^2$，故由(28.5)得

$$\|M\|_{\mathscr{H}^1} \leqslant \|\bar{M}\|_{\mathscr{H}^1} \leqslant (2\sqrt{2}+3)(\mathbb{E}[M^*]+\varepsilon).$$

在上式中令 $\varepsilon \downarrow 0$，得到

(28.6) $$\|M\|_{\mathscr{H}^1} \leqslant (2\sqrt{2}+3)\mathbb{E}[M^*].$$

现在考虑一般局部鞅. 令 $M' = M - M_0$，我们有 $M'^* \leqslant M^* + |M_0| \leqslant 2M^*$，故由(28.6)，

$$\begin{aligned}\|M\|_{\mathscr{H}^1} &= \mathbb{E}\left[\sqrt{[M, M]_\infty}\right] = \mathbb{E}\left[\sqrt{[M', M']_\infty + M_0^2}\right] \\ &\leqslant \|M'\|_{\mathscr{H}^1} + \mathbb{E}[|M_0|] \\ &\leqslant (2\sqrt{2}+3)\mathbb{E}[M'^*] + \mathbb{E}[M^*] \\ &\leqslant (7+4\sqrt{2})\mathbb{E}[M^*].\end{aligned}$$

此即(28.1).

(28.2)的证明与定理 11.25 的证明类似.

作为 Davis 不等式的一个重要推论，我们有

11.29 定理 设 M 为一局部鞅. 则为要 $M \in \mathscr{H}^1$，必须且只需 $\mathbb{E}[M^*] < \infty$. 此外，$\|M\|_{\mathscr{H}^1}$ 与 $\|M^*\|_{L^1}$ 是 $\mathscr{H}^1$ 上的两个等价范数. 特别 $\mathscr{H}^1$ 按范数 $\|\ \|_{\mathscr{H}^1}$ 是 Banach 空间.

§6 B-D-G 不等式

首先我们给出两个纯分析的结果. 其一是经典的 Young 不等式，其二是有关缓增凸函数的一个结果.

11.30 定义 设 $\Phi(t)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的一非负单调增凸函数，且 $\Phi(0)=0$. 易知：存在 $\mathbb{R}_+$ 上的非负右连续增函数 φ，使得 $\Phi(t) = \int_{[0,t]}\varphi(s)ds$. 我们称 φ 为 Φ 的右导数. 令

$$\psi(t)=\inf\{s:\varphi(s)>t\},\ t\in\mathbb{R}_+,\tag{30.1}$$

则 ψ 为 $\mathbb{R}_+$ 上非负右连续增函数(引理 1.42). 令

$$\Psi(t)=\int_{[0,t]}\psi(s)ds,\tag{30.2}$$

则 $\Psi(t)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的非负单调增凸函数[1]. 我们称 Ψ 为 Φ 的共轭凸函数.

11.31 引理 设 $\Phi(t)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的一非负单调增凸函数, 且 $\Phi(0)=0$, $\Psi(t)$ 为其共轭凸函数. 则对任何非负实数 u, v, 有如下的 Young 不等式:

$$uv\leqslant\Phi(u)+\Psi(v).\tag{31.1}$$

证明 采用定义 11.30 中的记号,我们有

$$\Phi(u)+\Psi(v)=\int_{[0,u]}\varphi(s)ds+\int_{[0,v]}\psi(s)ds.$$

设 $\varphi(u)>v$, 则 $\psi(v)\leqslant u$. 于是由 Lebesgue 引理(引理 1.43), 我们有(注意 $\sup\{s:\psi(s)\leqslant u\}=\varphi(u)$)

$$\begin{aligned}\Phi(u)+\Psi(v)&=u\varphi(u)-\int_{[0,u]}sd\varphi(s)+\int_{[0,v]}\psi(s)ds\\&=u\varphi(u)-\int_{\{s:\psi(s)\leqslant u\}\cap[v,\infty]}\psi(s)ds\\&\geqslant u\varphi(u)-u(\varphi(u)-v)=uv.\end{aligned}$$

此即(31.1). 若 $\varphi(u)\leqslant v$, 则 $\psi(v)\geqslant u$, 同理可证(31.1).

11.32 定义 设 $\Phi(t)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的一非负单调增凸函数, 且 $\Phi(0)=0$. 称 $\Phi(t)$ 为缓增凸函数, 如果存在常数 c, 使得对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$\Phi(2t)\leqslant c\Phi(t).$$

设 $\Phi(t)$ 为一缓增凸函数, φ 为其右导数, 我们可以引进另一个常数 ρ:

---

1) 若 $\varphi(\infty-)=t_0<+\infty$, 则当 $t\geqslant t_0$ 时, 有 $\psi(t)=+\infty$, 从而当 $t>t_0$ 时, 有 $\Psi(t)=+\infty$. 但可能有 $\Psi(t_0)<\infty$. 这时 $\Psi(t)$ 在 t_0 处只是左连续.

(32.1) $$\rho=\sup_{u\in\mathbb{R}_+}\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}.$$

下一引理概括了缓增凸函数的主要性质.

11.33 引理 设 Φ 为缓增凸函数, Ψ 为其共轭凸函数, φ, ψ 分别为 Φ 及 Ψ 的右导数. 则有

1) $c\geqslant 2$, $1\leqslant\rho\leqslant c-1$.

2) 对一切 $t\geqslant 1$, $u\in\mathbb{R}_+$, 有 $\Phi(tu)\leqslant t^\rho\Phi(u)$.

3) 对一切 $u\in\mathbb{R}_+$, 有 $\Psi(\varphi(u))\leqslant(\rho-1)\Phi(u)$.

证明 1) 我们有

$$\Phi(u)=\int_{[0,u]}\varphi(s)ds\leqslant u\varphi(u)$$
$$\leqslant\int_u^{2u}\varphi(s)ds=\Phi(2u)-\Phi(u)\leqslant(c-1)\Phi(u),$$

故有 $1\leqslant\rho\leqslant c-1$. 特别 $c\geqslant\rho+1\geqslant 2$.

2) 由 ρ 的定义知: 对任何 $s>0$, 我们有

$$\frac{su\varphi(su)}{\Phi(su)}\leqslant\rho.$$

于是有 $$\int_1^t\frac{u\varphi(su)}{\Phi(su)}ds\leqslant\int_1^t\frac{\rho}{s}ds,$$

即有 $$\log\frac{\Phi(tu)}{\Phi(u)}\leqslant\rho\log t.$$

故有 $\Phi(tu)\leqslant t^\rho\Phi(u)$. 2)得证[1].

3) 由 Lebesgue 引理,我们有(注意 $\sup\{s:\psi(s)\leqslant u\}=\varphi(u)$)

$$\int_{[0,u]}sd\varphi(s)=\int_{\{s:\psi(s)\leqslant u\}}\psi(s)ds=\int_{[0,\varphi(u)]}\psi(s)ds.$$

故有

$$\Psi(\varphi(u))+\Phi(u)=\int_{[0,\varphi(u)]}\psi(s)ds+u\varphi(u)-\int_{[0,u]}sd\varphi(s)$$
$$=u\varphi(u)\leqslant\rho\Phi(u).$$

由此推得 3).

借助上述两个引理,我们能够证明如下的

---

1) 感谢汪嘉冈同志给出这一简单证明.

11.34 引理 设 Φ 为一缓增凸函数，φ 为其右导数，ξ，η 为两个非负随机变量. 如果

(34.1) $$\mathbb{E}[\Phi(\xi)]<\infty,\ \mathbb{E}[\Phi(\xi)]\leqslant\mathbb{E}[\eta\varphi(\xi)],$$

则我们有

(34.2) $$\mathbb{E}[\Phi(\xi)]\leqslant\rho^{\rho+1}\mathbb{E}[\Phi(\eta)].$$

证明 令 Ψ 为 Φ 的共轭凸函数，ψ 为 Ψ 的右导数. 由 Ψ 的凸性，我们有（注意 $\rho\geqslant1$）

$$\Psi\left(\frac{\varphi(\xi)}{\rho}\right)\leqslant\frac{1}{\rho}\Psi(\varphi(\xi)).$$

故由引理 11.31 及 11.33，我们有

$$\begin{aligned}\eta\varphi(\xi)&=\rho\eta\cdot\frac{\varphi(\xi)}{\rho}\leqslant\Phi(\rho\eta)+\Psi\left(\frac{\varphi(\xi)}{\rho}\right)\\&\leqslant\rho^{\rho}\Phi(\eta)+\frac{1}{\rho}\Psi(\varphi(\xi))\\&\leqslant\rho^{\rho}\Phi(\eta)+\frac{\rho-1}{\rho}\Phi(\xi).\end{aligned}$$

于是由(34.1)得

$$\mathbb{E}[\Phi(\xi)]\leqslant\rho^{\rho}\mathbb{E}[\Phi(\eta)]+\frac{\rho-1}{\rho}\mathbb{E}[\Phi(\xi)].$$

由此推得(34.2).

注 若在引理中，$\Phi(t)=t^p(1<p<\infty)$，则直接由 Hölder 不等式得

$$\mathbb{E}[\eta\varphi(\xi)]=\mathbb{E}[\eta(p\xi^{p-1})]\leqslant p(\mathbb{E}[\xi^p])^{\frac{p-1}{p}}(\mathbb{E}[\eta^p])^{\frac{1}{p}}.$$

故由(34.1)得

(34.3) $$\mathbb{E}[\xi^p]\leqslant p^p\mathbb{E}[\eta^p].$$

这比相应的(34.2)更精细（这时 $\rho=p$）.

下一引理通常称为 Garsia 引理.

11.35 引理 设 (A_t) 为一适应增过程，ξ，η 为两个非负可积随机变量. 如果 $\xi\geqslant A_\infty\triangleq\lim\limits_{t\to\infty}A_t$ a. s.，且下列两个条件之一成立：

a) ξ 为 $\mathscr{F}_\infty$ 可测，且对一切停时 T,

(35.1) $$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_T]-A_{T-}\leqslant\mathbb{E}[\eta|\mathscr{F}_T]\text{a.s.},$$

b) A 为零初值可料增过程，ξ 为$\mathscr{F}_{\infty-}$ 可测，且对一切可料时 T,

(35.2) $$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_T]-A_T\leqslant\mathbb{E}[\eta|\mathscr{F}_T]\text{a.s.},$$

则对一切 $\lambda>0$，有

(35.3) $$\int_{[\xi\geqslant\lambda]}(\xi-\lambda)d\mathbb{P}\leqslant\int_{[\xi\geqslant\lambda]}\eta d\mathbb{P}.$$

此外，设 Φ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的非负单调增凸函数，且 $\Phi(0)=0$，则有

(35.4) $$\mathbb{E}[\Phi(\xi)]\leqslant\mathbb{E}[\eta\varphi(\xi)],$$

这里 φ 为 Φ 的右导数.

证明 首先指出，(35.3) 与 (35.4) 是等价的．事实上，在 (35.4) 中令 $\Phi(t)=(t-\lambda)^+$, $\varphi(t)=I_{[\lambda,\infty[}^{(t)}$，则得到 (35.3)．反之，对(35.3)两边按测度 $d\varphi(\lambda)$ 积分，得到(35.4).

现在证明(35.3)．设条件 a)成立，令

$$T=\inf\{t:A_t\geqslant\lambda\}.$$

则 $A_{T-}\leqslant\lambda$，且 $[\xi\geqslant\lambda]=[T<\infty]\cup[T=\infty,\ \xi\geqslant\lambda]\in\mathscr{F}_T$，故由 (35.1)有

$$\int_{[\xi\geqslant\lambda]}(\xi-\lambda)d\mathbb{P}\leqslant\int_{[\xi\geqslant\lambda]}(\xi-A_{T-})d\mathbb{P}\leqslant\int_{[\xi\geqslant\lambda]}\eta d\mathbb{P}.$$

此即(35.3)．设条件 b) 成立，则 $T=\inf\{t:A_t\geqslant\lambda\}$ 为可料时，且 $T>0$．设可料时列(T_n)预报 T，则由(35.2),

$$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T_n}]-A_{T_n}\leqslant\mathbb{E}[\eta|\mathscr{F}_{T_n}]\text{a.s.},$$

令 $n\to\infty$ 得(系 2.18 及定理 4.4.11))

$$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_{T-}]-A_{T-}\leqslant\mathbb{E}[\eta|\mathscr{F}_{T-}]\text{a.s.}.$$

由于$[\xi\geqslant\lambda]=[T<\infty]\cup[T=\infty,\ \xi\geqslant\lambda]\in\mathscr{F}_{T-}$, $A_{T-}\leqslant\lambda$，故由上式推得(35.3).

应用 Garsia 引理及引理 11.34，我们立刻得到 Burkholder-Davis-Gundy 不等式.

11.36 定理 设 M 为一局部鞅, Φ 为一缓增凸函数, 使得 $\Phi(M^*)$ 及 $\Phi(\sqrt{[M, M]_\infty})$ 可积, 则有

$$(36.1)\quad \rho^{-(\rho+1)}(7+4\sqrt{2})^{-\rho}\mathbb{E}[\Phi(\sqrt{[M, M]_\infty})] \leqslant \mathbb{E}[\Phi(M^*)] \leqslant \rho^{\rho+1}(2\sqrt{6})^{\rho}\mathbb{E}[\Phi(\sqrt{[M, M]_\infty})],$$

其中 ρ 如(32.1)所定义.

证明 令 $A_t = M_t^*$, $\xi = M^*$, $\eta = 2\sqrt{6}\sqrt{[M, M]_\infty}$, 则由定理11.25及引理11.35, 我们有 $\mathbb{E}[\Phi(\xi)] \leqslant \mathbb{E}[\eta\varphi(\xi)]$. 再由引理11.34, 我们有

$$\mathbb{E}[\Phi(\xi)] \leqslant \rho^{\rho+1}\mathbb{E}[\Phi(\eta)].$$

但由引理11.33, $\Phi(\eta) \leqslant (2\sqrt{6})^{\rho}\Phi(\sqrt{[M, M]_\infty})$, 故由上式得(36.1)的第二个不等式. 同理可证(36.1)的第一个不等式.

注 设 $\Phi(t) = t^p$, $(p>1)$, 相应的不等式(36.1)通常称为 Burkholder 不等式.

§7 鞅空间 $\mathscr{H}^p$, $p>1$

11.37 定义 设 M 为一局部鞅, $1<p<+\infty$. 置

$$(37.1)\quad \|M\|_{\mathscr{H}^p} = (\mathbb{E}[(\sqrt{[M, M]_\infty})^p])^{\frac{1}{p}} = \|\sqrt{[M, M]_\infty}\|_{L^p}.$$

令 $\mathscr{H}^p = \{M \in \mathscr{M}_{loc}: \|M\|_{\mathscr{H}^p} < +\infty\}$, 我们称 $\mathscr{H}^p$ 中的元素为 $\mathscr{H}^p$ 鞅. 显然 $\mathscr{H}^p$ 为线性空间.

11.38 定理 设 $1<p<+\infty$, 令 $\mathscr{M}^p = \{M \in \mathscr{M}: \|M_\infty\|_{L^p} < +\infty\}$. 则 $\mathscr{H}^p = \mathscr{M}^p$, 并且范数 $\|M\|_{\mathscr{H}^p}$, $\|M^*\|_{L^p}$, $\|M_\infty\|_{L^p}$ 彼此等价.

证明 首先由 Burkholder 不等式知, $\|M\|_{\mathscr{H}^p}$ 与 $\|M^*\|_{L^p}$ 是 $\mathscr{H}^p$ 上的两个等价范数. 其次, 由 Doob 不等式知, $\|M_\infty\|_{L^p}$, $\|M^*\|_{L^p}$ 是 $\mathscr{M}^p$ 上的两个等价范数. 于是有 $\mathscr{H}^p = \mathscr{M}^p$, 且范数 $\|M\|_{\mathscr{H}^p}$, $\|M^*\|_{L^p}$, $\|M_\infty\|_{L^p}$ 彼此等价.

下一定理是不足道的.

11.39 定理 设 p, q 为一对共轭指数, 则 $\mathscr{H}^p$ 的对偶空间是 $\mathscr{H}^q$. 此外, 设 $M\in\mathscr{H}^p$, $N\in\mathscr{H}^q$, 则 $K=MN-[M, N]\in\mathscr{H}^1$.

证明 由于 L^p 的对偶空间是 L^q, 且 $\mathscr{M}^p$ 与 L^p 保范同构, 故由定理 11.38, $\mathscr{H}^p$ 的对偶空间是 $\mathscr{H}^q$. 设 $M\in\mathscr{H}^p$, $N\in\mathscr{H}^q$, 由 Kunita-Watanabe 不等式, 我们有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d[M, N]_s|\right]\leqslant\|M\|_{\mathscr{H}^p}\|N\|_{\mathscr{H}^q}<\infty.$$

但由于 $K^*\leqslant M^*N^*+\int_{[0,\infty[}|d[M, N]_s|\in L^1$, 故 $K\in\mathscr{H}^1$.

下一定理与定理 11.24 相类似, 它给出随机积分 $H.M$ 属于 $\mathscr{H}^p$ 的充分条件.

11.40 定理 设 M 为一局部鞅, H 为一可选过程, 使得

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M, M]_s\right)^{\frac{p}{2}}\right]<\infty\,(p>1),$$

则有

$$\|H.M\|_{\mathscr{H}^p}\leqslant c_p\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M, M]_s\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{40.1}$$

其中 c_p 为一常数, 只与 p 有关.

证明 令 $L=H.M$, 则对任何有界鞅 N, $K\triangleq LN-H.[M, N]$ 为局部鞅. 由 Kunita-Watanabe 不等式, 有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|H_s||d[M, N]_s|\right]$$

$$\leqslant\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2d[M, M]_s\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\|N\|_{\mathscr{H}^q}<\infty,$$

其中 q 为 p 的共轭指数$\left(\text{即 }\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. 又由定理 11.24, 有 $\mathbb{E}[L^*]<\infty$, 故 $K^*\leqslant L^*N^*+\int_{[0,\infty[}|H_s||d[M, N]_s|\in L^1$, 从而 K 为一致可积鞅. 特别, 我们有

$$\mathbb{E}[L_\infty N_\infty]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}H_s d[M,N]_s\right]$$

$$\leqslant\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M,M]_s\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\|N\|_{\mathscr{H}^q}$$

$$\leqslant\bar{c}_p\|N_\infty\|_{L^q}\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M,M]_s\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由于有界可测函数在 L^q 中稠，故由上式得

$$\|L_\infty\|_{L^p}\leqslant\bar{c}_p\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}H_s^2 d[M,M]_s\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由此推得(40.1).

注 关于 $\mathscr{BMO}$，读者容易自行证明如下结果：设 $M\in\mathscr{BMO}$，H 为一可选过程，且 $|H|\leqslant 1$，则有 $\|H.M\|_{\mathscr{BMO}}\leqslant\sqrt{5}\|M\|_{\mathscr{BMO}}$. 提示：将定理 9.2 中的不等式(2.2)条件化为

$$\mathbb{E}\left[((H.M)_\infty-(H.M)_T)^2|\mathscr{F}_T\right]$$

$$\leqslant\mathbb{E}\left[\int_{]T,\infty[}H_s^2 d[M,M]_s|\mathscr{F}_T\right].$$

§8 John-Niremberg 不等式

下一引理属于 Stroock [1].

11.41 引理 设 (X_t) 为一右连左极适应过程，使得极限 $\lim\limits_{t\to\infty}X_t=X_\infty$ a.s. 存在且有穷. 如果存在一非负可积随机变量 ξ，使得对一切停时 T，有

(41.1) $\qquad\mathbb{E}[|X_\infty-X_{T-}||\mathscr{F}_T]\leqslant\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_T]$ a.s.,

则对一切 $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$，我们有

(41.2) $\qquad\mu\mathbb{P}([X^*\geqslant\lambda+\mu])\leqslant 2\int_{[X^*\geqslant\lambda]}\xi d\mathbb{P}.$

这里约定 $X_{0-}=0$, $X_{\infty-}=X_\infty$.

证明 无妨设 $\mu>0$. 令 $0<\mu'<\mu$，置

$$T=\inf\{t:|X_t|\geqslant\lambda\},\quad S=\inf\{t:|X_t|\geqslant\lambda+\mu'\},$$

则 $T\leqslant S$, $|X_{T-}|\leqslant\lambda$, 且有

$$[X^*>\lambda+\mu']\subset[|X_S|\geqslant\lambda+\mu']$$
$$\subset[|X_T|\geqslant\lambda]\cap[|X_S-X_{T-}|\geqslant\mu'].$$

由于 $|X_S-X_{T-}|\leqslant|X_\infty-X_{T-}|+|X_\infty-X_S|$, 故有

$$\text{(41.3)}\quad \mathbb{P}([X^*>\lambda+\mu'])\leqslant\frac{1}{\mu'}\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_S-X_{T-}|d\mathbb{P}$$
$$\leqslant\frac{1}{\mu'}\Big[\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_\infty-X_{T-}|d\mathbb{P}$$
$$+\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_\infty-X_S|d\mathbb{P}\Big].$$

由于 $[|X_T|\geqslant\lambda]\in\mathscr{F}_T$, 故由(41.1),我们有

$$\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_\infty-X_{T-}|d\mathbb{P}\leqslant\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}\xi\, d\mathbb{P}\leqslant\int_{[X^*\geqslant\lambda]}\xi\, d\mathbb{P}.$$

此外,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}X_{(S+\frac{1}{n})-}=X_S$ a.s., 故由 Fatou 引理得

$$\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_\infty-X_S|d\mathbb{P}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_{[|X_T|\geqslant\lambda]}|X_\infty-X_{(S+\frac{1}{n})-}|d\mathbb{P}$$
$$\leqslant\int_{[X^*\geqslant\lambda]}\xi\, d\mathbb{P}.$$

于是由(41.3), 有 $\mu'\mathbb{P}([X^*>\lambda+\mu'])\leqslant2\int_{[X^*\geqslant\lambda]}\xi d\mathbb{P}$. 再令 $\mu'\uparrow\mu$ 得(41.2).

注 设 $A\in\mathscr{F}_0$, 仿定理证明,可知对一切 $\lambda\geqslant0$, $\mu\geqslant0$, 有

$$\text{(41.4)}\qquad \mu\mathbb{P}([X^*\geqslant\lambda+\mu]\cap A)\leqslant2\int_{[X^*\geqslant\lambda]\cap A}\xi\, d\mathbb{P}.$$

下一定理通常称为 John-Niremberg 不等式.

11.42 定理 设(X_t)为一右连左极适应过程,使得

$$\lim_{t\to\infty}X_t=X_\infty \text{ a.s.}$$

存在且有穷. 如果存在常数 $c>0$, 使得对一切停时 T, 有

$$\text{(42.1)}\qquad \mathbb{E}[|X_\infty-X_{T-}||\mathscr{F}_T]\leqslant c \text{ a.s.},$$

则当 $0\leqslant\lambda<\dfrac{1}{8c}$ 时,我们有

(42.2) $$\mathbb{E}[e^{\lambda X^*}]<\frac{6}{1-8c\lambda},$$

并且对一切停时 T, 有

(42.3) $$\mathbb{E}[\exp(\lambda|X_\infty-X_{T-}|)|\mathscr{F}_T]<\frac{6}{1-8c\lambda}\text{ a.s.}.$$

证明 由定理 11.41, 我们有

$$4c\mathbb{P}(X^*\geqslant 4nc)\leqslant 2c\mathbb{P}(X^*\geqslant 4(n-1)c),\ n\geqslant 1,$$

于是有

$$\mathbb{P}(X^*\geqslant 4nc)\leqslant 2^{-n}\leqslant e^{-\frac{n}{2}}.$$

故当 $0\leqslant\lambda<\frac{1}{8c}$ 时, 我们有

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X^*}]\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}e^{4c\lambda(n+1)}\mathbb{P}([4cn\leqslant X^*<4c(n+1)])$$

$$\leqslant e^{4c\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\left(\frac{1}{2}-4c\lambda\right)n}=\frac{e^{4c\lambda}}{1-e^{-\left(\frac{1}{2}-4c\lambda\right)}}.$$

但当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 有 $e^{-\alpha}\leqslant 1-\frac{\alpha}{\sqrt{e}}$, 故由上式得

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X^*}]\leqslant\frac{e^{\frac{1}{2}+4c\lambda}}{\frac{1}{2}-4c\lambda}<\frac{2e}{1-8c\lambda}<\frac{6}{1-8c\lambda}.$$

此即(42.2).

设 $A\in\mathscr{F}_0$, 且 $\mathbb{P}(A)>0$. 由(41.4), 仿照上面的证明可得

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X^*}I_A]<\frac{6}{1-8c\lambda}\mathbb{P}(A).$$

于是有

(42.4) $$\mathbb{E}[e^{\lambda X^*}|\mathscr{F}_0]<\frac{6}{1-8c\lambda}\text{ a.s.}.$$

设 T 为一停时, 对 $(\mathscr{F}_{T+t})_{t\geqslant 0}$ 适应过程 $(X_{T+t}-X_{T-})_{t\geqslant 0}$, 应用(42.4)得

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda\sup_{t\geqslant T}|X_t-X_{T-}|)|\mathscr{F}_T]<\frac{6}{1-8c\lambda}\text{ a.s.}.$$

特别, 我们有(42.3). 定理证毕.

下一定理是 $\mathscr{BMO}$ 鞅的 John-Niremberg 型不等式.

11.43 定理 设 $M\in\mathscr{BMO}$, $\|M\|_{\mathscr{BMO}}=m$.

1) 当 $\lambda<\frac{1}{8m}$ 时，我们有

$$\mathbb{E}[e^{\lambda M^*}]<\frac{6}{1-8m\lambda}. \tag{43.1}$$

2) 当 $\lambda<\frac{1}{m^2}$ 时，对一切停时 T，我们有

$$\mathbb{E}[\exp\{\lambda([M,M]_\infty-[M,M]_{T-})\}|\mathscr{F}_T]\leqslant\frac{1}{1-\lambda m^2}. \tag{43.2}$$

证明 1) 设 T 为一停时，由 Jensen 不等式得

$$\mathbb{E}[|M_\infty-M_{T-}|\ \mathscr{F}_T]\leqslant(\mathbb{E}[(M_\infty-M_{T-})^2|\mathscr{F}_T])^{\frac{1}{2}}\leqslant m.$$

故由定理 11.42 得(43.1)。

2) 考虑增过程 $A_t=[M,M]_t(A_{0-}=0)$. 由于 $M\in\mathscr{BMO}$，故对一切停时 T，有

$$\mathbb{E}[A_\infty-A_{T-}|\mathscr{F}_T]\leqslant m^2\ \text{a.s.},$$

由 Garsia 引理(引理 11.35)，我们有

$$\mathbb{E}[A_\infty^n]\leqslant\mathbb{E}[m^2(nA_\infty^{n-1})],\ n\geqslant1.$$

由归纳法得

$$\mathbb{E}[A_\infty^n]\leqslant m^{2n}n!,\ n=0,1,2,\cdots,$$

故有 $\mathbb{E}[\exp(\lambda A_\infty)]\leqslant\frac{1}{1-\lambda m^2}$. 由此可证(43.2).

注 如果不用 Garsia 引理，直接对过程 $[M,M]$ 应用定理 11.42，可得到如下较弱的结果：当 $\lambda<\frac{1}{8m^2}$ 时，对一切停时 T，我们有

$$\mathbb{E}[\exp\{\lambda([M,M]_\infty-[M,M]_{T-})\}|\mathscr{F}_T]<\frac{6}{1-8m^2\lambda}.$$

下一定理给出了 $\mathscr{BMO}$ 鞅的另一个刻划.

11.44 定理 设 M 为一致可积鞅，则为要 $M\in\mathscr{BMO}$，必须且只需存在常数 $c>0$，使得对一切停时 T，有

$$\mathbb{E}[|M_\infty-M_{T-}||\mathscr{F}_T]\leqslant c\ \text{a.s.}. \tag{44.1}$$

证明 必要性由 Jensen 不等式推得. 往证充分性. 设(44.1)成立. 由定理 11.42, 对 $\lambda<\frac{1}{8c}$, 我们有

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda|M_\infty-M_{T-}|)|\mathscr{F}_T]<\frac{6}{1-8c\lambda}\ \text{a.s.},$$

从而有

$$\mathbb{E}[(M_\infty-M_{T-})^2|\mathscr{F}_T]<\frac{12}{(1-8c\lambda)\lambda^2}\ \text{a.s.},$$

这表明 $M\in\mathscr{BMO}$.

§9 局部鞅的跳过程的刻划

11.45 引理 令 $\mathscr{H}^{1,d}=\mathscr{H}^1\cap\mathscr{M}^d_{loc}$, $\mathscr{H}^{1,c}=\mathscr{H}^1\cap\mathscr{M}^c_{loc}$. 则 $\mathscr{H}^{1,d}$, $\mathscr{H}^{1,c}$ 都是 $\mathscr{H}^1$ 的闭子空间. 此外, 设 $M\in\mathscr{M}^d_{loc}$, $N\in\mathscr{M}^d_{loc}$, 若 $\Delta M=\Delta N$, 则 $M=N$.

证明 设 $(M^{(n)})_{n\geq1}\subset\mathscr{H}^{1,c}$, $M\in\mathscr{H}^1$. 若 $\|M^{(n)}-M\|_{\mathscr{H}^1}\to0$, 则 $\mathbb{E}[(M^{(n)}-M)^*]\to0$. 取子列$(n_k)$, 使得 $\sum_{k=1}^\infty\mathbb{E}[(M^{(n_k)}-M)^*]<\infty$, 则 $(M^{(n_k)}-M)^*\xrightarrow{\text{a.s.}}0$, 于是对几乎所有 ω, $M_\cdot(\omega)$ 连续. 即 $M\in\mathscr{H}^{1,c}$. 这表明 $\mathscr{H}^{1,c}$ 是闭的.

设 $(M^{(n)})_{n\geq1}\subset\mathscr{H}^{1,d}$, $M\in\mathscr{H}^1$. 若 $\|M^{(n)}-M\|_{\mathscr{H}^1}\to0$. 则对任何有界连续鞅 N, 由 Fefferman 不等式得

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d[M,N]_s|\right]=\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[}|d[M-M^{(n)},N]_s|\right]$$

$$\leqslant\sqrt{2}\|M-M^{(n)}\|_{\mathscr{H}^1}\|N\|_{\mathscr{BMO}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

这表明$[M,N]=0$. 故 $M\in\mathscr{H}^{1,d}$(定理 8.36). 这表明 $\mathscr{H}^{1,d}$ 是闭的.

设 M, $N\in\mathscr{M}^d_{loc}$, 且 $\Delta M=\Delta N$, 则 $M-N\in\mathscr{M}^c_{loc}$. 故 $M-N=0$. 即 $M=N$.

下一定理刻划了局部鞅的跳过程.

11.46 定理 设 X 为一可选过程. 为要存在一局部鞅 M, 使得 X 与 ΔM 无区别(这里约定 $\Delta M_0=0$), 必须且只需

i) X 的可料投影 ${}^pX$ 存在，且 ${}^pX=0$；

ii) $\sqrt{\sum_{s\le \cdot}X_s^2}$ 为局部可积增过程.

证明 必要性容易由定理 8.16 及 8.32 看出. 往证充分性. 设条件 i)、ii) 满足. 由 i)，$X_0=\mathbb{E}[X_0|\mathscr{F}_0]={}^pX_0=0$，此外，由定理 6.5，除了一个不足道集外，$[X\neq 0]=[X\neq {}^pX]$ 为一列停时图的并. 于是存在一列其图两两不交的绝不可及时 (S_k) 及一列其图两两不交的严格正可料时 (T_k)，使得除了一个不足道集外，有

$$[X\neq 0]\subset(\bigcup_k[\![S_k]\!])\cup(\bigcup_k[\![T_k]\!]).$$

于是我们有 $X=\sum_k X_{S_k}I_{[\![S_k]\!]}+\sum_k X_{T_k}I_{[\![T_k]\!]}$，从而

$$\sum_{s\le\cdot}X_s^2=\sum_k X_{S_k}^2 I_{[\![S_k,\infty[\![}+\sum_k X_{T_k}^2 I_{[\![T_k,\infty[\![}.$$

现设 U 为一有穷停时，使得 $\mathbb{E}\left[\sqrt{\sum_{s\le U}X_s^2}\right]<+\infty$，即有

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{\sum_k X_{S_k}^2 I_{[S_k\le U]}+\sum_k X_{T_k}^2 I_{[T_k\le U]}}\right]<\infty. \tag{46.1}$$

令

$$W^{(k)}=X_{S_k}I_{[S_k\le U]}I_{[\![S_k,\infty[\![}-\widetilde{X_{S_k}I_{[S_k\le U]}I_{[\![S_k,\infty[\![}},$$

$$N^{(k)}=X_{T_k}I_{[T_k\le U]}I_{[\![T_k,\infty[\![},$$

则 $W^{(k)}$ 为可积变差鞅，只在 $[\![S_k]\!]$ 处有跳，且 $\Delta W_{S_k}^{(k)}=X_{S_k}I_{[S_k\le U]}$. 此外，由于

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{T_k}I_{[T_k\le U]}|\mathscr{F}_{T_k-}]&=\mathbb{E}[X_{T_k}I_{[T_k<\infty]}|\mathscr{F}_{T_k-}]I_{[T_k\le U]}\\&={}^pX_{T_k}I_{[T_k<\infty]}I_{[T_k\le U]}=0\ \text{a.s.},\end{aligned}$$

故由定理 6.12，$N^{(k)}$ 为一致可积鞅. 令

$$L^{(n)}=\sum_{k=1}^n W^{(k)}+\sum_{k=1}^n N^{(k)}.$$

则由(46.1)看出，$(L^{(n)})$ 为 $\mathscr{H}^1$ 中的基本列. 因 $\mathscr{H}^1$ 完备，故由引理 11.45，存在 $L\in\mathscr{H}^{1,d}$，使得 $\|L^{(n)}-L\|_{\mathscr{H}^1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. 选取子列 (n_k)，使得 $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^\infty(L^{(n_k)}-L)^*\right]<\infty$，则有 $\lim_{k\to\infty}(L^{(n_k)}-L)^*=0$ a.s.. 由于 $(L^{(n)})^U=L^{(n)}$，故 $L=L^U$. 此外，容易看出 $XI_{[\![0,U]\!]}$ 与 ΔL 无区别.

令有穷停时 $U_n \uparrow +\infty$,使得对每个 n, 有 $\mathbb{E}\left[\sqrt{\sum_{s\leqslant U_n} X_s^2}\right]<+\infty$. 由上所证, 对每个 n, 存在唯一的 $M^{(n)}\in\mathscr{H}^{1,d}$, 使得 $\Delta M^{(n)}$ 与 $XI_{[0,U_n]}$ 无区别. 显然有 $(M^{(n+1)})^{U_n}=M^{(n)}$. 于是, 存在唯一的 $M\in\mathscr{M}_{loc}^d$, 使得 ΔM 与 X 无区别.

注 作为这一定理的一个应用, 我们可以进一步推广循序可测过程关于局部鞅随机积分的定义如下(见 Jacod [3]):

设 $M\in\mathscr{M}_{loc}^d$, H 为一循序可测过程. 如果过程 $H\Delta M$ 的可料投影存在, 且 $\sqrt{\sum_{s\leqslant\cdot}[H_s\Delta M_s-{}^p(H\Delta M)_s]^2}$ 为局部可积增过程, 则由定理 11.46, 存在唯一的 $Z\in\mathscr{M}_{loc}^d$, 使得 $\Delta Z=H\Delta M-{}^p(H\Delta M)$. 自然地, 我们把 Z 称为 H 关于 M 的随机积分, 且用记号 $H.M$ 表示之.

一般地, 设 M 为一局部鞅, H 为一循序可测过程. 如果 $H\Delta M$ 的可料投影存在, 且过程 $\sqrt{H^2\langle M^c,M^c\rangle+\sum_{s\leqslant\cdot}[H_s\Delta M_s-{}^p(H\Delta M)_s]^2}$ 为局部可积, 则令

$$H.M=H.M^c+H.M^d.$$

我们称 $H.M$ 为 H 关于 M 的随机积分. 显然, 这推广了第九章的随机积分的定义(见系 9.8).

§10 两个过程间的控制关系

11.47 定义 设 X 为一右连续适应过程, A 为一适应增过程. 称 X 被 A 控制, 如果对一切有穷停时 T, 有 $\mathbb{E}[|X_T|]\leqslant\mathbb{E}[A_T]$.

11.48 引理 设 X 为一右连续适应过程. 如果 X 被一适应增过程 A 控制, 则对任何停时 S 及任何 $c>0$, 我们有

$$\mathbb{P}(X_S^*\geqslant c)\leqslant\frac{1}{c}\mathbb{E}[A_S]. \tag{48.1}$$

若 S 为可料时, 且 $S>0$, 则还有

(48.2) $$\mathbb{P}(X^*_{S-}\geqslant c)\leqslant\frac{1}{c}\mathbb{E}[A_{S-}].$$

证明 令 $T=\inf\{t:\ X_t\geqslant c\}\wedge S\wedge n$, 我们有

$$\mathbb{E}[A_S]\geqslant\mathbb{E}[A_T]\geqslant\mathbb{E}[|X_T|]$$

$$\geqslant\int_{[X^*_{S\wedge n}>c]}|X_T|d\mathbb{P}\geqslant c\mathbb{P}(X^*_{S\wedge n}>c).$$

令 $n\to\infty$ 得 $$\mathbb{P}(X^*_S>c)\leqslant\frac{1}{c}\mathbb{E}[A_S].$$

在上式中以 $c-\varepsilon$ 代替 c, 再令 $\varepsilon\downarrow 0$, 即得(48.1). 若 S 为可料时, 取一停时序列 (S_n) 预报 S, 则由(48.1)推得(48.2).

11.49 定理 设 X 为一零初值右连续适应过程, A 为一零初值可料增过程. 如果 X 被 A 控制, 则对任何停时 T, 任何 $c>0$, $d>0$, 及任何 $H\in\mathscr{F}$, 有

(49.1) $$\mathbb{P}(H\cap[X^*_T\geqslant c])\leqslant\frac{1}{c}\mathbb{E}[A_T\wedge d]+\mathbb{P}(H\cap[A_T\geqslant d]),$$

(49.2) $$\mathbb{P}(H\cup[X^*_T\geqslant c])\leqslant\frac{1}{c}\mathbb{E}[A_T\wedge d]+\mathbb{P}(H\cup[A_T\geqslant d]).$$

证明 令 $S=\inf\{t:A_t\geqslant d\}$, 则 S 为可料时, $S>0$, 且有 $A_{S-}\leqslant d$. 故由(48.2),

(49.3) $$\mathbb{P}(X^*_{S-}\geqslant c)\leqslant\frac{1}{c}\mathbb{E}(A_{S-})\leqslant\frac{1}{c}\mathbb{E}[A_\infty\wedge d].$$

另一方面, $[S<\infty]\subset[A_\infty\geqslant d]$, 故有

$$H\cap[X^*_\infty\geqslant c]\subset[X^*_{S-}\geqslant c]\cup(H\cap[S<\infty])$$

$$\subset[X^*_{S-}\geqslant c]\cup(H\cap[A_\infty\geqslant d]).$$

于是由(49.3)得

(49.4) $$\mathbb{P}(H\cap[X^*_\infty\geqslant c])\leqslant\frac{1}{c}\mathbb{E}[A_\infty\wedge d]+\mathbb{P}(H\cap[A_\infty\geqslant d]).$$

对 X^T 及 A^T 应用(49.4)得(49.1). 类似可证(49.2).

注 定理 8.43 是这一定理的特例. 因为设 $M\in\mathscr{M}^2_{loc}$, 则 M^2 被 $\langle M, M\rangle$ 控制.

下面我们给出定理 11.49 的两个重要应用.

11.50 定理 设$(X^{(n)})$为一列零初值右连续适应过程，$(A^{(n)})$为一列零初值可料增过程. 如果每个 $X^{(n)}$ 被 $A^{(n)}$ 控制，则对任何 $H\in\mathscr{F}$ 及任何停时 T，有

$$I_H A_T^{(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Rightarrow I_H (X^{(n)})_T^* \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{50.1}$$

证明 由(49.1)，我们有

$$\mathbb{P}(H\cap[(X^{(n)})_T^*\geqslant c])\leqslant\frac{d}{c}+\mathbb{P}(H\cap[A_T^{(n)}\geqslant d]).$$

由此立即推得(50.1).

11.51 定理 设零初值右连续适应过程 X 被一零初值可料增过程 A 控制，则对几乎所有 ω，对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $X_t^*(\omega)<+\infty$. 此外有

$$[A_\infty<\infty]\subset[X_\infty^*<\infty]\text{ a.s.}, \tag{51.1}$$

$$[A_T=0]\subset[X_T^*=0]\text{ a.s.}, \tag{51.2}$$

其中 T 为任一停时.

证明 在(49.1)中令 $H=[A_T<d]$，则有

$$\mathbb{P}([A_T<d]\cap[X_T^*\geqslant c])\leqslant\frac{d}{c}. \tag{51.3}$$

在(51.3)中，先令 $c\uparrow+\infty$，后令 $d\uparrow+\infty$，得

$$\mathbb{P}([A_T<\infty]\cap[X_T^*=\infty])=0.$$

在上式中令 $T=+\infty$，得到 (51.1). 若 T 为有限停时，则 $\mathbb{P}([A_T<\infty])=1$，上式表明 $\mathbb{P}([X_T^*=\infty])=0$，即 $X_T^*<\infty$ a.s.. 于是，对几乎所有 ω，对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $X_t^*(\omega)<\infty$.

在(51.3)中，令 $d\downarrow 0$ 得

$$\mathbb{P}([A_T=0]\cap[X_T^*\geqslant c])=0.$$

上式对一切 $c>0$ 成立，故有

$$\mathbb{P}([A_T=0]\cap[X_T^*>0])=0.$$

此即(51.2).

下面我们给出可以应用上述一般定理的几个例子.

11.52 例 1) 设 $M\in\mathscr{M}^2_{loc}$，则 M^2 被 $\langle M,M\rangle$ 控制.

2) 设 A 为一局部可积适应增过程，则 A 被 $\widetilde{A}$ 控制. 这里 $\widetilde{A}$ 为 A 的可料对偶投影.

3) 设 $M\in\mathscr{M}_{loc}$，令 $\alpha(M)$ 为 $\sqrt{[M,M]}$ 的可料对偶投影，则由 Davis 不等式，M 被 $2\sqrt{6}\,\alpha(M)$ 控制.

最后，我们研究局部鞅的 a.s. 收敛性.

11.53 定理 设 M 为一零初值局部鞅，令 $\alpha(M)$ 为 $\sqrt{[M,M]}$ 的可料对偶投影. 则对几乎所有 $\omega\in[\alpha(M)_\infty<\infty]$，$\lim\limits_{t\to\infty}M_t(\omega)$ 存在且有穷.

证明 对每个 $n\geqslant 1$，令

$$T_n=\inf\{t:\alpha(M)_t\geqslant n\},$$

则 T_n 为可料时，M^{T_n-} 为局部鞅(定理 8.16)，且

$$E\sqrt{[M^{T_n-},M^{T_n-}]_\infty}=E\sqrt{[M,M]_{T_n-}}=E[\alpha(M)_{T_n-}]\leqslant n.$$

这表明 M^{T_n-} 为 $\mathscr{H}^1$ 鞅. 于是 $\lim\limits_{t\to\infty}M_t^{T_n-}$ a.s. 存在且有穷. 我们有

$$[\alpha(M)_\infty<\infty]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[T_n=\infty]\subset[\lim_{t\to\infty}M_t\text{ 存在且有穷}]\text{ a.s.}.$$

注 定理 11.53 是定理 8.42 的推广. 事实上，设 $M\in\mathscr{M}^2_{0,loc}$，则由引理 7.14，$\alpha(M)^2$ 被 $4\langle M,M\rangle$ 控制，故由 (51.1)，$[\langle M,M\rangle_\infty<\infty]\subset[\alpha(M)_\infty<\infty]$ a.s.，于是由定理 11.53 推得定理 8.42.

第十二章

Girsanov 定理及其应用

令$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为一完备概率空间，$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$为一族满足通常条件的子$\sigma$-域．在本章，我们设$\mathbb{Q}$为$(\Omega, \mathscr{F})$上一关于$\mathbb{P}$绝对连续（记为$\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$）的概率测度，并用$\mathscr{F}^{\mathbb{Q}}$表示$\mathscr{F}$关于$\mathbb{Q}$的完备化．令$\mathscr{N}=\{A\in\mathscr{F}^{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q}(A)=0\}$，$\mathscr{F}_t(\mathbb{Q})=\sigma\{\mathscr{F}_t\cup\mathscr{N}\}$，则$(\mathscr{F}_t(\mathbb{Q}))_{t\in\mathbb{R}_+}$满足通常条件．

设(X_t)为一右连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程．如果在概率测度$\mathbb{P}$下，(X_t)为半鞅（简称(X_t)为$\mathbb{P}$-半鞅），我们将证明(X_t)关于$(\mathscr{F}_t(\mathbb{Q}))$为$\mathbb{Q}$-半鞅，并且具体给出$\mathbb{Q}$-半鞅$X$的一个分解：$X=N+B$，其中$N$为$\mathbb{Q}$-局部鞅，$B$为有限变差过程．这就是所谓的Girsanov定理．本章还将给出Girsanov定理的若干应用．

§1 概率改变下局部鞅变换基本引理

设$\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$，我们用(M_t)表示鞅$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathscr{F}_t\right]$的右连左极修正．

12.1 引理 设(X_t)为一右连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程，T为一有穷$(\mathscr{F}_t)$停时．如果$(MX)^T$为$\mathbb{P}$-一致可积鞅，则X^T为$\mathbb{Q}$-一致可积鞅．

证明 我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(M_\infty|X_T|)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(M_T|X_T|)<+\infty,$$

于是 $M_\infty X_T$ 为 $\mathbb{P}$- 可积. 同样, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $M_\infty X_{t\wedge T}$ 为 $\mathbb{P}$- 可积. 故对任何 $A\in\mathscr{F}_{t\wedge T}$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_TI_A]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_\infty X_TI_A]&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_TX_TI_A]\\&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_{t\wedge T}X_{t\wedge T}I_A]\\&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_\infty X_{t\wedge T}I_A]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_{t\wedge T}I_A].\end{aligned}$$

从而对一切 $A\in\mathscr{F}_{t\wedge T}^{(\mathbb{Q})}$, 上式两端仍相等. 这表明 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T|\mathscr{F}_{t\wedge T}^{(\mathbb{Q})}]=X_{t\wedge T}$ $\mathbb{Q}$-a.s.. 但我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T|\mathscr{F}_t^{(\mathbb{Q})}]&=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T|\mathscr{F}_T^{(\mathbb{Q})}]|\mathscr{F}_t^{(\mathbb{Q})}]\\&=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T|\mathscr{F}_{t\wedge T}(\mathbb{Q})]=X_{t\wedge T}\ \mathbb{Q}\text{-a.s.},\end{aligned}$$

故 X^T 关于 $(\mathscr{F}_t(\mathbb{Q}))$ 为 $\mathbb{Q}$- 一致可积鞅.

下一引理是概率改变下局部鞅变换基本引理.

12.2 引理 设 (X_t) 为一右连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程. 则为要 (X_t) 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅, 必须且只需存在一列 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 $T_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 使得 $(MX)^{T_n}$ 为 $\mathbb{P}$- 局部鞅. 特别, 如果 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{P}$ 等价 (记为 $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$), 则为要 X 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅, 必须且只需 MX 为 $\mathbb{P}$- 局部鞅.

证明 必要性. 设 X 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅, 无妨假定 $X_0=0$. 由于对每个 $(\mathscr{F}_t(\mathbb{Q}))$ 停时 T, 存在 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 S, 使得 $T=S$ $\mathbb{Q}$-a.s. (定理 5.34.1)), 故存在 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 $T_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 使得每个 X^{T_n} 为 $\mathbb{Q}$- 一致可积鞅. 于是 MX^{T_n} 为 $\mathbb{P}$- 一致可积鞅, 从而 $(MX)^{T_n}$ 为 $\mathbb{P}$- 一致可积鞅.

充分性. 无妨设 $X_0=0$. 假定存在 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 $T_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 使得每个 $(MX)^{T_n}$ 为 $\mathbb{P}$- 局部鞅. 对固定的 n, 令有穷 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 $S_{nm}\uparrow+\infty$ $\mathbb{P}$-a.s. $(m\uparrow+\infty)$, 使得每个 $(MX)^{T_n\wedge S_{nm}}$ 为 $\mathbb{P}$- 一致可积鞅, 则由引理 12.1, $X^{T_n\wedge S_{nm}}$ 为 $\mathbb{Q}$- 一致可积鞅. 由于 $S_{nm}\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s. $(m\uparrow+\infty)$, 故 X^{T_n} 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅, 从而 X 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅(定理 8.12.3)).

§2 Girsanov 定理

首先我们介绍一个"抽象的"结果.

12.3 定理 设 X 为一半鞅. 令 $\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$, 则在 $\mathbb{Q}$ 下, X 仍为半鞅. 此外, $[X, X](\mathbb{Q})$ 与 $[X, X]$ $\mathbb{Q}$- 无区别.

证明 我们将证明分为以下五步.

(1) 令 $M_\infty=\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. 设 (M_t) 为鞅 $\mathbb{E}[M_\infty|\mathscr{F}_t]$ 的右连续修正 (这里, $M_{\infty-}$ 区别于 M_∞). 令 $T=\inf\{t:M_t=0\}$, 则由定理 3.25 及其注 2), 对 $\mathbb{P}$- 几乎所有 (从而 $\mathbb{Q}$- 几乎所有) $\omega\in[T<\infty]$, 对一切 $t\geqslant T(\omega)$, 有 $M_t(\omega)=0$. 但另一方面, 我们有

$$\mathbb{Q}([M_t=0])=\int_{[M_t=0]}M_\infty d\mathbb{P}=\int_{[M_t=0]}M_t d\mathbb{P}=0.$$

由于 $[T<t]\subset[M_t=0]$, $[T<\infty]=\bigcup_n[T<n]$, 故有 $\mathbb{Q}([T<\infty])=0$, 即有 $T=+\infty$ $\mathbb{Q}$ a.s.. 于是由定理 3.25, 集合 $\{(t, \omega):M_t(\omega)=0\}$ 与 $\{(t, \omega):t>0, M_{t-}(\omega)=0\}$ 都是 $\mathbb{Q}$- 不足道集. 特别 $\frac{1}{M}$ 与一 $(\mathscr{F}_t(\mathbb{Q}))$ 适应右连左极过程 $\mathbb{Q}$- 无区别. 这一事实在下面几个定理中也将用到.

(2) 令 X 为一非负 $\mathbb{P}$- 上鞅, 则 $\frac{X}{M}$ 为 $\mathbb{Q}$- 上鞅.

事实上, 设 $A\in\mathscr{F}_s$, $s<t$, 则有 (注意 $[M_s=0]\subset[M_t=0]$)

$$\int_A\frac{X_s}{M_s}d\mathbb{Q}=\int_A X_s I_{[M_s>0]}d\mathbb{P}\geqslant\int_A X_t I_{[M_s>0]}d\mathbb{P}$$
$$\geqslant\int_A X_t I_{[M_t>0]}d\mathbb{P}=\int_A\frac{X_t}{M_t}d\mathbb{Q}.$$

(3) 令 X 为一 $\mathbb{P}$- 局部鞅, 则 $\frac{X}{M}$ 为 $\mathbb{Q}$- 半鞅.

事实上, 无妨设 X 为 $\mathbb{P}$- 一致可积鞅. 于是 X 为拟鞅. 将 X 表为两个非负 $\mathbb{P}$- 上鞅之差, 由 (2) 知 $\frac{X}{M}$ 为 $\mathbb{Q}$- 半鞅.

(4) 令 X 为一 $\mathbb{P}$- 半鞅，则 $\frac{X}{M}$ 为 $\mathbb{Q}$- 半鞅.

事实上，令 $X=L+A$，其中 L 为 $\mathbb{P}$- 局部鞅，A 为一有限变差过程，则由(3)，$\frac{L}{M}$ 为 $\mathbb{Q}$- 半鞅，$\frac{A}{M}$ 为 $\mathbb{Q}$ 半鞅 A 与 $\mathbb{Q}$- 半鞅 $\frac{1}{M}$ 的乘积，从而为 $\mathbb{Q}$- 半鞅. 于是 $\frac{X}{M}=\frac{L}{M}+\frac{A}{M}$ 为 $\mathbb{Q}$- 半鞅.

(5) 最后，令 X 为一 $\mathbb{P}$- 半鞅，则 XM 为 $\mathbb{P}$ 半鞅，由 (4)，$\frac{XM}{M}$ 为 $\mathbb{Q}$- 半鞅. 但 X 与 $\frac{XM}{M}$ $\mathbb{Q}$- 无区别，故 X 为 $\mathbb{Q}$-半鞅. 此外，由定理 10.7 看出，对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $[X, X]_t(\mathbb{Q})=[X, X]_t$ $\mathbb{Q}$-a.s.（注意依概率 $\mathbb{P}$ 收敛蕴含依概率 $\mathbb{Q}$ 收敛），故 $[X, X](\mathbb{Q})$ 与 $[X, X]$ $\mathbb{Q}$- 无区别.

注 如果令 $X^c(\mathbb{Q})$ 表示在 $\mathbb{Q}$ 下 X 的连续局部鞅部分，则 $\langle X^c(\mathbb{Q}), X^c(\mathbb{Q})\rangle(\mathbb{Q})$ 与 $\langle X^c, X^c\rangle$ $\mathbb{Q}$- 无区别.

下一定理是 Girsanov 定理.

12.4 定理 设 X 为一 $\mathbb{P}$- 局部鞅. 令 $\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$，设 (M_t) 为鞅 $\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathscr{F}_t\right]$ 的右连续修正. 令 $T=\inf\{t: M_t=0\}$，$U=\Delta X_T I_{[\![T,\infty[\![}$，则 U 为 $\mathbb{P}$- 局部可积变差过程，我们用 $\tilde{U}$ 表示 U 的可料对偶投影. 令

$$Y_t=X_t-\int_0^t\frac{1}{M_s}d[X, M]_s+\tilde{U}_t, \tag{4.1}$$

则过程 (Y_t) 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅.

证明 由于 $\int_{[0,t]}|dU_s|\leqslant\sqrt{[X, X]_t}$，故 U 为局部可积变差过程.

令 $R_n=\inf\left\{t: M_t\leqslant\frac{1}{n}\right\}$. 固定某个 n，令

$$X'=X^{R_n},\quad U'=U^{R_n}.$$

由于在 $[\![0, R_n]\!]$ 上，$M>\frac{1}{n}$，于是在 $\mathbb{P}$ 下可定义如下过程：

$$B'_t = \int_0^{t\wedge R_n} \frac{1}{M_s} I_{[M_s>0]} d[X, M]_s$$
$$= \int_0^t \frac{1}{M_s} I_{[M_s>0]} d[X', M]_s,$$

显然 (B'_t) 为 $(\mathscr{F}_t)$ 适应有限变差过程，且在 $\mathbb{Q}$ 下，(B'_t) 与过程 $\left(\int_0^{t\wedge R_n} \frac{1}{M_s} d[X, M]_s\right)$无区别．令

$$Y' = X' - B' + \widetilde{U}',$$

则 Y' 与 Y^{R_n} $\mathbb{Q}$- 无区别．由于 $R_n \uparrow T$ $\mathbb{P}$-a.s.，即 $R_n \uparrow +\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s.，于是为证 Y 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅，只需证每个 Y^{R_n} 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅，即证每个 Y' 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅．

下面，我们用 $A \sim B$ 表示 $A - B$ 为 $\mathbb{P}$- 局部鞅．我们有

$$MX' \sim [M, X'],$$
$$MB' = B'_-.M + M.B' \sim M.B' = \int_0^{\cdot} I_{[M_s>0]} d[M, X']_s$$
$$= [M, X']^{T-},$$
$$M\widetilde{U}' = M_-.\widetilde{U}' + \widetilde{U}'.M \sim M_-.\widetilde{U}' \sim M_-.U'.$$

于是有

$$MY' \sim \Delta M_T \Delta X'_T I_{[\![T,\infty[\![} + M_{T-}\Delta U'_T I_{[\![T,\infty[\![}$$
$$= I_{[R_n=T]} \Delta X_T \Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![} + M_{T-} \Delta X_T I_{[R_n=T]} I_{[\![T,\infty[\![} = 0.$$

即 MY' 为 $\mathbb{P}$- 局部鞅．故由引理 12.2，Y' 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅．定理证毕．

注 设 $\mathbb{Q}$ 等价于 $\mathbb{P}$，则 $U = 0$，$\widetilde{U} = 0$．

12.5 定义 设 (A_t) 为一适应有限变差过程．如果存在停时 $S_n \uparrow +\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s.，使得对一切 n，$A^{S_n} - A_0$ 为 $\mathbb{P}$- 可积变差过程，我们说 A 的可料对偶投影 $\mathbb{Q}$-a.s. 存在．这时仍用 $\widetilde{A}$ 表示在 $\bigcup_n [\![0, S_n]\!]$上定义的（从而 $\mathbb{Q}$-a.s. 定义的）过程，使得对一切 n，$\widetilde{A}^{S_n}$ 为 A^{S_n} 的可料对偶投影．如果 X, Y 为两个 $\mathbb{P}$- 半鞅，$A = [X, Y]$，且 A 的可料对偶投影 $\mathbb{Q}$-a.s. 存在，则用 $\langle X, Y\rangle$ 表示 $\widetilde{A}$．

下一定理给出判断 $\mathbb{P}$- 局部鞅是否为 $\mathbb{Q}$- 特殊半鞅的一个准

则.

12.6 定理 设$\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$, 令(M_t)为鞅$\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathscr{F}_t\right]$的右连续修正. 设$X$为一$\mathbb{P}$-局部鞅, 则为要$X$是$\mathbb{Q}$-特殊半鞅, 必须且只需$\langle X, M\rangle$ $\mathbb{Q}$-a.s. 存在. 若$\langle X, M\rangle$ $\mathbb{Q}$-a.s. 存在, 令

$$Y_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{M_{s-}} d\langle X, M\rangle_s, \tag{6.1}$$

则(Y_t)为$\mathbb{Q}$-局部鞅.

证明 无妨假定$X_0=0$. 设X为$\mathbb{Q}$-特殊半鞅, 由定理8.53, 存在$(\mathscr{F}_t)$停时[1]$U_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 使得对每个n,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{[X, X]_{U_n}}\right]<+\infty.$$

令

$$V_n=\inf\left\{t: M_t\geqslant n, \text{ 或 } |X_t|\geqslant n, \text{ 或} \int_0^t |d[X, M]_s|\geqslant n\right\}.$$

设$(\mathscr{F}_t)$停时$W_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{P}$-a.s., 使得每个X^{W_n}为$\mathbb{P}$-一致可积鞅. 令$S_n=U_n\wedge V_n\wedge W_n$, 则$S_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 往证$\int_0^{S_n}|d[X, M]_s|$为$\mathbb{P}$-可积. 因$S_n\leqslant U_n$, 故ΔX_{S_n}为$\mathbb{Q}$-可积, 从而$M_{S_n}\times|\Delta X_{S_n}|$为$\mathbb{P}$-可积. 又$|X_{S_n}|$为$\mathbb{P}$-可积, $|X_{S_n-}|\leqslant n$, $M_{S_n-}\leqslant n$, 故$M_{S_n-}|\Delta X_{S_n}|$为$\mathbb{P}$-可积. 于是$|\Delta M_{S_n}||\Delta X_{S_n}|$为$\mathbb{P}$-可积. 但$\int_0^{S_n-}|d[X, M]_s|\leqslant n$, 故$\int_0^{S_n}|d[X, M]_s|$为$\mathbb{P}$-可积. 依定义$\langle X, M\rangle$ $\mathbb{Q}$-a.s. 存在. 必要性得证.

现证充分性. 设$X_0=0$, 且$\langle X, M\rangle$ $\mathbb{Q}$-a.s. 存在. 令停时$S_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 使得每个$[M, X]^{S_n}$为$\mathbb{P}$-可积变差过程. 令$R_n=\inf\left\{t: M_t\leqslant\frac{1}{n}\right\}$, $T_n=R_n\wedge S_n$, 则$T_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s.. 令(Y_t)如(6.1)式定义. 则对每个n, Y^{T_n}为右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程, 并且我们有

---

1) 设T为$(\mathscr{F}_t(\mathbb{Q}))$停时, 则由定理8.34, 存在$(\mathscr{F}_t)$停时$S$, 使得$T=S$ $\mathbb{Q}$-a.s..

$$M_tY_{t\wedge T_n}=M_t\left(X_{t\wedge T_n}-\int_0^{t\wedge T_n}\frac{1}{M_{s-}}d\langle X, M\rangle_s\right).$$

令 $A_t=\int_0^t\frac{1}{M_{s-}}d\langle X, M\rangle_s^{T_n}$, 则由定理 10.6,

$$M_tA_t=\int_0^t M_{s-}dA_s-\int_0^t A_s dM_s\sim\int_0^t M_{s-}dA_s=\langle X, M\rangle_{t\wedge T_n}.$$

但我们有

$$M_tX_{t\wedge T_n}\sim[M, X]_{t\wedge T_n}\sim\langle X, M\rangle_{t\wedge T_n}.$$

故 MY^{T_n} 为 $\mathbb{P}$-局部鞅. 于是由引理 12.2, Y^{T_n} 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅, 从而 Y 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅. 特别 X 为 $\mathbb{Q}$-特殊半鞅.

下面我们给出另一形式的 Girsanov 定理.

12.7 定理 设 X 为一 $\mathbb{P}$-局部鞅, 令

$$A_t=\sum_{0<s\leq t}\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|>1]}.$$

$\widetilde{A}$ 表示 A 的 $\mathbb{P}$-可料对偶投影. 设 $\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$, (M_t) 为鞅 $\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathscr{F}_t\right]$ 的右连续修正. 令

$$Y_t=X_t-\int_0^t\frac{1}{M_{s-}}d\langle X-A, M\rangle_s-A_t+\widetilde{A}_t,$$

则 (Y_t) 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅. 此外, 为了 X 是 $\mathbb{Q}$-特殊半鞅, 必须且只需 (A_t) 为 $\mathbb{Q}$-局部可积变差过程.

证明 令 $\overline{X}=X-A+\widetilde{A}$, 则 $\overline{X}$ 为 $\mathbb{P}$-局部有界鞅, 从而 $\langle\overline{X}, M\rangle$ 存在. 令

$$Y_t=\overline{X}_t-\int_0^t\frac{1}{M_{s-}}d\langle\overline{X}, M\rangle_s,$$

由定理 12.6, (Y_t) 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅. 但我们有 $[\overline{X}, M]=[X-A, M]+[\widetilde{A}, M]$, 并且由于 $[\widetilde{A}, M]$ 为零初值 $\mathbb{P}$-局部鞅(定理 9.20), 故有 $\langle\overline{X}, M\rangle=\langle X-A, M\rangle$. 于是

$$Y_t=X_t-A_t+\widetilde{A}_t-\int_0^t\frac{1}{M_{s-}}d\langle X-A, M\rangle_s.$$

定理最后一个结论显然.

§3 概率改变下可料对偶投影的变换公式

本节及其余各节都是 Girsanov 定理的应用.

12.8 定理 设 $\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$, (M_t) 为鞅 $\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathscr{F}_t\right]$的右连续修正. 令$(A_t)$为一$(\mathscr{F}_t)$适应有限变差过程. 如果 A 的 $\mathbb{P}$- 可料对偶投影 $\widetilde{A}$ $\mathbb{Q}$-a.s. 存在(定义 12.5), 则为要(A_t)为 $\mathbb{Q}$- 局部可积变差过程, 必须且只需 $\langle A, M\rangle$ $\mathbb{Q}$-a.s. 存在. 这时有

$$\widetilde{A}_t(\mathbb{Q})=\widetilde{A}_t+\int_0^t\frac{1}{M_s}d\langle A, M\rangle_s, \tag{8.1}$$

其中 $\widetilde{A}_t(\mathbb{Q})$ 表 A 的 $\mathbb{Q}$- 可料对偶投影.

证明 必要性. 无妨假定 $A_0=0$. 设(A_t)为 $\mathbb{Q}$-局部可积变差过程. 令$(\mathscr{F}_t)$停时 $S_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 使得对一切 n, A^{S_n} 为 $\mathbb{P}$-可积变差过程, 且 A^{S_n} 为 $\mathbb{Q}$- 可积变差过程. 令

$$R_n=\inf\left\{t:M_t\geqslant n\ 或\int_0^t|d[A, M]_s|\geqslant n\right\}\wedge n,$$

再令 $T_n=R_n\wedge S_n$, 则 $T_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 并且我们有

$$\int_0^{T_n}|d[A, M]_s|\leqslant n+|\Delta A_{T_n}\Delta M_{T_n}|.$$

由于 $|\Delta A_{T_n}|$ 为 $\mathbb{Q}$- 可积, 故 $|\Delta A_{T_n}|M_{T_n}$ 为 $\mathbb{P}$- 可积. 又由于 $|\Delta A_{T_n}|$ 为 $\mathbb{P}$- 可积, 且 $M_{T_n-}\leqslant n$, 故 $|\Delta A_{T_n}||\Delta M_{T_n}|$ 为 $\mathbb{P}$- 可积. 于是每个$[A, M]^{T_n}$为 $\mathbb{P}$- 可积变差过程. 依定义$\langle A, M\rangle$ $\mathbb{Q}$-a.s. 存在.

充分性. 无妨假定 $A_0=0$. 设 $\langle A, M\rangle$ $\mathbb{Q}$-a.s. 存在. 令停时 $S_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 使得对一切 n, A^{S_n} 及 $[A, M]^{S_n}$ 为 $\mathbb{P}$- 可积变差过程. 令 $X=A-\widetilde{A}$, 则 X^{S_n} 为 $\mathbb{P}$- 一致可积鞅. 由于$[X^{S_n}, M]=[A^{S_n}, M]-[\widetilde{A}^{S_n}, M]$, 且$[\widetilde{A}^{S_n}, M]$为 $\mathbb{P}$- 局部鞅 (定理 9.20), 故$[X^{S_n}, M]$为 $\mathbb{P}$- 局部可积变差过程, 且有

$$\langle X^{S_n}, M\rangle=\langle A^{S_n}, M\rangle=\langle A, M\rangle^{S_n}.$$

于是由定理 12.6, 过程

$$X_t^{S_n}-\int_0^{t\wedge S_n}\frac{1}{M_{s-}}d\langle A, M\rangle_s$$

为 $\mathbb{Q}$-局部鞅. 但 $S_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 故过程

$$Y_t=A_t-\widetilde{A}_t-\int_0^t\frac{1}{M_{s-}}d\langle A, M\rangle_s$$

为(零初值)$\mathbb{Q}$-局部鞅. 于是(A_t)为 $\mathbb{Q}$-局部可积变差过程, 且有公式(8.1).

§4 概率改变下的随机积分

下一定理表明: 可料过程对半鞅的可积性及随机积分, 在概率绝对连续改变下保持不变.

12.9 定理 设 X 为一半鞅, H 为一 X-可积可料过程. 令 $\mathbb{Q}$ 为一关于 $\mathbb{P}$ 绝对连续的概率测度. 则在 $\mathbb{Q}$ 下, H 关于半鞅 X 可积, 且 $H\underset{\mathbb{Q}}{.}X$ 与 $H\underset{\mathbb{P}}{.}X$ $\mathbb{Q}$-无区别. 也就是说, $H\underset{\mathbb{P}}{.}X$ 可视为 H 关于 X 在 $\mathbb{Q}$ 下的随机积分.

证明 令

$$A_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta X_sI_{[|H_s\Delta X_s|>1\text{ 或 }|\Delta X_s|>1]},$$

$$Z_t=X_t-A_t.$$

设 $Z=N+B$ 为特殊半鞅 Z 的典则分解, 则由定理9.32, $H.N$ 及 $H.B$ 存在. 由于 $|\Delta Z|\leqslant1$, $|\Delta(H.Z)|\leqslant1$, 我们有 $|\Delta B|\leqslant1$, $|\Delta(H.B)|\leqslant1$(定理 8.55), 从而 $|\Delta N|\leqslant2$, $|\Delta(H.N)|\leqslant2$. 令

$$C_t=\int_0^t\frac{1}{M_{s-}}d\langle N, M\rangle_s,$$

则由定理 12.6, $Y=N-C$ 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅. 由于 $\langle H.N, M\rangle=H.\langle N, M\rangle$, 故易知 $H.C$ 在 $\mathbb{Q}$ 下存在且为可料过程. 由于 $|H\Delta Z|\leqslant1$ 且有

$$\sqrt{H^2.[Y, Y]}\leqslant\sqrt{H^2.[Z, Z]}+\sum_{s\leqslant\cdot}|H_s\Delta(B+C)_s|,$$

故过程 $\sqrt{H^2.[Y, Y]}$ 在 $\mathbb{Q}$ 下局部可积, 从而在 $\mathbb{Q}$ 下, H 关于局部鞅 Y 可积. 因此, 在 $\mathbb{Q}$ 下, H 关于半鞅 X 可积, 且 $X=Y+$

$(A+B+C)$为一 H-分解.

往证 $H \underset{\mathbb{Q}}{.} X$ 与 $H \underset{\mathbb{P}}{.} X$ $\mathbb{Q}$-无区别. 令

$$\mathscr{C}=\{]\!]0_A]\!]: A\in\mathscr{F}_0\}\cup\{]\!]T,\infty[\![: T \text{ 为}(\mathscr{F}_t)\text{停时}\},$$

则 $\mathscr{C}$ 为 π-系, 且生成可料 σ-域. 令 $\mathscr{H}$ 为使 $H \underset{\mathbb{P}}{.} X$ 与 $H \underset{\mathbb{Q}}{.} X$ $\mathbb{Q}$-无区别的有界可料过程全体. 则 $\mathscr{H}$ 为一线性空间, $1\in\mathscr{H}$, 且由定理 9.15 易知: $\{I_A: A\in\mathscr{C}\}\subset\mathscr{H}$. 此外, 令 $K^{(n)}\in\mathscr{H}$, $0\leqslant K^{(n)}\uparrow K$, 且设 K 有界, 则由定理 9.39, $K\in\mathscr{H}$. 故由单调类定理(定理 1.4), $\mathscr{H}$ 为有界可料过程全体. 由此再利用定理 9.39 (参见其注)推知 $H \underset{\mathbb{Q}}{.} X$ 与 $H \underset{\mathbb{P}}{.} X$ $\mathbb{Q}$-无区别. 定理证毕.

§5 随机积分的局部化性质

下一定理描述了随机积分的局部化性质.

12.10 定理 设 X、Y 为两个半鞅, $H\in L(X)$, $K\in L(Y)$ ($L(X)$表示 X-可积可料过程全体). 令 $A\in\mathscr{F}$, 如果在 A 上, X 与 Y 无区别, H 与 K 无区别, 则 $H.X$ 与 $K.Y$ 在 A 上无区别.

证明 无妨设 $\mathbb{P}(A)>0$. 令 $\mathbb{Q}=\dfrac{\mathbb{P}(\cdot\cap A)}{\mathbb{P}(A)}$, 则 $\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$. 这时 X 与 Y $\mathbb{Q}$-无区别, H 与 K $\mathbb{Q}$-无区别. 于是有 $H \underset{\mathbb{Q}}{.} X=K \underset{\mathbb{Q}}{.} Y$. 但由定理 12.9, $H.X$ 与 $H \underset{\mathbb{Q}}{.} X$ $\mathbb{Q}$-无区别, $K.Y$ 与 $K \underset{\mathbb{Q}}{.} Y$ $\mathbb{Q}$-无区别, 故 $H.X$ 与 $K.Y$ $\mathbb{Q}$-无区别. 此即 $H.X$ 与 $K.Y$ 在 A 上 $\mathbb{P}$-无区别.

12.11 定理 设 $A\in\mathscr{F}$. 令 X 为一半鞅, $H\in L(X)$. 如果对一切 $\omega\in A$, $X.(\omega)$ 为有限变差函数, 令 $Y=XI_A$(Y 不一定适应于$(\mathscr{F}_t)$), 则 H 关于 Y 可积, 且在 A 上, $H.X$ 与 Stieltjes 积分 $H.Y$ 无区别.

证明 与定理 12.10 证明类似.

下一定理并不涉及随机积分, 但与上面两个定理有某些相似之处.

12.12 定理 设 $A\in\mathscr{F}$. 令 X, Y 为两个半鞅.

1) 如果在 A 上, $X-Y$ 为零初值有限变差过程, 则 X^c 与 Y^c 在 A 上无区别.

2) 如果在 A 上, $X-Y$ 为零初值连续有限变差过程, 则 $[X, X]$ 与 $[Y, Y]$ 在 A 上无区别.

证明 1) 无妨设 $\mathbb{P}(A)>0$. 令 $\mathbb{Q}=\dfrac{\mathbb{P}(\cdot\cap A)}{\mathbb{P}(A)}$. 则 $\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$. 这时由 Girsanov 定理看出, 在 $\mathbb{Q}$ 下, X 与 Y 的连续鞅部分分别是

$$X_t^c(\mathbb{Q})=X_t^c-\int_0^t\frac{1}{M_s}d[X^c, M]_s=X_t^c-\int_0^t\frac{1}{M_s}d[X, M^c]_s,$$

$$Y_t^c(\mathbb{Q})=Y_t^c-\int_0^t\frac{1}{M_s}d[Y^c, M]_s=Y_t^c-\int_0^t\frac{1}{M_s}d[Y, M^c]_s,$$

其中 (M_t) 为鞅 $\dfrac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}[I_A|\mathscr{F}_t]$ 的右连续修正. 由于在 $\mathbb{Q}$ 下, $X-Y$ 为零初值有限变差过程, 故 $X^c(\mathbb{Q})$ 与 $Y^c(\mathbb{Q})$ $\mathbb{Q}$-无区别, $[X, M^c]$ 与 $[Y, M^c]$ $\mathbb{Q}$-无区别, 从而 X^c 与 Y^c $\mathbb{Q}$-无区别. 这也就是说, X^c 与 Y^c 在 A 上 $\mathbb{P}$-无区别.

2) 在 $\mathbb{Q}$ 下, $X-Y$ 为零初值连续有限变差过程, 故有

$$\begin{aligned}[X, X](\mathbb{Q})&=[Y+(X-Y), Y+(X-Y)](\mathbb{Q})\\&=[Y, Y](\mathbb{Q}).\end{aligned}$$

这表明 $[X, X]$ 与 $[Y, Y]$ $\mathbb{Q}$-无区别, 即 $[X, X]$ 与 $[Y, Y]$ 在 A 上 $\mathbb{P}$-无区别.

§6 参照 σ-域族缩小下的半鞅及随机积分

12.13 引理 设 X 为一半鞅. 如果 $\mathbb{E}[[X, X]_\infty]<\infty$, 则 X 为特殊半鞅. 此外, 令 $X=M+A$ 为其典则分解, 则 M 为平方可积鞅.

证明 由定理 8.53, X 为特殊半鞅. 设 S 为一可料时, 且 $S>0$, 由于 $\mathbb{E}[\Delta M_S|\mathscr{F}_{S-}]=0$(定理 8.16), 故有

$$\Delta A_S = \mathbb{E}[\Delta A_S \mid \mathscr{F}_{S-}] = \mathbb{E}[\Delta X_S \mid \mathscr{F}_{S-}].$$

从而有 $\mathbb{E}[\Delta A_S^2] \leqslant \mathbb{E}[\Delta X_S^2]$. 令 (S_n) 为一穷举 A 的跳的标准可料时序列, 则有

$$[A, A]_\infty = \sum_n \Delta A_{S_n}^2,$$

故有

$$\mathbb{E}[[A, A]_\infty] = \sum_n \mathbb{E}[\Delta A_{S_n}^2] \leqslant \mathbb{E}[\sum_n \Delta X_{S_n}^2]$$

$$\leqslant \mathbb{E}[[X, X]_\infty] < \infty.$$

由于 $[M, M] \leqslant 2([X, X] + [A, A])$, 故 $\mathbb{E}[M, M]_\infty < \infty$, 从而 M 为平方可积鞅.

下一引理是 Borel-Cantelli 引理的一个简单的应用.

12.14 引理 设 (ξ_n) 为一列非负有限值随机变量, 则存在一列严格正实数 (C_n), 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n < +\infty$ a.s..

证明 选取一非负实数列 a_n, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_n > a_n) < \infty$. 由 Borel-Cantelli 引理, $\mathbb{P}(\limsup_n [\xi_n > a_n]) = 0$. 这表明, 对几乎所有 ω, 存在正整数 $N(\omega)$, 使得当 $n \geqslant N(\omega)$ 时, 有 $\xi_n(\omega) \leqslant a_n$. 令 $C_n = (2^n a_n)^{-1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n < +\infty$ a.s..

下一定理是有关半鞅的一个基本结果, 今后将常用到它.

12.15 定理 设 X 为一半鞅. 则存在一与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度 $\mathbb{Q}$, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ 有界, 使得在 $\mathbb{Q}$ 下, X 为特殊半鞅, 并且 X 有如下典则分解: $X = M + A$, 其中 M 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅, A 为零初值可料有限变差过程, 并具有如下性质: 对一切 $t \in \mathbb{R}_+$, $M^t = (M_{\cdot\wedge t})$ 为 $\mathbb{Q}$-平方可积鞅, $A^t = (A_{\cdot\wedge t})$ 为 $\mathbb{Q}$-可积变差过程.

证明 由引理 12.14, 存在 $C_n > 0$, 使得 $\sum_n C_n [X, X]_n < \infty$ a.s.. 令 $\overline{U} = \dfrac{1}{1 + \sum_n C_n [X, X]_n}$, $\overline{L}_\infty = \dfrac{\overline{U}}{\mathbb{E}[\overline{U}]}$, $d\mathbb{P} = \overline{L}_\infty d\mathbb{P}$. 则 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{P}$ 等价, 且对一切 n, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[[X, X]_n] < \infty$. 故由引理 12.13, 在

$\overline{\mathbb{P}}$ 下，X 为特殊半鞅. 令 $X=\overline{M}+\overline{A}$ 为其典则分解，则对一切 n，$\overline{M}^n$ 为 $\overline{\mathbb{P}}$-平方可积鞅.

由引理 12.14，存在 $d_n>0$，使得 $\sum_n d_n\int_0^n |d\overline{A}_s|<+\infty$ a.s.. 令

$$U=\frac{1}{1+\sum_n d_n\int_0^n |d\overline{A}_s|},\quad L_\infty=\frac{U}{\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}}[U]},\quad d\mathbb{Q}=L_\infty d\overline{\mathbb{P}}.$$

则 $\mathbb{Q}$ 与 $\overline{\mathbb{P}}$ 等价（从而与 $\mathbb{P}$ 等价）. 设 (L_t) 为有界鞅 $\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}}[L_\infty|\mathscr{F}_t]$ 的右连续修正. 则在 $\overline{\mathbb{P}}$ 下，$[L,\overline{M}]$ 的可料对偶投影存在，记为 $\langle L,\overline{M}\rangle$. 由定理 12.6，$X$ 为 $\mathbb{Q}$-特殊半鞅，且在 $\mathbb{Q}$ 下的典则分解为

$$\begin{aligned}X_t&=M_t+A_t\\&=\left(\overline{M}_t-\int_0^t\frac{1}{L_{s-}}d\langle L,\overline{M}\rangle_s\right)+\left(\int_0^t\frac{1}{L_{s-}}d\langle L,\overline{M}\rangle_s+\overline{A}_t\right)\end{aligned}$$

由于在 $\overline{\mathbb{P}}$ 下，$\overline{M}^n$ 为平方可积鞅，故由 K-W 不等式，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}}\left[\int_0^n |d\langle L,\overline{M}\rangle_s|\right]\\&\qquad\leqslant(\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}}[\langle\overline{M},\overline{M}\rangle_n])^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}}[\langle L,L\rangle_\infty])^{\frac{1}{2}}<\infty.\end{aligned}$$

又由于过程 $\int_0^\cdot |d\langle L,\overline{M}\rangle_s|$ 可料，且 $\frac{L_\infty}{L_{\cdot}}$ 的可料投影为 1，故有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^n\frac{1}{L_{s-}}|d\langle L,\overline{M}\rangle_s|\right]&=\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}}\left[\int_0^n\frac{L_\infty}{L_{s-}}|d\langle L,\overline{M}\rangle_s|\right]\\&=\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}}\left[\int_0^n|d\langle L,\overline{M}\rangle_s|\right]<\infty.\end{aligned}$$

但显然有 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^n |d\overline{A}_s|\right]<\infty$，故有 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^n |dA_s|\right]<\infty$.

另一方面，由于 $\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}}[X,X]_n<\infty$，故有 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X,X]_n<\infty$（因 L_∞ 有界），从而由引理 12.13，M^n 为 $\mathbb{Q}$-平方可积鞅. 定理得证.

注 这一定理显然对有限多个半鞅也成立. 事实上，对可列多个半鞅也成立.

下面，我们令 $(\mathscr{G}_t)$ 为另一满足通常条件的 σ-域族，使得对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $\mathscr{G}_t\subset\mathscr{F}_t$.

下一定理表明：过程的半鞅性质在参照 σ-域族缩小下保持不变.

12.16 定理 设 (X_t) 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 半鞅. 如果 (X_t) 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 适应，则 (X_t) 为 $(\mathscr{G}_t)$ 半鞅. 此外 $[X, X](\mathscr{F}_t)$ 与 $[X, X](\mathscr{G}_t)$ 无区别.

证明 由定理 12.15，令 $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$，使得在 $\mathbb{Q}$ 下，有 $X=M+A$，其中对每个 $t\in\mathbb{R}_+$，$M^t=(M_{s\wedge t})_{s\in\mathbb{R}_+}$ 为 $\mathbb{Q}$-平方可积鞅，A^t 为 $\mathbb{Q}$-可积变差可料过程. 特别，每个 X^t 为 $\mathbb{Q}$-拟鞅. 于是由定理 8.61，每个 X^t 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 为 $\mathbb{Q}$-拟鞅. 因此，在 $\mathbb{Q}$ 下，(X_t) 为 $(\mathscr{G}_t)$ 半鞅. 由于 $\mathbb{P}\sim\mathbb{Q}$，故在 $\mathbb{P}$ 下，(X_t) 为 $(\mathscr{G}_t)$ 半鞅. 此外，由定理 10.7 的注知，$[X, X](\mathscr{F}_t)$ 与 $[X, X](\mathscr{G}_t)$ 无区别. 定理证毕.

下一定理表明：有界可料过程对半鞅的随机积分，在参照 σ-域族缩小下保持不变.

12.17 定理 设 (X_t) 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 半鞅，关于 $(\mathscr{G}_t)$ 适应. 令 H 为一 $(\mathscr{G}_t)$ 可料过程（从而为 $(\mathscr{F}_t)$ 可料过程）. 如果 H 关于 X 按 $(\mathscr{F}_t)$ 可积，则 H 关于 X 按 $(\mathscr{G}_t)$ 也可积，且 $\underset{(\mathscr{G}_t)}{H.X}$ 与 $\underset{(\mathscr{F}_t)}{H.X}$ 无区别.

证明 首先我们证明 H 关于 X 按 $(\mathscr{G}_t)$ 可积. 令

$$A_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta X_s I_{[|H_s\Delta X_s|>1]\text{ 或 }[|\Delta X_s|>1]},$$

$$Z_t=X_t-A_t.$$

由定理 12.15 及定理 12.9，必要时用一等价概率代替 $\mathbb{P}$，不妨假定 $(\mathscr{F}_t)$ 特殊半鞅 Z 及 $\underset{(\mathscr{F}_t)}{H.Z}$ 有如下典则分解：$Z=N+B$，$\underset{(\mathscr{F}_t)}{H.Z}=N'+B'$，其中 N 及 N' 为 $(\mathscr{F}_t)$-鞅，B 及 B' 为 $(\mathscr{F}_t)$ 可料有限变差过程，使得对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,t]}|dB_s|\right]<+\infty,\quad \mathbb{E}\left[\int_{[0,t]}|dB'_s|\right]<+\infty.$$

但由定理 9.31, 有 $B'=H.B$. 故对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}\left[\int_{[0,t]}|H_s|\cdot|dB_s|\right]<+\infty$. 现令 $\widetilde{B}$ 为 B 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 的可料对偶投影,则有 $\mathbb{E}\left[\int_{[0,t]}|H_s||d\widetilde{B}_s|\right]<+\infty$. 特别 $H.\widetilde{B}$ 存在. 此外,由系 6.27, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有 $\widetilde{B}^t=(\widetilde{B})^t$. 于是由定理6.33.2), 对 $s<t$, 我们有

$$\mathbb{E}[B_t-\widetilde{B}_t|\mathscr{G}_s]=\mathbb{E}[B_s-\widetilde{B}_s|\mathscr{G}_s].$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_t+B_t-\widetilde{B}_t|\mathscr{G}_s]&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[N_t|\mathscr{F}_s]|\mathscr{G}_s]+\mathbb{E}[B_t-\widetilde{B}_t|\mathscr{G}_s]\\&=\mathbb{E}[N_s+B_s-\widetilde{B}_s|\mathscr{G}_s]=N_s+B_s-\widetilde{B}_s.\end{aligned}$$

这表明 $N+B-\widetilde{B}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$-鞅. 我们有

$$\sqrt{H^2.[N+B-\widetilde{B},\ N+B-\widetilde{B}]}\leqslant\sqrt{H^2.[Z,\ Z]}+\sum_{s\leqslant\cdot}|H_s\Delta\widetilde{B}_s|.$$

由于 $|H\Delta Z|\leqslant 1$, 故由上式知过程 $\sqrt{H^2.[N+B-\widetilde{B},\ N+B-\widetilde{B}]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部可积. 这表明 H 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 鞅 $N+B-\widetilde{B}$ 的随机积分存在. 综上所证 H 关于 X 按 $(\mathscr{G}_t)$ 可积, 且有

$$\underset{(\mathscr{G}_t)}{H.X}=\underset{(\mathscr{G}_t)}{H.}(N+B-\widetilde{B})+H.(A+\widetilde{B}).$$

等式右边第二个积分是 Stieltjes 积分.

下面我们证明 $\underset{(\mathscr{G}_t)}{H.X}$ 与 $\underset{(\mathscr{F}_t)}{H.X}$ 无区别. 为此, 由定理 9.39 (参看其注), 只需考虑 H 为有界 $(\mathscr{G}_t)$ 可料过程情形. 令 $\mathscr{C}=\{[\![0_A]\!]:A\in\mathscr{G}_0\}\cup\{]\!]T,\ \infty[\![:T$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时$\}$, 显然对一切 $A\in\mathscr{C}$, 有 $\underset{(\mathscr{G}_t)}{I_A.X}=\underset{(\mathscr{F}_t)}{I_A.X}$. 于是容易由单调类定理推知: 对一切有界 $(\mathscr{G}_t)$ 可料过程 H, 有 $\underset{(\mathscr{G}_t)}{H.X}=\underset{(\mathscr{F}_t)}{H.X}$. 定理证毕.

§7　Jacod-Meyer 定理

令 $(\Omega,\ \mathscr{F}^0)$ 为一可测空间, $(\mathscr{F}_t^0)$ 为一族右连续上升的子 σ-域. 设 X 为一 $(\mathscr{F}_t^0)$ 适应右连续过程, $\mathbb{P}$ 为 $(\Omega,\ \mathscr{F}^0)$ 上的一概率测度. 称 $\mathbb{P}$ 为关于 X 的半鞅测度, 如果在 $\mathbb{P}$ 下, X 关于 $(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}})$ 为半鞅. 这里记号 $(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}})$ 见定义 5.33.

下一定理属于 Jacod 及 Meyer(见 Meyer [12]).

12.18 定理 设 $(\mathbb{P}_n)$ 为 $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ 上一列关于 X 的半鞅测度. 设 $\mathbb{Q}$ 为$(\Omega, \mathscr{F}^0)$上的一概率测度. 如果 $\mathbb{Q}$ 关于测度$\sum_n \mathbb{P}_n$ 绝对连续,则 $\mathbb{Q}$ 为关于 X 的半鞅测度.

证明 给定一正整数 m, 令 $Y_t = X_{t\wedge m}$. 由定理 12.15, 对每个 n, 存在 $\mathbb{P}'_n \sim \mathbb{P}_n$, 使得在 $\mathbb{P}'_n$ 下, Y 为拟鞅. 这时 $\mathbb{Q}$ 关于测度 $\sum_n \mathbb{P}'_n$ 仍绝对连续. 选取一严格正实数列(λ_n), 使得

$$\sum_n \lambda_n = 1, \quad \sum_n \lambda_n \mathrm{Var}(Y, \mathbb{P}'_n) < \infty.$$

令 $\mathbb{P} = \sum_n \lambda_n \mathbb{P}'_n$, 则 $\mathbb{P}$ 为概率测度, 且 $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

往证在 $\mathbb{P}$ 下, Y 为拟鞅. 下面, 我们用 $\mathbb{E}$ 表示 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$, 用 $\mathbb{E}_n$ 表示 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}'_n}$. 由于 $\mathbb{E}_n[|Y_t|] \leqslant \mathrm{Var}(Y, \mathbb{P}'_n)$, 我们有

$$\mathbb{E}[|Y_t|] = \sum_n \lambda_n \mathbb{E}_n[|Y_t|] \leqslant \sum_n \lambda_n \mathrm{Var}(Y, \mathbb{P}'_n) < +\infty.$$

令 $M_t^{(n)} = \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{P}'_n}{d\mathbb{P}} \middle| \mathscr{F}_t^0\right]$, 则对一切 $s<t$, 有

$$\mathbb{E}[Y_s - Y_t | \mathscr{F}_s^0] = \sum_n \lambda_n M_s^{(n)} \mathbb{E}_n[Y_s - Y_t | \mathscr{F}_s^0],$$

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}[Y_s - Y_t | \mathscr{F}_s^0]| \leqslant \sum_n \lambda_n \mathbb{E}_n[|\mathbb{E}_n[Y_s - Y_t | \mathscr{F}_s^0]|].$$

这表明(见定义 8.57)

$$\mathrm{Var}(Y, \mathbb{P}) \leqslant \sum_n \lambda_n \mathrm{Var}(Y, \mathbb{P}'_n) < +\infty.$$

于是我们证明了 Y 在 $\mathbb{P}$ 下为拟鞅.

由于 m 是任意正整数, 故在 $\mathbb{P}$ 下, X 为半鞅. 从而由定理 12.3, 在 $\mathbb{Q}$ 下, X 为半鞅. 依定义, $\mathbb{Q}$ 为关于 X 的半鞅测度.

现在我们回到本章的一般假定, 即 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为一完备概率空间, $(\mathscr{F}_t)$为满足通常条件的子 σ- 域族.

下一定义允许我们在一个子空间上讨论过程的半鞅性质.

12.19 定义 设 $A \in \mathscr{F}$, 且 $\mathbb{P}(A) > 0$. 令 $\mathbb{P}_A = \dfrac{\mathbb{P}(\cdot \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$. 设$(X_t)$为一右连续适应过程. 如果在 $\mathbb{P}_A$ 下, X 为半鞅, 则称 X

限于 A 为半鞅.

设 (X_t) 为一右连续适应过程. 如果存在 $(A_n)\subset\mathscr{F}$, 使得 $\bigcup_n A_n=\Omega$, 且使得限于每个 A_n, X 为半鞅, 则自然地称 X 为 σ-半鞅. 下一定理表明, σ-半鞅仍为通常的半鞅.

12.20 定理 设 (X_t) 为一右连续适应过程. 如果存在 $(A_n)\subset\mathscr{F}$, 使得每个 $\mathbb{P}(A_n)>0$, 且 $\bigcup_n A_n=\Omega$, 同时使得限于每个 A_n, X 为半鞅, 则 (X_t) 为半鞅.

证明 由于 $\mathbb{P}$ 关于 $\sum_n \mathbb{P}_{A_n}$ 绝对连续, 故由定理 12.18 推得定理的结论.

下一定理也是定理 12.18 的直接推论.

12.21 定理 设 (X_t) 为一右连续适应过程. 令 $\mathscr{C}=\{A\in\mathscr{F}: \mathbb{P}(A)>0$, 且 X 限于 A 为半鞅$\}$. 若 $\mathscr{C}$ 非空, 令 $B=\mathrm{ess.\,sup}\,\mathscr{C}$ (定义见定理 1.23 的注), 则 X 限于 B 为半鞅.

§8 半鞅的刻划

令 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为一完备概率空间. 我们用 L^1 表示可积随机变量全体, B 表示有界随机变量全体. 设 G, H 为 L^1 的两个子集, 我们令 $G-H=\{x-y: x\in G, y\in H\}$. 此外, 对 L^1 的子集 G, 我们用 $\overline{G}$ 表示 G 在 L^1 中的闭包.

12.22 定理 设 K 为 L^1 中的一凸集, 且 $0\in K$. 则下列三断言等价:

1) 对一切 $\eta\in(L^1)^+\setminus\{0\}$, 存在 $c>0$, 使得 $c\eta\notin\overline{K-B^+}$;

2) 设 $A\in\mathscr{F}$ 且 $\mathbb{P}(A)>0$, 则存在 $c>0$, 使得 $cI_A\notin\overline{K-B^+}$;

3) 存在一有界随机变量 Z, 使得 $Z>0$ a.s., 且 $\sup_{\xi\in K}\mathbb{E}[Z\xi]<+\infty$.

证明 1)$\Rightarrow$2) 显然. 往证 2)$\Rightarrow$3). 设 2) 成立. 令 $A\in\mathscr{F}$, 使得 $\mathbb{P}(A)>0$. 依假定, 存在 $c>0$, 使得 $cI_A\notin\overline{K-B^+}$. 由于 $K-$

B^+ 为凸集，B 为 L^1 的对偶空间，故由 Asoli-Mazur 定理[1)]，存在一有界随机变量 Y，使得

$$(22.1)\qquad \sup_{\xi\in K,\eta\in B^+}\mathbb{E}[Y(\xi-\eta)]<c\,\mathbb{E}[YI_A].$$

特别在上式中令 $\xi=0$，$\eta=\alpha Y^-(\alpha>0)$，我们有

$$\alpha\,\mathbb{E}[(Y^-)^2]<c\,\mathbb{E}[YI_A].$$

由于上式对一切 $\alpha>0$ 成立，故 $Y^-=0$ a.s.．于是 $Y\in B^+$．此外显然有 $\mathbb{P}(Y>0)>0$．必要时用 $\frac{Y}{\mathbb{E}[Y]}$ 代替 Y，不妨设 $\mathbb{E}[Y]=1$．这时，由(22.1)得

$$\sup_{\xi\in K}\mathbb{E}[Y\xi]<c.$$

令 $H=\{Y\in B^+:\mathbb{E}[Y]=1,\ \sup_{\xi\in K}\mathbb{E}[Y\xi]<+\infty\}$．由上所证，$H$ 非空．再令 $\mathscr{C}=\{[Z=0]:Z\in H\}$．往证 $\mathscr{C}$ 对集合的可列交运算封闭．设 (Z_n) 为 H 中的元素序列，令

$$c_n=\sup_{\xi\in K}\mathbb{E}[Z_n\xi],\quad d_n=\|Z_n\|_{L^\infty}.$$

取一严格正实数序列 (b_n)，使得

$$\sum_n b_n=1,\quad \sum_n c_nb_n<+\infty,\quad \sum_n b_nd_n<+\infty.$$

令 $Z=\sum_n b_nZ_n$，则显见 $Z\in H$，且 $[Z=0]=\bigcap_n[Z_n=0]$．这表明 $\mathscr{C}$ 对集合的可列交运算封闭．于是，存在 $Z\in H$，使得

$$(22.2)\qquad \mathbb{P}([Z=0])=\inf_{Y\in H}\mathbb{P}([Y=0])=\inf_{C\in\mathscr{C}}\mathbb{P}(C).$$

往证 $Z>0$ a.s.，这导致 3)成立．我们用反证法．假定 $\mathbb{P}([Z=0])>0$．令 $A=[Z=0]$．则由前面所证，存在 $Y\in H$，使 (22.1) 成立．特别我们有 $\mathbb{E}[YI_{[Z=0]}]>0$．这表明 $\mathbb{P}([Y>0]\cap[Z=0])>0$．由此推得 $\mathbb{P}([Y=0]\cap[Z=0])<\mathbb{P}([Z=0])$．但 $[Y=0]\cap[Z=0]\in\mathscr{C}$，这与(22.2)矛盾．于是 2)⇒3)得证．

现在证明 3)⇒1)．假定 1) 不成立．则存在 $\eta\in(L^1)^+\setminus\{0\}$，

---

1) 例如见关肇直([1]p. 82)．

使得对一切自然数 n，有 $n\eta\in\overline{K-B^+}$. 于是，对每个 n，存在 $\xi_n\in K$，$\eta_n\in B^+$，$\delta_n\in L^1$，使得 $n\eta=\xi_n-\eta_n-\delta_n$，且 $\|\delta_n\|_{L^1}\leqslant\frac{1}{n}$. 这时，我们有 $\xi_n\geqslant n\eta+\delta_n$. 从而对一切严格正有界随机变量 Z，我们有

$$\sup_{\xi\in K}\mathbb{E}[Z\xi]\geqslant\sup_n\mathbb{E}[Z\xi_n]=+\infty.$$

这表明 3) 不成立. 定理证毕.

作为这一定理的一个重要推论，我们有

12.23 定理　设 K 为 L^1 中的一凸集. 如果对任一 K 中元素序列 (ξ_n)，有 $\frac{\xi_n^+}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0$[1]. 则存在一严格正有界随机变量 Z，使得 $\sup_{\xi\in K}\mathbb{E}[Z\xi]<+\infty$.

证明　首先，不妨假定 $0\in K$，否则任取一 $\eta\in K$，考虑 $\tilde{K}=\{x-\eta: x\in K\}$. 假定定理 12.22 中的断言 1) 不成立. 则由定理 12.22 3)⇒1) 的证明，存在 $\eta\in(L^1)^+\setminus\{0\}$，且对每个 n，存在 $\xi_n\in K$，$\delta_n\in L^1$，使得 $\|\delta_n\|_{L^1}\leqslant\frac{1}{n}$，$\frac{\xi_n}{n}\geqslant\eta+\frac{\delta_n}{n}$. 这时，我们没有 $\frac{\xi_n^+}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0$. 这与定理假设矛盾. 因此定理 12.22 中的断言 1) 必成立，即有本定理结论.

下面，我们着手研究半鞅的刻划. 为此先引入一些必要的记号.

设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 为一完备概率空间，$(\mathscr{F}_t)$ 为一满足通常条件的 σ-域族. 我们用 $\mathscr{H}$ 表示如下形式的有界可料过程全体：

$$H=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i I_{]t_i,t_{i+1}]}.$$

其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n<+\infty$，$\xi_i$ 为 $\mathscr{F}_{t_i}$ 可测，且 $|\xi_i|\leqslant 1$.

设 X 为一实值过程，对每个 $H\in\mathscr{H}$，我们如下定义一过程：

---

1) 容易看出，这一条件等价于如下条件：对任给 $\varepsilon>0$，存在 $c>0$，使得对一切 $\xi\in K$，有 $\mathbb{P}([\xi>c])\leqslant\varepsilon$.

$$J(X, H)_t=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i(X_{t\wedge t_{i+1}}-X_{t\wedge t_i}).$$

显然,对每个 t, 映象 $(X, H)\mapsto J(X, H)_t$ 是双线性的. 此外,若 X 为半鞅,则有 $J(X, H)=H.X$.

下一定理刻划了半鞅.

12.24 定理 设 X 为一 $(\mathscr{F}_t)$-适应右连左极过程. 则为要 X 是半鞅,必须且只需对任一 $\mathscr{H}$ 中的元素序列 $(H^{(n)})$ 及一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有 $\frac{J(X, H^{(n)})_t}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0$.

证明 必要性. 设 X 为一半鞅. 令 $t\in\mathbb{R}_+$, $(H^{(n)})$ 为 $\mathscr{H}$ 中的元素序列, 则 $\left|\frac{H^{(n)}}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$. 故由定理 9.39,

$$\frac{J(X, H^{(n)})_t}{n}=\left(\frac{H^{(n)}}{n}\cdot X\right)_t\xrightarrow{\mathbb{P}}0.$$

充分性. 设定理的条件满足. 任意选定 $t\in\mathbb{R}_+$, 往证 X^t 为半鞅. 由于假定 X 为右连左极过程, 故 $X_t^*=\sup\limits_{s\leqslant t}|X_s|<+\infty$ a.s.. 必要时用一等价概率测度代替 $\mathbb{P}$(这时定理条件仍成立),不妨假定 $\mathbb{E}[X_t^*]<+\infty$. 令

$$K=\{J(X, H)_t: H\in\mathscr{H}\},$$

则 K 为 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 中的凸集. 由假定, 对任一 K 中元素序列 (ξ_n), 有 $\frac{\xi_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0$. 故由定理 12.23, 存在一严格正有界随机变量 Z, 使得 $\mathbb{E}[Z]=1$, 且 $\sup\limits_{\xi\in K}\mathbb{E}[Z\xi]<+\infty$. 令 $\tilde{\mathbb{P}}=Z.\mathbb{P}$, 则 $\tilde{\mathbb{P}}$ 为一与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度. 由于 Z 有界, 故 $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(X_t^*)=\mathbb{E}[ZX_t^*]<+\infty$. 往证 X^t 在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下为拟鞅. 设 $\tau: 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ 为 $[0, t]$ 的一有穷分割, 令 $H^{(\tau)}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\xi_i I_{]t_i, t_{i+1}]}$, 其中

$$\xi_i=\operatorname{sgn}(\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\mathscr{F}_{t_i}]),$$

则 $H^{(\tau)}\in\mathscr{H}$, 且有

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[J(X, H^{(\tau)})] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\right]$$

$$= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|\mathscr{F}_{t_i}]\right]$$

$$= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sum_{i=0}^{n-1}|\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|\mathscr{F}_{t_i}]|\right].$$

于是我们有

$$\mathrm{Var}_{\tilde{\mathbb{P}}}(X^t) = \sup_{\tau}\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sum_{i=0}^{n-1}|\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|\mathscr{F}_{t_i}]|\right] + \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[|X_t|]$$

$$= \sup_{\tau}\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[J(X, H^{(\tau)})] + \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[|X_t|]$$

$$= \sup_{\tau}\mathbb{E}[ZJ(X, H^{(\tau)})] + \mathbb{E}[Z|X_t|] < +\infty.$$

这表明 X^t 在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下为拟鞅，从而 X^t 在 $\mathbb{P}$ 下为半鞅. 由于 $t\in\mathbb{R}_+$ 是任意选定的，故 X 为半鞅. 定理得证.

第十三章

随机微分方程

在本章，我们令 $\mathscr{X}$ 表示右连左极适应过程全体，$\mathscr{P}$ 表示可料过程全体。我们将研究如下类型的随机微分方程(积分方程)：

$$(*)\qquad X_t=\Phi(X)_t+\int_0^t F(X)_s dM_s,$$

其中 M 为一半鞅；F 为 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{P}$ 中的映象，使得对一切 $X\in\mathscr{X}$，$F(X)$关于 M 可积；Φ 为 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 中的映象。在某些条件下，我们将证明方程(*)在 $\mathscr{X}$ 中有唯一解，并且研究随机微分方程解的稳定性。

应该指出，本章的结果可以推广到如下更一般的随机微分方程：

$$(**)\qquad X_t=\Phi(X)_t+\sum_{i=1}^n\int_0^t F^i(X)_s dM_s^i,$$

甚至可以推广到向量方程或矩阵方程。研究方程(**)较之研究方程(*)，除了增加记号上的复杂性外，不产生任何实质性的困难。

§1 空间 $\mathscr{S}^p$ 与半鞅空间 $\mathscr{H}^p$

我们引入空间 $\mathscr{S}^p$ 及 $\mathscr{H}^p$，这里 $1\leqslant p\leqslant+\infty$。

13.1 定义 设 X 为一可选过程，令

$$\|X\|_{\mathscr{S}^p}=\|X^*\|_{L^p},$$

其中 $X^*=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}|X_t|$。称 X 属于 $\mathscr{S}^p$ (或 X 为 $\mathscr{S}^p$ 过程)，如果 $\|X\|_{\mathscr{S}^p}<+\infty$。

显然 $\mathscr{S}^p \cap \mathscr{D}$ 按范数 $\| \|_{\mathscr{S}^p}$ 为一 Banach 空间.

13.2 定义 设 M 为一半鞅, $M=N+A$ 为 M 的一个分解, 其中 M 为局部鞅, A 为有限变差过程. 令

$$j_p(N,\ A)=\left\| [N,\ N]_\infty^{\frac{1}{2}}+\int_{0-}^\infty |dA_s| \right\|_{L^p},$$

$$\|M\|_{\mathscr{H}^p}=\inf_{M=N+A} j_p(N,\ A).$$

这里 inf 是在 M 的全体分解 $M=N+A$ 上取的. 称 M 属于 $\mathscr{H}^p$ (或 M 为 $\mathscr{H}^p$ 半鞅), 如果 $\|M\|_{\mathscr{H}^p}<+\infty$.

显然, $\mathscr{H}^p$ 半鞅为特殊半鞅.

注 设 M 为 $\mathscr{H}^p$ 鞅, 其 $\mathscr{H}^p$ 范数为 $j_p(M,\ O)$. 令 $M=N+A$ 为 M 的一个分解, 则有

$$[M,\ M]_\infty^{\frac{1}{2}}\leqslant [N,\ N]_\infty^{\frac{1}{2}}+[A,\ A]_\infty^{\frac{1}{2}}\leqslant [N,\ N]_\infty^{\frac{1}{2}}+\int_{0-}^\infty |dA_s|,$$

从而 $j_p(N,\ A)\geqslant j(M,\ O)$. 因此, M 作为 $\mathscr{H}^p$ 鞅或 $\mathscr{H}^p$ 半鞅, 其 $\mathscr{H}^p$ 范数相同. 这表明, $\mathscr{H}^p$ 鞅空间可以保范地嵌入到 $\mathscr{H}^p$ 半鞅空间. 因而对半鞅仍采用 $\mathscr{H}^p$ 这一记号不致引起混淆.

13.3 引理 1) 设 $1\leqslant p<+\infty$, 则存在常数 $C_p>1$, 使得对一切 $M\in\mathscr{H}^p$, 有

$$\|M\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant C_p\|M\|_{\mathscr{H}^p}. \tag{3.1}$$

2) 设 $1\leqslant p<+\infty$, $M\in\mathscr{H}^p$. 令 $M=\bar{N}+\bar{A}$ 为 M 的典则分解, 即 $\bar{N}$ 为局部鞅, $\bar{A}$ 为可料有限变差过程, 则有

$$\|M\|_{\mathscr{H}^p}\leqslant j_p(\bar{N},\ \bar{A})\leqslant (2+2p)\|M\|_{\mathscr{H}^p}. \tag{3.2}$$

特别, $\mathscr{H}^p$ 为一 Banach 空间.

证明 1) 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 M 的一个分解: $M=N+A$, 使得 $j_p(N,\ A)\leqslant\|M\|_{\mathscr{H}^p}+\varepsilon$. 故由 Burkholder 不等式及 Davis 不等式, 我们有

$$\|M\|_{\mathscr{S}^p}=\|M^*\|_{L^p}\leqslant\|N^*\|_{L^p}+\|A^*\|_{L^p}$$
$$\leqslant\bar{C}_p\|[N,N]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_{L^p}+\left\|\int_{0-}^\infty|dA_s|\right\|_{L^p}$$
$$\leqslant(\bar{C}_p+1)j_p(N,A)\leqslant(\bar{C}_p+1)(\|M\|_{\mathscr{H}^p}+\varepsilon).$$

记 $C_p=\bar{C}_p+1$, 令 $\varepsilon\downarrow 0$, 立刻得到(3.1).

2) 令 $M=N+A$ 为 M 的一个分解, 使得 $j_p(N,A)<\infty$. 由于 $j_p(N,A)=j_p(N+A_0,A-A_0)$, 不妨设 $A_0=0$. 我们有

$$\bar{A}=\widetilde{A},\ \bar{N}=N+A-\widetilde{A}.$$

由 Garsia 引理 (引理 11.35) 及 Hölder 不等式 (见引理 11.34 的注), 我们有

$$\left\|\int_{0-}^\infty|d\bar{A}_s|\right\|_{L^p}\leqslant p\left\|\int_{0-}^\infty|dA_s|\right\|_{L^p}.$$

由于 $$[\bar{N},\bar{N}]_\infty^{\frac{1}{2}}\leqslant[N,N]_\infty^{\frac{1}{2}}+\int_{0-}^\infty|dA_s|+\int_{0-}^\infty|d\widetilde{A}_s|,$$

故有 $$\|[\bar{N},\bar{N}]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_{L^p}\leqslant\|[N,N]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_{L^p}+(1+p)\left\|\int_{0-}^\infty|dA_s|\right\|_{L^p}.$$

于是有

$$j_p(\bar{N},\bar{A})\leqslant\|[\bar{N},\bar{N}]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_{L^p}+\left\|\int_{0-}^\infty|d\bar{A}_s|\right\|_{L^p}$$
$$\leqslant\|[N,N]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_{L^p}+(1+2p)\left\|\int_{0-}^\infty|dA_s|\right\|_{L^p}$$
$$\leqslant(2+2p)j_p(N,A),$$

由此得(3.2).

下一引理对今后非常有用.

13.4 引理 令 $1\leqslant p\leqslant+\infty$, $1\leqslant q\leqslant+\infty$, $1\leqslant r\leqslant+\infty$, 使得 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. 设 $M\in\mathscr{H}^q$, $X\in\mathscr{S}^p$, 且 X 为一可料过程, 则 X 关于 M 可积, 且有

(4.1) $$\|X.M\|_{\mathscr{H}^r}\leqslant\|X\|_{\mathscr{S}^p}\|M\|_{\mathscr{H}^q}.$$

如果 $r<\infty$, 则还有

(4.2) $$\|X.M\|_{\mathscr{S}^r}\leqslant C_r\|X\|_{\mathscr{S}^p}\|M\|_{\mathscr{H}^q}.$$

证明 (4.2)由(4.1)及(3.1)推得. 只需证(4.1). 令 $M=N+A$ 为 M 的一个分解,使得 $j_q(N,A)<+\infty$. 我们有

$$\left(\int_{0-}^{\infty} X_s^2 d[N,N]_s\right)^{\frac{1}{2}}+\int_{0-}^{\infty}|X_s|\,|dA_s|$$

$$\leqslant X^*\left([N,N]_\infty^{\frac{1}{2}}+\int_{0-}^{\infty}|dA_s|\right).$$

由 Hölder 不等式($\|\xi\eta\|_{L^r}\leqslant\|\xi\|_{L^p}\|\eta\|_{L^q}$),

$$\mathbb{E}\left[X^*\left([N,N]_\infty^{\frac{1}{2}}+\int_{0-}^{\infty}|dA_s|\right)\right]\leqslant\|X\|_{\mathscr{S}^p}j_q(N,A)<+\infty.$$

于是 X 关于 N 及 A 可积,即 X 关于 M 可积,且有

$$\|X.M\|_{\mathscr{H}^r}\leqslant j_r(X.N,X.A)\leqslant\|X\|_{\mathscr{S}^p}j_q(N,A).$$

故得(4.1). 引理得证.

设 X 为一右连左极过程, T 为一停时, 通常令

$$X^{T-}=X^T-\Delta X_T I_{[\![T,\infty[\![},$$

这里约定 $X_{0-}=0$.

13.5 引理 设 X 为一右连左极过程, T、S 为两个停时, 则有

$$(X^{T-})^{S-}=X^{T\wedge S-},\quad (X^T)^{S-}=(X^{S-})^T.$$

证明 容易直接验证.

13.6 引理 设 M 为一半鞅.

1) 对任何停时 T,我们有

$$\|M^T\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant\|M\|_{\mathscr{H}^\infty},\quad \|M^{T-}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant 2\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}.$$

2) 对任给 $b>0$, 存在停时 $T_n\uparrow+\infty(T_0=0)$, 使得对每个 $n\geqslant 1$,在$[T_{n-1}<\infty]$上,有 $T_n>T_{n-1}$,且有

$$\|M^{T_n-}-M^{T_{n-1}}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant b.$$

证明 1) 显然我们有

$$\|M^T\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant\|M\|_{\mathscr{H}^\infty},\quad\|\Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant\|\Delta M_T\|_{L^\infty}\leqslant\|M\|_{\mathscr{H}^\infty},$$

故有 $\|M^{T-}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant 2\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}$.

2) 令

$$\overline{A}_t=\sum_{0<s\leqslant t}\Delta M_s I_{\left[|\Delta M_s|>\frac{b}{8}\right]}.$$

设 $M-\overline{A}=N+B$ 为特殊半鞅 $M-\overline{A}$ 的典则分解，则由定理8.55，对一切停时 $T>0$，有 $|\Delta N_T|\leqslant\frac{b}{4}$. 令 $A=\overline{A}+B$，则 $M=N+A$ 为 M 的一个分解. 令 $T_0=0$，并归纳定义 T_n 如下：

$$T_n=\inf\left\{t>T_{n-1}:[N,\ N]_t-[N,\ N]_{T_{n-1}}>\frac{3}{16}b^2,\right.$$

$$\left.\text{或}\quad\int_{T_{n-1}}^t|dA_s|>\frac{b}{4}\right\},$$

则对每个 n，在 $[T_{n-1}<\infty]$ 上有 $T_n>T_{n-1}$. 此外我们有

$$M^{T_n-}-M^{T_{n-1}}=(N^{T_n}-N^{T_{n-1}})+(A^{T_n-}-A^{T_{n-1}}-\Delta N_{T_n}I_{[\![T_n,\infty[\![})$$

$$\triangleq N^{(n)}+A^{(n)},$$

$$[N^{(n)},\ N^{(n)}]_\infty=[N,\ N]_{T_n}-[N,\ N]_{T_{n-1}}\leqslant\frac{3}{16}b^2+\frac{1}{16}b^2$$

$$=\frac{1}{4}b^2,$$

$$\int_0^\infty|dA_s^{(n)}|=\int_{T_{n-1}}^{T_n-}|dA_s|+|\Delta N_{T_n}|\leqslant\frac{b}{4}+\frac{b}{4}=\frac{b}{2}.$$

于是有 $\|M^{T_n-}-M^{T_{n-1}}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant j_\infty(N^{(n)},\ A^{(n)})\leqslant b$. 引理得证.

§2 解的存在性与唯一性

13.7 引理 设 M 为一半鞅，H 为一局部 $\mathscr{S}^p$ 可料过程 $(p\geqslant1)$，则 H 关于 M 可积[1].

证明 无妨设 $M_0=0$. 令

$$\overline{A}_t=\sum_{s\leqslant t}\Delta M_s I_{\left[|\Delta M_s|>\frac{1}{2}\right]},$$

设 $M-\overline{A}=N+B$ 为典则分解，则 $|\Delta N|\leqslant1$. 令 $A=\overline{A}+B$. 对一切 $n\geqslant1$，令

$$T_n=\inf\left\{t:[N,\ N]_t\geqslant n\quad\text{或}\quad\int_0^t|dA_s|\geqslant n\right\},$$

1) 事实上，E. Lenglart 新近证明：准局部有界可料过程为局部有界.

则有$[N, N]_{T_n-}\leqslant n$, $\int_0^{T_n-}|dA_s|\leqslant n$. 我们有

$$M^{T_n-}=N^{T_n}+A^{T_n-}-\Delta N_{T_n}I_{[T_n,\infty[}\triangleq N^{T_n}+A^{(n)}.$$

则$[N, N]_{T_n}\leqslant n+1$, $\int_0^{\infty}|dA_s^{(n)}|\leqslant n+1$. 于是 $M^{T_n-}\in\mathscr{H}^{\infty}$.

另一方面,存在停时 $S_n\uparrow+\infty$,使得对一切 n, $HI_{]0,S_n]}\in\mathscr{S}^p$. 故由引理13.4, $HI_{]0,S_n]}$ 关于 M^{T_k-} 可积. 从而 H 关于 M^{T_k-} 可积(定理9.34). 自然 H 关于 M^{T_k} 也可积,于是 H 关于 M 可积(定理9.34).

13.8 引理 设 M 为一半鞅, $L(M)$表示关于 M 可积的可料过程全体. 令 F 为 $\mathscr{X}$ 到可料过程集合 $\mathscr{P}$ 中的映象. 如果 F 满足如下条件:

(i) 对一切 $X\in\mathscr{X}$ 及一切停时 T,有

$$F(X)I_{]0,T]}=F(X^{T-})I_{]0,T]}. \tag{8.1}$$

(ii) 存在$1\leqslant p\leqslant+\infty$ 及 $a>0$,使得对一切 $X, Y\in\mathscr{X}$,有

$$\|F(X)-F(Y)\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant a\|X-Y\|_{\mathscr{S}^p}. \tag{8.2}$$

(iii) $F(0)\in L(M)$.

则对一切 $X\in\mathscr{X}$, $F(X)\in L(M)$.

证明 设 $X\in\mathscr{X}$,令

$$T_n=\inf\{t: |X_t|\geqslant n\}.$$

则 $X^{T_n-}\leqslant n$. 由(8.1)及(8.2),我们有

$$\begin{aligned}\|(F(X)-F(0))I_{]0,T_n]}\|_{\mathscr{S}^p}&=\|(F(X^{T_n-})-F(0))I_{]0,T_n]}\|_{\mathscr{S}^p}\\&\leqslant\|F(X^{T_n-})-F(0)\|_{\mathscr{S}^p}\\&\leqslant a\|X^{T_n-}\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant an.\end{aligned}$$

由于 $T_n\uparrow+\infty$,故 $F(X)-F(0)$为局部 $\mathscr{S}^p$ 可料过程. 于是由引理13.7, $F(X)-F(0)\in L(M)$. 从而由条件(iii)及定理9.33知, $F(X)\in L(M)$.

注 如果对一切 $X, Y\in\mathscr{X}$ 有

$$(F(X)-F(Y))^* \leqslant a(X-Y)^*,$$

则条件(ii)成立(例如令 $p=1$).

下面，我们将研究随机微分方程解的存在性和唯一性. 为今后叙述方便，我们引进两个记号.

13.9 记号 1) 设 M 为一半鞅，我们用 $\mathscr{L}_M^p(a)$ 表示满足引理 13.8 中条件(i)、(ii)、(iii)的由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{P}$ 中的映象 F 全体.

2) 令 $1\leqslant p<+\infty$, $0\leqslant\beta<1$, 我们用 $\mathscr{C}^p(\beta)$ 表示满足如下条件的由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 中的映象 Φ 的全体:

i) 对一切 $X\in\mathscr{X}$ 及一切停时 T, 有

$$\Phi(X)I_{[0,T[}=\Phi(X^{T-})I_{[0,T[}. \tag{9.1}$$

ii) 对一切 $X, Y\in\mathscr{X}$, 有

$$\|\Phi(X)-\Phi(Y)\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant\beta\|X-Y\|_{\mathscr{S}^p}. \tag{9.2}$$

13.10 引理 设 M 为一半鞅，且 $M\in\mathscr{H}^\infty$. 令 $1\leqslant p<\infty$, $a>0$, $1>\beta\geqslant0$. 设 $\Phi\in\mathscr{C}^p(\beta)$, $F\in\mathscr{L}_M^p(a)$. 如果 $\Phi(0)\in\mathscr{S}^p$, $F(0)=0$, 且 $\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}<\dfrac{1-\beta}{aC_p}$, 则方程

$$X=\Phi(X)+F(X).M \tag{10.1}$$

在 $\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$ 中有唯一解. 这里 C_p 为引理 13.3 中的常数.

证明 设 $X\in\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$, 则由于 $F(0)=0$, 故 $F(X)\in\mathscr{S}^p$. 令

$$W(X)=\Phi(X)+F(X).M,$$

则对任何 $X, Y\in\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$, 我们有

$$\begin{aligned}\|W(X)-W(Y)\|_{\mathscr{S}^p}&\leqslant\|\Phi(X)-\Phi(Y)\|_{\mathscr{S}^p}\\&\quad+\|F(X).M-F(Y).M\|_{\mathscr{S}^p}\\&\leqslant\beta\|X-Y\|_{\mathscr{S}^p}+C_p\|F(X)-F(Y)\|_{\mathscr{S}^p}\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}\\&\leqslant(\beta+aC_p\|M\|_{\mathscr{H}^\infty})\|X-Y\|_{\mathscr{S}^p}.\end{aligned}$$

又由于 $W(0)=\Phi(0)\in\mathscr{S}^p$, 故由上式知，对一切 $X\in\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$, $W(X)\in\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$. 依假定，$\beta+aC_p\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}<1$, 故 W 为 $\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$ 中的压缩映象. 从而方程 $X=WX$, 即方程(10.1)在

$\mathscr{S}^p \cap \mathscr{X}$ 中有唯一解(注意 $\mathscr{S}^p \cap \mathscr{X}$ 为 Banach 空间). 引理得证.

按照我们的随机积分记号,方程(*)可写成

$$X = \Phi(X) + F(X) I_{]0,\infty[} . M.$$

因此,今后不妨假定 $M_0 = 0$, 否则考虑 $M - M_0$. 这时,方程(*)可写成

$$(*) \qquad X = \Phi(X) + F(X) . M.$$

13.11 引理 设 M 为一零初值半鞅, 且 $M \in \mathscr{H}^\infty$. 令 $1 \leqslant p < \infty$, $a > 0$, $1 > \beta \geqslant 0$, $\Phi \in \mathscr{C}^p(\beta)$, $F \in \mathscr{L}_M^p(a)$. 如果 $\|M\|_{\mathscr{H}^\infty} < \dfrac{1-\beta}{2aC_p}$,则方程(*)在 $\mathscr{X}$ 中有唯一解.

证明 令 $G(X) = F(X) - F(0)$, $\Psi(X) = \Phi(X) + F(0) . M$, 则 $G \in \mathscr{L}_M^p(a)$, $G(0) = 0$, $\Psi \in \mathscr{C}^p(\beta)$, 并且方程(*)等价于如下方程:

$$(11.1) \qquad X = \Psi(X) + G(X) . M.$$

令 $T_n = \inf\{t: |\Psi(0)_t| \geqslant n\}$, 则 $|\Psi(0)^{T_n-}| \leqslant n$. 令

$$\Psi^{(n)}(X) = \Psi(X)^{T_n-},$$

则仍有 $\Psi^{(n)} \in \mathscr{C}^p(\beta)$, 但这时有 $\Psi^{(n)}(0) = \Psi(0)^{T_n-} \in \mathscr{S}^p$. 此外,由引理 13.6.1), $\|M^{T_n-}\|_{\mathscr{H}^\infty} < \dfrac{1-\beta}{aC_p}$, 故由引理 13.10, 方程

$$Z = \Psi^{(n)}(Z) + G(Z) . M^{T_n-}$$

在 $\mathscr{S}^p \cap \mathscr{X}$ 中有唯一解 $X^{(n)}$. 由 $\Psi^{(n)}$ 及 G 的性质, 容易由引理 13.5 看出

$$(X^{(n)})^{T_n-} = X^{(n)}, \quad (X^{(n+1)})^{T_n-} = X^{(n)}.$$

于是存在唯一的 $X \in \mathscr{X}$, 使得对一切 n, 有 $X^{T_n-} = X^{(n)}$. 这时,我们有

$$(11.2) \qquad \begin{aligned} X^{T_n-} &= \Psi(X^{T_n-})^{T_n-} + G(X^{T_n-}) . M^{T_n-} \\ &= \Psi(X)^{T_n-} + (G(X) . M)^{T_n-}, \end{aligned}$$

从而 X 为方程(11.1)(即方程(*))的一个解.

往证 X 是方程(11.1)在 $\mathscr{X}$ 中的唯一解. 设 $\overline{X}$ 是方程(11.1)

在 $\mathscr{X}$ 中的一个解．令

$$S_n=\inf\{t:|\overline{X}_t|\geqslant n\}\wedge T_n.$$

则 $|\overline{X}^{S_n-}|\leqslant n$．令 $\overline{\Psi}^{(n)}(X)=\Psi(X)^{S_n-}$，则 $\overline{\Psi}^{(n)}(0)\in\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$．故 $\overline{X}^{S_n-}$ 是方程

(11.3) $\quad Z=\overline{\Psi}^{(n)}(Z)+G(Z).M^{S_n-}=\Psi(Z)^{S_n-}+G(Z).M^{S_n-}$

在 $\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$ 中的唯一解．但由 (11.2)，X^{S_n-} 也满足方程，且 $X^{S_n-}\in\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$．故有 $\overline{X}^{S_n-}=X^{S_n-}$．由于 $S_n\uparrow+\infty$，故有 $\overline{X}=X$．唯一性得证．

13.12 引理 设 $\Phi\in\mathscr{C}^p(\beta)$，其中 $1\leqslant p<+\infty$，$1>\beta\geqslant 0$．令 $X, Y\in\mathscr{X}$，T 为一停时．如果

(12.1) $$X-Y=(\Phi(X)-\Phi(Y))^{T-},$$

则 $X=Y$．

证明 令 $T_n=\inf\{t:|X_t-Y_t|\geqslant n\}$，则 $|(X-Y)^{T_n-}|\leqslant n$．由 (12.1) 及 Φ 的性质，我们有

$$\begin{aligned}\|X^{T_n-}-Y^{T_n-}\|_{\mathscr{S}^p}&=\|(\Phi(X)^{T_n-}-\Phi(Y)^{T_n-})^{T-}\|_{\mathscr{S}^p}\\&\leqslant\|\Phi(X)^{T_n-}-\Phi(Y)^{T_n-}\|_{\mathscr{S}^p}\\&=\|(\Phi(X^{T_n-})-\Phi(Y^{T_n-}))^{T_n-}\|_{\mathscr{S}^p}\\&\leqslant\|\Phi(X^{T_n-})-\Phi(Y^{T_n-})\|_{\mathscr{S}^p}\\&\leqslant\beta\|X^{T_n-}-Y^{T_n-}\|_{\mathscr{S}^p}.\end{aligned}$$

由于 $\|X^{T_n-}-Y^{T_n-}\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant n$，故 $\|X^{T_n-}-Y^{T_n-}\|_{\mathscr{S}^p}=0$．即 $X^{T_n-}=Y^{T_n-}$．但 $T_n\uparrow+\infty$，故有 $X=Y$．

下一定理是随机微分方程解的存在性和唯一性定理．

13.13 定理 设 M 为一零初值半鞅，$F\in\mathscr{L}^p_{\mathscr{X}}(a)$，$\Phi\in\mathscr{C}^p(\beta)$，其中 $1\leqslant p<\infty$，$a>0$，$1>\beta\geqslant 0$．则方程

(13.1) $$X=\Phi(X)+F(X).M$$

在 $\mathscr{X}$ 中有唯一解．

证明 令 $0<b<\dfrac{1-\beta}{2ac_p}$，由引理 13.6，存在停时 $T_n\uparrow+\infty$

$(T_0=0)$，使得对每个 $n\geqslant 1$，在 $[T_{n-1}<\infty]$ 上，有 $T_n>T_{n-1}$，且有 $\|M^{T_n-}-M^{T_{n-1}}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant b$。令 $\Phi^{(1)}(X)=\Phi(X)^{T_1-}$，则由引理 13.11，方程

$$Z=\Phi(Z)^{T_1}+F(Z).M^{T_1-} \tag{13.2}$$

在 $\mathscr{X}$ 中有唯一解 $X^{(1)}$。下面我们用归纳法证明方程(13.1)在 $\mathscr{X}$ 中有唯一解。设已知方程

$$Z=\Phi(Z)^{T_n-}+F(Z).M^{T_n-} \tag{13.3}$$

在 $\mathscr{X}$ 中有唯一解 $X^{(n)}$，令

$$M^{(n+1)}=M^{T_{n+1}-}-M^{T_n},$$

$$\Phi^{(n+1)}(X)=\Phi(X)^{T_{n+1}-}+F(X^{(n)}).M^{T_n}. \tag{13.4}$$

则 $\Phi^{(n+1)}\in\mathscr{C}^p(\beta)$，$F\in\mathscr{L}^p_{M^{(n+1)}}(a)$。由引理 13.11，方程

$$Z=\Phi^{(n+1)}(Z)+F(Z).M^{(n+1)} \tag{13.5}$$

在 $\mathscr{X}$ 中有唯一解 $X^{(n+1)}$。由(13.3)、(13.4)及(13.5)，我们有(注意 $(M^{(n+1)})^{T_n-}=0$)

$$\begin{aligned}(X^{(n+1)})^{T_n-}&=(\Phi^{(n+1)}(X^{(n+1)}))^{T_n-}\\&=\Phi(X^{(n+1)})^{T_n-}+F(X^{(n)}).M^{T_n-}\\&=X^{(n)}+\Phi((X^{(n+1)})^{T_n-})^{T_n-}-\Phi(X^{(n)})^{T_n-}.\end{aligned}$$

故由引理 13.12，我们有

$$(X^{(n+1)})^{T_n-}=X^{(n)}. \tag{13.6}$$

再由(13.4)、(13.5)及(13.6)，我们有

$$\begin{aligned}X^{(n+1)}&=\Phi^{(n+1)}(X^{(n+1)})+F(X^{(n+1)}).M^{T_{n+1}-}\\&\quad-F(X^{(n+1)}).M^{T_n}\\&=\Phi^{(n+1)}(X^{(n+1)})+F(X^{(n+1)}).M^{T_{n+1}-}\\&\quad-F((X^{(n+1)})^{T_n-}).M^{T_n}\\&=\Phi^{(n+1)}(X^{(n+1)})-F(X^{(n)}).M^{T_n}\\&\quad+F(X^{(n+1)}).M^{T_{n+1}-}\\&=\Phi(X^{(n+1)})^{T_{n+1}-}+F(X^{(n+1)}).M^{T_{n+1}-}.\end{aligned}$$

这表明 $X^{(n+1)}$ 为方程

(13.7) $$Z=\Phi(Z)^{T_{n+1}-}+F(Z).M^{T_{n+1}-}$$

在 $\mathscr{X}$ 中的唯一解(唯一性基于如下事实：方程(13.7)的一切解满足(13.6)，从而也是方程(13.5)的解)．由(13.6)，存在唯一的 $X\in\mathscr{X}$，使得对一切 n，有 $X^{T_n-}=X^{(n)}$．于是我们有

$$\begin{aligned}X^{T_n-}&=\Phi(X^{T_n-})^{T_n-}+F(X^{T_n-}).M^{T_n-}\\&=\Phi(X)^{T_n-}+F(X).M^{T_n-}=(\Phi(X)+F(X).M)^{T_n-}.\end{aligned}$$

这表明 X 为方程(13.1)在 $\mathscr{X}$ 中的一个解．唯一性显然．

作为这一定理的一个推论，我们得到 Doléans-Dade 方程解的存在性和唯一性定理(见 Doléans-Dade, Meyer [2])．

13.14 定理 设 M 为一半鞅，$H\in\mathscr{X}$，f 为 $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ 上的一实值函数．如果 f 满足下列条件：

(i) 存在常数 $a>0$，使得对几乎所有 ω，及一切 $x, y\in\mathbb{R}$，$s\in\mathbb{R}_+$，有 $|f(\omega, s, x)-f(\omega, s, y)|\leqslant a|x-y|$；

(ii) 对固定的 $s\in\mathbb{R}_+$，$x\in\mathbb{R}$，$f(\cdot, s, x)$ 为 $\mathscr{F}_s$ 可测；

(iii) 对几乎所有 ω，对一切 $x\in\mathbb{R}$，$f(\omega, \cdot, x)$ 为左连右极函数．

则随机微分方程

$$X_t=H_t+\int_0^t f(\cdot, s, X_{s-})dM_s$$

在 $\mathscr{X}$ 中有唯一解 X．

证明 设 $X\in\mathscr{X}$，令 $F(X)_t=f(\cdot, t, X_{t-})$．则显然 F 满足引理 13.8 的条件(i)及(ii)．但 $F(0)_t=f(\cdot, t, 0)$，从而 $F(0)$ 为左连右极适应过程，特别，$F(0)$ 为局部有界(更为局部 $\mathscr{S}^p$)可料过程，于是 $F\in\mathscr{L}^p_M(a)$(其中 $1\leqslant p<+\infty$)．因此由定理 13.13 立刻推得定理 13.14．

§3 解的稳定性

首先我们定义过程的几种收敛性．

13.15 定义 设 X 为一可选过程，$(X^{(n)})$ 为一列可选过程. 称 $(X^{(n)})$ 准局部 $\mathscr{S}^p$ 收敛于 X，如果存在停时 $T_k\uparrow+\infty$，使得

(i) 对每个 k, n, $X^{T_k-}\in\mathscr{S}^p$, $X^{(n)T_k-}\in\mathscr{S}^p$;

(ii) 对每个 k, $\lim\limits_{n\to\infty}\|(X^{(n)}-X)^{T_k-}\|_{\mathscr{S}^p}=0$.

类似地，我们可以给出关于半鞅序列准局部 $\mathscr{H}^p$ 收敛的定义.

13.16 定义 令 $\mathscr{X}$ 为右连左极适应过程全体. 设 $X,Y\in\mathscr{X}$，令

$$(16.1)\qquad d(X,Y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\mathbb{E}\left[\frac{\sup\limits_{t\leqslant n}|X_t-Y_t|}{1+\sup\limits_{t\leqslant n}|X_t-Y_t|}\right].$$

显然 d 为 $\mathscr{X}$ 上的一个距离.

设 $X\in\mathscr{X}$, $(X^{(n)})\subset\mathscr{X}$，则为要 $d(X^{(n)},X)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，必须且只需对一切实数 r, $\sup\limits_{t\leqslant r}|X_t^{(n)}-X_t|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0$，即 $X^{(n)}$ 在 $[0,r]$ 上依概率一致收敛于 X.

下一引理建立了准局部 $\mathscr{S}^p$ 收敛与按距离 d 收敛之间的联系.

13.17 引理 设 $X\in\mathscr{X}$, $(X^{(n)})\subset\mathscr{X}$.

1) 为要 $d(X^{(n)},X)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，必须且只需存在一列停时 $T_k\uparrow+\infty$，使得对每个 k，有

$$(17.1)\qquad [(X^{(n)}-X)^{T_k-}]^*=\sup_{t<T_k}|X_t^{(n)}-X_t|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0.$$

2) 设 $1\leqslant p<+\infty$. 为要 $d(X^{(n)},X)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，必须且只需从 $(X^{(n)})$ 的每个子序列中可以再抽取一个子序列，使得它准局部 $\mathscr{S}^p$ 收敛于 X.

证明 1) 必要性显然(令 $T_k=k$)，往证充分性. 设有(17.1)成立. 给定一正整数 m，往证 $\sup\limits_{t\leqslant m}|X_t^{(n)}-X_t|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0$. 给定 $\delta>0$, $\varepsilon>0$. 取 k_0 足够大，使得 $\mathbb{P}(T_{k_0}\leqslant m)<\frac{\varepsilon}{2}$. 我们有

$$[\sup_{t\leqslant m}|X_t^{(n)}-X_t|>\delta]\subset[\sup_{t<T_{k_0}}|X_t^{(n)}-X_t|>\delta]\cup[T_{k_0}\leqslant m].$$

故由(17.1)推知 $\sup_{t\leqslant m}|X_t^{(n)}-X_t|\xrightarrow[n\to\infty]{P}0$, 即 $d(X^{(n)},X)\longrightarrow 0$.

2) 由 1) 知, 准局部 $\mathscr{S}^p$ 收敛性蕴含按距离 d 的收敛性, 故充分性显然. 只需证必要性. 问题归结为证明: 从任一按距离 d 收敛于 0 的序列 $(X^{(n)})$ 中, 可抽取一子序列 $(X^{(n_l)})$, 使得 $(X^{(n_l)})$ 准局部 $\mathscr{S}^p$ 收敛于 0. 用归纳法构造一列下降的正整数的无穷子集 $(\mathbb{N}_k)$ (即 $\mathbb{N}_k\supset\mathbb{N}_{k+1}$), 使得对一切正整数 k, 有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}_k}}\sup_{0\leqslant s\leqslant k}|X_s^{(n)}|=0 \text{ a.s.}.$$

于是由 Cantor 对角线方法, 得到一子序列 (X^{n_l}), 使得对一切正整数 k, 有

$$\lim_{l\to\infty}\sup_{0\leqslant s\leqslant k}|X_s^{(n_l)}|=0 \text{ a.s.}.$$

令

$$T_l=\inf\{t:|X_t^{(n_l)}|\geqslant 1\},\quad S_l=\inf_{m\geqslant l}T_m,$$

则停时列 (S_l) 单调增. 但对固定 k, 对几乎所有 ω, 存在整数 $N(\omega)$, 使得对 $l\geqslant N(\omega)$, 有 $\sup_{0\leqslant s\leqslant k}|X_s^{(n_l)}(\omega)|<1$, 从而 $T_l(\omega)\geqslant k$, 由此得 $S_{N(\omega)}(\omega)\geqslant k$. 由于 k 是任意的, 这表明 $S_l\uparrow+\infty$ a.s.. 最后, 令 $V_k=S_k\wedge k$, 则对每个 k, 我们有

$$[(X^{(n_l)})^{V_k-}]^*\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant k}|X_t^{(n_l)}|\xrightarrow[l\to\infty]{}0 \text{ a.s.},$$

$$[(X^{(n_l)})^{V_k-}]^*\leqslant\sup_{0\leqslant t<S_k}|X_t^{(n_l)}|\leqslant\sup_{0\leqslant t<T_l}|X_t^{(n_l)}|\leqslant 1\quad(l\geqslant k).$$

于是 $(X^{(n_l)})_{l\geqslant 1}^{V_k-}$ 在 $\mathscr{S}^p$ 中收敛于 0, 即 $(X^{(n_l)})$ 准局部 $\mathscr{S}^p$ 收敛于 0. 引理得证.

13.18 定义 设 $b>0$ 为一常数, M 为一半鞅. 如果 $M\in\mathscr{H}^\infty$, 并且存在停时 $(T_j)_{0\leqslant j\leqslant k}$: $0=T_0\leqslant T_1,\cdots\leqslant T_k$, 使得 $M=M^{T_k-}$, 且对一切 $i=1,2,\cdots,k$, 有

$$\|(M-M^{T_{i-1}})^{T_i-}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant b, \tag{18.1}$$

则说 M 属于 $\mathscr{D}(b)$ (记为 $M\in\mathscr{D}(b)$), 并说 $(T_0,\cdots,T_k)$ 将 M 分

成小于 b 的片段.

13.19 引理 1) 设 $M\in\mathscr{D}(b)$, 则对任何停时 T, $M^{T-}\in\mathscr{D}(2b)$.

2) 设 M 为一半鞅, 则对任给 $b>0$, 存在停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s., 使得对每个 n, $M^{T_n-}\in\mathscr{D}(b)$.

证明 1) 设 $(T_0, \cdots, T_k)$ 将 M 分成小于 b 的片段, 则由引理 13.5 及引理 13.6, $M^{T-}\in\mathscr{H}^\infty$, 且有

$$\|[M^{T-}-(M^{T-})^{T_{i-1}}]^{T_i-}\|_{\mathscr{H}^\infty}=\|[(M-M^{T_{i-1}})^{T_i-}]^{T-}\|_{\mathscr{H}^\infty}$$
$$\leqslant 2\|(M-M^{T_{i-1}})^{T_i-}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant 2b.$$

这表明 $(T_0, \cdots, T_k)$ 将 M^{T-} 分成小于 $2b$ 的片段. 故有

$$M^{T-}\in\mathscr{D}(2b).$$

2) 由引理 13.6, 存在停时 $S_n\uparrow+\infty$, 使得对一切 $n\geqslant 1$, 有

$$\|(M-M^{S_{n-1}})^{S_n-}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant\frac{b}{2}.$$

于是对一切 $i\leqslant n$,

$$\|[M^{S_n-}-(M^{S_n-})^{S_{i-1}}]^{S_i-}\|_{\mathscr{H}^\infty}=\|(M-M^{S_{i-1}})^{S_i-}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant\frac{b}{2}.$$

另一方面, 由引理 13.7 的证明知, 存在停时 $V_n\uparrow+\infty$, 使得每个 $M^{V_n-}\in\mathscr{H}^\infty$. 于是 $M^{S_n\wedge V_n-}\in\mathscr{H}^\infty$, 且由 1) 的证明知, $(S_0, S_1, \cdots S_n)$ 将 $M^{S_n\wedge V_n-}$ 分成小于 b 的片段. 于是 $M^{S_n\wedge V_n-}\in\mathscr{D}(b)$. 因此令 $T_n=S_n\wedge V_n$ 即可.

13.20 引理 令 $1\leqslant p<+\infty$, $a>0$, $1>\beta\geqslant 0$, $b<\dfrac{1-\beta}{ac_p}$ (c_p 的定义见引理 13.3). 设 M 为一零初值半鞅, $\Phi\in\mathscr{C}^p(\beta)$, $F\in\mathscr{L}^p_{\mathscr{U}}(a)$. 令 X 为方程

$$Z=\Phi(Z)+F(Z).M$$

在 $\mathscr{X}$ 中的唯一解. 如果

(i) $M\in\mathscr{D}(b)$, 且 $(T_0, \cdots, T_k)$ 将 M 分成小于 b 的片段;

(ii) $\Phi(0)^{T_k-}\in\mathscr{S}^p$, $F(0).M\in\mathscr{S}^p$.

则 $X^{T_k-}\in\mathscr{S}^p$，且有

(20.1) $$\|X^{T_k-}\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant\frac{1}{1-\beta-ac_pb}\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}\times(\|\Phi(0)^{T_k-}\|_{\mathscr{S}^p}+\|F(0).M\|_{\mathscr{S}^p}),$$

其中

(20.2) $$\alpha=\frac{2ac_p\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}}{1-\beta-ac_pb}$$

(如果 $\alpha=1$，则 $\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}$ 了解为 k)．

证明 对 $0<i\leqslant k$，我们有

(20.3) $$\begin{aligned}X^{T_i-}&=\Phi(X)^{T_i-}+F(X).M^{T_i-}\\&=(\Phi(X^{T_i-})^{T_i-}-\Phi(0)^{T_i-})+\Phi(0)^{T_i-}\\&\quad+F(0).M^{T_i-}+(F(X^{T_i-})-F(0)).(M^{T_{i-1}})^{T_i-}\\&\quad+(F(X^{T_i-})-F(0)).(M-M^{T_{i-1}})^{T_i-}.\end{aligned}$$

由于 $\|(M^{T_{i-1}})^{T_i-}\|_{\mathscr{H}^\infty}=\|(M^{T_i-})^{T_{i-1}}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant\|M^{T_i-}\|_{\mathscr{H}^\infty}\leqslant2\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}$，我们有(注意 $F(X).M^S=F(X^{S-}).M^S$)

(20.4) $$\begin{aligned}&\|(F(X^{T_i-})-F(0)).(M^{T_{i-1}})^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p}\\&=\|(F(X^{T_{i-1}-})-F(0)).(M^{T_{i-1}})^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p}\\&\leqslant2ac_p\|X^{T_{i-1}-}\|_{\mathscr{S}^p}\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}.\end{aligned}$$

(20.5) $$\|\Phi(X^{T_i-})^{T_i-}-\Phi(0)^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant\beta\|X^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p},$$

(20.6) $$\|(F(X^{T_i-})-F(0)).(M-M^{T_{i-1}})^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant ac_p\|X^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p}b,$$

(20.7) $$\|\Phi(0)^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant\|\Phi(0)^{T_k-}\|_{\mathscr{S}^p},$$

(20.8) $$\|F(0).M^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant\|F(0).M\|_{\mathscr{S}^p}.$$

由引理 13.10 易归纳证明 $\|X^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p}<\infty$[1]，故由(20.3)－(20.8)得

$$\|X^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant\frac{1}{1-\beta-ac_pb}(\|\Phi(0)^{T_k-}\|_{\mathscr{S}^p}+\|F(0).M\|_{\mathscr{S}^p})+\alpha\|X^{T_{i-1}-}\|_{\mathscr{S}^p},$$

于是由归纳法得(20.1)．

下一定理是随机微分方程解的稳定性定理．

1) X^{T_i-} 为方程 $Z=\Psi(Z)+G(Z).(M-M^{T_{i-1}})^{T_i-}$ 的解，其中 $\Psi=\Phi^{T_i-}+F(0).M^{T_i-}+(F(X^{T_{i-1}-})-F(0)).(M^{T_{i-1}})^{T_i-}$，$G=F-F(0)$．

13.21 定理 令 $1\leqslant p<+\infty$, $a>0$, $1>\beta\geqslant 0$. 设 M 为一零初值半鞅, $\Phi\in\mathscr{C}^p(\beta)$, $F\in\mathscr{L}^p_M(a)$, X 为方程

(21.1) $$X=\Phi(X)+F(X).M$$

在 $\mathscr{X}$ 中的唯一解. 此外, 对每个 n, 设 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{C}^p(\beta)$, $F^{(n)}\in\mathscr{L}^p_M(a)$, $X^{(n)}$ 为方程

(21.2) $$Z=\Phi^{(n)}(Z)+F^{(n)}(Z).M$$

在 $\mathscr{X}$ 中的唯一解.

1) 如果 $n\to\infty$ 时 $\Phi^{(n)}(X)-\Phi(X)$ 及 $(F^{(n)}(X)-F(X)).M$ 准局部 $\mathscr{S}^p$ 收敛于 0, 则 $X^{(n)}-X$ 准局部 $\mathscr{S}^p$ 收敛于 0;

2) 如果当 $n\to\infty$ 时, $d(\Phi^{(n)}(X),\ \Phi(X))\longrightarrow 0$, 且

$$d(F^{(n)}(X).M, F(X).M)\longrightarrow 0,$$

则 $d(X^{(n)},\ X)\longrightarrow 0$.

证明 2) 容易由 1) 及引理 13.17.2)推得, 故只需证 1), 我们有

$$X^{(n)}-X=\Phi^{(n)}(X^{(n)})-\Phi(X)+(F^{(n)}(X^{(n)})-F(X)).M.$$

设 $Y\in\mathscr{X}$, 令

$$\Psi^{(n)}(Y)=\Phi^{(n)}(Y+X)-\Phi(X),$$
$$G^{(n)}(Y)=F^{(n)}(Y+X)-F(X),$$

则 $\Psi^{(n)}\in\mathscr{C}^p(\beta)$, $G^{(n)}\in\mathscr{L}^p_M(a)$, 且 $Y^{(n)}\triangleq X^{(n)}-X$ 为方程

(21.3) $$Z=\Psi^{(n)}(Z)+G^{(n)}(Z).M$$

在 $\mathscr{X}$ 中的唯一解.

设 $\Phi^{(n)}(X)-\Phi(X)$ 及 $(F^{(n)}(X)-F(X)).M$ 准局部 $\mathscr{S}^p$ 收敛于 0, 则存在停时 $S_k\uparrow+\infty$, 使得对每个 k, 有

$$\lim_{n\to\infty}\|(\Phi^{(n)}(X)-\Phi(X))^{S_k-}\|_{\mathscr{S}^p}=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\|(F^{(n)}(X)-F(X)).M^{S_k-}\|_{\mathscr{S}^p}=0.$$

另一方面, 由引理 13.19.2), 存在停时 $V_k\uparrow+\infty$, 使得对每个 k, $M^{V_k-}\in\mathscr{D}\left(\frac{b}{2}\right)$, 其中 $b<\frac{1-\beta}{ac_p}$. 令 $T_k=S_k\wedge V_k$, 则由引理 13.19.

1), $M^{T_k-}\in\mathscr{D}(b)$. 注意到

$$\Psi^{(n)}(0)=\Phi^{(n)}(X)-\Phi(X),$$
$$G^{(n)}(0)=F^{(n)}(X)-F(X).$$

故由引理 13.20 看出, 对每个 k,

$$\lim_{n\to\infty}\|(Y^{(n)})^{T_k-}\|_{\mathscr{S}^p}=0,$$

即 $X^{(n)}-X$ 准局部 $\mathscr{S}^p$ 收敛于 0.

§4 对上两节的补充

在本节我们用 $\mathscr{S}$ 表示半鞅空间. 我们将研究如下随机微分方程:

$$X=\Phi(X)+F(X).M,$$

其中 M 为一零初值半鞅, Φ 为 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 中的一映象, F 为 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{P}$ 中的一映象.

设 $1\leqslant p<+\infty$, $0\leqslant\beta<1$. 我们用 $\overline{\mathscr{C}}^p(\beta)$ 表示满足如下条件的 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 中的映象 Φ 全体:

(i) 对一切 $X\in\mathscr{S}$ 及一切停时 T, 有

$$\Phi(X)I_{[\![0,T[\![}=\Phi(X^{T-})I_{[\![0,T[\![}.$$

(ii) 对任何 $X, Y\in\mathscr{S}$, 有

$$\|\Phi(X)-\Phi(Y)\|_{\mathscr{H}^p}\leqslant\beta\|X-Y\|_{\mathscr{H}^p}.$$

设 $1\leqslant p<+\infty$, $a>0$, M 为一零初值半鞅. 我们用 $\overline{\mathscr{L}}^p_M(a)$ 表示 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{P}$ 中满足如下条件的映象 F 全体:

(i) 对一切 $X\in\mathscr{S}$ 及一切停时 T, 有

$$F(X)I_{]\![0,T]\!]}=F(X^{T-})I_{]\![0,T]\!]}.$$

(ii) 对任何 $X, Y\in\mathscr{S}$, 有

$$\|F(X)-F(Y)\|_{\mathscr{S}^p}\leqslant a\|X-Y\|_{\mathscr{H}^p}.$$

(iii) $F(0)\in L(M)$.

重复前两节的讨论, 我们可以建立如下两个定理.

13.22 定理 设 $1\leqslant p<+\infty$, $a>0$, $1>\beta\geqslant 0$. 令 M 为一零初值半鞅, $\Phi\in\overline{\mathscr{C}}^p(\beta)$, $F\in\overline{\mathscr{L}}_M^p(a)$, 则方程

$$X=\Phi(X)+F(X).M$$

在 $\mathscr{S}$ 中有唯一解.

13.23 定理 设 $1\leqslant p<+\infty$, $a>0$, $1>\beta\geqslant 0$. 令 M 为一零初值半鞅, $\Phi\in\overline{\mathscr{C}}^p(\beta)$, $F\in\overline{\mathscr{L}}_M^p(a)$, X 为方程

$$X=\Phi(X)+F(X).M$$

的唯一解. 此外, 对每个 n, 令 $\Phi^{(n)}\in\overline{\mathscr{C}}^p(\beta)$, $F^{(n)}\in\overline{\mathscr{L}}_M^p(a)$, $X^{(n)}$ 为方程

$$Z=\Phi^{(n)}(Z)+F^{(n)}(Z).M$$

的唯一解.

如果当 $n\to\infty$ 时, $\Phi^{(n)}(X)-\Phi(X)$ 及 $(F^{(n)}(X)-F(X)).M$ 准局部 $\mathscr{H}^p$ 收敛于 0, 则 $X^{(n)}-X$ 准局部 $\mathscr{H}^p$ 收敛于 0.

第十四章

指数公式及其应用

§1 半鞅的指数公式

设(X_t)为一半鞅，由定理13.13(或定理13.22)，存在唯一的半鞅Z(通常记为$\mathscr{E}(X)$)满足如下方程：

$$Z_t=1+\int_0^t Z_{s-}dX_s.$$

这一方程解的存在、唯一性及解的具体表达式(称为指数公式)，是Doléans-Dade在[4]中最先给出的.

14.1 定理 设X为一零初值半鞅，则方程

$$Z_t=1+\int_0^t Z_{s-}dX_s \tag{1.1}$$

的唯一解$\mathscr{E}(X)$[1]由下述公式给出($\mathscr{E}(X)_0=1$)：

$$\mathscr{E}(X)_t=\exp\left(X_t-\frac{1}{2}\langle X^c,X^c\rangle_t\right)\prod_{0<s\leqslant t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s} \tag{1.2}$$

$$(t>0).$$

这里，对几乎所有ω，对一切$t>0$，无穷乘积绝对收敛. X^c为X的连续鞅部分.

证明 令

$$V_t=\prod_{0<s\leqslant t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s},$$

往证无穷乘积几乎必定绝对收敛，且(V_t)为有限变差过程. 由分部积分公式知，有限多个有限变差过程的乘积仍为有限变差过程，故

1) 若X为局部鞅(相应地，特殊半鞅，有限变差过程)，则$\mathscr{E}(X)$亦然.

$$V'_t=\prod_{0<s\leqslant t}\left(1+\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|\geqslant\frac{1}{2}]}\right)e^{-\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|\geqslant\frac{1}{2}]}}$$

绝对收敛，且(V'_t)为有限变差过程. 另一方面，由于$\sum\limits_{0<s\leqslant t}\Delta X_s^2$收敛，故级数

$$U_t=\sum_{0<s\leqslant t}\left[\log\left(1+\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|<\frac{1}{2}]}\right)-\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|<\frac{1}{2}]}\right]$$

绝对收敛[1)]，且U为纯断有限变差过程. 于是

$$e^{U_t}=\prod_{0<s\leqslant t}\left(1+\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|<\frac{1}{2}]}\right)e^{-\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|<\frac{1}{2}]}}$$

绝对收敛. 且由 Ito 公式知，(e^{U_t})为有限变差过程. 这就证明了(1.2)中的无穷乘积绝对收敛，且(V_t)为有限变差过程$(V_t=V'_t e^{U_t})$.

现在剩下要验证$Z=\mathscr{E}(X)$满足方程(1.1). 令

$$K_t=X_t-\frac{1}{2}\langle X^c,\ X^c\rangle_t,\quad F(x,\ y)=e^x y.$$

则我们有$Z_t=F(K_t,\ V_t)$. 于是Z为半鞅，且由 Ito 公式得

$$\begin{aligned}Z_t&=1+\int_0^t Z_{s-}dK_s+\int_0^t e^{K_{s-}}dV_s+\frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}d\langle K^c,\ K^c\rangle_s\\&\quad+\sum_{0<s\leqslant t}(Z_s-Z_{s-}-Z_{s-}\Delta K_s-e^{K_{s-}}\Delta V_s)\\&=1+\int_0^t Z_{s-}dX_s+\sum_{0<s\leqslant t}e^{K_{s-}}\Delta V_s\\&\quad+\sum_{0<s\leqslant t}(Z_s-Z_{s-}(1+\Delta X_s)-e^{K_{s-}}\Delta V_s).\end{aligned}$$

由(1.2)，对$s>0$，有$Z_s=Z_{s-}(1+\Delta X_s)$，故由上式得

$$Z_t=1+\int_0^t Z_{s-}dX_s,$$

即(Z_t)满足方程(1.1). 定理证毕.

注 设X为一半鞅，则有$\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(X-X_0)$. 此外，对任何停时$T$，我们有$\mathscr{E}(X)^T=\mathscr{E}(X^T)$.

14.2 定理 设X为一零初值半鞅，令

1) 容易证明：当$|x|\leqslant\frac{1}{2}$时，我们有$-x^2\leqslant\log(1+x)-x\leqslant-\frac{x^2}{3}$.

$$T=\inf\{t:\Delta X_t=-1\},$$
$$S=\inf\{t:\mathscr{E}(X)_t=0\}.$$

则有 $T=S$ a.s.，并且有 $\mathscr{E}(X)I_{[T,\infty[}=0$. 特别，为要 $[\mathscr{E}(X)=0]$ 为不足道集，必须且只需 $[\Delta X=-1]$ 为不足道集. 此外，为要 $\mathscr{E}(X)>0$，必须且只需 $\Delta X>-1$.

证明 由指数公式(1.2)，我们有 $\mathscr{E}(X)I_{[T,\infty[}=0$，从而 $S\leqslant T$ a.s.. 另一方面，对几乎所有 ω，当 $t<T(\omega)$ 时，由定理 14.1 的证明看出，$V'_t(\omega)\neq 0$，从而 $V_t(\omega)=V'_t(\omega)e^{U_t(\omega)}\neq 0$，$\mathscr{E}(X)_t(\omega)\neq 0$，这表明 $S=T$ a.s..

设 Z 为一半鞅. 如果存在一零初值半鞅 X，使得 $Z=Z_0\mathscr{E}(X)$，我们称 Z 为指数半鞅，并称 X 为 Z 的一个"对数". 下面我们将研究如下问题：如何刻划指数半鞅和怎样给出指数半鞅的一个对数.

14.3 引理 设 Z 为一右连左极适应过程，令

(3.1) $\qquad T=\inf\{t>0:Z_t=0 \text{ 或 } Z_{t-}=0\}$，$(Z_{0-}\triangleq 0)$.

1) 在 $]0,T[$ 上有 $Z\neq 0$，$Z_-\neq 0$；

2) 令 $R=T_{[Z_{T-}=0,T>0]}$，则 R 为可料时.

证明 1) 显然. 为证 2)，令

$$R_n=\inf\left\{0<t<T:0<|Z_t|\leqslant\frac{1}{n}\right\}\wedge n,$$

则 (R_n) 预报 R，故 R 为可料时.

下一定理给出了指数半鞅的一个完全刻划.

14.4 定理 设 Z 为一半鞅，令 T 如(3.1)定义. 则为要存在一零初值半鞅 X，使得 $Z=Z_0\mathscr{E}(X)$，必须且只需

i) $Z=ZI_{[0,T[}$；

ii) 可料过程 $H\triangleq\dfrac{1}{Z_-}I_{[Z_-\neq 0]}$ 关于半鞅 Z 可积.

如果条件 i)、ii) 成立，令 $X=H.Z$，则有 $Z=Z_0\mathscr{E}(X)$.

证明 必要性. 设 X 为一零初值半鞅，使得 $Z=Z_0\mathscr{E}(X)$，

令 $T'=\inf\{t:\Delta X_t=-1\}$，则由定理 14.2 和

$$\mathscr{E}(X)_t=\mathscr{E}(X)_{t-}(1+\Delta X_t)$$

知在 $[Z_0\neq 0]$ 上有 $T=T'$. 由于 $\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(X)I_{[\![0,T'[\![}$, 故有 $Z=ZI_{[\![0,T[\![}$. 此外，由于 HZ_- 有界，且 Z_- 关于 X 可积，故由定理 9.30.7)，H 关于 $Z_-.X$ 可积. 但由于 $Z=Z_0+Z_-.X$，故 H 关于 Z 可积.

充分性. 设 i)、ii) 成立. 令 $X=H.Z$，往证 $Z=Z_0\mathscr{E}(X)$. 依假定，$Z=ZI_{[\![0,T[\![}$; 并且由引理 14.3, $R=T_{[Z_{T-}=0,T>0]}$ 为可料时，故由定理 9.15.2)，

$$I_{[Z_-=0]}.Z=(I_{[\![0]\!]}+I_{[\![R]\!]}+I_{]\!]T,\infty[\![}).Z=Z_0+I_{[\![R]\!]}.Z$$
$$=Z_0+\Delta Z_R I_{[\![R,\infty[\![}=Z_0,$$

于是我们有

$$Z_-.X=(Z_-H).Z=I_{[Z_-\neq 0]}.Z=Z-Z_0,$$

即有 $Z=Z_0\mathscr{E}(X)$. 定理证毕.

注 设 Z 为一非负局部鞅，则恒有 $Z^T=Z$(注意 $ZI_{[Z_0\leq n]}$ 为非负上鞅)，故由定理知：为要存在一零初值局部鞅 X，使得 $Z=Z_0\mathscr{E}(X)$，必须且只需过程 $\left(\sqrt{\int_0^t\frac{1}{Z_{s-}^2}I_{[Z_{s-}>0]}d[Z,Z]_s}\right)$ 为局部可积.

下一定理给出了指数公式的一个重要性质.

14.5 定理 设 X,Y 为两个半鞅，则有

(5.1) $$\mathscr{E}(X)\mathscr{E}(Y)=\mathscr{E}(X+Y+[X,Y]).$$

证明 令 $U=\mathscr{E}(X)$, $V=\mathscr{E}(Y)$，则由分部积分公式，

$$U_tV_t=\int_0^t U_{s-}dV_s+\int_0^t V_{s-}dU_s+[U,V]_t$$
$$=\int_0^t U_{s-}V_{s-}dY_s+\int_0^t U_{s-}V_{s-}dX_s+1$$
$$+\int_0^t U_{s-}V_{s-}d[X,Y]_s=1+\int_0^t (UV)_{s-}dZ_s,$$

其中 $Z=X+Y+[X,Y]$，故有(5.1).

14.6 定理 设 M, X 为两个局部鞅, 使得$\langle X, M\rangle$存在, 则 $\mathscr{E}(M)(X-\langle X, M\rangle)$为局部鞅.

证明 我们用 $U\sim V$ 表示 $U-V$ 为局部鞅, 则由分部积分公式及定理9.20, 我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(M)\langle X, M\rangle &= \mathscr{E}(M)_{-}.\langle X, M\rangle+\langle X, M\rangle_{-}.\mathscr{E}(M)\\&\quad+[\mathscr{E}(M), \langle X, M\rangle]\sim\mathscr{E}(M)_{-}.\langle X, M\rangle\\&=\langle X, \mathscr{E}(M)\rangle\sim\mathscr{E}(M)X.\end{aligned}$$

故有定理结论.

注 设 $\mathscr{E}(M)$为非负一致可积鞅, 令 $d\mathbb{Q}=\mathscr{E}(M)_\infty d\mathbb{P}$, 则 $\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$. 定理表明 $X-\langle X, M\rangle$为 $\mathbb{Q}$-局部鞅, 这正是 Girsanov 定理.

最后, 作为本节的结束, 我们介绍 Yœurp 在[1] 中引进的另一个指数公式.

设 X 为一特殊半鞅, $X=M+A$ 为其典则分解, 其中 M 为局部鞅, A 为零初值可料有限变差过程. 令 $\dot{X}$ 表示 X 的可料投影, 即 $\dot{X}_t=M_{t-}+A_t$ (这里 $M_{0-}\triangleq M_0$), 则 $\dot{X}$ 为局部有界可料过程.

14.7 定理 设 X 为一零初值特殊半鞅, $X=M+A$ 为其典则分解. 若$[\Delta A=1]$为不足道集, 则存在唯一的特殊半鞅 Z, 满足方程

$$Z_t=1+\int_0^t \dot{Z}_s dX_s. \tag{7.1}$$

Z 由如下公式给出:

$$\begin{aligned}Z_t&=\exp\Big(X_t-\frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t\Big)\prod_{0<s\leq t}\Big(\frac{1+\Delta M_s}{1-\Delta A_s}\Big)e^{-\Delta X_s}\\&=\frac{\mathscr{E}(M)}{\mathscr{E}(-A)},\end{aligned} \tag{7.2}$$

我们将用 $\eta(X)$表示之.

证明 首先我们证明可料过程 $\frac{1}{1-\Delta A}$ 为局部有界. 对$n\geq2$, 令

$$T_n=\inf\Big\{t: |1-\Delta A_t|\leq\frac{1}{n}\Big\}.$$

由于对几乎所有 ω, 集合 $\left\{t: |1-\Delta A_t(\omega)| \leqslant \frac{1}{n}\right\}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 中无聚点, 且 $\Delta A_t(\omega)\neq 1$, 因此, $T_n \uparrow +\infty$ a.s.. 且 $[\![T_n]\!] \subset \left\{|1-\Delta A| \leqslant \frac{1}{n}\right\}$, 故 T_n 为可料时. 对每个 n, 设停时列 $(S_{nm})_{m\geqslant 1}$ 预报 T_n, 令 $S_n = \sup\limits_{p,q\leqslant n} S_{pq}$, 则在 $[\![0, S_n]\!]$ 上有 $\left|\frac{1}{1-\Delta A}\right| \leqslant n$. 这表明 $\frac{1}{1-\Delta A}$ 为局部有界可料过程.

现在, 我们令

$$Y_t = \int_0^t \frac{dX_s}{1-\Delta A_s}, \quad Z_t = \mathscr{E}(Y)_t,$$

则有

$$\text{(7.3)} \qquad \begin{aligned} Z_t &= 1 + \int_0^t Z_{s-} dY_s = 1 + \int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s} dX_s \\ &= \left(1 + \int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s} dM_s\right) + \int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s} dA_s \\ &\triangleq N + B. \end{aligned}$$

故 (Z_t) 为特殊半鞅, 且 $Z = N + B$ 为其典则分解. 于是有

$$\begin{aligned} \dot{Z}_t &= N_{t-} + B_t = Z_{t-} + \Delta B_t \\ &= Z_{t-} + \frac{Z_{t-}}{1-\Delta A_t} \Delta A_t = \frac{Z_{t-}}{1-\Delta A_t}. \end{aligned}$$

因此, (7.3) 表明 Z 是方程 (7.1) 的解.

反之, 设 (Z_t) 为方程 (7.1) 的解, 则 (Z_t) 为特殊半鞅, 其典则分解为

$$Z_t = \left(1 + \int_0^t \dot{Z}_s dM_s\right) + \int_0^t \dot{Z}_s dA_s.$$

于是有

$$\dot{Z}_t = Z_{t-} + \dot{Z}_t \Delta A_t.$$

从而 $\dot{Z}_t = \frac{Z_{t-}}{1-\Delta A_t}$. 这时由方程 (7.1), 我们有

$$Z_t = 1 + \int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s} dX_s = 1 + \int_0^t Z_{s-} dY_s,$$

其中 $Y_t = \int_0^t \frac{dX_s}{1-\Delta A_s}$. 这表明 $Z = \mathscr{E}(Y)$. 综上所证, $\mathscr{E}(Y)$ 为方

程(7.1)的唯一解.

最后,由 Yœurp 引理(定理 9.20),

$$(\Delta A).X=(\Delta A).M+(\Delta A).A=[A,\ M]+[A,\ A]$$
$$=[A,\ X],$$

故有

$$Y=\frac{1}{1-\Delta A}X=X+\frac{\Delta A}{1-\Delta A}X$$
$$=X+\frac{1}{1-\Delta A}[A,\ X].$$

于是

$$Y-A-[Y,\ A]=M+\frac{1}{1-\Delta A}[A,\ X]-[X,\ A]$$
$$-\frac{\Delta A}{1-\Delta A}[A,\ X]=M.$$

故由定理 14.5,

$$\mathscr{E}(Y)\mathscr{E}(-A)=\mathscr{E}(M),$$

此即(7.2).

14.8 注 1) 由(7.1)看出,如果 A 连续,则 $\eta(X)=\mathscr{E}(X)$. 特别,若 X 为局部鞅,则 $\eta(X)=\mathscr{E}(X)$.

2) 由(7.2),$\eta(A)=\frac{1}{\mathscr{E}(-A)}$. 于是在定理条件下,我们有

$$\eta(M+A)=\eta(M)\eta(A).$$

3) 在定理 14.7 中,关于 A 的条件不能去掉. 下面的例子将说明这一点.

令 $t_0>0$,设 $X=I_{[\![t_0,\infty[\![}$,则 X 为可料增过程,在 t_0 处跳为 1. 我们将证明如下方程的解不存在:

$$Z_t=1+\int_0^t \dot{Z}_s dX_s. \tag{8.1}$$

事实上,假设 Z 为方程(8.1)的一个解,则 Z 为可料半鞅. 从而 $\dot{Z}=Z$,于是有

$$Z_t=1+\int_0^t Z_s dX_s,$$

由于 $X=I_{[\![t_0,\infty[\![}$，故由上式得

$$Z_t=1+Z_{t_0}I_{[\![t_0,\infty[\![}.$$

特别有 $Z_{t_0}=1+Z_{t_0}$，这是不可能的. 因此，方程(8.1)无解.

§2 指数公式的推广

设 H 为一右连左极适应过程，X 为一半鞅，由定理13.13，存在唯一的右连左极适应过程 L，满足方程

$$L_t=H_t+\int_0^t L_{s-}dX_s.$$

我们将用记号 $\mathscr{E}_H(X)$ 表示 L.

如果 $H=1$，则 $\mathscr{E}_H(X)=\mathscr{E}(X)$. 如果 $H_t=H_0(t>0)$，则有 $\mathscr{E}_{H_t}(X)=H_0\mathscr{E}(X)$.

下一定理容易直接验证.

14.9 定理 设 X 为一半鞅，H，K 为右连左极适应过程，a，b 为两个实数，则有

$$\mathscr{E}_{aH+bK}(X)=a\mathscr{E}_H(X)+b\mathscr{E}_K(X), \tag{9.1}$$

$$\mathscr{E}_{K_-\cdot X}(X)=\mathscr{E}_K(X)-K. \tag{9.2}$$

下一定理推广了定理14.5.

14.10 定理 设 H，K，X，Y 为四个半鞅，则存在半鞅 L，使得

$$\mathscr{E}_H(X)\mathscr{E}_K(Y)=\mathscr{E}_L(X+Y+[X,Y]). \tag{10.1}$$

证明 令 $U=\mathscr{E}_H(X)$，$V=\mathscr{E}_K(Y)$，则有(分部积分公式)

$$d(UV)=U_-dV+V_-dU+d[U,V].$$

由于 $dU=dH+U_-dX$，$dV=dK+V_-dY$，我们有

$$\begin{aligned}d(UV)&=U_-(dK+V_-dY)+V_-(dH+U_-dX)\\&\quad+d[H,K]+(U,V)_-d[X,Y]+U_-d[K,X]\\&\quad+V_-d[H,Y]\\&=dL+(UV)_-d(X+Y+[X,Y]),\end{aligned}$$

其中 $L=U_{-}.(K+[K, X])+V_{-}.(H+[H, Y])+[H, K]$，故得(10.1)。

下一定理给出了当 H 为半鞅时 $\mathscr{E}_H(X)$ 的具体表达式。

14.11 定理 设 H, X 为两个半鞅，且 $X_0=0$. 令

$$T_0=0,$$

$$T_{n+1}=\inf\{t>T_n:1+\Delta X_t=0\},$$

则停时 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.，并且方程

$$Z_t=H_t+\int_0^t Z_{s-}dX_s \tag{11.1}$$

的唯一解 Z 由下述公式给出：

$$Z=\sum_{n\geq 0}Z^n I_{[T_n,T_{n+1}[},\tag{11.2}$$

其中，当 $T_n\leqslant t<T_{n+1}$ 时，

$$Z_t^n=\left(\Delta H_{T_n}+\int_{T_n}^t\frac{dH_s}{U_{s-}^n}-\int_{T_n}^t\frac{d[H, X]_s}{U_s^n}\right)U_t^n,\tag{11.3}$$

$$U_t^n=\exp\left(X_t-X_{T_n}-\frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t+\frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_{T_n}\right)\times\prod_{T_n<s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}.\tag{11.4}$$

证明 首先我们证明 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.. 由于对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\sum_{s\leq t}\Delta X_s^2<+\infty$ a.s.，于是对几乎所有 ω，集合 $\{t:1+\Delta X_t(\omega)=0\}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 中无聚点，故 $[\![T_n]\!]\subset[1+\Delta X=0]$ a.s.，且 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.。

对每个 n，我们有

$$(Z_{T_n+t}-Z_{T_n})I_{[T_n<\infty]}=(H_{T_n+t}-H_{T_n})I_{[T_n<\infty]}+\int_{T_n}^{T_n+t}Z_{s-}dX_s.\tag{11.5}$$

令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{T_n+t}$，置

$$z_t=Z_{T_n+t}I_{[T_n<\infty]},$$

$$h_t=(H_{T_n+t}-H_{T_n}+Z_{T_n})I_{[T_n<\infty]},$$

$$x_t=X_{T_n+t}I_{[T_n<\infty]}.$$

则由引理 10.2，z, h, x 为 $(\mathscr{G}_t)$ 半鞅，且 z 为如下方程的唯一解：

(11.6) $$z_t = h_t + \int_0^t z_{s-} dx_s.$$

令 $S = (T_{n+1} - T_n) I_{[T_n<\infty]} + \infty I_{[T_n=\infty]}$, 则 S 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时. 令

(11.7) $$y = x^{S-}, \ k = h^{S-}, \ u = z^{S-}.$$

则 u 为如下方程的唯一解:

(11.8) $$u_t = k_t + \int_0^t u_{s-} dy_s.$$

这时,容易看出 $[\Delta y = -1]$ 为不足道集.

下面,我们就来具体求解方程(11.8). 假定其解为如下形式:

(11.9) $$u_t = C_t \mathscr{E}(y)_t,$$

其中 C 为一待定的 $(\mathscr{G}_t)$ 半鞅. 记 $w = \mathscr{E}(y)$, 由分部积分公式(注意 $dw = w_- dy$)

$$du = C_- dw + w_- dC + d[C, w] = u_- dy + w_-(dC + d[C, y]).$$

但由(11.8), $du = dk + u_- dy$, 故得

(11.10) $$w_-(dC + d[C, y]) = dk.$$

由于 $|w|$ 严格正, 且 $w_- = \frac{1}{1+\Delta y} w$, 故 $|w_-|$ 严格正, 于是 $\left(\frac{1}{w_{t-}}\right)$ 为局部有界可料过程, 从而方程(11.10)可改写成

(11.11) $$dC + d[C, y] = \frac{dk}{w_-}.$$

由(11.11), 我们有

$$dC^c = \frac{dk^c}{w_-},$$

$$\Delta C = \frac{\Delta k}{w_-(1+\Delta y)} = \frac{\Delta k}{w}.$$

于是

$$d[C, y] = d\langle C^c, y^c\rangle + \Delta C \Delta y$$

$$= \frac{d\langle k^c, y^c\rangle}{w_-} + \frac{\Delta k \Delta y}{w} = \frac{1}{w} d[k, y].$$

故由(11.11)得

$$dC = \frac{dk}{w_-} - \frac{1}{w} d[k, y].$$

由于 $C_0=u_0=k_0$, 我们有

(11.12) $$C_t=k_0+\int_0^t \frac{dk_s}{w_{s-}}-\int_0^t \frac{d[k,\ y]_s}{w_s}.$$

综上所证, $u=Cw$ 为方程(11.8)的唯一解.

注意, 对 $n\geqslant 1$, $\Delta X_{T_n}=-I_{[T_n<\infty]}$(约定 $\Delta X_\infty=0$), 我们有

$$\begin{aligned}\Delta Z_{T_n}I_{[T_n<\infty]}&=(\Delta H_{T_n}+Z_{T_n-}\Delta X_{T_n})I_{[T_n<\infty]}\\&=(\Delta H_{T_n}-Z_{T_n-})I_{[T_n<\infty]},\end{aligned}$$

故有 $Z_{T_n}I_{[T_n<\infty]}=\Delta H_{T_n}I_{[T_n<\infty]}$, 于是有

$$h_t=(H_{T_n+t}-H_{T_n-})I_{[T_n<\infty]},$$

$$k_0=\Delta H_{T_n}I_{[T_n<\infty]}.$$

此外, 在 $[T_n<\infty]$ 上, 有

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(x)_t=\exp\Big(&X_{T_n+t}-X_{T_n}-\frac{1}{2}\langle X^c,\ X^c\rangle_{T_n+t}+\frac{1}{2}\langle X^c,\ X^c\rangle_{T_n}\Big)\\&\times\prod_{T_n<s\leqslant T_n+t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}=U^n_{T_n+t}.\end{aligned}$$

由于 $w=\mathscr{E}(y)=\mathscr{E}(x^{S-})=\mathscr{E}(x)^{S-}$, 于是在 $[T_n<\infty]$ 上, 对 $0\leqslant t<T_{n+1}-T_n$, 我们有

$$u_t=C_tw_t=\Big(\Delta H_{T_n}+\int_{T_n}^{T_n+t}\frac{dH_s}{U^n_{s-}}-\int_{T_n}^{T_n+t}\frac{d[H,\ X]_s}{U^n_s}\Big)U^n_{T_n+t}.$$

由于当 $T_n\leqslant t<T_{n+1}$ 时, $Z_t=z_{t-T_n}=u_{t-T_n}$, 故由上式得(11.3). 定理得证.

下一定理是定理 14.7 的相应推广.

14.12 定理 设 X, H 为两个特殊半鞅, $X_0=0$. 令

$$X=M+A,\quad H=N+B$$

为其典则分解. 若 $[\Delta A=1]$ 为不足道集, 则存在唯一的特殊半鞅 Z 满足方程

(12.1) $$Z_t=H_t+\int_0^t Z_s dX_s,$$

Z 由如下公式给出:

(12.2) $$Z=\mathscr{E}_{H+\frac{\Delta B}{1-\Delta A}X}\Big(\frac{1}{1-\Delta A}X\Big).$$

证明留给读者作为练习.

§3 指数特殊半鞅的乘积分解

设 X 为一半鞅，我们将感兴趣于如下问题：X 是否可以表为一局部鞅 L 与一可料有限变差过程 D 的乘积？这一问题最早是 Ito-Watanabe 在[1]中对 X 为非负上鞅情形研究的．显然，如果半鞅 X 具有所述的性质，则 X 为特殊半鞅．

下一定理是我们的基本出发点．

14.13 定理 设 X 为一零初值特殊半鞅，$X=M+A$ 为其典则分解．如果 $[\Delta A=-1]$ 为不足道集，则存在一零初值局部鞅 N，使得 $\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(N)\mathscr{E}(A)$．

证明 由定理 14.7 的证明知，$\frac{1}{1+\Delta A}$ 为局部有界可料过程．令$N=\frac{1}{1+\Delta A}M$，则 N 为零初值局部鞅，且由定理 9.20，有

$$[N,\ A]=\Delta A.N=\frac{\Delta A}{1+\Delta A}M=M-N.$$

故由定理 14.5,

$$\mathscr{E}(N)\mathscr{E}(A)=\mathscr{E}(N+A+[N,\ A])=\mathscr{E}(M+A)=\mathscr{E}(X).$$

下一定理是定理 14.13 的推广．

14.14 定理 设 X, Y 为两个零初值半鞅，且 $[\Delta Y=-1]$ 为不足道集，则存在一零初值半鞅 Z，使得$\mathscr{E}(X+Y)=\mathscr{E}(Z)\mathscr{E}(Y)$[1]．其中 Z 可由下述公式给出：

$$Z_t=X_t-\langle X^c,\ Y^c\rangle_t-\sum_{0<s\leqslant t}\frac{\Delta X_s\Delta Y_s}{1+\Delta Y_s}. \tag{14.1}$$

特别，令

$$\overline{Y}=-Y_t+\langle Y^c,\ Y^c\rangle_t+\sum_{0<s\leqslant t}\frac{\Delta Y_s^2}{1+\Delta Y_s}, \tag{14.2}$$

则 $\overline{Y}$ 为唯一的零初值半鞅，使得

$$\mathscr{E}(Y)\mathscr{E}(\overline{Y})=1. \tag{14.3}$$

证明 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，我们有

1) 一般说来，满足这一等式的 Z 不一定唯一(见定理 14.15)．

$$\sum_{0<s\leq t}\left|\frac{\Delta X_s\Delta Y_s}{1+\Delta Y_s}\right|I_{[|1+\Delta Y_s|\geq\frac{1}{2}]}\leq 2\sum_{0<s\leq t}|\Delta X_s\Delta Y_s|<+\infty,$$

另一方面，对几乎所有 ω，只有有穷多个 $s\leq t$，使得 $|1+\Delta Y_s(\omega)|<\frac{1}{2}$，故容易看出 $\sum\limits_{0<s\leq\cdot}\frac{\Delta X_s\Delta Y_s}{1+\Delta Y_s}$ 为适应有限变差过程. 由(14.1)可以直接验证如下等式:

$$Z+Y+[Z,Y]=X+Y,$$

故由定理 14.5 得 $\mathscr{E}(X+Y)=\mathscr{E}(Z)\mathscr{E}(Y)$.

在(14.1)中，令 $X=-Y$，则 $\overline{Y}=Z$，故有(14.3). $\overline{Y}$ 的唯一性可由下一定理推得.

14.15 定理 设 X, Y 为两个零初值半鞅，使得 $\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(Y)$. 如果$[\mathscr{E}(X)=0]$为不足道集，则 $X=Y$.

证明 首先我们证明：设 Z 为一零初值半鞅，使得 $\mathscr{E}(Z)=1$，则 $Z=0$. 事实上，我们有

$$1=\mathscr{E}(Z)_t=\exp\Big(Z_t-\frac{1}{2}\langle Z^c,Z^c\rangle_t+\sum_{0<s\leq t}[\log(1+\Delta Z_s)-\Delta Z_s]\Big),$$

故有

$$Z_t=\frac{1}{2}\langle Z^c,Z^c\rangle_t-\sum_{0<s\leq t}[\log(1+\Delta Z_s)-\Delta Z_s].$$

特别 Z 为零初值有限变差过程，故 $Z^c=0$(注意：这里 Z^c 为 Z 的连续局部鞅部分). 于是有

$$Z_t=-\sum_{0<s\leq t}[\log(1+\Delta Z_s)-\Delta Z_s].$$

这表明 Z 为有限变差过程. 故有

$$\Delta Z_t=-\log(1+\Delta Z_t)+\Delta Z_t,$$

从而 $\Delta Z_t=0$，于是(Z_t)连续，因此必须有 $Z=0$.

现在来证明定理. 依假定，$[\mathscr{E}(X)=0]$为不足道集，故由定理 14.2，$[\Delta X=-1]$为不足道集. 令

$$\overline{X}_t=-X_t+\langle X^c,X^c\rangle_t+\sum_{0<s\leq t}\frac{\Delta X_s^2}{1+\Delta X_s},\tag{15.1}$$

由定理 14.14, $\mathscr{E}(Y)\mathscr{E}(\overline{X})=\mathscr{E}(X)\mathscr{E}(\overline{X})=1$. 故由定理 14.5 及上面证明的事实, 我们有

(15.2) $$Y+\overline{X}+[Y,\ \overline{X}]=0.$$

于是我们有

(15.3) $$Y^c=-\overline{X}^c=-X^c.$$

此外, 由(15.2)及(15.1), 我们有

(15.4) $$\Delta Y=-\frac{\Delta\overline{X}}{1+\Delta\overline{X}}=\frac{\dfrac{\Delta X}{1+\Delta X}}{1-\dfrac{\Delta X}{1+\Delta X}}=\Delta X.$$

将(15.1)、(15.3)及(15.4)代入(15.2), 立刻得到 $Y=X$.

现在我们研究一类指数特殊半鞅的乘积分解. 我们先给出一个一般结果, 然后给出它的若干应用.

下面我们用 $\dot{Z}$ 表示特殊半鞅 Z 的可料投影.

14.16 定理 设(Z_t)为一特殊半鞅. 如果对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, 有 $Z_t\neq 0$ a.s., $\dot{Z}_t\neq 0$ a.s., 且对一切 $t>0$, 有 $Z_{t-}\neq 0$ a.s., 则 Z 有如下唯一的乘积分解:

(16.1) $$Z=LD,$$

其中 $L_0=Z_0$, $D_0=1$, L 为一局部鞅, D 为一可料有限变差过程.

证明 令 $X_t=\int_0^t\frac{1}{Z_{s-}}dZ_s$, 则 X 为一零初值特殊半鞅, 且 $Z=Z_0\mathscr{E}(X)$. 令 $X=M+A$ 为 X 的典则分解, 则由定理 8.16. 1), 对任何可料时 S, 有 $\mathbb{E}[\Delta M_SI_{[S<\infty]}|\mathscr{F}_{S-}]=0$, 故有

$$\begin{aligned}\Delta A_SI_{[S<\infty]}&=\mathbb{E}[\Delta X_SI_{[S<\infty]}|\mathscr{F}_{S-}]\\&=\frac{1}{Z_{S-}}\mathbb{E}[\Delta Z_SI_{[S<\infty]}|\mathscr{F}_{S-}]\\&=-I_{[S<\infty]}+\frac{1}{Z_{S-}}\mathbb{E}[Z_SI_{[S<\infty]}|\mathscr{F}_{S-}]\\&=-I_{[S<\infty]}+\frac{\dot{Z}_S}{Z_{S-}}I_{[S<\infty]}.\end{aligned}$$

依假定,在$[S<\infty]$上有$\dot{Z}_S\neq 0$ a.s.,故在$[S<\infty]$上,$\Delta A_S\neq -1$ a.s.. 由于A可料,这意味着$[\Delta A=-1]$为不足道集. 由定理14.13, 令$N=\frac{1}{1+\Delta A}M$, 则有

$$\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(N)\mathscr{E}(A).$$

令$L=Z_0\mathscr{E}(N)$, $D=\mathscr{E}(A)$,则有$Z=LD$.

往证分解的唯一性. 设$Z=L'D'$, 其中$L'_0=Z_0, D'_0=1$, L'为局部鞅,D'为可料有限变差过程. 令$N'=\frac{1}{L'_-}\cdot L'$, $A'=\frac{1}{D'_-}\cdot D'$, 则有

$$\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(N')\mathscr{E}(A')=\mathscr{E}(N'+A'+[N', A']),$$

另一方面,我们有

$$\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(N)\mathscr{E}(A)=\mathscr{E}(N+A+[N, A]).$$

故由定理14.15, 我们有

$$N'+A'+[N', A']=N+A+[N, A].$$

但由定理9.20, $[N', A']$及$[N, A]$都为局部鞅, 故由上式知, $A-A'$为零初值可料有限变差局部鞅, 从而$A=A'$. 于是有$D=D'$, $L=L'$. 唯一性得证.

作为这一定理的一个特别情形,我们有

14.17 定理 设(Z_t)为一严格正特殊半鞅, 且$(Z_{t-})_{t>0}$为严格正,则Z有如下唯一分解:

$$Z=LD, \tag{17.1}$$

其中$L_0=Z_0$, $D_0=1$, L为一局部鞅, D为可料有限变差过程. 此外,在这一分解中, L及D均为严格正.

证明 由于Z严格正,容易由截口定理证明Z的可料投影$\dot{Z}$也为严格正,故由定理14.16, Z有定理中所说的唯一分解. 这一定理也可直接证明如下: 令$X_t=\int_0^t\frac{1}{Z_{s-}}dZ_s$, 则$Z=Z_0\mathscr{E}(X)$. 由定理14.2有$\Delta X>-1$. 由于$\Delta A$为$\Delta X$的可料投影(因$\Delta M$的

可料投影为 0)，故 $\Delta A > -1$. 于是按上一定理的证明可得本定理的结论. 特别, $D = \mathscr{E}(A)$ 为严格正，故 L 亦为严格正.

应用定理 14.17，我们立刻得到严格正上鞅的 Ito-Watanabe 乘积分解定理.

14.18 系　设 (Z_t) 为一严格正上鞅，则 Z 有如下唯一分解：

(18.1)
$$Z = LD,$$

其中 $L_0 = Z_0$, $D_0 = 1$, L 为一严格正局部鞅, D 为一严格正可料降过程.

证明　由于 Z 的严格正性蕴含 $(Z_{t-})_{t>0}$ 的严格正性(定理 3.25)，故由定理 14.17, Z 有定理中所说的唯一分解. 只需证明 D 是降过程. 由定理 10.6，我们有(约定 $L_{0-} = 0$)

$$Z = LD = D.L + L_-.D.$$

这是非负上鞅 Z 的 Ito-Watanabe 分解，故由定理 8.19, $-L_-.D$ 为增过程，即 $L_-.D$ 为降过程. 于是 $D = 1 + \int_0^{\cdot} \frac{1}{L_{s-}} d(L_-.D)$，亦为降过程.

应用定理 14.17，我们立刻得到 Yœurp, Meyer 在[1]中给出的严格正下鞅乘积分解定理.

14.19 系　设 (Z_t) 为一严格正下鞅，且 $(Z_{t-})_{t>0}$ 为严格正，则 Z 有如下唯一分解：

(19.1)
$$Z = LD,$$

其中 $L_0 = Z_0$, $D_0 = 1$, L 为一严格正局部鞅, D 为一可料增过程.

证明　类似于定理 8.19，我们可以对非负下鞅建立 Doob-Meyer 分解定理. 然后同上可证 D 为增过程.

§4　非负特殊半鞅的乘积分解

本节我们将研究一般非负特殊半鞅的乘积分解.

14.20 引理　设 X 为一零初值特殊半鞅, $X = M + A$ 为其典

则分解. 令

$$T=\inf\{t:\Delta X_t=-1\},$$
$$T'=\inf\{t:\Delta A_t=-1\}.$$

设 $\Delta X\geqslant -1$, 则

1) T' 为可料时, 且 $T'\geqslant T$ a.s.;

2) 存在停时 $T_n\uparrow T$ a.s., 使得限于每个 $[\![0, T_n]\!]$, 有 $\Delta A>-1$.

证明 1) 由于 $[\![T']\!]\subset[\Delta A=-1]$, 故 T' 为可料时. 于是我们有 $E[\Delta X_{T'}|\mathscr{F}_{T'-}]=\Delta A_{T'}=-I_{[T'<\infty]}$. 由于 $\Delta X\geqslant -1$, 这表明在 $[T'<\infty]$ 上, 有 $\Delta X_{T'}=-1$ a.s.. 于是 $T\leqslant T'$ a.s..

2) 设停时列 (S_n) 预报 T', 令 $T_n=T\wedge S_n$, 则 (T_n) 具有所要求的性质.

14.21 定义 设 M 为一右连续适应过程, T 为一停时. 称 M 为 $[\![0, T[\![$ 上的局部鞅, 如果存在停时 $T_n\uparrow T$ a.s., 使得每个 M^{T_n} 为局部鞅. 称 M 为 $[\![0, T[\![$ 上的可料有限变差过程, 如果存在停时 $T_n\uparrow T$ a.s., 使得每个 M^{T_n} 为可料有限变差过程.

设 M 为一右连续适应过程, T 为一停时. 令停时 $T_n\uparrow T$ a.s., 显然, 如果对每个 n, M 为 $[\![0, T_n[\![$ 上的局部鞅(相应地, 可料有限变差过程), 则 M 为 $[\![0, T[\![$ 上的局部鞅(相应地, 可料有限变差过程).

下一定理推广了定理 14.17.

14.22 定理 设 X 为一零初值特殊半鞅, 且 $\Delta X\geqslant -1$. 令 $X=M+A$ 为其典则分解. 置

$$T=\inf\{t:\Delta X_t=-1\}.$$

则 $\mathscr{E}(X)$ 有如下乘积分解:

$$\mathscr{E}(X)=L\mathscr{E}(A), \tag{22.1}$$

其中 L 为 $[\![0, T[\![$ 上的局部鞅. 此外, 设另有

$$\mathscr{E}(X)=L'D', \tag{22.2}$$

其中 $L'_0=1$, $D'_0=1$, L' 为 $[\![0, T[\![$ 上的局部鞅, D' 为 $[\![0, T[\![$ 上的

可料有限变差过程，则 L 与 L' 在 $[\![0, T[\![$ 上无区别，D' 与 $\mathscr{E}(A)$ 在 $[\![0, T[\![$ 上无区别.

证明 由引理 14.20，存在停时 $T_n \uparrow T$ a.s.，使得限于每个 $[\![0, T_n]\!]$，有 $\Delta A > -1$. 于是由定理 14.13，对每个 n，我们有

$$\mathscr{E}(X)^{T_n} = \mathscr{E}(X^{T_n}) = \mathscr{E}\left(\frac{1}{1+\Delta A^{T_n}} M^{T_n}\right)\mathscr{E}(A)^{T_n}.$$

令

$$L^{(n)} = \mathscr{E}\left(\frac{1}{1+\Delta A^{T_n}} M^{T_n}\right), \quad n=1, 2, \cdots,$$

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} L^{(n)} I_{[\![T_{n-1}, T_n[\![}, \quad (T_0 = 0).$$

由于在 $[T_n = T < \infty]$ 上，有 $L_T^{(n)} = 0$(因 $\mathscr{E}(X)_T = 0$, $\mathscr{E}(A)_T > 0$)，故有 $L^{T_n} = L^{(n)}$. 于是 L 为 $[\![0, T[\![$ 上的局部鞅，且有(22.1). 定理的另一结论显然.

下一定理给出了一般非负特殊半鞅的乘积分解.

14.23 定理 设 Z 为一非负特殊半鞅，且 $Z_0 > 0$ a.s.，令

$$T = \inf\{t > 0 : Z_t = 0 \quad 或 \quad Z_{t-} = 0\},$$

则存在 $[\![0, T[\![$ 上的局部鞅 L 及 $[\![0, T[\![$ 上的可料有限变差过程 D，使得 $L_0 = Z_0$, $D_0 = 1$，且在 $[\![0, T[\![$ 上有

$$Z = LD.$$

此外，在这一分解中，L 及 D 在 $[\![0, T[\![$ 上是唯一确定的.

证明 令 $R = T_{[Z_{T-}=0]}$，则由引理 14.3，R 为可料时. 设停时列 (R_n) 预报 R，令 $T_n = T \wedge R_n$，则 $T_n \uparrow T$，且对每个 n，Z_- 限于 $]\!]0, T_n]\!]$ 为严格正. 令 $X_t^{(n)} = \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}} dZ^{T_n}$，则 $(X_t^{(n)})$ 为零初值特殊半鞅，$\Delta X^{(n)} \geqslant -1$，且 $Z^{T_n} = Z_0 \mathscr{E}(X^{(n)})$. 令

$$S^{(n)} = \inf\{t : \Delta X^{(n)} = -1\},$$

显然有 $S^{(n)} \geqslant T^{(n)}$，故由定理 14.22，存在 $[\![0, T_n[\![$ 上的局部鞅 $L^{(n)}$ 及 $[\![0, T_n[\![$ 上的可料有限变差过程 $D^{(n)}$，使得 $L_0^{(n)} = Z_0$, $D_0^{(n)} = 1$，且 $Z^{T_n} = L^{(n)} D^{(n)}$. 设 $T_0 = 0$，令

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}L^{(n)}I_{]T_{n-1},T_n]]},$$

$$D=\sum_{n=1}^{\infty}D^{(n)}I_{[T_{n-1},T_n]]},$$

则 L 为 $[\![0,T[\![$ 上的局部鞅，D 为 $[\![0,T[\![$ 上的可料有限变差过程，且在 $[\![0,T[\![$ 上有 $Z=LD$. 定理的另一结论显然.

作为这一定理的一个应用，我们得到一般非负上鞅的 Ito-Watanabe 乘积分解定理.

14.24 定理 设 Z 为一非负上鞅. 令

$$T=\inf\{t>0: Z_t=0 \quad 或 \quad Z_{t-}=0\}.$$

则存在 $[\![0,T[\![$ 上的非负局部鞅 L 及 $[\![0,T[\![$ 上的可料降过程 D，使得 $L_0=Z_0$, $D_0=1$, 且

$$Z=LD.$$

此外，在这一分解中，L 及 D 在 $[\![0,T[\![$ 上是唯一确定的.

证明 无妨设 $Z_0>0$ a.s.，否则可在 $[Z_0>0]$ 上考虑 Z. 由于 $Z=Z^T$，故由定理 14.23 推得本定理结论.

§5 指数鞅一致可积性准则

设 X 为一零初值局部鞅，且 $\Delta X\geqslant -1$. 则 $\mathscr{E}(X)$ 为非负局部鞅. 在本节，我们将给出一些充分条件，使得 $\mathscr{E}(X)$ 为一致可积鞅或 L^p-可积鞅.

首先，我们证明两个基本引理.

14.25 引理 设 M 为一致可积鞅，$\alpha>0$ 为一常数. 若 $\mathbb{E}[e^{\alpha M_\infty}]<\infty$，则 $(e^{\alpha M_t})$ 为一致可积下鞅.

证明 由 Jensen 不等式，对 $s\leqslant t\leqslant\infty$，有

$$e^{\alpha M_s}\leqslant\mathbb{E}[e^{\alpha M_t}\mid\mathscr{F}_s].$$

由此推得引理的结论.

14.26 引理 设 X, Y, Z 为三个非负右连续适应过程，使得

$X\leqslant Y^aZ^{1-a}$，其中 $0<a<1$．若 Y 在 L^1 中有界，Z 为类(D)过程，则 X 为类(D)过程．

证明 设 $C\in\mathscr{F}$，则对任何有界停时 S，由 Hölder 不等式有

$$E[I_CX_S]\leqslant(E[Y_S])^a(E[I_CZ_S])^{1-a}.$$

于是 $(X_S)_{S\in\mathscr{T}}$ 为一致可积族，其中 $\mathscr{T}$ 为有界停时全体．

现在我们先给出指数鞅的若干一致可积性准则，然后再研究指数鞅的 L^r-可积性．

14.27 定理 设 M 为一零初值局部鞅，且 $\Delta M>-1$．令

(27.1) $$W_t(a)=\exp\frac{a}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t\prod_{s\leqslant t}(1+a\Delta M_s)\exp\left(-\frac{a\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\right).$$

若 $\forall 0<a<1$，$E[W_\infty(a)]<\infty$，且 $\lim\limits_{a\uparrow 1}(E[W_\infty(a)])^{1-a}=1$，则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅．

证明 设 $0<a<1$，由指数公式，我们有

(27.2) $\mathscr{E}(aM)_t$

$$=\exp\left(aM_t-\frac{a^2}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leqslant t}(1+a\Delta M_s)e^{-a\Delta M_s}$$

$$=\mathscr{E}(M)_t^a\exp\frac{a(1-a)}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t\prod_{s\leqslant t}\frac{1+a\Delta M_s}{(1+\Delta M_s)^a}$$

$$=\mathscr{E}(M)_t^aW_t(a)^{1-a}\prod_{s\leqslant t}\left(\frac{1+a\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\exp\frac{(1-a)\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\right)^a.$$

令 $x=\dfrac{1+a\Delta M_s}{1+\Delta M_s}$，则 $x>0$．由初等不等式 $e^x\geqslant ex$ 得

$$\frac{1+a\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\exp\frac{(1-a)\Delta M_s}{1+\Delta M_s}=xe^{1-x}\leqslant 1.$$

故由(27.1)得

(27.3) $$\mathscr{E}(aM)_t\leqslant\mathscr{E}(M)_t^aW_t(a)^{1-a}.$$

但容易证明：对 $0<a<1$ 及 $x>-1$，有

(27.4) $$f(a)=(1+ax)e^{-\frac{ax}{1+x}}\geqslant 1.$$

故对一切 $0<a<1$，$W_t(a)$ 为可积增过程（从而为类(D)过程）．于

是由引理 12.26, $\mathscr{E}(aM)$为一致可积鞅. 特别由(27.3)得

$$1=\mathbb{E}[\mathscr{E}(aM)_\infty]\leqslant(\mathbb{E}[\mathscr{E}(M)_\infty])^a(\mathbb{E}[\overline{W}_\infty(a)])^{1-a}.$$

在上式两边取 $\varliminf\limits_{a\uparrow\uparrow 1}$ 得 $\mathbb{E}[\mathscr{E}(M)_\infty]\geqslant 1$. 但恒有 $\mathbb{E}[\mathscr{E}(M)_\infty]\leqslant 1$ (因 $\mathscr{E}(M)$为非负上鞅[见定理 8.11]), 故 $\mathbb{E}[\mathscr{E}(M)_\infty]=1$. 由此推知 $\mathscr{E}(M)$为一致可积鞅.

14.28 系 设 M 为一零初值局部鞅, 且 $\Delta M>-1$. 令

(28.1) $$\overline{W}_t(a)=\exp\frac{a}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\prod_{s\leqslant t}(1+\Delta M_s)e^{-\frac{\Delta M_s}{1+\Delta M_s}}$$

若$\forall 0<a<1$, $\mathbb{E}[\overline{W}_\infty(a)]<\infty$, 且$\varliminf\limits_{a\uparrow\uparrow 1}(\mathbb{E}[\overline{W}_\infty(a)])^{1-a}=1$,则$\mathscr{E}(M)$为一致可积鞅. 特别若 $\mathbb{E}[\overline{W}_\infty(1)]<\infty$, 则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅.

证明 设 $0<a<1$, $x>-1$. 令

$$f(a)=(1+ax)e^{-\frac{ax}{1+x}}.$$

易证 $f(a)$ 为 a 的增函数, 故 $f(a)\leqslant f(1)$. 于是比较 (27.1) 及 (28.1)知 $\overline{W}_t(a)\geqslant W_t(a)$. 故有系的结论.

注 我们也可以直接证明如下不等式:

$$\mathscr{E}(aM)_t\leqslant\mathscr{E}(M)_t^a\overline{W}_t(a)^{1-a}.$$

由此推得系的结论.

14.29 引理 设 $0\geqslant x>-1$, $0<a<1$, 则有

(29.1) $$\log(1+x)\leqslant\frac{2x}{2+x},$$

(29.2) $$\frac{1+ax}{(1+x)^a}\leqslant(1+x)^{a(1-a)}e^{-\frac{a(1-a)x}{1+x}},$$

(29.3) $$\frac{1+ax}{(1+x)^a}\leqslant\exp\frac{a(1-a)x^2}{(2+x)(1+x)}.$$

证明 令 $f(x)=\log(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}=\log(1+x)-2+\dfrac{4}{2+x}$.

则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{4}{(2+x)^2}=\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$$

于是当 $0>x>-1$ 时，有 $f'(x)>0$，从而 $f(x)<f(0)=0$．(29.1)得证。

为证(29.2)，令

$$g(x)=\log(1+ax)-a(2-a)\log(1+x)+a(1-a)\frac{x}{1+x},$$

则

$$g'(x)=\frac{a}{1+ax}-\frac{a(2-a)}{1+x}+\frac{a(1-a)}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{a(1-a)x}{(1+x)(1+ax)}-\frac{a(1-a)x}{(1+x)^2}=\frac{a(1-a)^2x^2}{(1+x)^2(1+ax)}.$$

于是当 $0>x>-1$，有 $g'(x)>0$，从而 $g(x)<g(0)=0$．此即(29.2)。

最后，我们有

$$\frac{2x}{2+x}=\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{(2+x)(1+x)},$$

于是由(29.1)得

$$(1+x)e^{-\frac{x}{1+x}}\leqslant\exp\frac{x^2}{(2+x)(1+x)}.$$

由此利用(29.2)得(29.3)。

14.30 引理　设 $0<a<1$，$0<\delta\leqslant1$，$x\geqslant-1+\delta$，则有

$$\frac{1+ax}{(1+x)^a}\leqslant\exp\frac{a(1-a)x^2}{(1+\delta)\delta}. \tag{30.1}$$

证明　若 $x\leqslant0$，则由(29.3)推得(30.1)．若 $x\geqslant0$，则容易证明

$$\frac{1+ax}{(1+x)^a}\leqslant\exp\frac{a(1-a)x^2}{2}.$$

由于 $(1+\delta)\delta\leqslant2$．故由上式推得(30.1)。

14.31 定理　设 M 为一零初值局部鞅，且 $\Delta M\geqslant-1+\delta$，其中 $0<\delta\leqslant1$．令

$$H_t(a)=\exp\left\{\frac{a}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t+\frac{a}{(1+\delta)\delta}[M^d,M^d]_t\right\}.$$

若 $\forall 0<a<1$，有 $E[H_\infty(a)]<\infty$，且 $\lim\limits_{a\uparrow1}(E[H_\infty(a)])^{1-a}=1$，则

$\mathscr{E}(M)$为一致可积鞅. 特别, 若 $\mathbb{E}[H_\infty(1)]<\infty$, 则 $\mathscr{E}(M)$为一致可积鞅.

证明 设 $0<a<1$. 由(27.2)我们有

(31.1) $$\mathscr{E}(aM)_t=\mathscr{E}(M)_t^a \exp\frac{a(1-a)}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t \prod_{s\leqslant t}\frac{1+a\Delta M_s}{(1+\Delta M_s)^a}.$$

利用不等式(29.3), 我们得到

(31.2) $$\mathscr{E}(aM)_t\leqslant\mathscr{E}(M)_t^a H_t(a)^{1-a}.$$

由此按定理 14.27 的证明推理知, $\mathscr{E}(M)$为一致可积鞅.

14.32 引理 设 $0<a<1$, $0<\delta\leqslant 1$, $\beta\leqslant\frac{a^2\delta}{1-a+a\delta}$. 则对任何 $x\geqslant -1+\delta$, 有

(32.1) $$\frac{1+ax}{(1+x)^\beta}e^{-(a-\beta)x}\leqslant 1.$$

证明 首先易证 $\beta\leqslant a^2<a$. 令

$$f(x)=\log(1+ax)-\beta\log(1+x)-(a-\beta)x,$$

则

$$f'(x)=\frac{a}{1+ax}-\frac{\beta}{1+x}-(a-\beta)=\frac{\beta x}{1+x}-\frac{a^2x}{1+ax}$$
$$=\frac{-x[a^2-\beta+a(a-\beta)x]}{(1+x)(1+ax)}.$$

于是当 $x>0$ 时, 有 $f'(x)<0$, 从而 $f(x)<f(0)=0$; 当 $0>x>-\frac{a^2-\beta}{1-a+a\delta}$ 且 $x>-1$ 时, 有 $f'(x)>0$, 从而 $f(x)<f(0)=0$. 但当 $\beta\leqslant\frac{a^2\delta}{1-a+a\delta}$ 时, 我们有 $\frac{a^2-\beta}{a(a-\beta)}\geqslant 1-\delta$. 于是当 $0>x>-1+\delta$ 时有 $f(x)<0$. 引理得证.

14.33 定理 设 M 为一零初值一致可积鞅, 且 $\Delta M\geqslant -1+\delta$, 其中 $0<\delta\leqslant 1$. 若 $\forall 0<a<1$, 有 $\mathbb{E}\left[\exp\frac{a}{1+\delta}M_\infty\right]<\infty$, 且 $\lim\limits_{a\uparrow 1}\left(\mathbb{E}\left[\exp\frac{a}{1+\delta}M_\infty\right]\right)^{1-a}=1$, 则 $\mathscr{E}(M)$为一致可积鞅. 特别, 若 $\mathbb{E}\left[\exp\frac{1}{1+\delta}M_\infty\right]<\infty$, 则 $\mathscr{E}(M)$为一致可积鞅.

证明 设 $0<a<1$, $\beta=\dfrac{a^2\delta}{1-a+a\delta}$. 由指数公式,我们有

$$\mathscr{E}(aM)_t=\exp\left(aM_t-\frac{a^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leq t}(1+a\Delta M_s)e^{-a\Delta M_s}$$

$$=\mathscr{E}(M)_t^{\beta}\exp\left[(a-\beta)M_t+\frac{\beta-a^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right]$$

$$\times\prod_{s\leq t}\frac{1+a\Delta M_s}{(1+\Delta M_s)^{\beta}}e^{-(a-\beta)\Delta M_s}.$$

由引理 14.32 及 $\beta\leqslant a^2$ 这一事实得

$$\mathscr{E}(aM)_t\leqslant\mathscr{E}(M)_t^{\beta}\exp(a-\beta)M_t=\mathscr{E}(M)_t^{\beta}\left(\exp\frac{a-\beta}{1-\beta}M_t\right)^{1-\beta}.$$

注意 $\dfrac{a-\beta}{1-\beta}=\dfrac{a}{1+a\delta}<\dfrac{1}{1+\delta}$, 故由引理 14.25 及 14.26 知, $\mathscr{E}(aM)$ 为一致可积鞅. 此外,易知

$$\lim_{a\uparrow 1}\left(\mathrm{E}\left[\exp\frac{a}{1+\delta}M_\infty\right]\right)^{1-a}=1$$

$$\Leftrightarrow\lim_{a\uparrow 1}\left(\mathrm{E}\left[\exp\frac{a}{1+a\delta}M_\infty\right]\right)^{1-\beta}=1.$$

故按定理 14.27 的证明推理知, $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅.

14.34 定理 设 M 为一零初值一致可积鞅, 且 $\Delta M\geqslant-1$, 若存在 $K\geqslant1$, 使得 $\mathrm{E}[\exp KM_\infty]<\infty$, 则 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^K$.

证明 设 $0<a<1$. 由于当 $x\geqslant-1$ 时, 有 $(1+x)^a\leqslant1+ax$, 故

$$\mathscr{E}(M)_t\leqslant\mathscr{E}(aM)_t^{\frac{1}{a}}\leqslant\exp M_t.$$

设 $\mathrm{E}[\exp M_\infty]<\infty$, 则 $\mathrm{E}[\exp aM_\infty]<\infty$. 故由引理 14.25 推知, $\mathscr{E}(aM)$ 为非负一致可积鞅, 于是由 Doob 不等式得

$$\mathrm{E}[\sup_t\mathscr{E}(M)_t]\leqslant\mathrm{E}[(\sup_t\mathscr{E}(aM)_t)^{\frac{1}{a}}]$$

$$\leqslant\frac{1}{(1-a)^{\frac{1}{a}}}\sup_t\mathrm{E}[\mathscr{E}(aM)_t^{\frac{1}{a}}]$$

$$\leqslant\frac{1}{(1-a)^{\frac{1}{a}}}\sup_t\mathrm{E}[\exp M_t]$$

$$\leqslant\frac{1}{(1-a)^{\frac{1}{a}}}\mathrm{E}[\exp M_\infty]<\infty.$$

这表明 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^1$.

设 $\mathbb{E}[\exp KM_\infty]<\infty$, 其中 $K>1$. 则有

$$\mathscr{E}(M)_t^K\leqslant\exp KM_t.$$

故由引理 14.25 知, $\mathscr{E}(M)^K$ 为类 (D) 过程, 由此推知 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^K$.

14.35 定理 设 M 为一零初值 $\mathscr{BMO}$ 鞅. 如果存在 δ: $0<\delta\leqslant1$, 使得 $\Delta M\geqslant-1+\delta$, 则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅.

证明 易知: 对 $x\geqslant-1+\delta$, 有 $(1+x)e^{-x}\geqslant e^{-\frac{x^2}{2\delta}}$. 于是对任何有穷停时 T, 由指数公式得

$$\frac{\mathscr{E}(M)_\infty}{\mathscr{E}(M)_T}\geqslant\exp\Big\{(M_\infty-M_T)-\frac{1}{2}(\langle M^c,M^c\rangle_\infty-\langle M^c,M^c\rangle_T)$$

$$-\frac{1}{2\delta}\sum_{s>T}\Delta M_s^2\Big\}$$

$$\geqslant\exp\Big\{(M_\infty-M_T)-\frac{1}{2\delta}([M,M]_\infty-[M,M]_{T-})\Big\}.$$

由 Jensen 不等式, 我们有

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\mathscr{E}(M)_\infty}{\mathscr{E}(M)_T}\Big|\mathscr{F}_T\Big]\geqslant\exp\Big\{-\frac{1}{2\delta}\mathbb{E}[[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}|\mathscr{F}_T]\Big\}$$

$$\geqslant\exp\Big\{-\frac{1}{2\delta}\|M\|_{\mathscr{BMO}}^2\Big\}.$$

从而有

$$\mathscr{E}(M)_T\leqslant\mathbb{E}[\mathscr{E}(M)_\infty|\mathscr{F}_T]\exp\Big\{\frac{1}{2\delta}\|M\|_{\mathscr{BMO}}^2\Big\}.$$

这表明 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅.

14.36 定理 设 $0<\delta\leqslant1$, $\Delta M\geqslant-1+\delta$. 若存在 K: $1<K<\frac{1}{1-\delta}$, 使得

$$\mathbb{E}\Big[\exp\frac{K^2}{2}\langle M^c,M^c\rangle_\infty\prod_s(1+\Delta M_s)^K\exp\Big(-\frac{K\Delta M_s}{1+K\Delta M_s}\Big)\Big]<\infty.$$

则 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$, 其中 $r=\frac{K^2}{2K-1}$.

证明 我们有

$$(36.1)\quad \mathscr{E}(M)_t^K=\exp\Big(KM_t-\frac{K}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t\Big)\times\prod_{s\le t}(1+\Delta M_s)^K e^{-K\Delta M_s}$$

$$=\mathscr{E}(KM)_t\exp\frac{K(K-1)}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t\times\prod_{s\le t}(1+\Delta M_s)^{K-1}\exp\Big(-\frac{(K-1)\Delta M_s}{1+K\Delta M_s}\Big)$$

$$\times\prod_{s\le t}\frac{1+\Delta M_s}{1+K\Delta M_s}\exp\frac{(K-1)\Delta M_s}{1+K\Delta M_s}$$

$$\leqslant\mathscr{E}(KM)_t\,A_t^{1-\frac{1}{K}},$$

其中

$$A_t=\exp\frac{K^2}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t\prod_{s\le t}(1+\Delta M_s)^K\exp\Big(-\frac{K\Delta M_s}{1+K\Delta M_s}\Big).$$

令 $r=\frac{K^2}{2K-1}$, 则 $1<r<K$, 且有

$$\frac{r}{K}\Big(1-\frac{1}{K}\Big)=\frac{K-1}{2K-1}=1-\frac{r}{K}.$$

故由(36.1)得

$$\mathscr{E}(M)_t^r\leqslant\mathscr{E}(KM)_t^{\frac{r}{K}}A_t^{1-\frac{r}{K}}.$$

但易知(A_t)为增过程,故由假定及引理14.26知,$\mathscr{E}(M)^r$为类(D)过程,即$\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$.

14.37 定理 设 $0<\delta\leqslant1$, $\Delta M\geqslant-1+\delta$. 若存在$K$: $1<K<\frac{1}{1-\delta}$, 使得

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\frac{K^2}{2}\langle M^c,M^c\rangle_\infty+\frac{K^2}{(1+\delta)\delta}[M^d,M^d]_\infty\Big\}\Big]<\infty.$$

则存在 $r>1$, 使得 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$.

证明 设 $1<\lambda<\frac{1}{1-\delta}$. 令 $\overline{M}=\lambda M$, 则

$$\Delta\overline{M}\geqslant\lambda(-1+\delta)=-1+(1-\lambda+\lambda\delta).$$

在(27.3)中, 令 $a=\frac{1}{\lambda}$, 并以 $\overline{M}$ 代替 M, 则得

(37.1) $$\mathscr{E}(M)_t \leqslant \mathscr{E}(\lambda M)_t^{\frac{1}{\lambda}} \overline{H}_t(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}},$$

其中

$$\overline{H}_t(\lambda)=\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^2}{(2-\lambda+\lambda\delta)(1-\lambda+\lambda\delta)}[M^d, M^d]_t\right\}.$$

故由(37.1)得

(37.2) $$\mathscr{E}(M)_t^{\lambda} \leqslant \mathscr{E}(\lambda M)_t \overline{H}_t(\lambda)^{1-\frac{1}{\lambda}}.$$

易知存在 $\lambda: 1<\lambda\leqslant K$, 使得

$$\frac{\lambda^2}{(2-\lambda+\lambda\delta)(1-\lambda+\lambda\delta)} \leqslant \frac{K}{(1+\delta)\delta}.$$

于是, 如同定理 14.36, 由(37.2)推知 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$, 其中

$$r=\frac{\lambda^2}{2\lambda-1}.$$

14.38 定理 设 M 为一零初值一致可积鞅, 且 $\Delta M\geqslant -1+\delta$, 其中 $0<\delta\leqslant 1$. 若存在 $K>1$, 使得 $E\left[\exp\frac{K}{1+\delta}M_\infty\right]<\infty$. 则当 $K<\frac{1}{1-\delta}$ 时, 有 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$, 其中 $r=\frac{K^2}{2K-1}$; 当 $K\geqslant\frac{1}{1-\delta}$ 时, 有 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^{r-}$, 其中 $r=\frac{1}{1-\delta^2}$, $\mathscr{H}^{r-}\triangleq\bigcap_{1<\alpha<r}\mathscr{H}^\alpha$.

证明 设 $1<\alpha<\frac{1}{1-\delta}$, $\lambda=\frac{\alpha^2\delta}{1-\alpha+\alpha\delta}$. 与引理 14.32 类似可证: 对任何 $x\geqslant -1+\delta$, 有

$$\frac{(1+x)^\lambda}{1+\alpha x}e^{-(\lambda-\alpha)x}\leqslant 1.$$

注意到 $\lambda\geqslant\alpha^2$, 由指数公式得

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(M)_t^\lambda &= \exp\left(\lambda M_t-\frac{\lambda}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leqslant t}(1+\Delta M_s)^\lambda e^{-\lambda\Delta M_s}\\ &=\mathscr{E}(\alpha M)_t\exp\left\{(\lambda-\alpha)M_t+\frac{\alpha^2-\lambda}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right\}\\ &\quad\times\prod_{s\leqslant t}\frac{(1+\Delta M_s)^\lambda}{1+\alpha\Delta M_s}e^{-(\lambda-\alpha)\Delta M_s}\end{aligned}$$

$$\leq \mathscr{E}(\alpha M)_t \exp[(\lambda-\alpha)M_t].$$

令 $1<r<\lambda$, 则有

$$(38.1) \qquad \mathscr{E}(M)_t^r \leq \mathscr{E}(\alpha M)_t^{\frac{r}{\lambda}} \left(\exp \frac{r(\lambda-\alpha)}{\lambda-r} M_t\right)^{1-\frac{r}{\lambda}}.$$

现设 $K<\frac{1}{1-\delta}$. 在(38.1)中令 $\alpha=K$, $r=\frac{K^2}{2K-1}$, 则 $1<r<\lambda$, 且有 $\frac{r(\lambda-\alpha)}{\lambda-r}=\frac{K}{1+\delta}$. 于是由引理 14.25 及 14.26 知, $\mathscr{E}(M)^r$ 为类(D)过程. 因此 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$. 定理的另一结论显然.

第 十 五 章

鞅的随机积分表示

令$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为一完备概率空间，$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$为一满足通常条件的$\sigma$–域族．令$(M_t)$为一给定的$(\mathscr{F}_t)$局部鞅，一个重要问题是：在什么条件下，任一零初值$(\mathscr{F}_t)$局部鞅$N$，可以表为一可料(或可选)过程$H$对$M$的随机积分：$N=H.M$，这就是所谓鞅表示问题．今后，我们称具有这种性质的局部鞅M有可料(相应地，可选)表示性．

§1 拟左连续局部鞅的可选表示性

15.1 定理 设(M_t)为一拟左连续局部鞅，则下列诸断言等价：

1) M有可选表示性；

2) 一切零初值有界鞅可表为一可选过程对M的随机积分；

3) 设L为一零初值局部鞅，使得$[L, M]=0$，则$L=0$；

4) 设L为一零初值有界鞅，使得$[L, M]=0$，则$L=0$．

证明 2)⇒1)．设N为一零初值局部鞅．由定理9.27，N有如下分解：

$$N=f.M+L,$$

其中f为一可选过程，$[M, L]=0$，$L_0=0$．往证$L=0$．不妨假定$L\in\mathscr{H}^1$．由于有界鞅全体在$\mathscr{H}^1$中稠，故存在有界鞅序列$(L^{(n)})$，使得$\|L^{(n)}-L\|_{\mathscr{H}^1}\longrightarrow 0$．但由2)，我们有

$$L^{(n)}=f^{(n)}.M,$$

其中 $f^{(n)}$ 为可选过程. 于是由系 9.9,

$$[L^{(n)}, L]=f^{(n)}.[M, L]=0,$$

从而

$$\mathbb{E}(\sqrt{[L, L]_\infty})\leqslant\mathbb{E}(\sqrt{[L^{(n)}, L^{(n)}]_\infty+[L, L]_\infty})$$
$$=\mathbb{E}(\sqrt{[L^{(n)}-L, L^{(n)}-L]_\infty})$$
$$=\|L^{(n)}-L\|_{\mathscr{H}^1}.$$

这表明 $\mathbb{E}(\sqrt{[L, L]_\infty})=0$, 即 $L=0$. 故有 $N=f.M$.

1)⇒3). 设 L 为一零初值局部鞅, 使得 $[M, L]=0$. 由 1), $L=f.M$, 其中 f 为一可选过程. 于是 $f.[M, M]=[L, M]=0$, 从而 $f^2.[M, M]=0$. 故 $L=f.M=0$.

3)⇒4) 显然.

4)⇒2). 设 N 为一零初值有界鞅. 由定理 9.27,

$$N=f.M+L,$$

其中 f 为一可选过程, L 为一零初值局部有界鞅, 且 $[M, L]=0$, 故由 4) 易知 $L=0$, 从而 $N=f.M$.

注 若 M 为连续局部鞅, 则由定理 9.13, 定理 15.1. 1)、2) 中的"可选"可改为"可料".

§2 可料表示性基本定理

我们用 $\mathscr{H}_0^1$ 表示零初值 $\mathscr{H}^1$ 鞅全体, 它是一 Banach 空间.

15.2 定义 令 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{H}_0^1$ 的一闭线性子空间, 称 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{H}_0^1$ 的稳定子空间, 如果对一切停时 T, 有

$$M\in\mathscr{U}\Rightarrow M^T\in\mathscr{U}.$$

下一引理是鞅表示问题中一关键性引理.

15.3 引理 设 M 为一零初值局部鞅. 令

$$\mathscr{K}=\left\{f: f \text{ 为可料过程, 使得 } \mathbb{E}\sqrt{\int_0^\infty f_s^2 d[M, M]_s}<+\infty\right\},$$

则 $\mathscr{U}=\{f.M: f\in\mathscr{K}\}$ 为 $\mathscr{H}_0^1$ 的稳定子空间.

证明 $\mathscr{K}$ 显然是一线性空间，$\|f\|_{\mathscr{K}}=\mathbb{E}\sqrt{\int_0^\infty f_s^2 d[M,M]_s}$ 是 $\mathscr{K}$ 上的一个范数，往证 $\mathscr{K}$ 是完备的. 设 $(f^n)_{n\geq 1}$ 是 $\mathscr{K}$ 中按范数 $\|\ \|_{\mathscr{K}}$ 的一个基本列. 必要时，选取子列，不妨设 $\sum_{n=1}^\infty \|f^{n+1}-f^n\|_{\mathscr{K}}<+\infty$，于是

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\infty (f_s^{n+1}-f_s^n)^2 d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\sum_{n=1}^\infty \|f^{n+1}-f^n\|_{\mathscr{K}}<+\infty.$$

从而由 K-W 不等式，对几乎所有 ω，对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有

$$\int_0^t \sum_{n=1}^\infty |f_s^{n+1}(\omega)-f_s^n(\omega)|d[M,M]_s(\omega)$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^t (f_s^{n+1}(\omega)-f_s^n(\omega))^2 d[M,M]_s(\omega)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times([M,M]_t(\omega))^{\frac{1}{2}}<+\infty.$$

令

$$A=\left\{(s,\omega):\sum_{n=1}^\infty |f_s^{n+1}(\omega)-f_s^n(\omega)|<+\infty\right\},$$

则 A 为一可料集，且对任何可料过程 h，有 $\|hI_{A^c}\|_{\mathscr{K}}=0$. 下面，我们令 $f^0=0$. 置

$$g=\sum_{n=0}^\infty |f^{n+1}-f^n|I_A,\ f=\sum_{n=0}^\infty (f^{n+1}-f^n)I_A,$$

则有

$$\|f\|_{\mathscr{K}}\leqslant\|g\|_{\mathscr{K}}\leqslant\|f^1\|_{\mathscr{K}}+\sum_{n=1}^\infty \|f^{n+1}-f^n\|_{\mathscr{K}}<\infty.$$

从而 $f\in\mathscr{K}$. 由于 $(f-f^k)I_A=\sum_{n=k}^\infty (f^{n+1}-f^n)I_A$，故有

$$\|f-f^k\|_{\mathscr{K}}=\|(f-f^k)I_A\|_{\mathscr{K}}\leqslant\sum_{n=k}^\infty \|f^{n+1}-f^n\|_{\mathscr{K}}\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

这表明 $\mathscr{K}$ 为完备的.

由于 $\|f.M\|_{\mathscr{H}^1}=\|f\|_{\mathscr{K}}$，故 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{H}_0^1$ 的闭子空间. 设 $f\in\mathscr{K}$，令 $N=f.M$. 则对任何停时 T，$fI_{[\![0,T]\!]}\in\mathscr{K}$. 故有

$$N^T=(fI_{[\![0,T]\!]}).M\in\mathscr{U},$$

这表明 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{H}_0^1$ 的稳定子空间.

下一定理是可料表示性基本定理，它与定理 15.1 相类似.

15.4 定理 设(M_t)为一局部鞅，则下列诸断言等价：

1) M 有可料表示性；

2) 一切零初值有界鞅可表为一可料过程对 M 的随机积分；

3) 设 L 为零初值局部鞅，使得 LM 为局部鞅，则 $L=0$；

4) 设 L 为零初值有界鞅，使得 LM 为局部鞅，则 $L=0$.

证明 不妨设 $M_0=0$.

1)⟹2) 不待证.

2)⟹1). 令 $\mathscr{M}_0^b$ 为零初值有界鞅空间，则 $\mathscr{M}_0^b$ 在 $\mathscr{H}_0^1$ 中稠. 采用引理 15.3 的记号，由 2) 我们有 $\mathscr{M}_0^b\subset\mathscr{U}$，故由引理 15.3 知 $\mathscr{U}=\mathscr{H}_0^1$，即一切零初值 $\mathscr{H}^1$ 鞅可表为一可料过程对 M 的随机积分，于是 M 有可料表示性.

1)⟹3). 设 L 为一零初值局部鞅，使得 LM 为局部鞅. 由1)，存在一可料过程 f，使得 $L=f.M$. 于是 $f.[M, M]=[L, M]$ 为有限变差局部鞅. 由于 f 可料，故对一切 n, $fI_{[|f|\le n]}.[L, M]=f^2I_{[|f|\le n]}.[M, M]$ 为一零初值局部鞅，且为增过程，故为不足道过程. 令 $n\to\infty$ 得 $[L, L]=f^2.[M, M]=0$，故 $L=0$.

3)⟹4) 不待证.

4)⟹1). 设 4) 成立. 采用引理 15.3 的记号，为证 1)，只需证 $\mathscr{U}=\mathscr{H}_0^1$. 但由引理 15.3, $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{H}_0^1$ 的闭子空间，故由熟知的 Hahn-Banach 定理，只需证明如下事实：设 l 为 $\mathscr{H}_0^1$ 上的一有界线性泛函，如果对一切 $K\in\mathscr{U}$，有 $l(K)=0$，则 $l=0$ (即对一切 $H\in\mathscr{H}_0^1$, $l(H)=0$). 往证这一事实. 由定理 11.22, 存在一 $N\in\mathscr{BMO}_0$, 使得对一切 $K\in\mathscr{H}_0^1$, 有

$$l(K)=\mathrm{E}[K, N]_\infty.$$

依假定，对一切 $K\in\mathscr{U}$，有 $\mathrm{E}[K, N]_\infty=0$. 由于 $\mathscr{U}$ 稳定(引理 15.3)，故对一切停时 T，有 $\mathrm{E}[K, N]_T=\mathrm{E}[K^T, N]_\infty=0$，从而 $[K, N]$ 为一致可积鞅 (定理 5.40). 令停时 $T_n\uparrow+\infty$，使得

$M^{T_n}\in\mathscr{H}_0^1$, 则 $M^{T_n}=I_{[0,T_n]}.M\in\mathscr{U}$. 故$[M^{T_n}, N]$为一致可积鞅, 从而$[M, N]$为局部鞅. 因 $N\in\mathscr{B}.\mathscr{M}_0$, 令停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得 N^{T_n} 为有界鞅, 则$[M, N^{T_n}]=[M, N]^{T_n}$ 为局部鞅, 即 MN^{T_n} 为局部鞅. 故由 4), 对每个 n, $N^{T_n}=0$. 从而 $N=0$. 这表明对一切 $K\in\mathscr{H}_0^1$ 有 $l(K)=0$. 证毕.

15.5 定义 设 (M_t) 为一局部鞅, 称 (M_t) 为标准的(关于 $(\mathscr{F}_t)$), 是指它具有如下性质:

令 $\mathbb{Q}$ 为一与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度, 使得 $\mathbb{Q}=\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_0}$, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ 有界, 且使 M 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅, 则 $\mathbb{Q}=\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_{\infty-}}$, 这里 $\mathscr{F}_{\infty-}\triangleq\bigvee\limits_{t\in R_+}\mathscr{F}_t$. 记号 $\mathbb{Q}=\mathbb{P}|_{\mathscr{G}}$ 表示限于 $\mathscr{G}$ $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{P}$ 一致.

下一定理表明: 局部鞅的标准性与可料表示性等价. 而标准性往往是比较容易检验的 (例如 Brown 运动及 Poisson 过程的补偿, 关于其自然 σ-域族都明显是标准局部鞅), 这就说明了标准性这一概念的重要性.

15.6 定理 设 M 为一局部鞅. 则为要 M 有可料表示性, 必须且只需 M 是标准的.

证明 充分性. 设 M 为标准的. 令 N 为一零初值有界鞅, 使得 NM 为局部鞅. 设 $|N|\leqslant K$ (K 为一常数), 令

$$d\mathbb{Q}=\left(1+\frac{N_\infty}{2K}\right)d\mathbb{P},$$

则 $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}=\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_0}$, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\leqslant\frac{3}{2}$. 令

$$L_t=\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|\mathscr{F}_t\right]=1+\frac{N_t}{2K},$$

则 LM 为局部鞅, 故由引理 12.2, M 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅. 由于假定 M 是标准的, 故有 $\mathbb{Q}=\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_{\infty-}}$, 从而 $N_\infty=0$, 即 $N=0$. 这表明定理 15.4 中的断言 4) 成立, 故 M 有可料表示性.

必要性. 设 M 有可料表示性, 则定理 15.4 中的断言 4) 成

立. 令 $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$, 使得 $\mathbb{Q}=\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_0}$, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\leqslant K$, 且 M 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅. 令 $N_t=1-\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathscr{F}_t\right]$, 则 N 为零初值局部鞅, 且由引理 12.2, MN 为局部鞅, 故由定理 15.4 中的断言 4), $N=0$. 从而对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathscr{F}_t\right]=1$ a.s.. 即有 $\mathbb{Q}=\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_{\infty-}}$. 于是 M 为标准局部鞅。

§3 Brown 运动的鞅表示定理

设 (X_t) 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程, 令 $\mathscr{G}_t^0=\sigma(X_s, s\leqslant t)$, $\mathscr{G}_t=\sigma(\mathscr{G}_t^0\cup\mathscr{N})$, 其中 $\mathscr{N}=\{A\in\mathscr{F}:\mathbb{P}(A)=0\}$, 我们将称 $(\mathscr{G}_t)$ 为 (X_t) 的自然 σ-域族(严格说来, $(\mathscr{G}_t^0)$ 为 (X_t) 的自然 σ-域族, $(\mathscr{G}_t)$ 为 $(\mathscr{G}_t^0)$ 的完备化).

15.7 定理 设 (B_t) 为一 $(\mathscr{F}_t)$Brown 运动(定义 10.8). 令 $(\mathscr{G}_t)$ 为其自然 σ-域族, 则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $\mathscr{G}_{t+}=\mathscr{G}_t=\mathscr{G}_{t-}$. 此外, (B_t) 为 $(\mathscr{G}_t)$Brown 运动.

证明 $\mathscr{G}_t=\mathscr{G}_{t-}$ 这一事实是 (B_t) 的左连续性的直接推论. 往证 $\mathscr{G}_{t+}=\mathscr{G}_t$. 令 $t>s$, 则有

$$\mathbb{E}[e^{iuB_t}|\mathscr{G}_s]=e^{iuB_s}\mathbb{E}[e^{iu(B_t-B_s)}|\mathscr{G}_s]$$

$$=e^{iuB_s}\mathbb{E}[\mathbb{E}(e^{iu(B_t-B_s)}|\mathscr{F}_s)|\mathscr{G}_s]=e^{iuB_s-\frac{u^2}{2}(t-s)}.$$

令 $0<\varepsilon<t-s$, 我们有

$$\mathbb{E}[e^{iuB_t}|\mathscr{G}_{s+}]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{iuB_t}|\mathscr{G}_{s+\varepsilon}]|\mathscr{G}_{s+}]$$

$$=\mathbb{E}[e^{iuB_{s+\varepsilon}-\frac{u^2}{2}(t-s-\varepsilon)}|\mathscr{G}_{s+}]\ \text{a.s.}.$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$, 我们有

$$\mathbb{E}[e^{iuB_t}|\mathscr{G}_{s+}]=e^{iuB_s-\frac{u^2}{2}(t-s)}.$$

由于函数族 $\left\{\sum_{i=1}^n[\alpha_i\cos(u_it)+\beta_i\sin(v_it)]:\alpha_i,\beta_i,u_i,v_i\in\mathbb{R}, i=1,\cdots,n;\ n=1,2,\cdots\right\}$ 对乘积封闭, 且生成 $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ-域,故由单调类定

理(定理1.6.1)), 对 $\mathbb{R}$ 上一切有界 Borel 可测函数 f, $\mathbb{E}[f(B_t)|\mathscr{G}_{s+}]$ 为 $\sigma(B_s)$ 可测函数, 即存在一 Borel 可测函数 g, 使得

$$\mathbb{E}[f(B_t)|\mathscr{G}_{s+}]=g(B_s).$$

现设 $s<t_1<t_2$, f_1 及 f_2 为两个有界 Borel 可测函数, 则有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[f_2(B_{t_2})f_1(B_{t_1})|\mathscr{G}_{s+}]\\&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[f_2(B_{t_2})|\mathscr{G}_{t_1+}]f_1(B_{t_1})|\mathscr{G}_{s+}].\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}[f_2(B_{t_2})|\mathscr{G}_{t_1-}]$ 为 $\sigma(B_{t_1})$ 可测, 故由上式知 $\mathbb{E}[f_2(B_{t_2})\cdot f_1(B_{t_1})|\mathscr{G}_{s+}]$ 为 $\sigma(B_s)$ 可测. 依此类推, 对一切 n, 设 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n$, $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 为一列有界 Borel 可测函数, 则 $\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n}f_j(B_{t_j})|\mathscr{G}_{s+}\right]$ 为 $\mathscr{G}_s$ 可测. 由此推知: 设 η 为任一 $\mathscr{G}_{\infty-}$ 可测有界随机变量, 则 $\mathbb{E}[\eta|\mathscr{G}_{s+}]$ 为 $\mathscr{G}_s$ 可测. 特别, 令 η 为 $\mathscr{G}_{s+}$ 可测有界随机变量, 则

$$\eta=\mathbb{E}[\eta|\mathscr{G}_{s+}],$$

从而 η 为 $\mathscr{G}_s$ 可测, 这表明 $\mathscr{G}_{s+}=\mathscr{G}_s$. 定理证毕.

下一定理是 Brown 运动的鞅表示定理.

15.8 定理 $(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 (B_t) 关于其自然 σ-域族 $(\mathscr{G}_t)$ 有可料表示性.

证明 由定理 15.6, 只需证明 (B_t) 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 为标准的. 令 $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$, 使得 (B_t) 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅. 由于 $[B,B]_t(\mathbb{Q})=[B,B]_t(\mathbb{P})=t$, 故 (B_t^2-t) 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅, 从而由定理 10.9, 在 $\mathbb{Q}$ 下, (B_t) 为 $(\mathscr{G}_t)$Brown 运动. 由于 Brown 运动的有穷维分布的唯一确定性, 我们有 $\mathbb{P}=\mathbb{Q}|_{\mathscr{G}_{\infty-}}$, 这表明 (B_t) 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 为标准局部鞅. 证毕.

注 由定理知, 一切 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅为连续局部鞅. 从而由定理 6.41, $(\mathscr{G}_t)$ 全连续, 且一切 $(\mathscr{G}_t)$ 停时为可料时, 一切 $(\mathscr{G}_t)$ 可选过程为可料过程.

§4 Poisson 过程的鞅表示定理

15.9 引理 设 (P_t) 为一 Poisson 过程. 则 (P_t) 拟左连续. 此

外，令 $T_0=0$,

(9.1) $$T_n=\inf\{t>T_{n-1}:\Delta P_t=+1\},\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

则 $T_n<+\infty$ a.s.，且 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.．

证明 (P_t) 为增过程，其可料对偶投影 $(\tilde{P}_t)=(t)$ 连续，故 (P_t) 拟左连续(系 6.31.3))．我们有

$$\mathbb{P}([T_n<+\infty])=\lim_{t\uparrow+\infty}\mathbb{P}([T_n\leqslant t])=\lim_{t\uparrow+\infty}\mathbb{P}([P_t\geqslant n])$$

$$=1-\lim_{t\uparrow+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}e^{-t}=1.$$

从而 $T_n<+\infty$ a.s.．此外，对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}([T_n\geqslant t])=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}([P_t\leqslant n])=1,$$

从而 $T_n\uparrow+\infty$ a.s.．

下一引理虽然是对 Poisson 过程叙述的，但其结论适用于一般点过程．

15.10 引理 设 (P_t) 为一 Poisson 过程．令 $\mathscr{G}_t^0=\sigma(P_s,\ s\leqslant t)$．则对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，有 $\mathscr{G}_{t+}^0=\mathscr{G}_t^0$．且对一切 $(\mathscr{G}_t^0)$ 停时 T，有 $\mathscr{G}_T^0=\sigma(T;\ P_{t\wedge T},\ t\in\mathbb{R}_+)$．令 T_k 为 (P_t) 的第 k 次跳跃时刻(如(9.1)定义)，则有 $\mathscr{G}_{T_k-}^0=\mathscr{G}_{T_k}^0$，$k=1,\ 2,\ \cdots$．

证明 我们用 Q 表示 $\mathbb{R}_+$ 中的有理数全体．固定 $t\in\mathbb{R}_+$，令 h 为一 $\mathscr{G}_{t+}^0$ 可测函数，则对一切 n，h 为 $\mathscr{G}_{t+\frac{1}{n}}^0$ 可测函数．由于 (P_t) 右连续，$\mathscr{G}_{(t+\frac{1}{n})}^0=\sigma(P_{r\wedge(t+\frac{1}{n})},\ r\in Q)$．由复合函数定理(定理1.7)，存在 $\mathbb{R}^Q$ 上的一可测函数 h_n，使得

$$h(\omega)=h_n(P_{r\wedge(t+\frac{1}{n})}(\omega),\ r\in Q).$$

对固定 ω，存在 $n(\omega)$ 足够大，使得当 $n\geqslant n(\omega)$ 时，有

$$P_t(\omega)=P_{t+\frac{1}{n}}(\omega),$$

从而当 $n\geqslant n(\omega)$ 时，对一切 $r\in Q$，同时有

$$P_{r\wedge t}(\omega)=P_{r\wedge(t+\frac{1}{n})}(\omega).$$

故有

$$h(\omega)=\lim_{n\to\infty}h_n(P_{r\wedge(t+\frac{1}{n})}(\omega),\ r\in Q)$$
$$=\lim_{n\to\infty}h_n(P_{r\wedge t}(\omega),\ r\in Q).$$

由于$h_n(P_{r\wedge t},\ r\in Q)$为$\mathscr{G}_t^0$可测,故$h$为$\mathscr{G}_t^0$可测. 这表明$\mathscr{G}_{t+}^0=\mathscr{G}_t^0$.

现设T为$(\mathscr{G}_t^0)$停时. 令$A\in\mathscr{G}_s^0$,则存在$\mathbb{R}^Q$上的可测函数h,使得$I_A=h(P_{r\wedge s},\ r\in Q)$,于是

$$I_{A\cap[s<T]}=I_{[s<T]}h(P_{r\wedge s},\ r\in Q)=I_{[s<T]}h(P_{r\wedge s\wedge T},\ r\in Q).$$

由于$\mathscr{G}_{T-}^0=\sigma\{A\cap[s<T]:A\in\mathscr{G}_s^0,\ s\in\mathbb{R}_+\}$ (注意$\mathscr{G}_0^0=\{\phi,\ \Omega\}$),故由上所证得

$$\mathscr{G}_{T-}^0\subset\sigma(T;\ P_{t\wedge T},\ t\in\mathbb{R}_+).$$

另一方面,我们有$\mathscr{G}_T^0=\bigcap_n\mathscr{G}^0_{(T+\frac{1}{n})-}$. 设$h$为$\mathscr{G}_T^0$可测,则对每个$n$, h为$\mathscr{G}^0_{(T+\frac{1}{n})-}$可测,从而存在$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^Q$上的可测函数$h_n$,使得

$$h(\omega)=h_n(T(\omega);\ P_{r\wedge\left(T(\omega)+\frac{1}{n}\right)}(\omega),\ r\in Q).$$

按照前面同样推理,我们有

$$h(\omega)=\lim_{n\to\infty}h_n(T(\omega);\ P_{r\wedge\left(T(\omega)+\frac{1}{n}\right)}(\omega),\ r\in Q)$$
$$=\lim_{n\to\infty}h_n(T(\omega);\ P_{r\wedge T(\omega)}(\omega),\ r\in Q).$$

从而h为$\sigma(T;P_{t\wedge T},\ t\in\mathbb{R}_+)$可测. 于是有

$$\mathscr{G}_T^0\subset\sigma(T;\ P_{t\wedge T},\ t\in\mathbb{R}_+)\subset\mathscr{G}_{T-}^0.$$

故得$\mathscr{G}_T^0=\sigma(T;P_{t\wedge T},\ t\in\mathbb{R}_+)$.

现设T_k为(P_t)的第k次跳跃时刻,则有

$$[P_{t\wedge T_k}\geqslant k+1]=\emptyset,$$
$$[P_{t\wedge T_k}=k]=[T_k\leqslant t]\in\mathscr{G}_{T_k-}^0,$$
$$[P_{t\wedge T_k}=j]=[T_j\leqslant t<T_{j+1}]\in\mathscr{G}_{T_k-}^0,\ 0\leqslant j<k.$$

从而$P_{t\wedge T_k}$为$\mathscr{G}_{T_k}^0$可测. 又T_k为$\mathscr{G}_{T_k-}^0$可测,故有

$$\mathscr{G}_{T_k}^0=\sigma(T_k,\ P_{t\wedge T_k},\ t\in\mathbb{R}_+)\subset\mathscr{G}_{T_k-}^0,$$

从而 $\mathscr{G}^0_{T_k}=\mathscr{G}^0_{T_k-}$.

注 令$(\mathscr{G}_t)$为$(\mathscr{G}^0_t)$的完备化，则$(\mathscr{G}_t)$满足通常条件，且对一切 k，有 $\mathscr{G}_{T_k}=\mathscr{G}_{T_k-}$.

下一定理是 Poisson 过程的鞅表示定理.

15.11 定理 设 (P_t) 为一 Poisson 过程，$(\mathscr{G}_t)$为其自然 σ-域族. 令 $Q_t=P_t-t$，则一切零初值$(\mathscr{G}_t)$局部鞅可表为一可料过程对(Q_t)按轨道的 Stieltjes 积分.

证明 与 Brown 运动情形类似，容易证明(Q_t)关于$(\mathscr{G}_t)$为标准局部鞅. 于是由定理 15.6，(Q_t)关于$(\mathscr{G}_t)$有可料表示性.

设 N 为一零初值局部鞅，则存在一可料过程 H，使得 $N=H.Q$. 令 T_k 为(P_t)的第 k 次跳跃时刻，则

$$\sum_{s\leqslant T_k}|\Delta N_s|=\sum_{s\leqslant T_k}|H_s\Delta Q_s|=\sum_{j=1}^{k}|H_{T_j}|<+\infty \text{ a.s.}.$$

由于 $T_k\uparrow+\infty$ a.s.，故由定理 9.18，H 关于 Q 按轨道的 Stieltjes 积分 H_*Q 存在，且 $H_*Q=H.Q$. 定理证毕.

§5 一类特殊半鞅的可料表示性

15.12 定义 设 X 为一特殊半鞅，$X=M+A$ 为其典则分解. 如果局部鞅 M 有可料表示性，则称 X 有可料表示性.

下面我们用 $\mathscr{M}^+_{loc}$ 表示严格正局部鞅空间.

设 X 为一半鞅，我们令

$$O(X)=\{L\in\mathscr{M}_{loc}:L_0=1,\ LX\in\mathscr{M}_{loc}\},$$

$$O^+(X)=\{L\in\mathscr{M}^+_{loc}:L_0=1,\ LX\in\mathscr{M}_{loc}\}.$$

下一定理给出了局部鞅的标准性(即可料表示性)的又一刻划，这一刻划可以推广到一类特殊半鞅情形.

15.13 定理 设 M 为一局部鞅，则下列三断言等价：

i) M 有可料表示性；

ii) $O(M)=\{1\}$；

iii) $O^+(M)=\{1\}$.

证明 i)⇒ii). 设 M 有可料表示性. 令 $L\in O(M)$, 则 $N\triangleq L-1$ 为零初值局部鞅, 且 NM 为局部鞅, 故由定理 15.4, $N=0$, 即 $L=1$.

ii)⇒iii) 显然.

iii)⇒i). 令 N 为一零初值有界鞅, 使得 NM 为局部鞅. 设 $|N|\leqslant K$, 其中 K 为一常数, 令 $L=1+\dfrac{N}{2K}$, 则 $L\in O^+(M)$. 依假定, $L=1$, 故 $N=0$, 从而由定理 15.4, M 有可料表示性.

现在我们着手研究一类特殊半鞅的可料表示性.

15.14 引理 设 X 为一零初值特殊半鞅, $X=M+A$ 为其典则分解. 令 L 为一局部鞅, 且 $L_0=1$. 则

(14.1) $$L\in O(X)\Leftrightarrow L_-.A=-\langle L, M\rangle.$$

证明 设 U, V 为两个局部鞅, 我们用 $U\sim V$ 表示 $U-V$ 为零初值局部鞅. 由分部积分公式及 Yœurp 引理(定理 9.20), 我们有

$$\begin{aligned}LX&=L_-.X+X_-.L+[L, X]\sim L_-.X+[L, X]\\&=L_-.A+L_-.M+[L, A]+[L, M]\\&\sim L_-.A+[L, M],\end{aligned}$$

于是有(14.1).

下一定理推广了定理 15.13.

15.15 定理 设 X 为一零初值特殊半鞅, $X=M+A$ 为其典则分解. 假定存在一零初值局部鞅 Z, 使得 $\langle Z, M\rangle$ 存在, 且 $A=-\langle Z, M\rangle$, 则有

(15.1) $$O(X)=\{\mathscr{E}_R(Z):R\in O(M)\}.$$

这时, 为要 X 有可料表示性, 必须且只需 $O(X)$ 只含一个元素 $\mathscr{E}(Z)$.

证明 设 L 为一局部鞅, 且 $L_0=1$, 由引理 15.14 及定理假

定，

$$L\in O(X)\Leftrightarrow L_{-}.A=-\langle L,\ M\rangle\Leftrightarrow\langle L-L_{-}.Z,\ M\rangle=0$$
$$\Leftrightarrow L-L_{-}.Z\in O(M).$$

设 $L\in O(X)$，令 $R=L-L_{-}.Z$，则 $R\in O(M)$，且 $L=\mathscr{E}_R(Z)$. 反之，设 $R\in O(M)$，令 $L=\mathscr{E}_R(Z)$，则 $R=L-L_{-}.Z$，从而 $L\in O(X)$. 故有(15.1). 这时，我们有 $O(X)=\{\mathscr{E}(Z)\}\Leftrightarrow O(M)=\{1\}\Leftrightarrow M$ 有可料表示性. 定理得证.

注 定理中关于 X 的假定等价于如下假定：存在一零初值局部鞅 Z，使得 $\langle Z,\ X\rangle$ 存在，且 $X+\langle Z,\ X\rangle$ 为局部鞅. 这样的叙述，可以避免涉及 X 的(未知的)典则分解.

下一定理给出了使定理 15.15 的假定成立的一个充分条件. 在连续半鞅情形，这一条件也是必要的(见下面的定理 15.17).

15.16 定理 设 X 为一零初值特殊半鞅，$X=M+A$ 为其典则分解. 假定 $O^+(X)$ 非空. 设 $L\in O^+(X)$，令 $Z=\frac{1}{L_{-}}.L$，则 Z 为零初值局部鞅. $\langle Z,\ M\rangle$ 存在，且 $A=-\langle Z,\ M\rangle$. 此外有

$$O(X)=\left\{\left(1+\frac{1}{L_{-}}.\ R-\frac{1}{L}.\ [R,\ Z]\right)L:R\in O(M)\right\}. \tag{16.1}$$

证明 由引理 15.14，$\langle L,\ M\rangle$ 存在，且 $L_{-}.A=-\langle L,\ M\rangle$. 由于 L 为严格正，易知 L_{-} 为严格正，故 Z 有定义，$\langle Z,\ M\rangle$ 存在，且 $A=-\langle Z,\ M\rangle$. 这时由定理 14.11，我们有

$$\mathscr{E}_R(Z)=\left(1+\frac{1}{L_{-}}.\ R-\frac{1}{L}.\ [R,\ Z]\right)L.$$

故由(15.1)得(16.1).

现在我们研究连续半鞅情形. 对这一特殊情形，前面得到的一些结果可以进一步精细化.

15.17 定理 设 X 为一零初值连续半鞅(从而为特殊半鞅)，$X=M+A$ 为其典则分解. 则下列三断言等价：

i) 存在一可料过程 (h_t)，使得 $\forall t\in\mathbb{R}_+$，有

$$\int_0^t h_s^2 d\langle M, M\rangle_s < +\infty \text{ a.s.},$$

且
$$A_t = \int_0^t h_s d\langle M, M\rangle_s \text{ a.s.};$$

ii) $O^+(X)$非空;

iii) 存在一零初值连续局部鞅 Z, 使得 $A = -\langle Z, M\rangle$.

证明 i)⇒ii). 设 i) 成立, 令 $Z_t = -\int_0^t h_s dM_s$, $L = \mathscr{E}(Z)$, 则 $L \in \mathscr{M}_{loc}^+$, $L_0 = 1$, 且 $A = -\langle Z, M\rangle$. 于是

$$L_-.A = -L_-.\langle Z, M\rangle = -\langle L_-.Z, M\rangle = -\langle L, M\rangle.$$

故由引理 15.14, $L \in O^+(X)$, 从而 $O^+(X)$非空.

ii)⇒iii). 由定理 15.16, 存在一零初值局部鞅 Z, 使得 $A = -\langle Z, M\rangle$. 由于 M 连续, $[Z, M] = \langle Z^c, M\rangle$, 故$\langle Z, M\rangle = \langle Z^c, M\rangle$. 必要时以 Z^c 代替 Z, 可假定 Z 为连续局部鞅.

iii)⇒i). 由 K－W 不等式, $d\langle Z, M\rangle \ll d\langle M, M\rangle$. 故由定理 6.18, 存在一可料过程$(h_t)$, 使得 $-\langle Z, M\rangle = h.\langle M, M\rangle$. 即 $A = h.\langle M, M\rangle$. 此外, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, 我们有(见定理 9.26 的证明)
$\int_0^t h_s^2 d\langle M, M\rangle_s \leqslant \langle Z, Z\rangle_t < +\infty$ a.s..

15.18 定理 设 X 为一零初值连续半鞅, $X = M + A$ 为其典则分解. 如果存在一可料过程(h_t), 使得 $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^t h_s^2 d\langle M, M\rangle_s < +\infty \text{ a.s.},$$

且
$$A_t = \int_0^t h_s d\langle M, M\rangle_s.$$

令 $Z = -h.M$, $L = \mathscr{E}(Z)$, 则有

(18.1) $$O(X) = \{NL: N \in O(M)\},$$

(18.2) $$O^+(X) = \{NL: N \in O^+(M)\}.$$

此外, 为要 X 有可料表示性, 必须且只需 $O^+(X)$只含一个元素.

证明 由定理 15.15,

$$O(X)=\{\mathscr{E}_R(Z):R\in O(M)\}.$$

令 $R\in O(M)$，则 $\langle Z,\ R\rangle=-h.\langle M,\ R\rangle=0$，故有

$$\mathscr{E}_R(Z)=\left(1+\frac{1}{L}\cdot R\right)L.$$

令 $N_t=1+\int_0^t\frac{dR_s}{L_s}$，则 $R\mapsto N$ 为 $O(M)$ 上的一对一映射，故有(18.1)．又因 $L\in\mathscr{M}_{loc}^+$，故由(18.1)得(18.2)．

由(18.2)，$O^+(X)=\{L\}\Leftrightarrow O^+(M)=\{1\}$，故由定理15.13知，为要 X 有可料表示性，必须且只需 $O^+(X)=\{L\}$．定理证毕．

§6 概率改变下可料表示性的不变性

15.19 引理 设$(\Omega,\ \mathscr{F}^0)$为一可测空间，$(\mathscr{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}_+}$为一族右连续上升子 σ-域，$\mathbb{P}$ 为$(\Omega,\ \mathscr{F}^0)$上一概率测度．我们用$(\mathscr{F}_t(\mathbb{P}))$表示$(\mathscr{F}_t^0)$的完备化(定义5.33)．令 M 为一$(\mathscr{F}_t(\mathbb{P}))$局部鞅，则存在一右连续$(\mathscr{F}_t^0)$适应的局部鞅 $\overline{M}$，使得 $\overline{M}$ 与 M 无区别．

证明 容易由Föllmer引理(定理3.5)推得引理的结论(令$(\mathscr{F}_t^0)$停时$T_n\uparrow+\infty$ a.s.，使得$(M-M_0)^{T_n}$为一致可积鞅)．

下一定理表明：特殊半鞅的可料表示性在概率绝对连续改变下仍保持．

15.20 定理 设 X 为一零初值特殊半鞅，$\mathbb{Q}$ 为一关于 $\mathbb{P}$ 绝对连续的概率测度，使得在 $\mathbb{Q}$ 下，X 仍为特殊半鞅．如果在 $\mathbb{P}$ 下，X 有可料表示性，则在 $\mathbb{Q}$ 下，X 也有可料表示性．

证明 显然，定理可归结为 X 为局部鞅情形．下面我们设 X 为局部鞅．令(L_t)为鞅 $\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\,|\,\mathscr{F}_t\right]$的右连续修正，则由定理12.6知，$\langle X,\ L\rangle$ $\mathbb{Q}$-a.s. 存在(定义12.5)，且过程

$$M_t=X_t-\int_0^t\frac{1}{L_{s-}}\,d\langle X,\ L\rangle_s$$

为 $\mathbb{Q}$-局部鞅，即 $X_t=M_t+\int_0^t\frac{1}{L_{s-}}d\langle X,\ L\rangle_s$为 X 在 $\mathbb{Q}$下的典则

分解. 问题在于证明在 $\mathbb{Q}$ 下, M 有可料表示性. 为此, 令 N 为一零初值有界 $\mathbb{Q}$-鞅, 使得 NM 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅, 由定理 15.4, 问题归结为证明 $N=0$.

现在往证 $N=0$. 由引理 15.19, 不妨设 M, N 为 $(\mathscr{F}_t)$ 适应右连续过程. 于是由引理 12.2, 存在 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 $T_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a. s., 使得对每个 n, $(NL)^{T_n}$, $(NML)^{T_n}$ 为 $\mathbb{P}$-一致可积鞅, 并且 $[X, L]^{T_n}$ 为可积变差过程. 令

$$R_n=\inf\left\{t:L_t\leqslant\frac{1}{n}\right\},$$

则 $R_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 且在 $]\!]0, R_n]\!]$ 上, 有 $L_{t-}(\omega)\geqslant\frac{1}{n}$. 必要时用 $T_n\wedge R_n$ 代替 T_n, 我们可以假定 $T_n\leqslant R_n$. 对某个固定的 n, 令

$$Y=(NL)^{T_n},\quad A_t=\int_0^{t\wedge T_n}\frac{1}{L_{s-}}d\langle X, L\rangle_s=\int_0^t\frac{1}{L_{s-}}d\langle X, L^{T_n}\rangle_s,$$

则在 $\mathbb{P}$ 下应用分部积分公式得

$$\begin{aligned}YM^{T_n}&=YX^{T_n}-YA=YX^{T_n}-Y_-.A-A_-.Y-[Y, A]\\&\sim YX^{T_n}-Y_-.A\sim[Y, X^{T_n}]-Y_-.A\end{aligned}$$

(记号"$\sim$"的含义见引理 15.14 的证明). 由于 YM^{T_n} 为 $\mathbb{P}$-一致可积鞅, 故 $[Y, X^{T_n}]-Y_-.A$ 为 $\mathbb{P}$-局部鞅, 从而 $\langle Y, X^{T_n}\rangle$ 存在, 且有

$$\langle Y, X^{T_n}\rangle=Y_-.A=\left(\frac{Y}{L}\right)_-.\langle X, L^{T_n}\rangle=\left\langle X, \left(\frac{Y}{L}\right)_-.L^{T_n}\right\rangle.$$

但 $Y=Y^{T_n}$, 故 $\langle Y, X^{T_n}\rangle=\langle Y, X\rangle$, 于是在 $\mathbb{P}$ 下,

$$\left\langle X, Y-\left(\frac{Y}{L}\right)_-.L^{T_n}\right\rangle=0.$$

即 $\left[X, Y-\left(\frac{Y}{L}\right)_-.L^{T_n}\right]$ 为 $\mathbb{P}$-局部鞅. 由于 $Y-\left(\frac{Y}{L}\right)_-.L^{T_n}$ 为零初值 $\mathbb{P}$-局部鞅, 且在 $\mathbb{P}$ 下 X 有可料表示性, 故由定理 15.4, $Y-\left(\frac{Y}{L}\right)_-.L^{T_n}=0$, 即 $Y=Y_-.\left(\frac{1}{L_-}.L^{T_n}\right)$, 故由随机微分方程解的唯一性, $Y=0$. 由于在 $\mathbb{Q}$ 下, L 为严格正, 故在 $\mathbb{Q}$ 下,

$N^{T_n}=\frac{Y}{L^{T_n}}=0$. 又因 $T_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 故在 $\mathbb{Q}$ 下, $N=0$. 定理证毕.

§7 σ-域族的停止与鞅表示定理的局部化

本节研究与 σ-域族 $(\mathscr{F}_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$ 有关的一些问题, 这里 T 为一停时. 虽然这一研究主要是为下一节作准备的, 但由于所得结果都是很基本的, 可能在别处有用, 所以我们将它独立成一节.

在下面几个定理中, T 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 停时, $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t\wedge T}(t\in\mathbb{R}_+)$. 显然 $(\mathscr{G}_t)$ 满足通常条件.

15.21 定理 1) 设 M 为 $(\mathscr{F}_t)$ 局部鞅, 则 M^T 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅. 若进一步, M 关于 $(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续, 则 M^T 关于 $(\mathscr{G}_t)$ 拟左连续;

2) 设 M 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅, 则 $M^T=M$, 且 M 为 $(\mathscr{F}_t)$ 局部鞅;

3) 设 M 为 $(\mathscr{F}_t)$ 局部鞅, H 为一 $(\mathscr{G}_t)$ 可料过程, 使得 $\sqrt{H^2.[M^T, M^T]}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部可积, 则 $H\underset{(\mathscr{G}_t)}{.}M^T$ 与 $H\underset{(\mathscr{F}_t)}{.}M^T$ 无区别. 若 M 关于 $(\mathscr{F}_t)$ 拟左连续, H 为 $(\mathscr{G}_t)$ 可选过程, 则相应结论也成立.

证明 1) 无妨假定 $M_0=0$. 令 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得每个 M^{T_n} 为 $(\mathscr{F}_t)$ 一致可积鞅. 于是 $M^{T_n\wedge T}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 一致可积鞅. 令 $V_n=T_{n[T_n<T]}$, 则由定理 4.52, V_n 为 $(\mathscr{G}_t)$ 停时, 且 $V_n\uparrow+\infty$. 由于 $V_n\wedge T=T_n\wedge T$, 故 $(M^T)^{V_n}$ 为 $(\mathscr{G}_t)$ 一致可积鞅, 于是 M^T 为 $(\mathscr{G}_t)$ 局部鞅. 另一结论显然.

2) 无妨假定 $M_0=0$. 令 $(\mathscr{G}_t)$ 停时 $T_n\uparrow+\infty$, 使得每个 M^{T_n} 为 $(\mathscr{G}_t)$ 一致可积鞅. 由于 $\mathscr{G}_t=\mathscr{G}_{t\wedge T}$ (定理 4.52), 故有

$$M_{t\wedge T_n}=\mathbb{E}[M_{T_n}|\mathscr{G}_t]=\mathbb{E}[M_{T_n}|\mathscr{G}_{t\wedge T}]=M_{T_n\wedge t\wedge T}.$$

令 $n\to\infty$, 得知 $M=M^T$. 此外, 由于 M_{T_n} 为 $\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_T$ 可测, 故由系 3.23 有

$$\mathbb{E}[M_{T_n}|\mathscr{F}_t]=\mathbb{E}[\mathbb{E}(M_{T_n}|\mathscr{F}_T)|\mathscr{F}_t]=\mathbb{E}[M_{T_n}|\mathscr{F}_{t\wedge T}]$$
$$=\mathbb{E}[M_{T_n}|\mathscr{G}_t]=M_{T_n\wedge t}.$$

这表明 M^{T_n} 为$(\mathscr{F}_t)$一致可积鞅，从而 M 为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅.

3) 设 N 为一有界$(\mathscr{G}_t)$鞅，由 2)，N 为有界$(\mathscr{F}_t)$鞅，故有 $[N, H\underset{(\mathscr{F}_t)}{.}M^T]=H.[N, M^T]$. 又由 1)，$H\underset{(\mathscr{F}_t)}{.}M^T$ 为$(\mathscr{G}_t)$局部鞅，故由系 9.10，$H\underset{(\mathscr{G}_t)}{.}M^T=H\underset{(\mathscr{F}_t)}{.}M^T$.

15.22 定理 1) 设 A 为$(\mathscr{F}_t)$局部可积变差过程，则 A^T 为$(\mathscr{G}_t)$局部可积变差过程;

2) 设 A 为$(\mathscr{F}_t)$可料有限变差过程，则 A^T 为$(\mathscr{G}_t)$可料有限变差过程;

3) 设 X 为$(\mathscr{F}_t)$特殊半鞅，$X=M+A$ 为其典则分解，则 X^T 为$(\mathscr{G}_t)$特殊半鞅，且 $X^T=M^T+A^T$ 为其$(\mathscr{G}_t)$典则分解.

证明 1) 的证明技巧与上一定理的 1) 类似.

2) 由定理 4.52 推得.

3) 是 2) 及上一定理的简单推论.

下一定理是鞅表示定理的局部化.

15.23 定理 设 X 为一$(\mathscr{F}_t)$特殊半鞅.

1) 如果 X 关于$(\mathscr{F}_t)$有可料表示性，则对任何停时 T，$(\mathscr{F}_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ 特殊半鞅 X^T 关于$(\mathscr{F}_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ 有可料表示性;

2) 为要 X 关于$(\mathscr{F}_t)$有可料表示性，必须且只需存在$(\mathscr{F}_t)$停时 $T_n\uparrow+\infty$，使得每个 X^{T_n} 关于$(\mathscr{F}_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ 有可料表示性.

证明 本定理结论容易由定理 4.52.4) 及本节上述几个定理推得. 下面我们给出另一种证明.

1) 记 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t\wedge T}$, $(t\in\mathbb{R}_+)$. 由定理 15.22.3)，不妨设 X 为一$(\mathscr{F}_t)$局部鞅. 令 N 为一零初值$(\mathscr{G}_t)$局部鞅，使得 NX^T 为$(\mathscr{G}_t)$局部鞅. 由定理 15.21. 2)，N 及 NX^T 为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅. 但由于 $N=N^T$，故 $N(X-X^T)$ 为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅，从而 NX 为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅. 依假定，X 关于$(\mathscr{F}_t)$有可料表示性，故由定理 15.4，我们有 $N=0$. 根据同一定理，X^T 关于$(\mathscr{G}_t)$有可料表示性.

2) 必要性由 1) 推得，往证充分性. 同样地，不妨假定 X 为

$(\mathscr{F}_t)$局部鞅. 令 N 为一零初值$(\mathscr{F}_t)$局部鞅, 使得 NX 为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅. 则对每个 n, N^{T_n} 及 $N^{T_n}X^{T_n}$ 为 $(\mathscr{F}_{t\wedge T_n})$ 局部鞅. 依假定, X^{T_n} 关于 $(\mathscr{F}_{t\wedge T_n})$ 有可料表示性, 故由定理 15.4, $N^{T_n}=0$. 于是 $N=0$. 根据同一定理, X 关于$(\mathscr{F}_t)$有可料表示性.

注 利用定理 15.1, 我可以对拟左连续局部鞅(或特殊半鞅)的可选表示性建立相应的结果.

§8 关于可料表示性的一个定理

在本节, 令$(\Omega, \mathscr{F}^0)$为一可测空间, $(\mathscr{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为一族右连续上升子 σ-域. 设 $\mathbb{P}$ 为$(\Omega, \mathscr{F}^0)$上的一概率测度, 我们用 $\mathscr{F}^{\mathbb{P}}$ 表示 $\mathscr{F}^0$ 关于 $\mathbb{P}$ 的完备化, 并令 $\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}}=\sigma(\mathscr{F}_t^0\cup\mathscr{N})$, 其中

$$\mathscr{N}=\{A\in\mathscr{F}^{\mathbb{P}}:\mathbb{P}(A)=0\}.$$

则$(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}})$满足通常条件.

15.24 引理 令$(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$为一完备概率空间, $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为一族满足通常条件的子 σ-域. 设 $\mathscr{F}$ 为一关于 $\mathbb{P}$ 完备的 σ-域, 且 $\mathscr{F}\supset\mathscr{G}$. 令 $\mathscr{F}_t=\sigma(\mathscr{G}_t\cup\mathscr{N})$, 其中 $\mathscr{N}=\{A\in\mathscr{F}:\mathbb{P}(A)=0\}$.

1) 设 M 为一$(\mathscr{G}_t)$局部鞅(从而亦为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅), H 为一$(\mathscr{G}_t)$可料过程(从而亦为$(\mathscr{F}_t)$可料过程), 使得过程$\sqrt{H^2.[M,M]}$为$(\mathscr{G}_t)$局部可积, 则有 $\underset{(\mathscr{G}_t)}{H.M}=\underset{(\mathscr{F}_t)}{H.M}$;

2) 设 M 为一$(\mathscr{G}_t)$局部鞅, 则为要 M 关于$(\mathscr{F}_t)$ 有可料表示性, 必须且只需 M 关于$(\mathscr{G}_t)$有可料表示性;

3) 设 X 为一$(\mathscr{F}_t)$特殊半鞅, 且关于$(\mathscr{G}_t)$适应, 则 X 为$(\mathscr{G}_t)$特殊半鞅.

证明 1) 令 N 为一有界$(\mathscr{F}_t)$鞅, 由引理 15.19, 存在一有界$(\mathscr{G}_t)$鞅 $\bar{N}$, 使得 $\bar{N}$ 与 N 无区别. 于是我们有

$$[N, \underset{(\mathscr{G}_t)}{H.M}]=[\bar{N}, \underset{(\mathscr{G}_t)}{H.M}]=H.[\bar{N}, M]=H.[N, M].$$

由于 $\underset{(\mathscr{G}_t)}{H.M}$ 为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅, 故由系 9.10, $\underset{(\mathscr{F}_t)}{H.M}=\underset{(\mathscr{G}_t)}{H.M}$.

2) 容易由 1) 及引理 15.19 推得.

3) 首先, X 为$(\mathscr{G}_t)$半鞅(定理 12.16), 令

$$X_t^* = \sup_{s\leqslant t} |X_s|,$$

由于 X 为$(\mathscr{F}_t)$特殊半鞅, 故(X_t^*)为$(\mathscr{F}_t)$局部可积(定理 8.53), 即(X_t^*)为$(\mathscr{G}_t)$局部可积(因每个$(\mathscr{F}_t)$停时与一$(\mathscr{G}_t)$停时 a.s. 相等), 从而 X 为$(\mathscr{G}_t)$特殊半鞅.

下一定理推广了定理 15.20.

15.25 定理 令$(\Omega, \mathscr{F}^0)$为一可测空间, $(\mathscr{F}_t^0)$为一族右连续上升子 σ-域, X 为一$(\mathscr{F}_t^0)$适应右连续过程, 且 $X_0=0$. 设 $\mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}$ 为$(\Omega, \mathscr{F}^0)$上的两个概率测度. 如果下列条件满足:

i) 在 $\mathbb{P}_0$ 及 $\mathbb{P}$ 下, X 分别关于$(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}_0})$及$(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}})$为特殊半鞅;

ii) 存在$(\mathscr{F}_t^0)$停时 $T_n\uparrow+\infty\ \mathbb{P}$-a.s., 使得对每个 n, 限于 $\mathscr{F}_{T_n}^0$ 有 $\mathbb{P}\ll\mathbb{P}_0$;

iii) 在 $\mathbb{P}_0$ 下, X 关于$(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}_0})$有可料表示性.

则在 $\mathbb{P}$ 下, X 关于$(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}})$也有可料表示性.

证明 对某个固定 n, 令 $\mathscr{G}_t^0=\mathscr{F}_{t\wedge T_n}^0$, $\mathscr{G}^0=\mathscr{F}_{T_n}^0$. 设 $X=N+B$, $X=M+A$ 分别为 X 在 $\mathbb{P}_0$ 及 $\mathbb{P}$ 下的典则分解, 则由定理 15.22. 3), 在 $\mathbb{P}_0$ 及 $\mathbb{P}$ 下, X^{T_n} 分别为$(\mathscr{F}_{t\wedge T_n}^{\mathbb{P}_0})$特殊半鞅及$(\mathscr{F}_{t\wedge T_n}^{\mathbb{P}})$特殊半鞅, 且 $X^{T_n}=N^{T_n}+B^{T_n}$, $X^{T_n}=M^{T_n}+A^{T_n}$ 为相应的典则分解. 由引理 15.24, 在 $\mathbb{P}_0$ 及 $\mathbb{P}$ 下, X^{T_n} 分别为$(\mathscr{G}_t^{\mathbb{P}_0})$特殊半鞅及$(\mathscr{G}_t^{\mathbb{P}})$特殊半鞅. 令 $X^{T_n}=N^{(n)}+B^{(n)}$, $X^{T_n}=M^{(n)}+A^{(n)}$ 分别表示 X^{T_n} 在 $\mathbb{P}_0$ 及 $\mathbb{P}$ 下关于$(\mathscr{G}_t^{\mathbb{P}_0})$及$(\mathscr{G}_t^{\mathbb{P}})$的典则分解, 则由于 $B^{(n)}$ 为$(\mathscr{F}_{t\wedge T_n}^{\mathbb{P}_0})$可料且 $N^{(n)}$为$(\mathscr{F}_{t\wedge T_n}^{\mathbb{P}_0})$局部鞅, 故由典则分解的唯一性知, N^{T_n} 与 $N^{(n)}$ $\mathbb{P}_0$-无区别. 同理, M^{T_n} 与 $M^{(n)}$ $\mathbb{P}$-无区别.

依假定, N 关于$(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}_0})$有可料表示性, 从而由定理 15.23. 1), N^{T_n} 关于$(\mathscr{F}_{t\wedge T_n}^{\mathbb{P}_0})$有可料表示性, 于是 $N^{(n)}$ 关于$(\mathscr{F}_{t\wedge T_n}^{\mathbb{P}_0})$也有可料表示性. 再由引理 15.24. 2), $N^{(n)}$ 关于$(\mathscr{G}_t^{\mathbb{P}_0})$有可料表示性. 因

此，由定理 15.20，$M^{(n)}$ 关于$(\mathscr{G}_t^{\mathbb{P}})$有可料表示性．于是，又一次由引理 15.24.2)，$M^{(n)}$ 关于$(\mathscr{F}_{t\wedge T_n}^{\mathbb{P}})$有可料表示性，即 M^{T_n} 关于$(\mathscr{F}_{t\wedge T_n}^{\mathbb{P}})$ 有可料表示性．最后由于 $T_n \uparrow +\infty$ $\mathbb{P}$-a.s.，故由定理 15.23.2)，M 关于$(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}})$ 有可料表示性．依定义，X 关于$(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}})$ 有可料表示性．定理得证．

15.26 注 设 Ω 为 $\mathbb{R}_+$ 上零初值连续函数 ω 的全体．令 $X_t(\omega)=\omega(t)$，$\mathscr{G}_t^0=\sigma(X_s:s\leqslant t)$，$\mathscr{F}_t^0=\mathscr{G}_{t+}^0(t\in\mathbb{R}_+)$，$\mathscr{F}^0=\sigma(X_s:s\in\mathbb{R}_+)$．设 $\mathbb{P}_0$ 为$(\Omega, \mathscr{F}^0)$ 上的 Wiener 概率测度(即 X 在 $\mathbb{P}_0$ 下为 Brown 运动)，这时定理的结论早已由 Meyer 在[7]中指出(但那里的 $T_n \uparrow +\infty$ $\mathbb{P}'$-a.s. 应改为 $T_n\uparrow +\infty$ $\mathbb{P}$-a.s.)．然而，在这种情形下，我们将在下一节中证明：定理中的条件 ii) 实际上等价于如下更强的条件：$\forall t\in\mathbb{R}_+$，限于 $\mathscr{F}_t^0$ 有 $\mathbb{P}\ll\mathbb{P}_0$．

§9 应用于 Brown 运动情形

首先我们证明两个引理．

15.27 引理 设 X 为一零初值连续 $(\mathscr{F}_t)$ 局部鞅，$\mathbb{Q}$ 为一关于 $\mathbb{P}$ 绝对连续的概率测度．令 $X=M+A$ 为 X 在 $\mathbb{Q}$ 下的典则分解．如果在 $\mathbb{P}$ 下，X 有可料表示性，则存在唯一的零初值 $\mathbb{Q}$-局部鞅 Z，使得 $A=-\langle Z, M\rangle(\mathbb{Q})$．此外，$Z$ 为连续．

证明 令 (μ_t) 为鞅 $\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathscr{F}_t\right]$ 的右连续修正．依假定，μ 可表为一可料过程对 X 的随机积分，故 μ 为连续鞅．令

$$T=\inf\{t:\mu_t=0\},$$

$$T_n=\inf\left\{t:\mu_t\leqslant\frac{1}{n}\right\}\wedge n,$$

则 $T_n\uparrow T$ $\mathbb{P}$-a.s.，且对一切 n，在$[\mu_0>0]$上有 $T_n<T$ $\mathbb{P}$-a.s.．令

$$L_t=\frac{\mu_0}{\mu_t}I_{[\mu_t>0]}=\frac{\mu_0}{\mu_t}I_{[t<T]},$$

则 L 及 LX 为右连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程，且有

$$(\mu L)^{T_n}=\mu_0,\ (\mu LX)^{T_n}=\mu_0 X^{T_n},$$

它们都是 $\mathbb{P}$-局部鞅. 由于 $T_n\uparrow+\infty$ $\mathbb{Q}$-a.s., 故由引理 12.2 知, L 及 LX 都为 $\mathbb{Q}$-局部鞅. 显然,在 $\mathbb{Q}$下, L 为严格正, $L_0=1$, 故 $L\in O^+_{\mathbb{Q}}(X)$. 令 $Z_t=\int_0^t\frac{1}{L_s}dL_s$, 则$(Z_t)$为零初值连续 $\mathbb{Q}$-局部鞅, 且 $A=-\langle Z,M\rangle(\mathbb{Q})$(定理 15.16). 往证 Z 的唯一性. 设 $\bar{Z}$ 为一零初值 $\mathbb{Q}$-局部鞅,使得 $A=-\langle\bar{Z},M\rangle(\mathbb{Q})$, 则 $\mathscr{E}(\bar{Z})\in O_{\mathbb{Q}}(X)$. 由定理 15.20, 在 $\mathbb{Q}$ 下 X 有可料表示性, 故由定理 15.15, 我们有 $\mathscr{E}(Z)=\mathscr{E}(\bar{Z})$, 于是有 $Z=\bar{Z}$(定理 14.15). 唯一性得证.

注 一般说来,如果 μ 不连续, 则只能证明 $\frac{1}{\mu}$ 为 $\mathbb{Q}$-上鞅. 定理的证明表明: 若 μ 在 T 处连续, 则 $\frac{1}{\mu}$ 为 $\mathbb{Q}$-局部鞅.

15.28 引理 给定 $(\Omega,\mathscr{F}^0,(\mathscr{F}^0_t),\mathbb{P}_0,\mathbb{P})$ (见定理 15.25). 设 X 为一连续$(\mathscr{F}^0_t)$适应过程且 $X_0=0$. 假定下列条件满足:

i) 在 $\mathbb{P}_0$ 下, X 为局部鞅, 且有可料表示性. 在 $\mathbb{P}$ 下, X 为一半鞅;

ii) 存在$(\mathscr{F}^0_t)$停时 $T_n\uparrow+\infty$, $\mathbb{P}$-a.s., 使得限于每个 $\mathscr{F}^0_{T_n}$, 有 $\mathbb{P}\ll\mathbb{P}_0$.

令 $X=M+A$ 为特殊半鞅 X 在 $\mathbb{P}$ 下的典则分解, 则有如下结论:

1) 存在唯一的零初值连续 $\mathbb{P}$-局部鞅 Z, 使得

$$A=-\langle Z,M\rangle(\mathbb{P});$$

2) 存在$(\mathscr{F}^0_t)$可料过程(h_t), 使得 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$\int_0^t h_s^2 d\langle M,M\rangle_s(\mathbb{P})<+\infty\ \mathbb{P}\text{-a.s.},$$

且
$$A_t=\int_0^t h_s d\langle M,M\rangle_s(\mathbb{P}),\ \mathbb{P}\text{-a.s.}.$$

证明 1) 对某个固定的 n, 采用定理 15.25 的证明中的记号. 由引理 15.27, 存在唯一的零初值连续 $(\mathscr{G}^{\mathbb{P}}_t)$ 局部鞅 $Z^{(n)}$, 使得

$A^{(n)} = -\langle Z^{(n)}, M^{(n)}\rangle(\mathbb{P})$. 于是由引理 15.19 看出，$Z^{(n)}$为唯一的零初值$(\mathscr{F}_{t\wedge T_n}^{\mathbb{P}})$局部鞅，使得 $A^{T_n} = -\langle Z^{(n)}, M^{T_n}\rangle(\mathbb{P})$. 特别，我们有$(Z^{(n+1)})^{T_n} = Z^{(n)}$. 令

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z^{(n)} I_{]T_{n-1}, T_n]}, \quad (T_0 = 0).$$

则 Z 为唯一的零初值$(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}})$局部鞅，使得 $A = -\langle Z, M\rangle(\mathbb{P})$.

2) 由 1) 及定理 15.17，满足 2) 的要求的 $(\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}})$ 可料过程(h_t)存在. 再由定理 5.35. 3)，过程(h_t)可进一步选取为$(\mathscr{F}_t^0)$可料.

现在我们把上述结果应用于 Brown 运动. 为此，先交代一些记号.

给定$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$，并设$(\mathscr{F}_t)$满足通常条件. 设$(X_t)$为一零初值连续半鞅，使得$\langle X, X\rangle_t = t$. 令 $X_t = W_t + A_t$ 为其典则分解(关于$(\mathscr{F}_t)$)，则由 Brown 运动的鞅刻划(定理 10.9)，(W_t)为 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动. 我们令 $\mathscr{H}_t^0 = \sigma(X_s, s \leqslant t)$，$\mathscr{G}_t^0 = \mathscr{H}_{t+}^0$，$(t \in \mathbb{R}_+)$，$\mathscr{G}^0 = \bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \mathscr{G}_t^0$. 则 X 为$(\mathscr{G}_t^{\mathbb{P}})$半鞅. 令 $X_t = \overline{W}_t + \overline{A}_t$ 为 X 按$(\mathscr{G}_t^{\mathbb{P}})$的典则分解，则 $\overline{W}$ 为$(\mathscr{G}_t^{\mathbb{P}})$ Brown 运动.

设 E 为 $\mathbb{R}_+$ 上零初值连续函数 e 的全体，令 $x_t(e) = e(t)$，$\mathscr{E}_t = \sigma(x_s, s \leqslant t)$，$\mathscr{E} = \bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \mathscr{E}_t = \sigma(x_s, s \in \mathbb{R}_+)$. 我们用 $\mathscr{P}_w$ 表示$(E, \mathscr{E})$上的 Wiener 测度(即使得(x_t)在 $\mathscr{P}_w$ 下为 Brown 运动). 则对一切 $t \in \mathbb{R}_+$，有 $\mathscr{H}_t^0 = X^{-1}(\mathscr{E}_t)$. 我们假定在$(\Omega, \mathscr{G}^0)$上存在概率测度 $\mathbb{P}_0$，使得在 $\mathbb{P}_0$ 下，X 为 Brown 运动. 则对一切 $B \in \mathscr{E}$，有

$$\mathbb{P}_0(X^{-1}(B)) = \mathscr{P}_w(B).$$

我们将研究如下几个断言的关系:

1. 存在$(\mathscr{F}_t)$可料过程(h_t)，使得 $\forall t \in \mathbb{R}_+$，有

$$\int_0^t h_s^2 ds < +\infty \ \mathbb{P}\text{-a.s.},$$

且
$$A_t=\int_0^t h_s ds \ \mathbb{P}-\text{a.s.};$$

2. $\forall t\in\mathbb{R}_+$，限于 $\mathscr{G}_t^0$ 有 $\mathbb{P}\ll\mathbb{P}_0$；

3. 存在 $(\mathscr{G}_t^0)$ 可料过程 $(\bar{h}_t)$，使得 $\forall t\in\mathbb{R}_+$，有
$$\int_0^t \bar{h}_s^2 ds<+\infty \ \mathbb{P}-\text{a.s.},$$
且
$$\overline{A}_t=\int_0^t \bar{h}_s ds \ \mathbb{P}-\text{a.s.};$$

4. $\overline{W}$ 关于 $(\mathscr{G}_t^{\mathbb{P}})$ 有可料表示性；

5. 存在 $(\mathscr{G}_t^0)$ 停时 $T_n\uparrow+\infty \ \mathbb{P}-\text{a.s.}$，使得限于每个 $\mathscr{G}_{T_n}^0$，有 $\mathbb{P}\ll\mathbb{P}_0$.

15.29 定理 我们有

$$\begin{array}{c}①\Rightarrow②\Leftrightarrow③\Rightarrow④\\ \Updownarrow\\ ⑤\end{array}$$

证明 ①⇒②. 设①成立，为证②，只需证明：限于每个 $\mathscr{H}_t^0$，有 $\mathbb{P}\ll\mathbb{P}_0$. 我们用反证法证明这一事实. 假定存在一 $a\in\mathbb{R}_+$，及一 $C\in\mathscr{H}_a^0$，使得 $\mathbb{P}_0(C)=0$，且 $\mathbb{P}(C)>0$. 对每个自然数 N，令
$$C_N=\left\{\omega:\int_0^a h_s^2(\omega)ds\leqslant N\right\}.$$
由于 $\int_0^a h_s^2(\omega)ds<+\infty \ \mathbb{P}\text{-a.s.}$，故取 N 足够大，可使 $\mathbb{P}(C\cap C_N)>0$. 固定 N，令
$$T=\inf\left\{t:\int_0^t h_s^2 ds\geqslant N\right\}\wedge a,$$
$$\tilde{h}=hI_{[\![0,T]\!]},$$
则有 $\int_0^\infty \tilde{h}_s^2 ds=\int_0^T h_s^2 ds\leqslant N$. 故由定理 14.27，$\mathscr{E}(-\tilde{h}.W)$ 为一致可积鞅，且
$$\mathscr{E}(-\tilde{h}.W)_\infty=\mathscr{E}(-\tilde{h}.W)_a>0 \ \mathbb{P}-\text{a.s.}.$$
令 $d\tilde{\mathbb{P}}=\mathscr{E}(-\tilde{h}.W)_\infty d\mathbb{P}$，则 $\tilde{\mathbb{P}}$ 为一与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度，并且由

Girsanov 定理及 Brown 运动的鞅刻划知,

$$\tilde{X}_t = \int_0^t \tilde{h}_s ds + W_t$$

在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下为 Brown 运动. 于是我们有

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}^{-1}(B)) = \mathscr{P}_w(B),\ B \in \mathscr{E}.$$

现令 $B \in \mathscr{E}_0$, 使得 $C = X^{-1}(B)$, 则有

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}^{-1}(B)) = \mathscr{P}_w(B) = \mathbb{P}_0(C) = 0.$$

但是, 在 C_N 上, X 与 $\tilde{X}$ 轨道一致, 故我们有

$$\tilde{X}^{-1}(B) \cap C_N = X^{-1}(B) \cap C_N = C \cap C_N.$$

于是我们有

$$\tilde{\mathbb{P}}(C \cap C_N) = \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}^{-1}(B) \cap C_N) = 0.$$

由于 $\mathbb{P}$ 与 $\tilde{\mathbb{P}}$ 等价, 故有 $\mathbb{P}(C \cap C_N) = 0$. 这与假定 $\mathbb{P}(C \cap C_N) > 0$ 矛盾. ②得证.

②⇔③. ②⇒③由引理 15.28 推得. ③⇒②是①⇒②的特殊情形.

③⇒④. 由定理 15.25, 我们有②⇒④. 又因②⇔③, 故有③⇒④.

②⇔⑤. 由引理 15.28, 我们有⑤⇒③. 但我们有②⇔③, 故有⑤⇒②. 此外②⇒⑤显然(令 $T_n = n$)

定理证毕.

注 ③⇒④是著名的 Fujisaki-Kallianpur-Kunita 定理, Meyer 在[7]中给出这一定理的另一证明. ①⇒②最早由 Kadota, Shepp 在[1]中给出, 这里我们给出的证明来自 Kailath, Zakai[1] (原证明似乎有错误). ②⇔③属于 Kailath[1]. ②⇔⑤是新的.

注　　释[1)]

第 一 章

§1. 本书中的记号基本参照 Dellacherie-Meyer [1].

§2～§3. 除定理 1.5 及 1.6 取自 Dellacherie-Meyer [1] 外，其余基本参考 Blumenthal-Getoor[1].

§4. 主要参考 Dellacherie- Meyer[1].

§5. 关于条件期望的推广，最早见于 Meyer [7]，有关它的性质在 Dellacherie-Meyer [1] 及陈培德[1]中有较细讨论.

§6. 本质上确界概念是经典的，例如见 Neveu [1].

§7～§9. 基本参考 Dellacherie-Meyer [1].

§10. 除引理 1.44 外，其余来自 Dellacherie-Meyer [2].

§11. 定理 1.45 属于 Kunita-Watanabe [1].

§12. 定理 1.47 可能是经典的.

第 二 章

本章内容都是经典的，主要取自 Doob [1], Meyer [1]、[2], Dellacherie-Meyer [2] 及 Neveu [2].

第 三 章

本章主要参考 Meyer [1] 及 Dellacherie-Meyer [2].

第 四 章

§1～§4. 基本取材于 Dellacherie-Meyer [1] 及 Dellacherie [1], 部分结果(如系 4.5.6)、定理 4.10.2)及定理 4.31.5))是新的.

§5～§7. 就内容而言，基本取材于 Dellacherie-Meyer[1]及 Dellacherie; 但在无概率测度形式下叙述这些结果，除了定理 4.41 已在 Dellacherie-Meyer [2]中出现外，则可能还是第一次.

---

1) 本注释中引用的文献，一般只是作者写本书时的依据，而不必是主要结果的最早出处(特别申明者除外).

§8. 定理4.50来自Dellacherie-Meyer [2]. 定理4.51是新的.

§9. 内容来自严加安[3].

第 五 章

本章基本取材于Dellackerie [1] 及Dellacherie-Meyer [1]、[2]. 定理5.45、5.46及5.47的叙述较Dellacherie-Meyer [2] 稍有推广. 这一推广的意义,在定理5.48的证明中显示出来. 定理5.48.1)属于Meyer [1](VI, T16). 定理5.48.2)是Meyer [1] 中关于增过程的一个结果(VII. 9)的推广.

第 六 章

§1. 定理6.1、6.2及6.4是经典结果(见Dellacherie [1])的自然推广,它们由陈培德[2]、Dellacherie-Meyer [2]独立地得到.

§2. 定理6.12充分性部分见于Dellacherie-Meyer [2, VI. 60]. 其余结果是不足道的.

§3~§4. 主要参考陈培德[2]及Dellacherie-Meyer[2], 结果或者是经典的,或者是经典结果的自然推广.

§5~§7. 主要参考Dellacherie-Meyer [2], Meyer [10] 及Dellacherie [1].

第 七 章

本章基本取材于Meyer [10]. 定理7.19属于Yœurp [1].

第 八 章

§1~§2. 主要参考Meyer[10]. 定理8.6及8.16来自Chou [2], 定理8.7来自Lenglart [2], 定理8.17来自Yœurp [1].

§3. 定理8.20由Doléans-Dade [5]及作者独立得到(Meyer在[11, II]中作了改进). 定理8.27首次由Yœurp [1]给出证明. 定理8.28属于Yœurp [1].

§4. 基本取材于Meyer [10]. 定理8.34是新的.

§5. 定理8.42属于Lenglart [2]. 定理8.43及8.45是第十一章定理11.49及11.50的特例, 它们基本来自Lenglart [2]. 系8.44属于Meyer [10].

§6~§7. 基本来自Meyer [10]、[11].

§8. 拟鞅概念最早出自 Fisk [1]. 定理 8.58 属于 Rao [2], 这里的证明来自 Stricker[2]. 定理 8.61 属于 Stricker [2].

§9. 引理 8.62 是新的. 定理 8.63 属于 Stricker [2]. 定理 8.65 属于 Kazamaki [1], 这里的简单证明是新的. 定理 8.67 来自 Stricker [2].

§10. 定理 8.68 及 8.70 属于 Meyer [10].

§11. 定理 8.72 属于 Meyer [10].

第 九 章

§1～§2. 基本参照严加安[2]. 主要结果属于 Meyer [10].

§3. 定理 9.15 及 9.16 是新的. 定理 9.17 属于 Pratelli 及 Yœurp (见 Meyer [10]或 Yor[2]). 定理 9.18 改进了经典结果. 定理 9.19 及 9.20 属于 Yœurp [1].

§4. 取自 Meyer [10].

§5. 定理 9.26 是经典的. 定理 9.27 来自严加安–Yœurp [1].

§6～§7. 定理 9.35 属于 Lenglart [2], 其余结果基本上都属于 Jacod [5](参见 Chou, Meyer, Stricker [1]), 但这里给出的证明来自 Chou, Meyer, Stricker [1] 及严加安[6].

第 十 章

§1～§2. 定理 10.1 及定理 10.3 的证明思路来自 Meyer [10], 在细节上与 Meyer [10]有所区别. 引理 10.2 是经典的.

§3. 定理 10.7 是 Meyer [10] 的一个定理的推广, 其证明完全仿照 Lenglart [3].

§4. Kunita-Watanabe[1]最早用 Ito 公式证明 Lévy 定理(定理 10.9). 定理 10.10 属于 Knight [1].

§5. 定理 10.12 属于 Kunita-Watanabe. 定理 10.13 属于 Meyer [5], 但 Meyer 似乎忽视了关于过程(Q_t)的跳为 +1 的证明.

第 十 一 章

§1～§8. 基本参考 Meyer [10]. 定理 11.16 是新的. 定理 11.24 属于 Meyer [10], 它推广了经典的 Davis 不等式.

§9. 定理 11.46 由 Chou [2] 及 Lépingle [1]独立得到.

§10. 定理 11.51 及 11.53 是新的, 其余结果是 Lenglart [3] 的结果的不足道的推广.

第十二章

§1～§4. 定理12.3属于Jacod-Mémin [1]，这里的证明取自Lenglart [1]. 定理12.4及12.6来自Lenglart [1]. 定理12.9来自Lenglart [4]. 定理12.7及12.8是新的，它们也由Lenglart独立得到. 定理12.9属于Jacod [5]，这里的证明来自严加安[6].

§5. 定理12.10及12.11属于Meyer [10]，这里的简单证明来自Lenglart [4].

§6. 引理12.13属于Stricker [2]. 引理12.14及定理12.15来自Dellacherie[6]. 定理12.16属于Stricker [2]. 定理12.17属于Jacod [5]，这里的证明来自严加安[6].

§7. 定理12.18来自Meyer[12]. 定理12.20及12.21来自Lenglart[4].

§8. 定理12.24属于Dellacherie-Mokobodzki (见Meyer [14]或Jacod [5]). 定理12.22是Dellacherie-Mokobodzki引理的改进形式，它取自严加安[7].

第十三章

空间$\mathscr{S}^p$及半鞅空间$\mathscr{H}^p$由Emery在[1]中引进. 引理13.3～13.6，引理13.17及13.19都属于Emery [1]. 其余结果来自严加安[5]，这些结果是Emery [1]中主要结果的推广.

第十四章

§1. 定理14.1属于Doléans-Dade [4]. 定理14.4是新的. 定理14.5属于Yor [2]. 定理14.6及14.7属于Yœurp [1].

§2. 所有结果属于Yœurp-Yor [1].

§3. 定理14.13属于Lépingle-Mémin [1]. 定理14.14属于Mémin [1]. 定理14.15及14.16是新的. 定理14.17属于Yœurp-Yor [1].

§4. 引理14.20属于Mémin [1]. 定理14.23属于Jacod [4]. 这里给出的简单证明是受Mémin [1]的启发得到的.

§5. 定理14.35属于Kazamaki [5]. 引理14.25及引理14.26属于Lépingle-Mémin [2]. 其余结果是对Lépingle-Mémin [2]中结果的改进，它们来自严加安[8].

第十五章

§1. 定理15.1来自严加安-Yœurp [1].

§2. 引理 15.3 及定理 15.4 属于 Yor [1] (参见 Jacod-Yor [1]). 定理 15.6 属于 Yor [1].

§3. 定理 15.7 是经典的,这里的证明来自 Липцер-Ширяев [1]. 定理 15.8 也是经典的,这里的证明来自严加安-Yœurp [1].

§4. 引理 15.10 来自 Meyer [9]. 定理 15.11 是经典的.

§5～§9. 除定理 15.20 属于 Yœurp-Yor 外,其余内容来自严加安[3].

文　献

Azéma, J.

[1] Théorie générale des processus et retournement du temps. Ann. E. N. S., 6, 1973, p. 459～519.

[2] Représentation multiplicative d'une surmartingale bornée. Z. f. W-theorie, 45, 191～211, 1978.

Azéma, J., Jeulin, T.

[1] Précisions sur la mesure de Föllmer. Ann. Inst. H. Poincaré 12, 1976, p. 257～283.

Barlow, M.

[1] Study of a filtration expanded to include an honest time. Z. f. W-theorie, 44, 1978.

Bismut, J. M.

[1] Contrôle des systèmes linéaires quadratiques: applications de l'intégrale stochastique. Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978.

Blumenthal, R. M., Getoor, R. K.

[1] *Markov processes and potential theory*. Academic Press, New York 1968.

Brémaud, P.

[1] A martingale approach to point processes, Ph. D. Thesis, Univ. of Cal., Dep. EECS, Berkeley, Cal., Aug., 1972.

[2] An extension of Watanabe's theorem of characterization of Poisson processes over the positive real half line. J. Appl. Prob. 12, 396～399, 1975.

Brémaud, P., Jacod, J.

[1] Processus ponctuels et martingales: résultats récents sur la modélisation et le filtrage. Adv. Appl. Prob. 9, 1977.

Brémaud, P., Yor, M.

[1] Changes of Filtrations and of Probability Measures. Z. f. W-theorie, 45. 4, 1978.

Burkholder, D., Davis, B., Gundy, R.

[1] Integral inequalities for convex functions of oprators on martingales. Proc. 6th Berkeley Symp. 2, 1972.

陈培德

[1] σ-可积性及其应用. 数学学报, Vol. 23, n°3, 1980.

[2] 过程的投影理论注记. 数学学报, Vol. 23, n°2, 1980.

Chou, C. S.

[1] Les méthod de Garsia en théorie des martingales. Extension au cas continu. Sém. Probab. IX, Lect. Notes in Math. 465, 1975.

[2] Le processus des sauts d'une martingale locale. Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581, 1977.

Chou, C. S., Meyer, P. A.

[1] Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels. Sém. Probab. IX, Lect. Notes in Math. 465, 1975.

Chou, C. S., Meyer, P. A., Stricker, C.

[1] Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés. Sém. Prob. XIV. Lect. Notes in Math., 784, 1980.

Chung, K. L.

[1] *A course in probability theory.* New-York, 1968.

Clark, J. M. C.

[1] Conditions for the one-to-one correspondence between an observation process and its innovation. Center for computing and automation, Imperial College, London. Tech. Rep. 1, 1969.

[2] The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. Ann. Math. Stat., 41. 4, 1970.

Cornea, A., Licea, G.

[1] Une démonstration unifiée des théorèmes de section de P. A. Meyer. Z. f. W-theorie, 10, 1968, p. 198~202.

Davis, B.

[1] On the integrability of the martingale square function. Israel J. M. 8, 1970, p. 187~190.

Davis, M. H. A.

[1] The representation of martingales of jump processes. SIAM J. Control and Optimization 14. 4, July, 1976.

Dellacherie, C.

[1] *Capacités et processus stochastiques.* Springer, Berlin, 1972.

[2] Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie générale des processus. Sém. Probab. VII, Lect. Notes in Math. 321, 1973.

[3] Intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener et de Poisson. Sém. Probab. VIII, Lect. Notes in Math. 381, 1974.

[4] Correction à "intégrales stochastiques par rapport ..." Sém. Probab. IX, Lect. Notes in Math. 465, 1975.

[5] Sur la régularisation des martingales. Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581, 1977.

[6] Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978.

Dellacherie, C., Meyer, P. A.

[1] *Probabilités et Potentiels*, 2e édition, chapitres I–IV. Hermann, Paris, 1975.

[2] *Probabilités et Potentiels*, 2e édition, chapitres V–VIII. Hermann, 1980.

[3] Un nouveau théorème de section et de projection. Sém. Probab. IX, Lect. Notes in Math. 465, 1975.

[4] A propos du travail de Yor sur les grossissements des tribus. Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978.

Dellacherie, C., Meyer, P. A., Yor, M.

[1] Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO. (Ibid.)

Dellacherie, C., Stricker, C.

[1] Changements de temps et intégrales stochastiques. Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581, 1977.

Doléans-Dade, C.

[1] Intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 16, 1967, p. 23～34.

[2] Processus croissants naturels et processus croissants très-bien mesurables. C. R. A. S. 264, 1967.

[3] Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de la classe (D). Z. f. W-theorie, 9, 1969.

[4] Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semi-martingales. Z. f. W-theorie, 16, 3. 1970.

[5] Existence and unicity of solutions of stochastic differential equations. Z. f. W-theorie, 36, 1976

Doléans-Dade, C., Meyer, P. A.

[1] Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Sém. Probab. IV. Lect. Notes in Math. 124, 1970.

[2] Equations différentielles stochastiques. Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581, 1977.

[3] Une caractérisation de BMO. (ibid.)

Doob, J. L.

[1] *Stochastic Processes.* Wiley, New-York, 1953.

Doss, H.

[1] Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. Annales de l'Institut Henri Poincaré. Section B. XIII, n° 2, 1977.

Doss, H., Lenglart, E.

[1] Sur l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions d' équations différentielles stochastiques. Annales de l'Institut Henri Poincaré. Section B. XIV, n° 2, 1978.

El Karoui, N., Meyer, P. A.

[1] Les changements de temps en théorie générale des processus. Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581, 1977.

El Karoui, N., Weidenfeld, G.

[1] Théorie générale et changement de temps. (ibid.)

Elliott, R. J.

[1] Stochastic integrals for martingales of a jump process with partially accessible jump times. Z. f. W-theorie, 36, 3, 1976.

Emery, E

[1] Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques, application aux intégrales multiplicatives stochastiques. Z. f. W-theorie. 41, 3, 1978.

[2] Une topologie sur l'espace des semimartingales. Sém. Prob. XIII, Lect. Notes in Math. 721, 1979.

[3] Equations différentielles stochastiques lipschitziennes: étude de la stabilité. (ibid)

Fisk, D. L.

[1] Guasi-martingales. Trans. Amer. Math. Soc. 120, 1965.

Föllmer, H.

[1] The exit measure of a supermartingale, Z. f. W-theorie. 21, 1972.

[2] On the representation of semi-martingales, The Anales of Probab. Vol 1, n°4, 1973.

Fujisaki, M., Kallianpur, G., Kunita, H.

[1] Stochastic differential equations for the non-linear filtering problem. Osaka J. Math. 9. 1, 1972.

Garsia, A.

[1] *Martingale Inequalities*. Seminar Notes on Recent Progress. Benjamin 1973.

[2] On a convex function inequality for martingales. Ann. of Probab. 1, 1973, p. 171～174.

Gertner, I.

[1] An alternative approach to nonlinear filtering. Stochastic processes and their applications. Vol. 7, n° 3, 1978.

Гихман, И. И. , Скороход, А. В.

[1] Теория случайных процессов. том III, «Наука», Москва, 1975.

Girsanov, I. V.

[1] On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. Theory of Prob. and Applic. 5. 3, 1960.

关肇直

[1] 泛函分析讲义. 高等教育出版社, 北京, 1958.

Herz, C. S.

[1] Bounded mean oscillation and regulated martingales. Trans. Amer. Math. Soc. 193, 1974. p. 199～215.

Hoffmann-Jørgencen, J.

[1] *The theory of analytic sets.* Aarhus Univ. various publication series, n° 10, 1970.

Ito, K.

[1] Stochastic Integral. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20. 8, 1944.

[2] On a formule concerning stochastic differentials. Nagoya Math. J. Vol 3, 1951.

Ito, K., Watanabe, S.

[1] Transformation of Markov processes by multiplicative functionals. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15. 1, 1965.

Jacod, J.

[1] Multivariate point process: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. f. W-theorie, 31, 1975.

[2] Un théorème de représentation pour les martingales discontinues. Z. f. W-heorie, 34, 1976.

[3] Sur la construction des intégrales stochastiques et les sous-espaces stables de martingales.Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581, 1977.

[4] Projection prévisible et décomposition multiplicative d'une semi-martingale positive. Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978.

[5] *Calcul stochastique et problèmes de martingales,* Lect. Notes in Math. 714, Springer-Verlag, 1979.

Jacod, J., Mémin, J.

[1] Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. Z. f. W-theorie, 35, 1976.

Jacod, J., Yor, M.

[1] Etude des solutions extrémales et représentation integrale des solutions pour certains problèmes de martingales. Z. f. W-theorie, 38, 1977.

Jeulin, T., Yor, M.

[1] Grossissement d'une filtration et semi-martingales: Formules exp-

licites. Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978.

[2] Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, t. 11, 1978.

Kadota, T. T., Shepp, L. A.

[1] Conditions for the absolute continuity between a certain pair of probability measures, Z. f. W-theorie, 16, 3. 1970 p. 250~260.

Kailath, T.

[1] The structure of Radon-Nikodym derivations with respect to Wiener and related measures. Ann. Math. Statist. 42. 3, 1971. p. 1054~1067.

Kailath, T., Zakai, M.

[1] Absolute continuity and Radon-Nikodym derivatives for certain measures relative to Wiener measure. Ann. Math. Statist. 42, 1. 1971, p. 130~140.

Kazamaki, N.

[1] Krickeberg's decomposition for local martingales. Sém. Probab. VI, Lect. Notes in Math. 258, 1972.

[2] Notes on a stochastic integral equation. (ibid.)

[3] On a problem of Girsanov. Tôhoku Math. J. 29, 4, 1977.

[4] A sufficient condition for the uniform integrability of exponential martingales. Math. Rep. Toyama Univ. 2, 1978.

[5] Transformation of H^p-Martingales by a change of Law, Z. f. W-theorie, 46, 343~349, 1979.

Knight, F. B.

[1] A Reduction of Continuous Square-Integrable Martingales to Brownian Motion, Lect. Notes in Math., 190, 19~31, 1971.

Kunita, H., Watanabe, S.

[1] On square integrable martingales. Nagoya Math. J. 30, 1967.

Kussmaul, A. V.

[1] *Stochastic integration and generalized martingales.* Pitman: Londres, 1977.

Le Jan, Y.

[1] Temps d'arrêt stricts et martingales de sauts. Z. W. 44, 1978.

[2] Martingales et changements de temps. Sém. Probab. XIII, Lect. Notes in Math., 121, 1979.

Langlart, E.

[1] Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilité. Z. f. W-theorie, 39, 1, 1977.

[2] Sur la convergence presque sur des martingales locales. C. R. A. S, Paris, t. 284, Série A-1085, 1977.

[3] Relation de domination entre deux processus. Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B, Vol XIII, n° 2, 1977.

[4] Sur la localisation des intégrales stochasliques, Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978.

Lépinglo, D.

[1] Sur la représentation des sauts des martingales. Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581, 1977.

[2] Sur le comportement asymptotique des martingales locales. Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978

Lépinglc, D., Mémin, J.

[1] Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles, Z. f. W-theorie, 42, 3. 1978.

[2] Intégrabilité uniforme et dans L^r des martingales exponentielles. (A paraître)

Lévy, P.

[1] *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Guthier-Villars, Paris, 1948.

Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н.

[1] *Статистика случайных процессов.* «Наука», Москва, 1974.

Loève, M.

[1] *Probability Theory.* 3d edition, New York, London, 1963.

Maisonneuve, B.

[1] Une mise au point sur les martingales locales continues définies sur un intervalle stochastique. Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581, 1977.

Mckean, H. P.

[1] *Stochastic Integrals.* Academic Press, 1969.

Mémin, J.

[1] Décompositions multiplicatives de semi-martingales exponentielles et applications. Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978.

Mertens, J. F.

[1] Théorie des processus stochastiques généraux, applications au surmartingales. Z. f. W-theorie, 22, 1972.

Métivier, M., Pellaumail, J.

[1] On a stopped Doob's inequality and general stochastic equations. Rapport interne n° 28, Ecole Polytechnique, 1978.

Meyer, P. A.

[1] *Probabilités et potentiels,* Hermann, Paris. 1966.

[2] *Martingales and stochastic integrals* I. Lect. Notes in Math. 284,

Springer, 1972.

[3] Une présentation de la théorie des ensembles sousliniens. Applications aux processus stochastiques. Séminaire Brelot-Choquet-Deny (théorie du potentiel), 7me année, 1962～1963, 17 pages.

[4] On the multiplicative decomposition of positive supermartingales, in Markov processes and Potential theory, ed. by J. Choover. New York, 1967.

[5] Démonstration simplifiée d'un théorème de Knight, Sém. Probab. V, Lect. Notes in Math. 191, 1971.

[6] La mesure de H. Föllmer en théorie des submartingales. Sém. Probab. VI, Lect. Notes in Math. 258, 1972.

[7] Sur un problème de filtration. Sém. Probab. VII, Lect. Notes in Math. 321, 1973.

[8] Le dual de $\mathscr{H}^1$ est $\mathscr{BMO}$ (cas continu). (ibid.)

[9] Generation of σ-fields by step processes. Sém. Probab. X, Lect. Notes in Math. 511, 1976.

[10] Un cours sur les intégrales stochastiques. (ibid.)

[11] Notes sur les intégrales stochastiques, I–VI. Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581, 1977.

[12] Sur un théorème de C. Stricker. (ibid.)

[13] Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978.

[14] Caractérisation des semimartingales, d' après Dellacherie. Sém. Prob. XIII, Lect. Notes in Math. 721, 1979.

Neveu, J.

[1] *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* Masson, Paris, 1964.

[2] *Martingales à temps discret.* Masson, Paris, 1972.

[3] Processus ponctuels. chap. III, Ecole d'été de Saint Flour, Lect. Notes in Math. 598, 1977.

Новиков, А. А.

[1] Об одном тождества для стохастических интегралов. Теория вероятн. и её примен. XVII, 4, 1972.

Orey, S.

[1] F-processes. Proc. Fifth Berkely Symp. Math. Statist. Probab. 2 (1965～1966).

Pratelli, M.

[1] Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable. Sém. Probab. X, Lect. Notes in Math. 511, 1976.

[2] Espace fortement stables de martingales de carré intégrable. (ibid.)

Protter, P. E.

[1] On the Existence, Uniqueness, Convergence, and Explositions of Solutions of Systems of Stochastic Integral Equations. Ann. Prob. 5, 1977.

[2] Markov Solutions of Stochastic Differential Equations. Z. f. W-theorie, 41, 1, 1977.

[3] $\mathscr{H}^p$ Stability of Solutions of Stochastic Differential Equations. Z. f. W-theorie, 44, 337～352, 1978.

Rao, K. M.

[1] On decomposition theorems of Meyer, Math. Scand. 24 (1969), 66～78.

[2] Quasi-martingales, Math. Scand. 24 (1969), 79～92.

Stricker, C.

[1] Mesure de Föllmer en théorie des quasi-martingales, Sém. Probab. IX, Lect. Notes in Math. 465, 1975.

[2] Semi-martingales, quasi-martingales, martingales locales et filtrations naturelles. Z. f. W-theorie, 39, 1977.

[3] Les ralentissements en théorie générale des processus. Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978.

[4] Sur la p-variation des semimartingales. Sém. Prob. XIII. Lect. Notes in Math. 721, 1979.

Stricker, C., Yor, M.

[1] Calcul stochastique dépendant d'un paramètre Z. f. W-theorie, 45, 109～133, 1978.

Stroock, D. W.

[1] Applications of Fefferman-Stein type interpolation to probability theory and analysis. Comm. Pure Appld. M. 26, 1973.

Szpirglas, J., Mazziotto, G.

[1] General Model of non-linear Filtering and Associated stochastic Differential Equations. C. R. A. S., Tome 286. Séries A, n° 22, 1978.

Van Shuppen, J. H., Wong, E.

[1] Translation of local martingales under a change of law. Ann. Probab. 2, 1974.

王梓坤

[1] 随机过程论，科学出版社，北京，1965.

严加安

[1] Forme mesurable de la théorie des ensembles sousliniens, applications à la théorie de la mesure. Scientia Sinica, Vol. XVIII, 444～463, 1975.

[2] 可测过程对局部鞅的随机积分，数学学报，Vol. 21, n° 1, 1978.

[3] 特殊半鞅的可料表示性，《中国科学》，Vol. 23, n° 4, 1980.

[4] 指数鞅一致可积性准则.《数学学报》, Vol. 23, n°2, 1980.

[5] Sur une équation différentielle stochastique générale, Sém. Prob. XIV, Lect. Notes in Math. 784, 1980.

[6] Remarques sur l'intégrale stochastique de processus non bornés. (ibid.)

[7] Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou $\mathscr{H}^1$. (ibid.)

[8] 指数鞅的一致及 L^r 可积性，待发表，《数学年刊》.

Yen, K. A. (严加安), Yœurp, Ch.

[1] Représentation des martingales comme intégrales stochastiques des processus optionnels. Sém. Prob. X, Lect. Notes in Math. 511, 1976.

Yœurp. Ch.

[1] Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. ibid.

[2] Compléments sur les temps locaux et les quasi-martingales. Soc. Math. de France. Astérisque 52～53, 1978.

[3] Sauts additifs et sauts multiplicatifs des semimartingales. Sém. Prob. XIII, Lect. Notes in Math. 721, 1979.

Yœurp, Ch., Meyer, P. A.

[1] Sur la décomposition multiplicative de sousmartingales positives. Sém. Prob. X, Lect. Notes in Math. 511, 1976.

Yœurp, Ch., Yor, M.

[1] Espace orthogonal à une semi-martingale, applications. (A paraître au Z. f. W-theorie.)

Yor, M.

[1] Représentation intégrale des martingales, étude des distributions extrémales. Article de Thèse de Doctorat, Paris 1976.

[2] Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. Sém. Probab. X, Lect. Notes in Math. 511, 1976.

[3] Remarques sur la représentation des martingales comme intégrables stochastiques. Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581, 1977.

[4] Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques. (ibid.)

[5] Sous-espaces denses dans L^1 et $\mathscr{H}^1$ et représentation des martingales. Sém. Probab. XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978.

[6] Grossissement d'une filtration et semi-martingales: théorème généraux. (ibid.)

[7] Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales. Soc. Math. de France, Astérisque 52～53, 1978.

[8] Convergence de martingales dans L^1 et dans $\mathscr{H}^1$. C. R. A. S. t. 286,

Série A, 1978.

[9] Inégalités entre processus minces et applications. (ibid.)

[10] Remarques sur les normes $\mathscr{H}^p$ de (semi-) martingales. C. R. A. S., t. 287, Série A, 1978.

[11] Les inégalités de sous-martingales, comme conséquences de la relation de domination. (A paraître).

[12] En cherchant une définition naturelle des intégrales. stochastiques optionnelles Sém. Prob. XIII, Lect. Notes in Math. 721, 1979.

索　　引

四　画

五 画

六 画

七 画

八 画

九 画、十 画

十 一 画

十二画以上

其　　它

基本术语法英汉对照表

accessible (accessible), 可及的

adapté (adapted), 适应的

annonçable (announcible), 可预报的

capacité (capacity), 容度

changement de temps (change of time), 时间变换,时变

classe monotone (monotone class), 单调类

compensateur (compensator), 补偿元

conditions habituelles (usual conditions), 通常条件

début (début), 初遇

décomposition canonique (canonical decomposition), 典则分解

ensemble analytique (analytic set), 解析集

ensemble evanescent (evanescent set), 不足道集

ensemble pavé (paved set), 铺集

evanescent (evanescent), 不足道的

famille croissante de tribus, = filtration (increasing family of σ-field, = filtration), σ-域增族

filtration (filtration), σ-域增族

fonction convexe conjuguée (conjugate convex function), 共轭凸函数

fonction convexe à croissace modérée (convex function of moderate increment), 缓增凸函数

formule exponentielle (exponential formula), 指数公式

indistinguable (indistinguishable), 无区别

inégalité maximale pour les surmartingales (maximal inequality for supermartingales), 上鞅极大不等式

inégalité de montées pour les surmartingales (upcrossing inequality for supermartingales), 上鞅上穿不等式

intégrale stochastique (stochastic integral), 随机积分

intervalle stochastique(stochastic interval), 随机区间

martingale(martingale), 鞅

~uniformément intégrable (uniformly integrable~), 一致可积鞅
~fermée à droite(right closed~), 右闭鞅
~à variation intégrable (~of integrable variation), 可积变差鞅
~de carré intégrable(square integrable~), 平方可积鞅
~de carré intégrable purement discontinue (purely discontinuous square integrable~), 纯断平方可积鞅
~locale (local~), 局部鞅
~locale à variation finie(local~ of finite variation), 有限变差局部鞅
optionnel (optional), 可选的
pavage (pavage), 铺
potentiel (potential), 位势
prélocalement (prelocally) 准局部(地)
prévisible (predictable), 可料的
progressif (progressive), 循序的
projection (projection), 投影
projection duale (dual projection), 对偶投影
processus (process), 过程
~adapté (adapted~), 适应过程
~mesurable (measurable~), 可测过程
~progressif (progressive~), 循序过程
~càdlàg.[1] (cadlag. ~) 右连左极过程
~optionnel (optional ~), 可选过程
~prévisible (predictable ~), 可料过程
~accessible (accessible ~), 可及过程
~à variation finie (~ of finite variation), 有限变差过程
~evanescent (evanescent ~), 不足道过程
~localement borné (locally bounded ~), 局部有界过程
~de classe (D) (class (D) ~), 类(D)过程
quasi-continu à gauche (quasi-left continuous), 拟左连续
quasi-martingale (quasi-martingale), 拟鞅
semi-martingale (semi-martingale), 半鞅
sous-espace stable (stable sub-space) 稳定子空间
sousmartingale (submartingale), 下鞅
suite stationaire (stationary sequence), 平定序列

1) càdlàg. 系 "continu à droite et limité à gauche" 的缩写.

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理

théorème de section (section theorem), 截口定理

temps d'arrêt (stopping time), 停时

~large (large ~), 宽停时

~annonçable (announcible ~), 可预报停时

~prévisible (predictable ~), 可料时

~accessible (accessible ~), 可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时

temps de saut (jump time), 跳跃时

temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理

théorème de section (section theorem), 截口定理

temps d'arrêt (stopping time), 停时

~large (large ~), 宽停时

~annonçable (announcible ~), 可预报停时

~prévisible (predictable ~), 可料时

~accessible (accessible ~), 可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时

temps de saut (jump time), 跳跃时

temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible (totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理
théorème de section (section theorem), 截口定理
temps d'arrêt (stopping time), 停时
~large (large ~), 宽停时
~annonçable (announcible ~), 可预报停时
~prévisible (predictable ~), 可料时
~accessible (accessible ~), 可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时
temps de saut (jump time), 跳跃时
temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理
théorème de section (section theorem), 截口定理
temps d'arrêt (stopping time), 停时
~large (large ~), 宽停时
~annonçable (announcible ~), 可预报停时
~prévisible (predictable ~), 可料时
~accessible (accessible ~), 可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时
temps de saut (jump time), 跳跃时
temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible (totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理

théorème de section (section theorem), 截口定理

temps d'arrêt (stopping time), 停时

~large (large ~), 宽停时

~annonçable (announcible ~), 可预报停时

~prévisible (predictable ~), 可料时

~accessible (accessible ~), 可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时

temps de saut (jump time), 跳跃时

temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible (totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理
théorème de section (section theorem), 截口定理
temps d'arrêt (stopping time), 停时
~large (large ~), 宽停时
~annonçable (announcible ~), 可预报停时
~prévisible (predictable ~), 可料时
~accessible (accessible ~), 可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时
temps de saut (jump time), 跳跃时
temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理

théorème de section (section theorem), 截口定理

temps d'arrêt (stopping time), 停时

~large (large ~), 宽停时

~annonçable (announcible ~), 可预报停时

~prévisible (predictable ~), 可料时

~accessible (accessible ~), 可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时

temps de saut (jump time), 跳跃时

temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理

théorème de section (section theorem), 截口定理

temps d'arrêt (stopping time), 停时

~large (large ~), 宽停时

~annonçable (announcible ~), 可预报停时

~prévisible (predictable ~), 可料时

~accessible (accessible ~), 可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时

temps de saut (jump time), 跳跃时

temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理
théorème de section (section theorem), 截口定理
temps d'arrêt (stopping time), 停时
~large (large ~), 宽停时
~annonçable (announcible ~), 可预报停时
~prévisible (predictable ~), 可料时
~accessible (accessible ~), 可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时
temps de saut (jump time), 跳跃时
temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理

théorème de section (section theorem), 截口定理

temps d'arrêt (stopping time), 停时

~large (large ~), 宽停时

~annonçable (announcible ~), 可预报停时

~prévisible (predictable ~), 可料时

~accessible (accessible ~), 可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时

temps de saut (jump time), 跳跃时

temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理
théorème de section (section theorem), 截口定理
temps d'arrêt (stopping time), 停时
~large (large ~), 宽停时
~annonçable (announcible ~), 可预报停时
~prévisible (predictable ~), 可料时
~accessible (accessible ~), 可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时
temps de saut (jump time), 跳跃时
temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible (totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale), 上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem), Doob 停止定理

théorème de section (section theorem), 截口定理

temps d'arrêt (stopping time), 停时

~large (large ~), 宽停时

~annonçable (announcible ~), 可预报停时

~prévisible (predictable ~), 可料时

~accessible (accessible ~), 可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~), 绝不可及时

temps de saut (jump time), 跳跃时

temps optionnel (optional time), 可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅
théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理
théorème de section (section theorem)，截口定理
temps d'arrêt (stopping time)，停时
~large (large ~)，宽停时
~annonçable (announcible ~)，可预报停时
~prévisible (predictable ~)，可料时
~accessible (accessible ~)，可及时
~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时
temps de saut (jump time)，跳跃时
temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时

surmartingale (supermartingale)，上鞅

théorème d'arrêt de Doob (Doob's stopping theorem)，Doob 停止定理

théorème de section (section theorem)，截口定理

temps d'arrêt (stopping time)，停时

~large (large ~)，宽停时

~annonçable (announcible ~)，可预报停时

~prévisible (predictable ~)，可料时

~accessible (accessible ~)，可及时

~totalement inaccessible(totally inaccessible ~)，绝不可及时

temps de saut (jump time)，跳跃时

temps optionnel (optional time)，可选时